NP完全问题

2025年4月15日 星期二 10:08

NP-hard 证明

定义

2020.

给出3SAT问题和Independent Set问题的判定形式，并证明：Independent Set问题是NP-hard问题

判定形式：

3SAT：输入：一个布尔式φ，由若干子句构成，每个子句恰好包含3个文字

判定问题：是否存在一组变量赋值，使得φ为真？

Independent SAT：

输入：一个无向图 $G=(V,E)$ 和一个整数k

判定问题：是否存在一个独立集 $S \subseteq V$，其中 $|S| \geq k$，且S中任意两个顶点间没有边相连

证明：

① 证明 Independent Set ∈NP

对于任意给定的图 $G=(V,E)$，都可在多项式时间内判定能否找到顶点各不相连的子图

② 3SAT 是NP-hard问题

③ 证明 3SAT $\leq_p$ Independent Set

给定无向图 $G=(V,E)$，定义G的补图 $\bar{G}=(V,\bar{E})$

证 G有3SAT ⟺ $\bar{G}$ 有 Independent Set

⟹：若φ可满足，则 $\bar{G}$ 有大小为k的独立集

φ可满足 ⟹ G中有k个顶点两两之间都有连线

则 $\bar{G}$ 中这k个顶点两两之间无边

⟸：若 $\bar{G}$ 有大小为k的独立集，则φ可满足

$\bar{G}$ 中有k个顶点之间无连接 ⟹ G中k个顶点全连接 ⟹ φ可满足

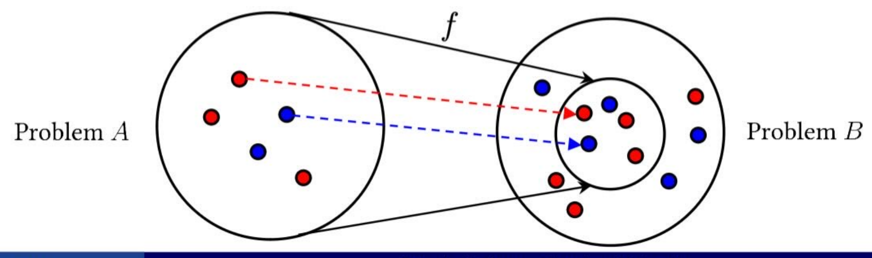
∴ 3SAT 可归约到 Independent Set

2022.

2.（10分）给出多项式归约和传递性的定义，解释 $N=NP$ 问题的意义。

Reduction: **Uncovering the connection between two problems** MIMA

- Polynomial-time reduction: a procedure f to transform any instance α of problem A to some instance $\beta = f(\alpha)$ of problem B with the following characteristics:
  1. Transformation: The transformation takes polynomial time;
  2. Equivalence: The answers are the same, i.e. the answer for α is YES iff the answer to $\beta = f(\alpha)$ is also YES.
- Denoted as $A \leq_P B$, read as "A is reducible to B".



MIMA @ SDU School of Software, Shandong University 39

一个能将问题A的任何实例α转换成问题B中实例 $\beta=f(\alpha)$ 的过程f

满足：

1. 转化需多项式时间

2、答案一致，即α的答案为"Yes" ⟺ β：$f(\alpha)$ 答案为"Yes"

定义：

问题 A 可以**多项式时间归约（polynomial-time reducible）到问题** B **（记作** $A \leq_P B$**），如果存在一个多项式时间可计算的函数** f，使得对于 A 的任意实例 x：

$$x \in A \iff f(x) \in B$$

即，A 的"是"实例能映射到 B 的"是"实例，"否"实例能映射到 B 的"否"实例，且映射过程能在多项式时间内完成。

意义：

1. 如果 $A \leq_P B$，且 B 能在多项式时间内解决，那么 A 也能在多项式时间内解决（因为可以先归约再求解）。
2. 如果 A 是 NP-hard 的，而 $A \leq_P B$，那么 B 也是 NP-hard 的（归约保持计算难度）。

2. 归约的传递性（Transitivity of Reductions）

定义：

如果 $A \leq_P B$ 且 $B \leq_P C$，那么 $A \leq_P C$。

意义：

1. 归约的传递性允许我们通过已知的 NP-hard 问题（如 3SAT）推导新问题的 NP-hard 性（例如 Independent Set）。

3. P = NP 问题的意义

定义：

1. **P 类问题**：所有可以在**多项式时间**内被**确定性图灵机**（即普通计算机）解决的问题。
2. **NP 类问题**：所有可以在**多项式时间**内被**非确定性图灵机**（即"猜解+验证"）解决的问题，或等价地，所有解能在多项式时间内被验证的问题。

P = NP 问题的核心：

1. 如果 **P = NP**，意味着所有能快速验证解的问题（如密码破解、优化问题）也能快速求解（存在多项式时间算法）。
2. 如果 **P ≠ NP**，则存在一些问题，验证解容易但求解困难（当前大多数计算机科学家认为 P ≠ NP）。

P = NP？

那么问题来了，规约过后的 NP 问题能否在多项式的复杂度内解决呢？换句话说，**P 问题和 NP 问题是否等价。如果 P = NP 就意味着任何能够在多项式的复杂度验证的问题也能够在多项式的复杂度解决它，**反之则不成立。下图表示了 P, NP, NP-complete 和 NP-hard 之间的关系。

2023.

（2）顶点覆盖问题规约到团问题。

2024.

三、（15分）证明子图同构问题是NPC问题，通过设计与团问题规约（子图同构问题是图G（V，E）和H（V1，E1）中，图G中存在子图与图H形成同构）

子图同构问题

- 问题实例
  图$G=(V_1,E_1)$，$H=(V_2,E_2)$。
  问G中是否有同构于H的子图，即是否有子集$V \subseteq V_1$，$E \subseteq E_1$，使得 $|V|=|V_2|$，$|E|=|E_2|$，且存在双射函数$f: V_2 \to V$，使得 $(u,v) \in E \iff (f(u),f(v)) \in E_2$ 。
- 证明方法：限制H为完全图，且 $|V_2|=k$，则该问题是团的问题。

注：分辨题目中问的是"证规约"还是"证NPC"

若证规约，只证充分必要性即可

若证NPC，需先解释为NP

规约证明标准步骤（以 VC $\leq_p$ Clique 为例）

要证 VC $\leq_p$ Clique，即：

给定一个VC实例 (G,k)，构造一个Clique实例 (G',k')，$(G'=\bar{G})$

使得 G有大小为k的顶点覆盖 ⟺ G'有大小为k'的团

① 若S是G的顶点覆盖 ⟹ V-S 是G'的团

∵ S覆盖G的所有边

∴ V-S中任意两点在G中无边相连

∴ V-S中任意两点在 $G'=\bar{G}$ 中都有边连接

即 V-S 是G'的团

② 若C是G'的团 ⟹ V-C 是G的顶点覆盖

∵ C是G'的团，∴ C中任意两点在G中无边连接

∴ G的所有边至少有一个端点不在C中

∴ V-C 是顶点覆盖