最大流

2025年4月15日 星期二 18:12

定理证明

算法思想、过程、伪代码（课本）

2019.

证明：(2) 最大流最小割定理

定理 26.6（最大流最小切割定理） 设 f 为流网络 $G=(V, E)$ 中的一个流，该流网络的源结点为 s，汇点为 t，则下面的条件是等价的：

1. f 是 G 的一个最大流。
2. 残存网络 G_f 不包括任何增广路径。
3. $|f|=c(S, T)$，其中 (S, T) 是流网络 G 的某个切割。

强对偶定理

$1\to2\to3\to1$

$1\to2$：反证

若 f 是 G 的最大流，但 G_f 中含增广路径

则可对 f 增加 f_p

与 f 是最大流矛盾

$2\to3$：若 G_f 不包含任何增广路径

即 G_f 中不存在从 s 到 t 的路径

定义 $S=\{v\in V$: 在 G_f 中存在一条从 s 到 v 的路径$\}$

$T=V-S$

$\therefore s\in S \quad t\notin S$

$\therefore$ 划分 (S,T) 为流网络中的切割

令 $u\in S,\ v\in T$

若 $(u,v)\in E$ 则必有 $f(u,v)=c(u,v)$

否则 (u,v) 将 $\in E_f$，导致 $v\in S$

若 $(v,u)\in E$，则必有 $f(v,u)=0$

否则 $c_f(u,v)=f(v,u)$ 为正，$(u,v)\in E_f$，导致 $v\in S$

若 (u,v) 和 $(v,u)\notin E$，则 $f(u,v)=f(v,u)=0$

$\therefore f(S,T)=\sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v)-\sum_{v\in T}\sum_{u\in S} f(v,u)=\sum_{u\in S}\sum_{v\in T} c(u,v)-0=c(S,T)$

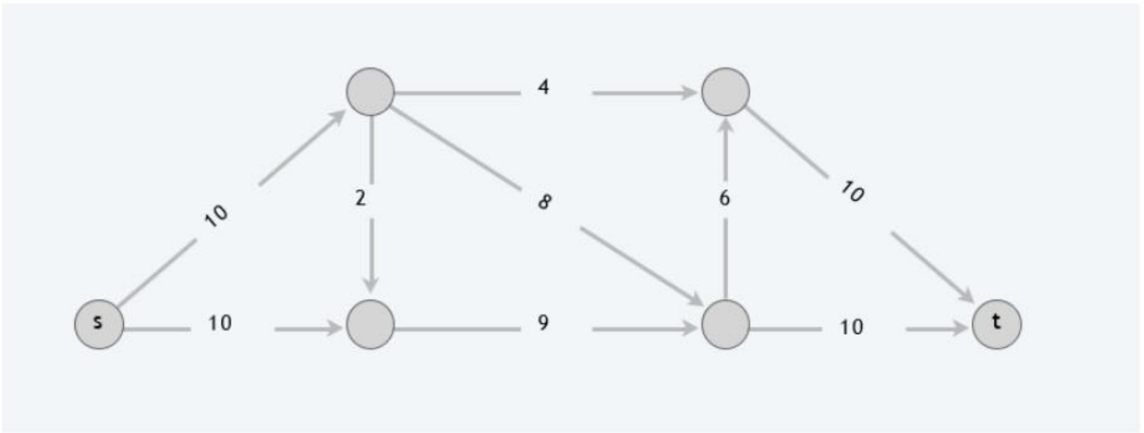
$3\to1$：对 $\forall$ 切割 (S,T)

$|f|\le c(S,T)$

$\therefore |f|=c(S,T)$ 隐含着 f 是一个最大流

2019.

四. 写出 Ford-Fulkerson 算法的伪代码，假设流网络中容量均为整数，且最大流量为 C，试分析算法的时间复杂度，求出如下流网络中最大流和最小割（此流网络是从 ppt 上摘抄地，和试题上的流网络做法是一样的）

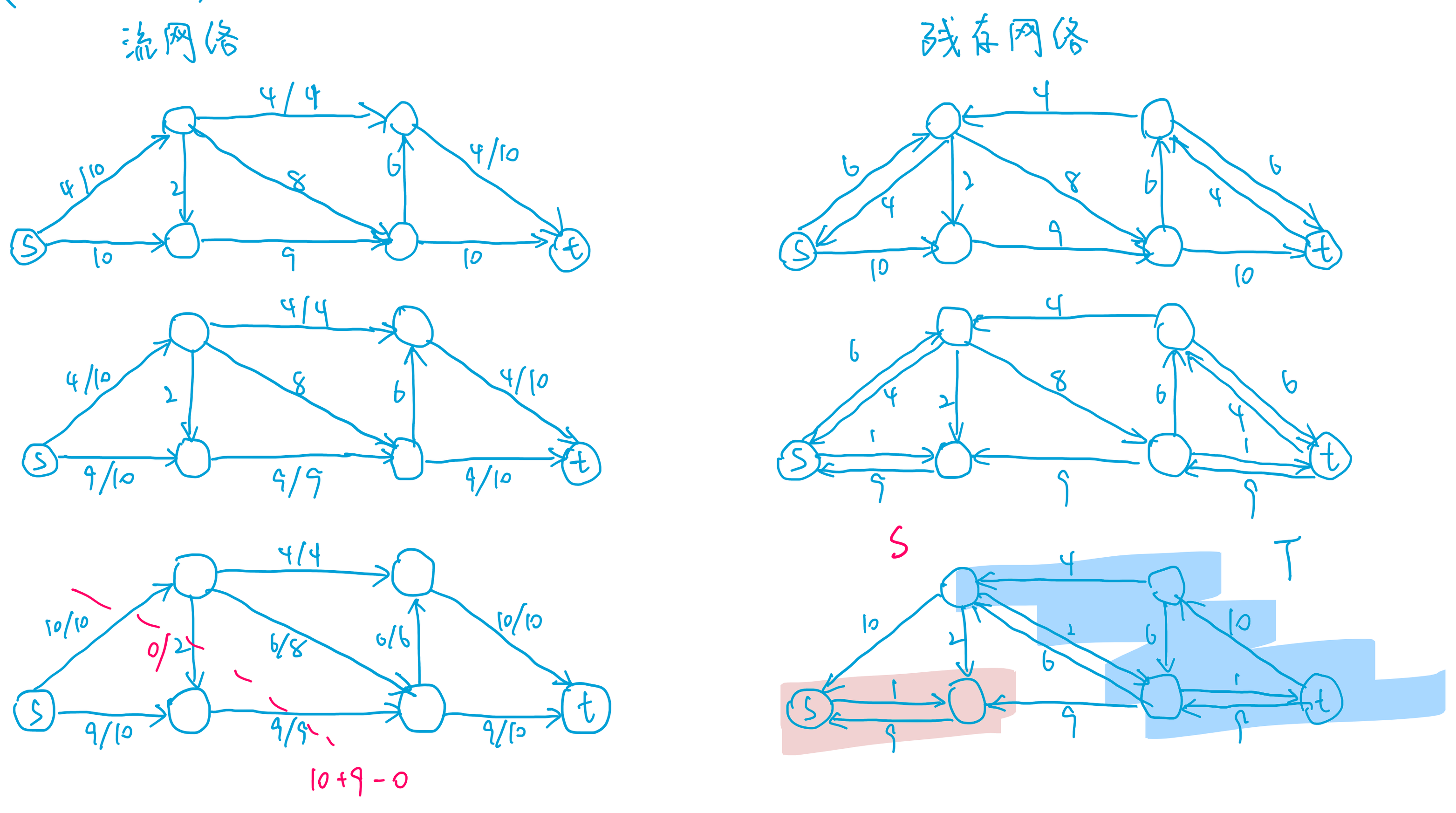


伪代码：

```
FORD_FULKERSON(G, s, t)
    for each edge (u,v) ∈ G.E
        (u,v).f = 0
    while there exists a path p from s to t in the residual network Gf
        cf(p) = min{cf(u,v) : (u,v) is in p}
        for each edge (u,v) in p
            if (u,v) ∈ E
                (u,v).f = (u,v).f + cf(p)
            else (v,u).f = (v,u).f - cf(p)
```

时间复杂度：$O(EC)$

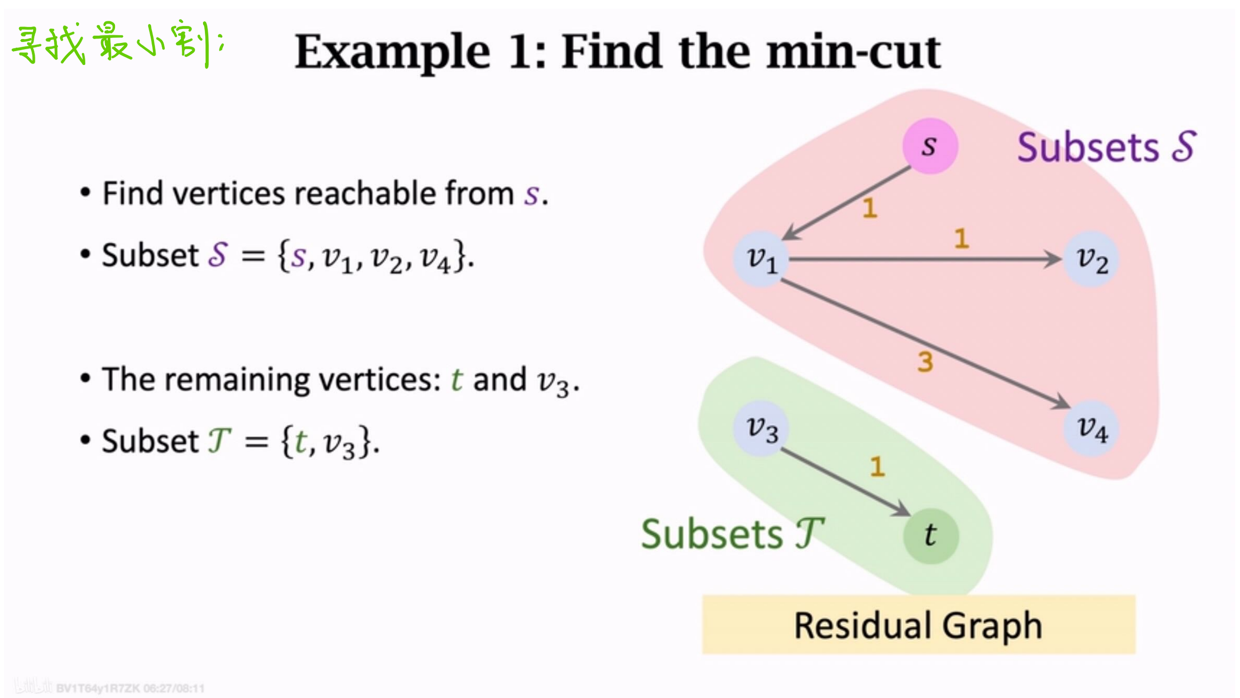
最大流：流网络 残存网络



$4+9+6=19$

最小割：19 （最大流最小割定理

寻找最小割：



在最终的残存网络中去掉反向边从 s 能到达的所有顶点共同构成 S 其余顶点构成 T

2020.

网络流的一个割，其中一条边去掉之后，最大流是多少

情况 1：去掉的边是关键割边

1. **定义**：若边 e 的容量 $c(e)$ 是当前最小割的唯一瓶颈（即去掉后割容量严格减小），则 e 是关键边。
2. **影响**：
   1. 新割的容量为 $c(S,T)-c(e)$。
   2. 根据最大流最小割定理，**新的最大流** $f'=f-c(e)$。

情况 2：去掉的边是非关键割边

1. **定义**：若存在其他割边的容量总和仍能维持原最小割容量（即 e 不是唯一瓶颈），则 e 是非关键边。
2. **影响**：
   1. 去掉 e 后，割容量仍为 f，因此**最大流不变**（$f'=f$）。

2. **新的最大流** $f'=\min(f, c'(S,T))$:
   1. 若 (S,T) 仍是某个最小割，则 $f'=f-c(e_j)$。
   2. 若其他割的容量更小，则 f' 由新的最小割决定。

总结：

1. 指出最大流等于最小割容量 f。
2. 去掉一条割边后，新割容量为 $f-c(e)$。
3. 判断是否存在其他更小的割：
   1. 若无，则 $f'=f-c(e)$;
   2. 若有，则 f' 由新最小割决定。
4. 总结关键边与非关键边的影响。

2020.

网络流算法中，找到增广路径后，证明新的流是合法的（流量守恒and容量限制）

容量限制：对于所有的结点 $u, v\in V$，要求 $0\leqslant f(u, v)\leqslant c(u, v)$。

流量守恒：对于所有的结点 $u\in V-\{s, t\}$，要求

$$\sum_{v\in V} f(v,u)=\sum_{v\in V} f(u,v)$$

流入 = 流出

当 $(u, v)\notin E$ 时，从结点 u 到结点 v 之间没有流，因此 $f(u, v)=0$。

证明新的流是合法的

假设当前流为 f，增广路径 P 的残余容量为 Δ，更新后的流为 f'。我们需要证明 f' 满足上述两个条件。

1. 容量限制（$0\le f'(u,v)\le c(u,v)$）

1. **正向边（原图中的边）**：
   在增广路径 P 上，每条正向边 (u,v) 的残余容量为 $c(u,v)-f(u,v)\ge\Delta$，因此：
   $$f'(u,v)=f(u,v)+\Delta\le f(u,v)+(c(u,v)-f(u,v))=c(u,v)$$
   且由于 $\Delta\ge0$，有 $f'(u,v)\ge f(u,v)\ge0$。
2. **反向边（反向残余边）**：
   如果增广路径使用了反向边 (v,u)（即原图中的 (u,v) 有流量 $f(u,v)>0$），则残余容量为 $f(u,v)\ge\Delta$，因此：
   $$f'(u,v)=f(u,v)-\Delta\ge f(u,v)-f(u,v)=0$$
   且 $f'(u,v)\le f(u,v)\le c(u,v)$。

综上，更新后的流 f' 满足容量限制。

2. 流量守恒（除 s 和 t 外，流入 = 流出）

1. **中间节点** v（$v\ne s,t$）：
   增广路径 P 进入 v 的流量必须等于离开 v 的流量（否则 P 就不是一条连续路径）。
   1. 如果 P 进入 v 通过边 (u,v)，则 $f'(u,v)=f(u,v)+\Delta$。
   2. 如果 P 离开 v 通过边 (v,w)，则 $f'(v,w)=f(v,w)+\Delta$。
   因此，v 的净流量变化为 $+\Delta-\Delta=0$，流量守恒保持不变。

2. **反向边情况**：
   如果增广路径经过反向边 (v,u)，则：
   1. 进入 v 的流量减少 Δ（因为 $f'(u,v)=f(u,v)-\Delta$），
   2. 离开 v 的流量~~增加~~减少 Δ（如通过 (v,w)）。$f(v,w)=f(v,w)-\Delta$
   仍然满足 流入(v) = 流出(v)。

因此，更新后的流 f' 仍然满足流量守恒。

2023.

4、Ford-fullkeson（15 分）

（1）解释残存网络。

（2）给出了一个初始流网络，写出最大 s-t 流和最小 s-t 割，并给出计算过程（要写出增广路径）

四、证明题（一共 38 分）

（1）最大流-最小割定理的证明。