中国人民大學
RENMIN UNIVERSITY OF CHINA

论文编码：RUC-BK-070701-2020201699

中国人民大学本科毕业论文（设计）

p-进半平面与 Drinfeld 定理

作　　者：	雷笔畅
学　　院：	数学学院
专　　业：	数学拔尖人才实验班
年　　级：	2020 级
指导教师：	王善文
论文成绩：	A-(87)
完成日期：	2024 年 5 月 25 日

中国人民大学学位论文原创性声明和使用授权说明

原创性声明

本人郑重声明: 所呈交的学位论文, 是本人在导师的指导下, 独立进行研究工作所取得的成果. 除文中已经注明引用的内容外, 本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品或成果. 对本文的研究做出重要贡献的个人和集体, 均已在文中以明确方式标明.

论文作者签名:

日期:　　年　　月　　日

学位论文使用授权说明

本人完全了解中国人民大学关于收集、保存、使用学位论文的规定, 即:

- 按照学校要求提交学位论文的印刷本和电子版本;
- 学校可以公布论文的全部或部分内容, 可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文.

论文作者签名:

指导教师签名:

日期:　　年　　月　　日

摘要

设 D 是在素数 p 处分歧的 $\mathbb{Q}$ 上的四元数代数. Cerednik-Drinfeld 定理给出了相应于 $D(\mathbb{A}_f)^\times$ 的紧开子群 U 的志村曲线的 p-进单值化. 此定理最初由 Cerednik 证明; 而 Drinfeld 利用他的 "基本定理", 即 p-进半平面 $\Omega = \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}_p} - \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ 的一个形式模型 $\widehat{\Omega}$ 参数化了一族 p-可除群, 重新导出了 Cerednik 的原始结果. 为了证明 Drinfeld 的定理, 首先需要利用 Deligne 与 Drinfeld 的函子给出 $\widehat{\Omega}$ 的一个模诠释, 然后利用形式模的 Cartier 理论构造出 Drinfeld 定理中所需的同构. 这篇文章将主要跟随 [BC91], 构造 p-进半平面及其形式模型, 并补充其中部分细节, 随后参照 [Zin84] 给出 Cartier 理论的主要内容, 最后陈述 Drinfeld 定理.

关键词：p-进半平面　Cartier 理论　Drinfeld 定理

Abstract

Let D be a quaternion algebra over $\mathbb{Q}$, ramified at a prime p. The Cerednik-Drinfeld theorem gives the p-adic uniformisation of Shimura curves associated to compact open subgroups U of $D(\mathbb{A}_f)^\times$. This theorem was first proved by Cerednik. Then Drinfeld reinterpreted Cerednik's original result in another way using his theorem using his "fundamental theorem", which states that a formal model $\widehat{\Omega}$ of the p-adic half plane $\Omega = \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}_p} - \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ parameterised a family of p-divisible groups.

To prove the Drinfeld's theorem, the first step is to give a modular discription of $\widehat{\Omega}$ through Deligne's and Drinfeld's functor. Then with the help of the Cartier theory on formal modules, one can construct the isomorphism in Drinfeld's theorem. Following mainly to [BC91], this article will construct the p-adic half plane and its formal model with more details depicted. Then, the main contents of Cartier theory will be given with reference to [Zin84]. Finally, we state Drinfeld's theorem.

Keywords: p-adic half plane   Cartier theory   Drinfeld's theorem

目录

1 绪论

对复上半平面 $\mathcal{H}=\{\tau\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}\tau>0\}\subset\mathbb{P}^1(\mathbb{C})-\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ 的研究由来已久. 作为复上半平面的 p-进类比, p-进半平面 $\Omega=\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}_p}-\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ 对于数论而言是同样重要的研究对象, 其应用之一是给出所谓的 p-进单值化.

在复几何中, 某个或某类空间的单值化 (uniformisation) 通常指给出其万有覆叠. 例如, 熟知的黎曼单值化定理指出, 任何连通黎曼面一定同构于复平面 $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$, 复射影平面 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, 或者复上半平面 $\mathcal{H}$ 的商. 在 p-进的情形, 类似的结论被称为 p-进单值化.

为了研究 p-进半平面, 首先需要建立一种 p-进域上的解析理论: 刚性解析几何. 事实上, 最初正是 Tate 在研究 $\mathbb{Q}_p$ 上的椭圆曲线及其单值化时发现了这种理论. 粗略地讲, 刚性解析几何理论关心刚性解析空间 (rigid analytic spaces) 范畴. 正如复流形由 $\mathbb{C}^n$ 中的高维圆盘 (polydisk) 粘合而成, 刚性解析空间是由仿射胚子集 (affnoid subset) 粘合而成的; 这种子集是 $\mathbb{C}_p^n$ 或 $\mathbb{Q}_p^n$ 中的高维圆盘的推广. 例如, 射影空间 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ 中的仿射胚子集就是 $\mathbb{P}^1$ 挖去有限个开圆盘. 具体的理论可以参考 [Bos14] 和 [FvdP04].

Raynaud 发展了源自 Tate 的刚性解析几何, 并将其与形式概型的理论联系了起来. 对于环 A 及其理想 I, 考虑 I 给出的进制拓扑以及 A 关于 I-进拓扑的完备化 $\widehat{A}:=\varprojlim A/I^n$. 我们可以在 Zariski 拓扑空间 $\operatorname{Spec}A/I$ 上装备环层

$$D(f)\mapsto A\left\langle f^{-1}\right\rangle:=\varprojlim A/I^n[f^{-1}],$$

所得环层空间 (ringed space) 记作 $\operatorname{Spf}\widehat{A}$. 所谓的形式概型 (formal scheme) 便是那些局部上形如 $\operatorname{Spf}\widehat{A}$ 的环层空间. 形式概型范畴与刚性解析空间范畴由函子 rig 联系起来: 取 $\mathbb{Z}_p$ 上形式概型 X 的刚性泛在纤维 (rigid generic fibre) 可以得到 $\mathbb{Q}_p$ 上的刚性解析空间 X^{rig}. 如果形式概型 X 的刚性泛在纤维是刚性解析空间 Y, 我们就称 X 是 Y 的形式模型 (formal model). 在 [Ray74] 中, Raynaud 证明了每个可容许刚性解析空间 (admissible rigid analytic space) 都有形式模型, 并且在可容许爆破 (admissible blow-up) 的意义下唯一. 具体的理论可以参考 [Bos14].

1976 年, Čerednik 在 [Čer76] 中利用 p-进半平面给出了一族志村曲线的单值化. 设 D 是 $\mathbb{Q}$ 上的四元数代数, U 是 $D(\mathbb{A}_f)^\times$ 的紧开子群, 其中 $\mathbb{A}_f$ 是 $\mathbb{Q}$ 的有限 adéle. Čerednik 证明了以下结果: 如果 U 在 p 位置的分量 U_p 为极大紧子群, 则相应的志村曲线 S_U 基变换到 $\mathbb{Q}_p$ 上所得曲线 $S_U\otimes\mathbb{Q}_p$ 是一些 p-进半平面关于 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 的离散子群的商之并; 这就是 S_U 的 p-进单值化. 其后, Drinfeld 在 [Dri76] 给出了他的 “基本定理”, 以形式群的模空间重现了 p-进半平面 Ω; 更准确地说, 他证明了 $\widehat{\Omega}\widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p}\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\text{nr}}$ 参数化了一族带有 D 的整数环的作用的高度 4 的形式群, 其中 $\widehat{\Omega}$ 为 Ω 的一个形式模型, $\widehat{\mathbb{Z}}_p^{\text{nr}}$ 是 $\mathbb{Z}_p$ 的极大非分歧扩张的完备化. 利用此结果, Drinfeld 重新证明了 Čerednik 的单值化定理, 并且揭示了其后更丰富的结构. 这一单值化结果就此被称为 Čerednik-Drinfeld 定理. 然而, Drinfeld 的论文 [Dri76] 过于简短而难以阅读. 于是, Boutot 与 Carayol 在 [BC91] 中对一维情形更具体地解释了 Drinfeld 对 Čerednik-Drinfeld 定理的证明.

本文主要关心的是 Drinfeld 的基本定理, 即 p-进半平面的模诠释. 首先, Drinfeld 使用了 Deligne 的函子来局部地描述 $\widehat{\Omega}$, 以此给出了 $\widehat{\Omega}$ 的一个模诠释. 随后, 利用形式群的 Cartier 理论, Drinfeld 构造出了函子 $\widehat{\Omega}$ 到该模问题的自然变换, 并且证明其为同构, 从而完成基本定理的证明.

本文主要参考了 [BC91]. 首先, 本文具体地构造和描述了 p-进局部域 K 上的 p-进半平面及其形式模型 $\widehat{\Omega}$. 随后, 本文回顾了形式群以及形式群的 Cartier 理论的主要结果. 最后, 本文陈述

了 Drinfeld 定理并给出其中的主要构造.

符号说明

在这篇文章中, 固定素数 p 以及特征零而剩余类域特征 p 的非阿局部域 K, 即 $\mathbb{Q}_p$ 的有限扩张 K. 记 $\mathcal{O} := K^\circ$ 为 K 的整数环, ϖ 为一个选定的素元 (uniformizer), $k := \mathcal{O}/\varpi$ 为剩余类域, $q := \#k$ 为剩余类域的阶. 选定 K 的代数闭包 $\overline{K}$ 及其完备化 $C := \widehat{\overline{K}}$. 局部域 K 上的范数由 $|\varpi| = q^{-1}$ 规范, 并延拓至 C 上.

除非特别说明, 我们约定环为含幺环.

记集合范畴为 **Set**, Abel 群范畴为 **Ab**, 交换环范畴为 **CRing**. 交换环 A 上的模范畴记作 $\mathbf{Mod}_A$, 含幺代数范畴记作 $\mathbf{Alg}_A$.

对环 A, 记 $A^\times$ 为其单位群, A^{op} 为其反环. 如果 A 是交换环 (相应地, 分次环), M 是 A-模 (相应地, 分次 A-模), 由 M 的给出的 $\operatorname{Spec} A$ (相应地, $\operatorname{Proj} A$) 上拟凝聚层记作 $\widetilde{M}$.

对拓扑空间 X, 集合 (或群, 环, 代数等) G 给出的 X 上常值层记作 $\underline{G}_X$ 或在底空间明确时略去下标.

对环层空间 (ringed space) X, 记其结构层 (structure sheaf) 为 $\mathscr{O}_X$, 底空间为 $|X|$(或在含义清楚时以 X 代替).

对于范畴 $\mathfrak{C}$, 以 $x \in \mathfrak{C}$ 表示 x 是 $\mathfrak{C}$ 的对象. 记 $x \in \mathfrak{C}$ 的恒等态射为 id_x.

对于集合 X 上的等价关系 $\sim$, 记商映射 $X \twoheadrightarrow X/\sim$ 为 $x \mapsto [x]$.

2 p-进半平面的构造

设 K 是 p-进局部域, C 是 K 的代数闭包的完备化. K 上的 p-进半平面是一个 K 上的刚性解析空间 Ω, 其 C-点在集合意义上等于 $\mathbb{P}^1(C) - \mathbb{P}^1(K)$. 在这一节中, 我们将首先构造 $\mathrm{PGL}_2(K)$ 的 Bruhat-Tits 树 I 及其几何实现 $I_{\mathbb{R}}$, 以此构造出 $\Omega(C) = \mathbb{P}^1(C) - \mathbb{P}^1(K)$ 上的刚性解析结构. 然后, 我们通过粘合局部信息, 构造出 Ω 的一个形式模型 $\widehat{\Omega}$.

2.1 $\mathrm{PGL}_2(K)$ 的 Bruhat-Tits 树

2.1.1 定义

有限维 K-向量空间 V 中的**格 (lattice)** 指 V 的满秩自由子 $\mathcal{O}$-模. 同一向量空间中的两个格 M 与 M' 称为是**位似的 (homothetic)**, 如果存在 $\lambda \in K^\times$, 使得 $M' = \lambda M$. 位似是一个等价关系.

定义 2.1. 群 $\mathrm{PGL}_2(K)$ 的 **Bruhat-Tits 树 (Bruhat-Tits tree)** 是无向图 I, 定义如下:

- ⋄ 顶点之集合为全体 K^2 中格的位似类. 格 $M \subset K^2$ 对应的顶点记作 $[M]$.
- ⋄ 顶点 s 与 s' 被一条边 $[s, s']$ 连接, 当且仅当存在 s 的代表元 M 和 s' 的代表元 M', 满足 $\varpi M \subsetneq M' \subsetneq M$.

设 $s' = [M']$ 与 $s = [M]$ 相邻, 则选取代表元可以使得 $\varpi M \subsetneq M' \subsetneq M$, 即

$$0 \subsetneq M'/\varpi M \subsetneq M/\varpi M \simeq k^2,$$

因此每个与 s 相邻的顶点对应着二维 k-向量空间中 k^2 的一条直线, 或 $\mathbb{P}^1(k)$ 中的一个点. 容易看出这是一个双射, 因此与一个顶点邻接的顶点数或与其相连的边数总是 $q+1$.

2.1.2 I 的几何实现

按定义, 图 I 的几何实现 $I_{\mathbb{R}}$ 是向 I 的每一条边 $[s, s']$ 指定一条线段

$$\{ts + (1-t)s' : 0 \leq t \leq 1\},$$

再将所有边以顶点相连接所得到的对象图形; 上式中的加法看作形式和. 我们可以将 $I_{\mathbb{R}}$ 与二维 K-向量空间 K^2 中 (非 Archimedean) K-范数的 $K^\times$-等价类等同起来; 其中 K^2 中的两个 K-范数 $|\cdot|$ 与 $|\cdot|'$ 是 $K^\times$-等价的, 如果存在 $\lambda \in K^\times$, 使得 $|\cdot| = \lambda|\cdot|'$.

1. 对于顶点 $s = [M]$, 定义范数 $|\cdot|_M$ 为以 M 为单位球的 K^2 中范数. 具体地, 如果 $M = \mathcal{O}e_1 + \mathcal{O}e_2$, 则
$$|a_1e_1 + a_2e_2|_M := \max\{|a_1|, |a_2|\}.$$
对于不同的代表元, 这样定义出的范数自然也相差一个 $K^\times$ 中元素的数乘.

2. 设顶点 $s = [M]$ 与 $s' = [M']$ 相邻, 且 $\varpi M \subset M' \subset M$. 通过取 $M/\varpi M$ 的 k-基再提升回 M 中, 我们总是可以取得 M 的一组 $\mathcal{O}$-基 e_1, e_2, 使得 $M' = \mathcal{O}e_1 + \mathcal{O}\varpi e_2$. 于是对于 $v = a_1e_1 + a_2e_2 \in K^2$,
$$|v|_M = \max\{|a_1|, |a_2|\},$$
$$|v|_{M'} = \max\{|a_1|, q|a_2|\}.$$
对于边 $[s, s']$ 中的点 $x = (1-t)s + ts'$, $0 \leq t \leq 1$, 我们定义 K^2 上的范数 $|\cdot|_x$ 为
$$|v|_x = |v|_t := \max\{|a_1|, q^t|a_2|\}.$$
基于 K 上赋值的离散性, 我们看到
$$\{v \in K^2 : |v|_t \leq \lambda\} = \begin{cases} M, & q^t \leq \lambda < q, \\ M', & 1 \leq \lambda < q^t. \end{cases}$$

反之, 设 $|\cdot|$ 是 K^2 上的范数. 首先注意到如果 $|\cdot|$ 是 K^2 中的范数, 则闭球 $M_\lambda := \{v \in K : |v| \leq \lambda\}$ 对任何正实数 λ 都是 K^2 中的格, 并且

$$M_{\lambda'} \subset M_\lambda \iff \lambda' \leq \lambda,\ \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}_{>0}.$$

又因为 $\varpi M_\lambda = M_{q^{-1}\lambda}$, 所以格 M_λ 的位似类对于不同正实数 λ 至多取两个值, 并且 $\lambda \mapsto [M_\lambda]$ 是周期的.

1. 如果 $[M_\lambda] = s$ 恒成立, $|\cdot|$ 自然对应着 $|\cdot|_s$.

2. 如果 $[M_\lambda]$ 或者等于 s, 或者等于 s', 则乘以适当的 $K^\times$ 中元素后,

$$M_\lambda = \begin{cases} M, & q^t \le \lambda < q, \\ M', & 1 \le \lambda < q^t. \end{cases}$$

   于是 $|\cdot|$ 对应于 $(1-t)s + ts' \in [s, s']$.

2.2 刚性解析空间 Ω

记 $\Omega := \mathbb{P}^1(C) - \mathbb{P}^1(K)$. 全体 K-线性同态 $K^2 \to C$ 组成的空间

$$\mathrm{Hom}_K(K^2, C) \simeq \mathrm{Hom}_K(K^2, K) \otimes_K C$$

是二维的 C-线性空间; 并且在此同构下, $K^2 \subset C^2$ 的原像正是那些满足 $f(0,1)$ 与 $f(1,0)$ 在 K 上线性相关的同态 f 之集合. 因此存在自然的双射

$$(\mathrm{Hom}_K(K^2, C) - \{0\})/C^\times \simeq \mathbb{P}^1(C),$$

并且 $\mathbb{P}^1(K)$ 在此双射下的原像为秩为 1 的同态之集合. 于是 Ω 作为集合可以与 K-线性嵌入 $K^2 \hookrightarrow C$ 之集合的 $K^\times$-数乘等价类等同; 这里的数乘等价与范数的定义相似: 称 $z, z' : K^2 \hookrightarrow C$ 是 $K^\times$-数乘等价的, 如果存在 $\lambda \in K^\times$, 使得 $z = \lambda z'$. 对于每个这样的嵌入 $z : K^2 \hookrightarrow C$, 可以定义出 K^2 上的范数 $|\cdot|_z := |z(\cdot)|$, 由此定义出映射

$$\lambda : \Omega \to I_{\mathbb{R}},\ [z] \mapsto [|\cdot|_z].$$

命题 2.1. 固定 I 中相邻的顶点 $s = [M]$ 和 $s' = [M']$, 并且固定 M 的基 e_1, e_2 使得 $M' = \mathcal{O}e_1 + \mathcal{O}\varpi e_2$. 对 Ω 中的每个嵌入的等价类, 选取代表元 $z : K^2 \hookrightarrow C$ 使得 $z(e_2) = 1$, 则 $z(e_1) \in C - K$; 以 $z \mapsto z(e_2) = \zeta$ 将 Ω 与 $C - K$ 等同.

在上述选取下, 我们有:

$$\begin{aligned} \lambda^{-1}(s) &= B(0,1) - \bigcup_{a \in \mathcal{O}/\varpi\mathcal{O}} B^\circ(a, 1), \\ \lambda^{-1}(s') &= B(0, q^{-1}) - \bigcup_{b \in \varpi\mathcal{O}/\varpi^2\mathcal{O}} B^\circ(b, q^{-1}), \\ \lambda^{-1}(x) &= \{\zeta \in C : |\zeta| = q^{-t}\},\ x = (1-t)s + ts',\ 0 \le t \le 1, \end{aligned}$$

$$\lambda^{-1}([s, s']) = B(0,1) - \bigcup_{a \in (\mathcal{O}/\varpi\mathcal{O})^\times} B^\circ(a, 1) - \bigcup_{b \in \varpi\mathcal{O}/\varpi^2\mathcal{O}} B^\circ(b, q^{-1}).$$

其中 $B(x,r)=\{x\in C:|x|\le r\}$, $B^\circ(x,r)=\{x\in C:|x|<r\}$.

证明. 参见 [BC91, Chapter I, (2.3)]. □

此命题说明任何 Bruhat-Tits 树的顶点和边在 λ 下的原像都是 $\mathbb{P}^1_K(C)$ 中的仿射胚子集, 即 $\mathbb{P}^1_K(C)$ 中有限个开圆盘的补集; 并且 $\lambda^{-1}(s)$ 与 $\lambda^{-1}(s')$ 均为 $\lambda^{-1}([s,s'])$ 的开子集. 将所有边在 λ 下的原像沿相应顶点的原像粘合, 我们就得到了一个 K 上的刚性解析空间的 C-点集, 它作为集合等于 $\Omega(C)$. 我们称刚性解析空间 Ω 为 K 上的 **p-进半平面 (p-adic half plane)**.

2.3 形式概形 $\widehat{\Omega}$

对于 K^2 中的格 M, 我们可以定义相应的射影空间 $\mathbb{P}(M)$. 选取 M 的一组基等价于固定同构 $M\simeq\mathcal{O}^2$, 从而诱导同构 $\mathbb{P}(M)\simeq\mathbb{P}^1_{\mathcal{O}}$. 而格之间的位似 $M'=\lambda M$ 决定出唯一的同构 $\mathbb{P}(M)\simeq\mathbb{P}(M')$, 因而我们可以任意选取 $s=[M]$ 的代表元 M, 定义 $\mathbb{P}_s:=\mathbb{P}(M)$.

令 Ω_s 为 $\mathbb{P}_s$ 去除其特殊纤维的有理点得到的开子概形, $\widehat{\Omega}_s$ 为 Ω_s 沿其特殊纤维的形式完备化.

命题 2.2. 我们有形式概形的同构

$$\widehat{\Omega}_s\simeq\operatorname{Spf}\mathcal{O}\left\langle T,\ \frac{1}{T^q-T}\right\rangle.$$

证明. 首先, Ω_s 的特殊纤维是 $(\Omega_s)_k\simeq\mathbb{P}^1_k-\mathbb{P}^1_k(k)=\operatorname{Spec}k[T,1/(T^q-T)]$. 其次, 选取 $\mathbb{P}^1_s$ 的仿射开覆盖 $U_0=\operatorname{Spec}\mathcal{O}[T]$ 和 $U_1=\operatorname{Spec}\mathcal{O}[1/T]$, 使得 $\infty\in\mathbb{P}^1_k(k)$ 对应到 $(p,1/T)\in U_1$. 尽管

$$\Omega_{s0}:=U_0\cap\Omega_s=\mathbb{A}^1_{\mathcal{O}}-\mathbb{A}^1_k(k)=\mathbb{A}^1_K\cup(\mathbb{A}^1_k-\mathbb{A}^1_k(k))$$

也不是仿射概形, 但随着 $\mathbb{A}^1_K$ 在模可逆元 ϖ 时被消灭,

$$\Omega_{s0}/\varpi^n=\Omega_{s0}\times_{\mathcal{O}}\mathcal{O}/\varpi^n=\operatorname{Spec}\mathcal{O}/\varpi^n[T,1/(T^q-T)].$$

故 $\widehat{\Omega_{s0}}=\operatorname{Spf}\mathcal{O}\langle T,1/(T^q-T)\rangle$. 同理 $\widehat{\Omega_{s1}}=\operatorname{Spf}\mathcal{O}\langle 1/T,T^q/(1-T^{q-1})\rangle$. 这两片仿射空间相等, 并通过恒等映射粘合成 $\widehat{\Omega}_s=\operatorname{Spf}\mathcal{O}\langle T,1/T,1/(T^{q-1}-1)\rangle$. □

因此 $\widehat{\Omega}_s$ 的刚性泛在纤维 Ω_s^{rig} 同构于 $\operatorname{Sp}K\langle T,1/(T^q-T)\rangle$, 其 C 点正是 $\mathbb{P}^1_K(C)=\mathbb{P}^1_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_C)$ 去除那些不特殊化到 $\mathbb{P}^1_k(k)$ 的点. 在命题 2.1 中的选取下, $\Omega_s^{\mathrm{rig}}(C)=\lambda^{-1}(s)$.

然后, 考虑邻接 s 的顶点 $s'=[M']$, 它按下述方式定出 $\mathbb{P}^1_s$ 的特殊纤维上的一个有理点: 选取代表元使得 $\varpi M\subset M'\subset M$, 则满射

$$M\otimes_{\mathcal{O}}k=M/\varpi M\twoheadrightarrow M/M'\simeq k$$

给出 $\mathbb{P}(M)=\mathbb{P}_s$ 的特殊纤维的一个 k 点. 不妨将此闭点记作 s'. 具体来说, 选取基使得

$$M=\mathcal{O}e_1+\mathcal{O}e_2,\ \ M'=\mathcal{O}e_1+\mathcal{O}\varpi e_2.$$

在等同

$$\mathbb{P}_s(k) = (\mathbb{P}_s)_k(k) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(k\overline{e_1} + k\overline{e_2}) = \mathbb{P}^1(k) = \left\{[a:b] = \frac{b}{a} \in \mathbb{P}^1(k) = k \cup \infty\right\}$$

下, $M'/\varpi = k\overline{e_1} \in \mathbb{P}_s(k)$ 对应到 $[1:0] = 0$, 即 $I := (\varpi, T_0) \in \operatorname{Proj} \mathcal{O}[T_0, T_1] \simeq \mathbb{P}_s$.

令 $\mathbb{P}_{[s,s']}$ 为 $\mathbb{P}_s$ 沿 s' 的爆破. 命 $\Omega_{[s,s']}$ 为 $\mathbb{P}_{[s,s']}$ 去除其特殊纤维中 s' 以外的有理点所得开子概形, 再定义 $\widehat{\Omega}_{[s,s']}$ 为 $\Omega_{[s,s']}$ 沿其特殊纤维的形式完备化.

命题 2.3. 我们有形式概形的同构

$$\widehat{\Omega}_{[s,s']} \simeq \operatorname{Spf} \mathcal{O}\left\langle T_0, T_1, \frac{1}{T_0^{q-1}-1}, \frac{1}{T_1^{q-1}-1}\right\rangle \Big/ (T_0T_1 - \varpi),$$

并且 T_0, T_1 分别给出 $\widehat{\Omega}_s$ 和 $\widehat{\Omega}_{s'}$ 到 $\widehat{\Omega}_{[s,s']}$ 的开浸入.

证明. 参考例 6.4 和命题 2.2, 容易证明. □

最终, 沿命题 2.3 中的浸入粘合所有 $\widehat{\Omega}_{[s,s']}$, 我们就得到了 $\mathcal{O}$ 上的形式概型 Ω, 其刚性泛在纤维的 C-点等于 $\Omega(C)$.

3 $\widehat{\Omega}$ 的模诠释

3.1 Deligne 的函子

记 $\mathbf{Alg}_{\mathcal{O}}$ 为交换 $\mathcal{O}$-代数范畴. 我们考虑 $\mathbf{Alg}_{\mathcal{O}}$ 的以下两个子范畴:

- ϖ-幂零 $\mathcal{O}$-代数范畴 $\mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}}$, 其对象为 ϖ 在其中幂零的交换 $\mathcal{O}$-代数, 态射为 $\mathcal{O}$-同态;
- 完备 $\mathcal{O}$-代数范畴 $\mathbf{Compl}_{\mathcal{O}}$, 其对象为 ϖ-进完备交换 $\mathcal{O}$-代数, 态射为连续 $\mathcal{O}$-同态.

易见 $\mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}}$ 是 $\mathbf{Compl}_{\mathcal{O}}$ 的全子范畴, 而 $\mathbf{Compl}_{\mathcal{O}}$ 可以看作 $\mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}}$ 的完备化. 我们将形式概型看作 $\mathbf{Compl}_{\mathcal{O}}$ 上的函子, 详见附录 6.3.2.

对 I 的顶点 $s = [M]$, 定义 $\mathbf{Compl}_{\mathcal{O}}$ 上取值在集合范畴 $\mathbf{Set}$ 的函子 $\mathcal{F}_s$ 如下. 对 $R \in \mathbf{Compl}_{\mathcal{O}}$, 命 $\mathcal{F}_s(R)$ 为二元对 (L, α) 的同构类, 其中:

- L 为秩 1 的自由 R-模, $\alpha : M \to L$ 为 $\mathcal{O}$-模同态.
- 对每个 $x \in \operatorname{Spec} R/\varpi$, 由于 ϖ 属于 x 对应的 R 中素理想 $\mathfrak{p}$, 故从 $\mathbf{k}(x) = R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ 看出 ϖM 落在 $M \xrightarrow{\alpha} L \to L \otimes \mathbf{k}(x)$ 的核中, 于是可以定义 $\alpha_x : M/\varpi \to L \otimes_R \mathbf{k}(x)$; 我们要求 α_x 为单射.

命题 3.1. 函子 $\mathcal{F}_s$ 由 $\widehat{\Omega}_s$ 表出.

证明. 同态 α 的条件表明对任意 $u \in M - \varpi M$, $\alpha(u) \in L$ 不等于 0, 从而是 L 的生成元. 特别地, 这说明 $\alpha \otimes \mathrm{id}_R : M \otimes_{\mathcal{O}} R \to L$ 为满射. 因此

$$(L, \alpha) \mapsto \alpha \otimes \mathrm{id}_R : M \otimes_{\mathcal{O}} R \twoheadrightarrow L$$

给出了函子的嵌入

$$\mathcal{F}_s(R) \hookrightarrow \widehat{\mathbb{P}}_s(R) = \mathbb{P}_s(R) = \{\widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}} \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} R} \twoheadrightarrow \mathscr{L} : \mathscr{L} \text{ 为可逆 } \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} R}\text{-模}\}/\simeq .$$

为了描述这个函子, 取 M 的一组基 e_1, e_2. 则 $\alpha(e_1), \alpha(e_2)$ 都是 L 的生成元, 故 (L,α) 的同构类由唯一的 $\zeta \in R$ 使得 $\alpha(e_1) = \zeta\alpha(e_2)$ 决定; 事实上还立刻看出 $\zeta \neq 0$. 不妨命 $\alpha(e_2) = 1$. 定义等价于

$$M/\varpi = ke_1 \oplus ke_2 \to L \otimes_R \mathbf{k}(x) \simeq R \otimes_R \mathbf{k}(x) = \mathbf{k}(x), \quad e_1 \mapsto \overline{\zeta},\ e_2 \mapsto 1$$

为单射, 即对所有 $a \in k$, $\overline{\zeta} - a \cdot 1 \neq 0 \in \mathbf{k}(x)$.

另一方面, 由命题 6.2 和命题 2.2 知,

$$\widehat{\Omega}_s(R) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}(\operatorname{Spf} R, \widehat{\Omega}_s) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}}(\operatorname{Spec} R, \operatorname{Spec} \mathcal{O}[T, 1/(T^q - T)]).$$

注意到给出态射 $\operatorname{Spec} R \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}[T, 1/(T^q - T)]$ 等价于给出态射 $\operatorname{Spec} R \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}[T]$, 使得 $\operatorname{Spec} R$ 中的每个点 x 都不被映到 $\mathbb{A}^1_k(k) \hookrightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}[T]$ 中; 即对于对所有 $x \in \operatorname{Spec} R$ 和 $a \in k$, 不存在交换图

$$\begin{array}{ccc} R & \longleftarrow & \mathcal{O}[T] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{k}(x) & \longleftarrow & k[T]/(T-a); \end{array}$$

因此, 给出态射 $\operatorname{Spec} R \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}[T]$ 等价于决定 T 在 $\mathcal{O}[T] \to R$ 下的像 ζ, 而上述交换图不存在等价于 ζ 在 $\mathbf{k}(x)$ 中的像 $\overline{\zeta}$ 满足 $\overline{\zeta} - a \cdot 1 \neq 0$, 对任何 $a \in k$ 成立.

如果 $x \in \operatorname{Spec} R[1/\varpi] \hookrightarrow \operatorname{Spec} R$, 则作为泛在纤维中的点, 其剩余类域 $\mathbf{k}(x)$ 是 K 的扩张, 从而是特征零的域, 因此不存在态射 $k \to \mathbf{k}(x)$. 所以只需考察 $\operatorname{Spec} R/\varpi \hookrightarrow \operatorname{Spec} R$ 中的点; 而 x 在 $\operatorname{Spec} R$ 与 $\operatorname{Spec} R/\varpi$ 中的剩余类域相等. 这正说明 $\widehat{\Omega}_s(R) = \mathcal{F}_s(R)$. □

对 Bruhat-Tits 树 I 的边 $[s, s']$, 定义 $\mathbf{Compl}_{\mathcal{O}}$ 上的函子 $\mathcal{F}_{[s,s']}$ 如下. 取 s 与 s' 的代表元 M, M', 使得 $\varpi M \subset M' \subset M$. 命 $\mathcal{F}_{[s,s']}(R)$ 为六元组 $(L, L', \alpha, \alpha', c, c')$ 的同构类, 其中:

- ◇ L, L' 为秩 1 的自由 R-模; $\alpha : M \to L$, $\alpha' : M \to L'$ 为 $\mathcal{O}$-模同态; $c : L \to L'$, $c' : L' \to L$ 为 R-模同态.
- ◇ 图

$$\begin{array}{ccccc} \varpi M & \hookrightarrow & M' & \hookrightarrow & M \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha/\varpi} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha'} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ L & \xrightarrow{c} & L' & \xrightarrow{c'} & L \end{array} \tag{1}$$

  交换.
- ◇ 对每个 $x \in \operatorname{Spec} R/\varpi$,

$$\ker[\alpha_x : M/\varpi \to L \otimes_R \mathbf{k}(x)] \subset M'/\varpi M,$$
$$\ker[\alpha'_x : M'/\varpi \to L \otimes_R \mathbf{k}(x)] \subset \varpi M/\varpi M';$$

命题 3.2. 函子 $\mathcal{F}_{[s,s']}$ 由 $\widehat{\Omega}_{[s,s']}$ 表出.

证明. 选取基使得 $M = \mathcal{O}e_1 + \mathcal{O}e_2$, $M' = \mathcal{O}e_1 + \mathcal{O}\varpi e_2$. 条件

$$\ker[\alpha_x : M/\varpi \to L \otimes_R \mathbf{k}(x)] \subset M'/\varpi M,$$
$$\ker[\alpha'_x : M'/\varpi \to L \otimes_R \mathbf{k}(x)] \subset \varpi M/\varpi M'.$$

等价于

$$\alpha_x : M/M' \simeq ke_2 \hookrightarrow L \otimes_R \mathbf{k}(x) \simeq \mathbf{k}(x),$$
$$\alpha'_x : M'/\varpi M \simeq ke_1 \hookrightarrow L \otimes_R \mathbf{k}(x) \simeq \mathbf{k}(x).$$

即 $\alpha(e_2)$ 为 L 的生成元, $\alpha'(e_1)$ 为 L' 的生成元. 于是二元组 (L, α) 和 (L', α') 的同构类分别由唯一的 $\zeta, \eta \in R$, 使得

$$\alpha(e_1) = \zeta\alpha(e_2),\ \eta\alpha(e_1) = \alpha'(e_2)$$

决定. 不妨命 $\alpha(e_2) = 1 \in L$, $\alpha'(e_1) = 1 \in L'$. 为了得到六元组, 只需添入交换图(1)的信息; 直接的验算表明它等价于

$$c = \eta,\ c' = \zeta,\ \zeta\eta = \eta\zeta = \varpi.$$

于是, 给出六元组的同构类归结为给出 $\zeta, \eta \in R$, 使得 $\zeta\eta = \varpi$, 且对所有 $a, b \in k$, $\overline{\zeta} - a \cdot 1 \neq 0 \in \mathbf{k}(x)$, $\overline{\eta} - b \cdot 1 \neq 0 \in \mathbf{k}(x)$. 而

$$\widehat{\Omega}_{[s,s']}(R) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\left(\mathcal{O}\left[T_0, T_1, \frac{1}{T_0^{q-1}-1}, \frac{1}{T_1^{q-1}-1}\right] \Big/ (T_0T_1 - \varpi),\ R\right).$$

类似于命题 3.1, 按定义展开即可看出 $\widehat{\Omega}_{[s,s']}(R) = \mathcal{F}_{[s,s']}(R)$. □

3.2 Drinfeld 的函子: 定义和陈述

对任何 $\mathcal{O}$-代数 R, 定义

$$R[\Pi] := R[X]/(X^2 - \varpi)$$

并装备 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次: $R[\Pi]_0 = R$, $R[\Pi]_1 = R\Pi$.

定义 3.1. 定义 $\mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}}$ 上取值在集合范畴的函子 $\mathcal{F}$ 如下. 任取 $B \in \mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}}$, 记 $S = \mathrm{Spec}\, B$. 定义 $\mathcal{F}(B) = \mathcal{F}(S)$ 为四元组 (η, T, u, r) 的同构类, 其中:

- ◇ $\eta = \eta_0 \oplus \eta_1$ 为 S 上 Zariski-可构造的平坦 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次 $\mathcal{O}[\Pi]$-模.
- ◇ $T = T_0 \oplus T_1$ 为 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次 $\mathscr{O}_S[\Pi]$-模, 满足齐次分支 T_0 和 T_1 皆为 S 上可逆层.
- ◇ $u : \eta \to T$ 为 0 次 $\mathcal{O}[\Pi]$-线性态射, 满足 $u \otimes_{\mathcal{O}} \mathscr{O}_S : \eta \otimes_{\mathcal{O}} \mathscr{O}_S \hookrightarrow T$ 为单射.
- ◇ $r : \underline{K}^2 \to \eta_0 \otimes_{\mathcal{O}} K$ 为 K-线性同构.

并且这些资料被以下条件限制. 记 S_i 为 $\Pi : T_i \to T_{i+1}$ 的零点集 (zero locus).

C1 $\eta_i|_{S_i} = \underline{\mathcal{O}}^2$.

C2 对每个 S 的几何点 x, u 诱导的映射 $\eta_x/\Pi\eta_x \hookrightarrow T(x)/\Pi T(x)$ 为单射.

C3 $\bigwedge^2 \eta_i\big|_{S_i} = \varpi^{-i}\left(\bigwedge^2\left(\Pi^i\, r\, \underline{\mathcal{O}}^2\right)\right)\big|_{S_i}$.

让我们初步观察该定义.

1. 给出层 η 与 T 上的 Π 作用和态射 u 等价于给出周期 2 的 $\mathcal{O}$-模范畴中交换图

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "\Pi"] & \eta_0 \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d, "u_0"] & \eta_1 \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d, "u_1"] & \eta_0 \arrow[r, "\Pi"] \arrow[d, "u_0"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "\Pi"] & T_0 \arrow[r, "\Pi"] & T_1 \arrow[r, "\Pi"] & T_0 \arrow[r, "\Pi"] & \cdots \end{tikzcd}$$

2. 取 S 的仿射开覆盖 $\{U_j = \operatorname{Spec} R_j\}_j$ 使得可逆层 T_0 与 T_1 限制在 U_j 上同构于 $\mathscr{O}_{U_j}$. 于是 $\Pi : T_i|_{U_j} \to T_1|_{U_j}$ 由元素 $f_i \in R_j$ 给出, $i = 0, 1$. 按定义, 限制在 U_j 上, $\Pi = f_i$ 的零点集为

$$\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R_j : [R_{j_\mathfrak{p}} \ni 1 \mapsto f_i \in R_{j_\mathfrak{p}}] = 0\} = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R_j : f_i \in \mathfrak{p}\} = V(f_i),$$

即 $S_i \cap U_j = V(f_i)$. 作为态射, $\Pi^2 = \varpi$; 故作为元素, $f_0 f_1 = \varpi$. 由于 R_j 是 R-代数, ϖ 在 R 中幂零说明 ϖ 也在 R_j 中幂零, 所以

$$(S_0 \cap U_j) \cup (S_1 \cap U_j) = V(f_0) \cup V(f_1) = V(\varpi) = \operatorname{Spec} R_j.$$

因此, $S = S_0 \cup S_1$.

定理 3.1. *函子 $\mathcal{F} : \mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}} \to \mathbf{Set}$ 由形式概形 $\widehat{\Omega}$ 表出.*

3.3 自然变换 $\widehat{\Omega} \to \mathcal{F}$ 的构造

首先注意到以下事实. 取 Bruhat-Tits 树 I 的顶点 $s = [M]$. 由于 $\bigwedge^2 M$ 是 $\bigwedge^2 K = K$ 的 $\mathcal{O}$-子模, 一定存在 $n \in \mathbb{Z}$ 使得 $\bigwedge^2 M = \varpi^n \mathcal{O}$. 如果 λM 是 s 的另一个代表元, 其中 $\lambda = u\varpi^m$, $u \in \mathcal{O}^\times$, 则

$$\bigwedge^2 \lambda M = \lambda^2 \bigwedge^2 M = \varpi^{2m+n}\mathcal{O},$$

故整数 n 的奇偶性无关代表元 M 的选取. 我们称顶点 $s = [M]$ 是**奇的** (相应地, **偶的**), 如果上述整数 n 是奇数 (相应地, 偶数). 又注意到, 如果 $s' = [M']$ 是邻接 s 的顶点, 且 $\varpi M \subset M' \subset M$, 则

$$\varpi^2 \bigwedge M \subset \bigwedge^2 M' \subset \bigwedge M^2,$$

因此 s' 的奇偶性与 s 相反.

此后我们总是选取代表元 M, 使得 $\bigwedge^2 M = \varpi^{-1}\mathcal{O}$ 或者 $\bigwedge^2 M = \mathcal{O}$, 并且固定边 $[s, s']$ 的定向, 使得 s 为奇而 s' 为偶.

3.3.1 嵌入 $\mathcal{F}_s \to \mathcal{F}$

取 I 的顶点 s 和 $B \in \mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}}$. 先考虑 s 为奇顶点的情形. 对每个点 $(L, \alpha) \in \mathcal{F}_s(R)$, 我们定义交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} \longrightarrow & \eta_0 = \underline{M} & \xrightarrow{\Pi=1} & \eta_1 = \underline{M} & \xrightarrow{\Pi=\varpi} & \eta_0 = \underline{M} & \longrightarrow \\ & \Big\downarrow{\scriptstyle u_0=\alpha} & & \Big\downarrow{\scriptstyle u_1=\alpha} & & \Big\downarrow{\scriptstyle u_0=\alpha} & \\ \longrightarrow & T_0 = \widetilde{L} & \xrightarrow{\Pi=1} & T_1 = \widetilde{L} & \xrightarrow{\Pi=\varpi} & T_0 = \widetilde{L} & \longrightarrow \end{array}$$

嵌入 $M \hookrightarrow K^2$ 诱导出同构 $r : \underline{K}^2 \xrightarrow{\sim} \underline{M} \otimes_{\mathcal{O}} K = \eta_0 \otimes_{\mathcal{O}} K$. 显然四元组 (η, T, u, r) 适合定义 3.1 中的类型要求; 我们来验证剩余的三个条件.

C1 层 η_0 和 η_1 均为常值层 $\underline{M}$, 条件显然成立.

C2 取 S 的几何点 x. 在 $\eta_x = \eta_{0,x} \oplus \eta_{1,x} = M \oplus M$ 上, Π 的作用由

$$\Pi : M^2 \to M^2,\ (m_0, m_1) \mapsto (\varpi m_1, m_0),$$

给出, 于是商

$$\eta_x / \Pi \eta_x = \frac{M \oplus M}{\varpi M \oplus M} \simeq M/\varpi M.$$

类似地, $T(x) = T_x \otimes_R \mathbf{k}(x) = L^2 \otimes_R \mathbf{k}(x)$,

$$\Pi : T(x) \to T(x),\ (l_0, l_1) \otimes a \mapsto (\varpi l_1, l_0) \otimes a,$$

商

$$T(x)/\Pi T(x) = \frac{(L \oplus L) \otimes_R \mathbf{k}(x)}{(\varpi L \oplus L) \otimes_R \mathbf{k}(x)} \simeq \frac{\mathbf{k}(x)}{\varpi \mathbf{k}(\mathbf{x})}.$$

因为 $\mathbf{k}(x)$ 是 $R \in \mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}}$ 上的代数, ϖ 也在域 $\mathbf{k}(x)$ 中幂零, 故 $\varpi \mathbf{k}(x) = 0$, $T(x)/\Pi T(x) \simeq \mathbf{k}(x)$.

态射 u 诱导出映射

$$u_x : \eta_x \to T(x),\ (m_0, m_1) \mapsto (\alpha(m_0), \alpha(m_1)) \otimes 1,$$

进而诱导出 $M/\varpi M \simeq \eta_x/\Pi\eta_x \to \mathbf{k}(x) \simeq T(x)/\Pi T(x)$, 这正是 $\mathcal{F}_s$ 定义中的单射 $\alpha_x : M/\varpi \hookrightarrow L \otimes_R \mathbf{k}(x) \simeq \mathbf{k}(x)$.

C3 显然 $S_0 = \varnothing$, 故 $S_1 = S$. 观察 S 上任意一点 x 处的茎. 由定义, $r(\mathcal{O}^2) = M = \eta_{0,x}$, 而 $\Pi|_{\eta_0} = 1$; 由奇顶点的定义立刻看到 C3 成立.

若 s 为偶顶点, 则对每个点 $(L, \alpha) \in \mathcal{F}_s(R)$, 我们定义交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} \longrightarrow & \eta_0 = \underline{M} & \xrightarrow{\Pi=\varpi} & \eta_1 = \underline{M} & \xrightarrow{\Pi=1} & \eta_0 = \underline{M} & \longrightarrow \\ & \Big\downarrow{\scriptstyle u_0=\alpha} & & \Big\downarrow{\scriptstyle u_1=\alpha} & & \Big\downarrow{\scriptstyle u_0=\alpha} & \\ \longrightarrow & T_0 = \widetilde{L} & \xrightarrow{\Pi=\varpi} & T_1 = \widetilde{L} & \xrightarrow{\Pi=1} & T_0 = \widetilde{L} & \longrightarrow \end{array}$$

嵌入 $M \hookrightarrow K^2$ 诱导出同构 $r : \underline{K}^2 \xrightarrow{\sim} \underline{M} \otimes_{\mathcal{O}} K$. 验证与奇顶点的情形类似, 略去不表.

3.3.2 嵌入 $\mathcal{F}_{[s,s']} \to \mathcal{F}$

取 I 的边 $[s, s']$, $B \in \mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}}$ 和 $\mathcal{F}_{[ss']}(B)$ 中的点

$$\begin{tikzcd} \varpi M \arrow[r, hook] \arrow[d, "\alpha/\varpi"] & M' \arrow[r, hook] \arrow[d, "\alpha'"] & M \arrow[d, "\alpha"] \\ L \arrow[r, "c"] & L' \arrow[r, "c'"] & L. \end{tikzcd} \tag{2}$$

我们逐次构造如下.

以图

$$\longrightarrow T_0 = \widetilde{L} \xrightarrow{\Pi = c} T_1 = \widetilde{L}' \xrightarrow{\Pi = c'} T_0 = \widetilde{L} \longrightarrow$$

定义 T 及其上的 Π-作用. 于是 S_0 为 $c : L' \to L$ 的零点集, S_1 为 $c' : L \to L'$ 的零点集. 令 $U_0 \subset S_0$ 收集所有使得 c'_x 可逆的 $x \in S$, $U_1 \subset S_1$ 收集所有使得 c_x 可逆的 $x \in S$.

在 U_0 和 U_1 上, (2)分别退化为 $\mathcal{F}_s(U_0)$ 和 $\mathcal{F}_{s'}(U_1)$ 的点, 从而对应到 $\mathcal{F}(U)$ 和 $\mathcal{F}(U')$ 的点. 在 $V := S - (U_0 \cup U_1) = S_0 \cap S_1$ 上, 我们以资料

$$\begin{tikzcd} \underline{M'} \arrow[r, hook] \arrow[d] & \underline{M} \arrow[r, "\Pi = \varpi"] \arrow[d] & \underline{M'} \arrow[d] \\ \widetilde{L}' \arrow[r, "c'"] & \widetilde{L} \arrow[r, "c"] & \widetilde{L}' \end{tikzcd}.$$

和 $M' \hookrightarrow K^2$ 定义 $\mathcal{F}(V)$ 的一个点.

然后, 我们证明这三个点粘合为 $\mathcal{F}(S)$ 的点 (η, T, u, r), 其中 T 已经被定义. 我们以交换图

$$\begin{tikzcd} M|_{U_0} \arrow[r, equal] & M|_{U_0} \arrow[r, "\varpi"] & M|_{U_0} \\ M'|_V \arrow[r, hook] \arrow[u] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & M|_V \arrow[r, "\varpi"] \arrow[u, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\varpi"] & M'|_V \arrow[u] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ M'|_{U_1} \arrow[r, "\varpi"] & M'|_{U_1} \arrow[r, equal] & M'|_{U_1} \end{tikzcd}$$

定义

$$\eta_0 \xrightarrow{\Pi} \eta_1 \xrightarrow{\Pi} \eta_0 \ .$$

特别地, $\eta_0|_{S_0} = M$ 而 $\eta_1|_{S_1} = M'$. 上图的交换性又表明三个点中的 r 粘合为 $r : \underline{K}^2 \simeq \eta_0 \otimes_{\mathcal{O}} K$. 最后, 定义 $u_0|_{S_0} := \alpha'$, $u_0|_{U_1} := c^{-1}\alpha$, 并类似地定义 u_1. 这就给出了嵌入 $\mathcal{F}_{[s,s']} \hookrightarrow \mathcal{F}$. 粘合所有这些信息, 便得到 $\widehat{\Omega} \to \mathcal{F}$; [BC91, I, 5.6] 证明了此自然变换为同构.

4 形式群与 Cartier 理论

形式群在有些文献中被定义为满足类似群乘法性质的形式幂级数, 即形式群律; 有些文献中则将形式群看作一类群函子. 本节将主要参考 [Zin84], 采用函子的观点建立形式群的 Cartier 理论. 囿于篇幅限制, 陈述的大多数结论将不给出证明.

4.1 形式群: 函子观点

我们以幂零代数上的函子定义形式群, 并指出形式群律与作为函子的形式群的联系.

4.1.1 形式群

环 R 上的一个**幂零代数 (nilpotent algebra)** 指 R-代数 N, 使得存在某个自然数 r, $N^r = 0$. 记 $\mathbf{Nil}_R$ 为 R 上幂零代数构成的范畴.

任何非零的幂零代数都不含幺, 但是我们可以将幂零 R-代数范畴嵌入含幺 R-代数的范畴中: 设 N 为幂零 R-代数, 我们在 $R \oplus N$ 上定义自然的乘法:

$$(r_1, n_1) \cdot (r_2, n_2) := (r_1 r_2, r_1 n_2 + r_2 n_1 + n_1 n_2).$$

于是 $R \oplus N \in \mathbf{Alg}_R$. 注意到投影 $R \oplus N \twoheadrightarrow R$ 与嵌入 $R \hookrightarrow R \oplus N$ 的复合等于 id_R, 于是我们可以具体描述 $\mathbf{Nil}_R$ 在 $\mathbf{Alg}_R$ 中的像.

定义 4.1. 一个**增广 R-代数 (augmented R-algebra)** 指含幺的 R 代数 A 并装备以**增广同态 (augmentation)** $\epsilon : A \to R$, 使得同态的复合 $R \to A \xrightarrow{\epsilon} R$ 为恒等同态 id_R, 其中第一个箭头为 A 的结构映射 (structure map). 记 $A^+ := \ker \epsilon$ 为增广 R-代数 A 的**增广理想 (augmentation ideal)**. 称增广代数 A 是幂零的, 如果其增广理想 A^+ 是幂零的. 记 $\mathbf{NilAug}_R$ 为幂零的增广 R-代数范畴.

结合以上讨论, 容易看出范畴 $\mathbf{Nil}_R$ 与范畴 $\mathbf{NilAug}_R$ 等价.

定义 4.2. 一个 R 上的**光滑交换形式群 (smooth commutative formal group)**, 简称**形式群 (formal group)**, 指保持无穷直和的正合函子 $G : \mathbf{Nil}_R \to \mathbf{Ab}$.

最简单的两个例子是加法群

$$\mathbb{G}_\mathrm{a} : N \mapsto (N, +)$$

和乘法群

$$\mathbb{G}_\mathrm{m} : N \mapsto (1 + N)^\times,$$

其中 $(N, +)$ 表示 N 的加法群, 而 $(1 + N)^\times$ 表示形如 $1 + n, n \in N$ 的元素组成的集合连同显然的乘法. 下面的例子是 $\mathbb{G}_\mathrm{m}$ 的推广.

例 4.3. 设 S 为增广 R 代数. 我们定义 $\mathbf{Nil}_R$ 上的函子

$$\mathbb{G}_\mathrm{m} S : N \mapsto (1 + S^+ \otimes_R N)^\times.$$

此函子保持直和, 且当 S 在 R 上平坦 (flat) 时正合, 从而是形式群. 特别地,

$$\Lambda_R := \mathbb{G}_m R[t] : N \mapsto \Lambda(N) = (1 + tN[t])^\times$$

是形式群, 并且在 Cartier 理论中发挥至关重要的作用.

现在我们考虑 $\mathbf{Nil}_R$ 范畴的 "完备化". 一个完备的增广 R-代数指增广 R-代数 A 连同一列理想降链 $\{\mathfrak{a}_n\}$, 满足 $\mathfrak{a}_1 = A^+$, 且 A 对这组理想给出的拓扑完备, 即 $A \simeq \varprojlim A/\mathfrak{a}_n$. 完备的增广 R 代数连同其间的连续同态组成一个范畴, 记作 $\mathbf{ComplAug}_R$. 我们有显然的嵌入 $\mathbf{Nil}_R \hookrightarrow \mathbf{ComplAug}_R$, 且任何 $\mathbf{Nil}_R$ 上的函子 H 都能延拓到 $\mathbf{ComplAug}_R$ 上:

$$H(A) := H(A^+) := \varprojlim H(A^+/\mathfrak{a}_n).$$

例如, Λ_R 在 $R[[X]]$ 上的取值 $\Lambda_R(R[[X]])$ 为幂级数环 $R[[X,t]]$ 中形如

$$1 + \sum_{m,n\geq 1} b_{mn} X^m t^n$$

的元素组成的集合, 装备以 $R[[X,t]]$ 中的乘法, 其中 $b_{mn} \in R$, 且对固定的 m, 当 n 充分大时 $b_{mn} = 0$.

4.1.2 切空间

通过定义平凡的乘法, 我们可以将 R 上的模范畴嵌入 R 上的幂零代数范畴, 即对 $x, y \in M \in \mathbf{Mod}_R$ 定义 $xy := 0$. 称函子 $H : \mathbf{Nil}_R \to \mathbf{Set}$ 在 $\mathbf{Mod}_R \hookrightarrow \mathbf{Nil}_R$ 上的限制为 H 的**切函子 (tangent functor)**, 记作 t_H.

注意到如果函子 $t : \mathbf{Mod}_R \to \mathbf{Set}$ 保持有限直积, 则 t 将透过忘却函子 $\mathbf{Mod}_R \to \mathbf{Set}$ 分解; 即对任何 $M \in \mathbf{Mod}_R$, $t(M)$ 容许典范的 R-模结构. 而且, 如果 $t : \mathbf{Mod}_R \to \mathbf{Ab}$ 保持有限直积, 则 $t(M)$ 由此获得的加法与其 Abel 群结构的加法相同.

对于函子 $t : \mathbf{Mod}_R \to \mathbf{Mod}_R$, 我们可以构造自然变换 $(-) \otimes_R t(R) \to t$ 如下: 设 $M \in \mathbf{Mod}_R$, 每个 $m \in M$ 给出 R 线性同态

$$c_m : K \to M,\ 1 \mapsto m;$$

于是定义

$$M \otimes_R t(R) \to t(M),\ m \otimes \xi \mapsto t(c_m)\xi. \tag{3}$$

定义-命题 4.4. 如果 $t : \mathbf{Mod}_R \to \mathbf{Mod}_R$ 是保持无穷直和的右正合函子, 则自然变换 (3) 为同构. 特别地, 任何 R 上的形式群 G 的切函子 t_G 都透过这样的函子分解, 因此 t_G 由 $t_G(R) = G(R)$ 决定; 记 $\mathrm{Lie}(G) := G(R)$, 称为 G 的**切空间 (tangent space)**.

证明. 两侧的函子皆右正合, 因而取模的展示便将问题划归为对自由模 $R^{(I)}$ 证明 (3) 为同构; 由于两侧的函子保持无穷直和, 问题再次划归为证明 (3) 对 R 成立; 这是显然的. □

定义 4.5. 如果形式群 G 的切空间 $\mathrm{Lie}\, G$ 是秩为 d 的有限生成射影模, 我们就称 G 的维度有限, 并记 $\dim G = d$.

正如实李群的情形, 形式群之间的态射如果诱导出切空间的同构, 则此态射本身也是同构. 为此, 我们需要利用函子与自然变换的光滑性.

定义 4.6. 设 $H, G : \mathbf{Nil}_R \to \mathbf{Set}$. 自然变换 $\xi : H \to G$ 称为是**光滑的 (smooth)**, 如果对任何 $\mathbf{Nil}_R$ 中的满射 $M \twoheadrightarrow N$,

$$H(M) \to H(N) \times_{G(N)} G(M)$$

也是满射. 称函子 H 光滑, 如果典范的态射 $H \to \mathrm{Hom}(R, -)$ 光滑.

注意到函子 H 光滑当且仅当 H 保持满射, 所以特别地, 形式群皆光滑.

定理 4.1. *[Zin84, Theorem 2.30]* 设 $H, G : \mathbf{Nil}_R \to \mathbf{Set}$ 正合. 若自然变换 $\alpha : H \to G$ 诱导出切函子的同构 $\alpha|_{\mathbf{Mod}_R} : t_H \to t_G$, 则当 H 或 α 光滑时, $\alpha : H \to G$ 为同构.

4.1.3 形式群律

定义 4.7. 交换环 R 上的一个**维数 n 的形式群律 (formal group law of dimension n)** 指幂级数的 n 元组 $G = (G_1, \ldots, G_n)$, 其中 $G_i(X, Y) \in R[[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n]]$, 满足以下公理.

- ◇ $G_i(X, 0) = G_i(0, X) = X_i$; 特别地, 这说明 $G_i(X, Y) = X_i + Y_i +$同时包含 X_i 与 Y_i 的高阶项.
- ◇ $G_i(G(X, Y), Z) = G_i(X, G(Y, Z))$.
- ◇ $G_i(X, Y) = G_i(Y, X)$.

称环 $R[[X]] = R[[X_1, \ldots, X_n]]$ 为 G 的坐标环 (coordinate ring).

若 G 是 R 上 n 维的形式群律, H 是 R 上 m 维的形式群律, 其间的态射 $\varphi : G \to H$ 定义为 m 个 n 元形式幂级数

$$\varphi(X) = \varphi_i(X_1, \ldots, X_n) \in A[[X_1, \ldots, X_n]], \quad 1 \le i \le m,$$

满足

$$\varphi(G(X, Y)) = H(\varphi(X), \varphi(Y)),$$

即

$$\varphi_i(G_1(X, Y), \ldots, G_n(X, Y)) = H_i(\varphi_1(X), \ldots, \varphi_m(X), \varphi_1(Y), \ldots, \varphi_m(Y)),\ 1 \le i \le m.$$

加法群律 $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}(X, Y) = X + Y$ 和乘法群律 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(X, Y) = X + Y + XY$ 是最简单的一维形式群律, 可以定义在任何交换环上. 后者的表达式 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(X, Y) = (1 + X)(1 + Y) - 1$ 更清楚地显示出 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 表示着乘法.

设 G 为维数 n 的形式群律, N 为幂零 R-代数. 在 N^n 上, G 定义出运算

$$(a_n)_n +_G (b_n)_n := (G_n(a, b)).$$

形式群律的定义和 [Zin84, Corollary 1.5] 表明 $+_G$ 赋予了 N^n 一个新的群结构. 容易验证

$$\widetilde{G} : \mathbf{Nil}_R \to \mathbf{Ab},\ N \mapsto (N^n, +_G)$$

是 n 维的形式群. 不仅如此, 在态射层面, 如果 H 是形式群律, 则

$$\mathrm{Hom}(G, H) \simeq \mathrm{Hom}(\widetilde{G}, \widetilde{H}).$$

注意到 $\widetilde{G}$ 的切空间 $\mathrm{Lie}(G) = R^n$ 的 Abel 群结构仍是直和 R^n 的群结构. 反过来, 观察切空间即可确定形式群是否来自形式群律.

定理 4.2. *[Zin84, Corollary 2.32] 设 H 为 R 上的形式群. 若切空间 $\mathrm{Lie}(H)$ 为 R 上有限秩的自由模, 则 H 来自形式群律, 即存在形式群律 G 使得 $H = \widetilde{G}$.*

4.2 Cartier 理论的主定理

4.2.1 第一主定理与 Cartier 环

回忆 n 元对称群 $\mathfrak{S}_n$ 在 n 元多项式环 $A[X_1, \dots, X_n]$ 上以重排变元作用着, 其中 A 为环; 并且

$$A[X_1, \dots, X_n] \to A[X_1, \dots, X_n]^{\mathfrak{S}_n},\ X_i \mapsto \sigma_i(X)$$

为环同构[①], 其中 $\sigma_i(X)$ 为初等对称多项式.

定义 4.8. 称函子 $H : \mathbf{Nil}_R \to \mathbf{Set}$ 是**弱对称**的, 如果对任何 $n \geq 1$ 和 $A \in \mathbf{NilAug}_R$, 嵌入

$$A[[X_1, \dots, X_n]]^{\mathfrak{S}_n} \hookrightarrow A[[X_1, \dots, X_n]]$$

诱导出的映射

$$H(A[[X_1, \dots, X_n]]^{\mathfrak{S}_n}) \to H(A[[X_1, \dots, X_n]])^{\mathfrak{S}_n}$$

为同构.

例 4.9. 左正合函子弱对称. 特别地, 形式群弱对称.

定理 4.3 (Cartier 第一主定理)**.** *[Zin84, Theorem 3.5] 设函子 $H : \mathbf{Nil}_K \to \mathbf{Ab}$ 是弱对称的, 则我们有 Abel 群的同构*

$$\begin{aligned} \lambda_H : \mathrm{Hom}(\Lambda_R, H) &\xrightarrow{\sim} H(R[[X]]) \\ \Phi &\longmapsto \Phi_{R[[X]]}(1 - Xt). \end{aligned}$$

定义 4.10. 命 $\mathbb{E}_R := (\mathrm{End}\,\Lambda_R)^{\mathrm{op}}$, 称为 R 的 **Cartier 环**. 对任何函子 H, 群 $\mathrm{Hom}(\Lambda, H)$ 带有 $\mathrm{End}(\Lambda)$ 自然的右作用, 相应的左 $\mathbb{E}$-模记作 M_H, 称为 H 的 **Cartier 模**.

[①]参见 [李 19, 定理 5.8.5]

我们考虑 Cartier 环 $\mathbb{E}$ 中的一些特殊元素. 透过同构 $\lambda_\Lambda : \mathbb{E}_R \simeq \Lambda(R[[X]]) \subset R[[X,t]]$, 我们定义:

$$\begin{aligned} V_n &:= \lambda_\Lambda^{-1}(1 - X^n t), && n \in \mathbb{N}, \\ F_n &:= \lambda_\Lambda^{-1}(1 - X t^n), && n \in \mathbb{N}, \\ [c] &:= \lambda_\Lambda^{-1}(1 - cXt), && c \in R. \end{aligned}$$

利用这些元素, 我们可以具体地描述 Cartier 环中的元素.

定理 4.4. *[Zin84, Theorem 3.12] 每个 $\xi \in \mathbb{E}$ 具有唯一的展开式*

$$x = \sum_{m,n \geq 0} V_m [a_{m,n}] F_n,$$

其中 $a_{m,n} \in B$, 且对固定的 m, 当 $n \gg 0$ 时 $a_{m,n} = 0$.

4.2.2 既约 Cartier 模与第二主定理

定义 4.11. 一个 **V-既约 Cartier 模 (V-reduced Cartier module)** 是一个左 $\mathbb{E}$-模 M 装备以一族 Abel 群的滤过

$$M = M^1 \supset M^2 \supset \cdots,$$

满足以下条件:

1. $V_m[c]M^n \subset M^{mn}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$, $c \in K$;
2. F_m 是连续自同态, 即对任何 n, 存在 r, $F_m M^r \subset M^n$;
3. $V_m : M/M^2 \to M^m/M^{m+1}$ 为双射;
4. M 完备, 即 $M = \varprojlim M/M^n$.

例如, [Zin84, Example 3.10] 指出正合函子 H 的 Cartier 模 M_H 是既约的, 其滤过由

$$M_H^n := \mathrm{im}\,[H(X^n R[[X]]) \to H(XR[[X]])]$$

给出. 对于 $M_\Lambda \simeq \mathbb{E}$, 我们命

$$\mathbb{E}_n := M_\Lambda^n.$$

设 M 是 V-既约 Cartier 模. 我们将对每个既约 Cartier 模构造一个 $\mathbf{Nil}_R$ 上的右正合函子. 设 Q 是右 $\mathbb{E}$-模. 对每个自然数 n, 置

$$Q_n := \{x \in Q : x\mathbb{E}_n = 0\}.$$

于是 $\{Q_n\}$ 构成 Q 的子模升链. 称 Q 是**扭**的右 $\mathbb{E}$-模, 如果存在 n 使得 $Q = Q_n$

定义-命题 4.12. 设 M 为既约左 $\mathbb{E}$-模, Q 为右 $\mathbb{E}$-模. 对自然数 n, 记

$$Q_n \circ M^n := \operatorname{im}\left[Q_n \otimes_{\mathbb{Z}} M^n \to Q \otimes_{\mathbb{E}} M\right].$$

成立 $Q_n \circ M^n \subset Q_{n+1} \circ M^{n+1}$, 于是可以定义

$$(Q \otimes_{\mathbb{E}} M)_\infty := \varinjlim Q_n \circ M^n$$

和既约张量积 (reduced tensor product)

$$Q \overline{\otimes}_{\mathbb{E}} M := \frac{Q \otimes_{\mathbb{E}} M}{(Q \otimes_{\mathbb{E}} M)_\infty}.$$

引理 4.1. [Zin84, Theorem 3.21] 如果

$$Q_1 \to Q_2 \to Q_3 \to 0$$

是扭的右 $\mathbb{E}$-模的正合列, 则

$$Q_1 \overline{\otimes}_{\mathbb{E}} M \to Q_2 \overline{\otimes}_{\mathbb{E}} M \to Q_3 \overline{\otimes}_{\mathbb{E}} M \to 0$$

正合.

定义-命题 4.13. 设 $N \in \mathbf{Nil}_R$. 定义函子

$$\Lambda \overline{\otimes}_{\mathbb{E}} M : N \mapsto \Lambda(N) \overline{\otimes}_{\mathbb{E}} M,$$

则 $\Lambda \overline{\otimes}_{\mathbb{E}} M$ 是 $\mathbf{Nil}_R \to \mathbf{Ab}$ 的右正合函子.

证明. 取 $\Phi \in \mathbb{E}$ 和 $x \in N$, 右作用按

$$x \cdot \Phi := \Phi_N(n)$$

定义并延拓至 $\Lambda(N)$. [Zin84, Theorem 3.22] 证明了 $\Lambda(N)$ 为扭, 故引理 4.1给出右正合性. □

定义 4.14. 称 V-既约 Cartier 模 M 是 **V-平坦的 (V-flat)** 如果 M/M^2 是平坦的 R-模.

定理 4.5 (Cartier 第二主定理)**.** *环 R 上的形式群范畴与 V-平坦 V-既约 Cartier 模范畴等价, 相应的函子分别由*

$$H \longmapsto M_H$$

和

$$\Lambda \overline{\otimes}_{\mathbb{E}} M \longleftarrow M$$

给出.

4.3 局部 Cartier 理论

记 $\mathbb{Z}_{(p)}$ 为 $\mathbb{Z}$ 在素理想 $(p) = p\mathbb{Z}$ 处的局部化. 从现在起, 我们设 R 为 $\mathbb{Z}_{(p)}$-代数.

4.3.1 p-典型元素

设 H 为 R 上的形式群. 如果 n 是与 p 互素的整数, 则乘以 n 的自同态 $n : H \to H$ 为同构; 因为根据定理 4.1 和定义-命题 4.4, 只需要验证 n 在 $t_H(R) = H(R)$ 上为同构. 特别地, $n \in \mathbb{E}^\times$.

我们定义

$$\epsilon_1 := \prod_{\ell} \left(1 - \frac{1}{\ell} F_\ell V_\ell\right) \in \mathbb{E},$$

其中 ℓ 取遍不等于 p 的素数. 对于与 p 互素的整数 n, 定义

$$\epsilon_n := \frac{1}{n} V_n \epsilon_1 F_n \in \mathbb{E}_n.$$

引理 4.2. ϵ_n 构成 $\mathbb{E}$ 的一组投影子 (projector), 即

$$\epsilon^2 = \epsilon,\ \ \epsilon_n\epsilon_m = 0(m \neq n),\ \sum_{p\nmid n} \epsilon_n = 1.$$

证明. 归结到 R 为 $\mathbb{Q}$-代数的情形. 参见 [Zin84, Lemma 4.11]. □

因此对于任何幂零 R-代数 N, 有分解

$$\Lambda(N) = \bigoplus_{p\nmid n} \Lambda(N)\epsilon_n.$$

置 $\Lambda_n(N) := \Lambda(N)\epsilon_n$. 由于 ϵ_n 为投影子, Λ_n 均为形式群. 记 $\widehat{W} := \Lambda_1$, 称为 **Witt 向量的形式群 (formal group of Witt vectors)**.

注意到 $F_nV_n = n$, 故右乘 V_n 与右乘 $\frac{1}{n}F_n$ 给出互逆的态射 $\Lambda_n \to \widehat{W}$ 和 $\widehat{W} \to \Lambda_n$. 因此上述分解可以重写为同构

$$\Lambda \simeq \bigoplus_{p\nmid n} \widehat{W}.$$

此同构能够转移到所有既约 Cartier 模上.

定义 4.15. 设 M 为既约 Cartier 模. 子群 $\epsilon_1 M \subset M$ 中的元素称为是 **p-典型的 (p-typical)**.

定理 4.6. *元素 $m \in M$ 是 p-典型的当且仅当*

$$F_n m = 0,\ \forall n > 1,\ p \nmid n.$$

每个元素 $m \in M$ 能唯一地分解为

$$m = \sum_{p\nmid n} V_n m_n,$$

其中 m_n 为 p-典型元素.

证明. 由于 $F_\bullet$ 对下标具乘性, 只要考虑素数 $\ell \neq p$ 即可验证 p-典型性的判别. 直接计算得证.

分解取 $m_n := \frac{1}{n}\epsilon_1 F_n m$. □

4.3.2 主定理的局部版本

设 H 为 R 上的形式群. 结合定理 4.3, 我们得到同构

$$\mathrm{Hom}(\widehat{W}, H) = \mathrm{Hom}(\Lambda\epsilon_1, H) \simeq \epsilon_1 \mathrm{Hom}(\Lambda, H) \simeq \epsilon_1 H(R[[X]]).$$

定义-命题 4.16. Witt 向量的形式群之自同态环 $\mathrm{End}\,\widehat{W} \simeq \epsilon_1\mathbb{E}\epsilon_1$. 定义关联于素数 p 的**局部 Cartier 环 (local Cartier ring)** 为 $\mathbb{E}_p := \epsilon_1\mathbb{E}\epsilon_1$. 命

$$V := \epsilon_1 V_p = V_p\epsilon_1,\ F := \epsilon_1 F_p = F_p\epsilon_1,\ [a]_p := \epsilon_1[a] = [a]\epsilon_1\,(a \in R),$$

则 $\mathbb{E}_p$ 的每个元素具有唯一的分解

$$x = \sum_{m,n\geq 0} V^m[a_{m,n}]F^n,$$

其中 $a_{m,n} \in B$, 且对固定的 m, 有 $n \gg 0 \implies a_{m,n} = 0$.

证明. 参见 [Zin84, Definition and Theorem 4.17]. □

定义 4.17. 称左 $\mathbb{E}_p$-模 M 是 V-**既约的**, 如果:

1. $V : M \to M$ 为单射,
2. M 为 V-进完备, 即 $M \simeq \varprojlim M/V^nM$.

定理 4.7 (Cartier 第二主定理, 局部版本)**.** 设 $H : \mathbf{Nil}_R \to \mathbf{Ab}$ 为形式群.

1. *Cartier 模 $M_H = H(R[[X]])$ 的 p-典型元素之集 $\epsilon_1 H(R[[X]])$ 具有 V-既约 $\mathbb{E}_p$-模结构, 记作 $M_{p,H}$.*
2. *存在典范同构*
$$\widehat{W} \otimes_{\mathbb{E}_p} M_{p,H} \simeq H.$$
3. *函子 $H \mapsto M_{p,H}$ 给出了 R 上形式群与 V-既约 $\mathbb{E}_p$-模中那些 M_p/VM_p 为平坦 R-模的元素组成的子范畴之间的等价, 且 H 的切空间 $\mathrm{Lie}(H)$ 在此等价下被映到 $M_{p,H}/VM_{p,H}$.*

4.3.3 Witt 向量

回顾对于素数 p, 取 Witt 向量环给出了交换环范畴到自身的函子 $W : \mathbf{CRing} \to \mathbf{CRing}$; 它由以下性质刻画: 作为集合, $W(R) = R^{\mathbb{N}}$, 装备以环结构使得

$$W(R) \to R^{\mathbb{N}},\ (a_n)_n \mapsto (w_n(a_0, \ldots, a_n))_n$$

为环同态, 其中多项式

$$w_n(X_0,\dots,X_n)=X_0^{p^n}+pX_1^{p^{n-1}}+\cdots+p^nX_n\in\mathbb{Z}[X_0,\dots,X_n].$$

本小节中, 我们将以另一种方式刻画 Witt 向量的形式群 $\widehat{W}$, 并建立它与 Witt 向量的一些联系.

引理 4.3. 取 $N\in\mathbf{Nil}_R$. 群 $\Lambda(N)$ 的每个元素可以唯一地表示为有限乘积

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1-x_it^i\right),\ x_i\in N;$$

而 $\widehat{W}(N)$ 的每个元素可以唯一地表示为有限乘积

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1-y_it^{p^i}\right)\epsilon_1,\ y_i\in N.$$

证明. 考虑一般并非群同态的映射

$$\bigoplus_{i=1}^{\infty}N\to\Lambda(N),\ (x_i)\mapsto\prod_i(1-x_it^i).\tag{4}$$

注意到右边的乘积有限, 且此映射对于 N 呈函子性; 我们断言(4)是自然同构, 从而说明每个 $\Lambda(N)$ 中元素可唯一地表作有限积. 由定理 4.1, 只要在 $N^2=0$ 时证明; 此时 $\prod_i(1-x_it^i)=1-\sum_i x_it^i$. 按定义, 右边的求和唯一, 是故(4)为同构.

因为 $F_\ell\epsilon_1=1$ 在素数 $\ell\neq p$ 时成立, 所以每个 $\widehat{W}$ 中元素都可写作

$$\prod(1-x_it^i)\epsilon_1=\prod(1-x_it)F_i\epsilon_1=\prod(1-x_{p^j}t)F_{p^j}\epsilon_1.$$

我们证明将 $\Lambda\to\Lambda\epsilon_1$ 限制到 $\bigoplus_{i=p^n}N$ 在同构(4)下的像上为到 $\widehat{W}$ 的同构. 仍然只需在 $N^2=0$ 处检验: 此时对任何 $m>1$, 当 $(m,p)=1$ 时

$$(1-y_nt^{p^n})V_m=(1-y_nt)F_{p^n}V_m=(1-y_n^mt)F_{p^n}=1\cdot F_{p^n}=1,$$

故

$$(1-y_nt^{p^n})\epsilon_m=(1-y_nt^{p^n})\frac{1}{m}V_m\epsilon_1F_m=1\cdot\frac{1}{m}\epsilon_1F_m=1;$$

因此当 $\prod(1-y_nt^{p^n})=1$ 时,

$$\prod(1-y_nt^{p^n})=\prod\sum_{p\nmid m}(1-y_nt^{p^n})\epsilon_m=1,$$

明所欲证. □

定理 4.8. 多项式族 $\{w_n\}$ 定出了群函子同态

$$\begin{aligned}\widehat{W}(N) &\longrightarrow \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{G}_a(N) \\ \prod(1-y_n t^{p^n}) &\longmapsto (w_n(y_0,\dots,y_n))_n.\end{aligned}$$

是故嵌入 $\bigoplus_{n\geq 0} N \to N^{\mathbb{N}}$ 诱导出群同态

$$\begin{aligned}\widehat{W}(N) &\longrightarrow W(N) \\ \prod(1-y_n t^{p^n}) &\longmapsto (y_n)_n.\end{aligned}$$

证明. 由于 N 幂零, 上述映射良定. 同态性参见 [Zin84, Theorem 4.2.5] □

借助 Witt 环, 我们可以给出局部 Cartier 环的另一种描述.

推论 4.4. 映射

$$\begin{aligned}W(R) &\longrightarrow \mathbb{E}_p \\ (a_n) &\longmapsto \sum_n V^n[a_n]F^n\end{aligned}$$

是环的嵌入. 透过此嵌入将 $W(R)$ 视为局部 Cartier 环 $\mathbb{E}_p$ 的子环, 则 $\mathbb{E}_p$ 同构于 $W(R)[V,F]$ 关于右理想滤过 $\{(V^n)\}_n$ 的完备化.

4.3.4 高度

高度是形式群的一个重要不变量. 为此, 我们要先定义同源的概念.

定义 4.18. 设 G,H 为来自形式群律的 R 上形式群. 态射 $\varphi: G\to H$ 称为一个**同源 (isogeny)**, 如果 $\ker\varphi: \mathbf{Nil}_R \to \mathbf{Set}$ 可表.

设 $\varphi: G\to H$ 为同源, 则 $\ker\varphi$ 由有限生成的射影 R-代数 A 表出. 考虑 A 的素理想 $\mathfrak{p}$ 的剩余类域 $\mathbf{k}(\mathfrak{p}) = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. [Zin84, Theorem 5.3] 表明存在自然数 $h(\mathfrak{p})$ 使得 $\dim_{\mathbf{k}(\mathfrak{p})} A\otimes_R \mathbf{k}(\mathfrak{p}) = p^{h(\mathfrak{p})}$. 交换代数的结果指出 $\mathfrak{p}\mapsto h(\mathfrak{p})$ 是局部常值函数.

定义 4.19. 称同源 φ 的**高度 (height)** 为 $h\in\mathbb{N}$, 如果 $h(\mathfrak{p}) = h$ 对所有 $\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}A$ 成立. 称形式群 G 的高度为 h, 如果 $p\in\operatorname{End}G$ 为同源且高度为 h.

例如, 设 R 的特征为 p, 我们考察 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}/R}$ 的乘 p 同态

$$\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(N)\to\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(N),\ 1+n\mapsto(1+n)^p = 1+n^p.$$

则 $\ker\varphi$ 由 $R[X]/X^p$ 表出, 因此 $p:\mathbb{G}_{\mathrm{m}}\to\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 是高度为 1 的同源, $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 的高度为 1.

5 Drinfeld 定理

从现在起, 让我们考虑 K 上的一个四元数代数除环 D, 其整数环记作 $\mathcal{O}_D$. 记 $\mathcal{O}^{\mathrm{nr}}$ 为 K 的极大非分歧扩张 (maximal unramified extension) 的整数环, $\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}$ 为 $\mathcal{O}^{\mathrm{nr}}$ 的 ϖ-进完备化. Drinfeld 的 "基本定理" 称形式 $\mathcal{O}$-概形 $\widehat{\Omega}\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}}\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}$ 参数化了一族幂零 $\mathcal{O}$-代数上高度为 4 的形式 $\mathcal{O}_D$-模.

5.1 形式模

5.1.1 形式 $\mathcal{O}$-模的 Cartier 理论

定义 5.1. 一个 B 上的**形式 $\mathcal{O}$-模 (formal $\mathcal{O}$-module)** 指 B 上的一个来自形式群律的光滑形式群 X 连同一个 $\mathcal{O}$-作用, 即环同态 $i:\mathcal{O}\to\operatorname{End}X$; 并且, 我们要求此 $\mathcal{O}$-作用在切空间 $\operatorname{Lie}X$ 上诱导的 $\mathcal{O}$-作用与 $\operatorname{Lie}X$ 的 B-代数结构诱导的 $\mathcal{O}$-作用相同; 即对任何 $a\in\mathcal{O}$, 相应的 B 上幂级数 $i(a)(T)\equiv aT \pmod{T^2}$. 特别地, 对于 $\mathcal{O}=\mathbb{Z}_p$, B 上的形式 $\mathbb{Z}_p$-模范畴与 B 上的形式群范畴等价.

设 B 是一个 $\mathcal{O}$-代数. 仿照 Witt 向量环的定义, 容易证明 $B^{\mathbb{N}}$ 容许唯一的 $\mathcal{O}$-代数结构, 记作 $W_{\mathcal{O}}(B)$, 使得鬼映射 (ghost map) $w:W_{\mathcal{O}}(B)\to B^{\mathbb{N}}$ 为 $\mathcal{O}$-代数同态, 其中 $w=(w_n)_n$ 的分量由多项式映射

$$w_n:(a_n)_n\mapsto a_0^{q^n}+\varpi a_1^{q^{n-1}}+\cdots+\varpi^n a_n$$

给出. 同样地, 我们考虑 $W_{\mathcal{O}}(B)$ 上的移位映射 (Verschiebung map)

$$\tau:(a_0,a_1,a_2,\cdots)\mapsto(0,a_0,a_1,\cdots),$$

由关系

$$w_n\sigma=w_{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}$$

决定的 Frobenius 同态 σ, 和 Teichmüller 提升

$$[\cdot]:a\mapsto(a,0,0,\cdots).$$

记 $a\in\mathcal{O}$ 在结构映射 $\mathcal{O}\to W_{\mathcal{O}}(B)$ 下的像为 $a=a\cdot 1$, 则其鬼分量显然为 $w_n(a)=a$.

定义 5.2. 相应于 B 的 Dieudonné 环被定义为非交换的 $\mathcal{O}$-代数 $W_{\mathcal{O}}(B)[F,V]$, 其中 F 和 V 满足: 对任何 $x\in W_{\mathcal{O}}(B)$,

$$\begin{aligned}Fx&=\sigma(x)F,\\ xV&=V\sigma(x),\\ VxF&=\tau(x),\\ FV&=\varpi\end{aligned}$$

我们在 Dieudonné 环上装备由右理想 (V) 定出的 V-进滤过, 并定义 **Cartier 环** $E_{\mathcal{O}}(B)$ 为 Dieudonné 环 $W_{\mathcal{O}}(B)[F,V]$ 关于 V-进拓扑的完备化.

当 $\mathcal{O}=\mathbb{Z}_p$ 时, $E_{\mathbb{Z}_p}(B)$ 正是上一节定义的局部 Cartier 环 $\mathbb{E}_{B,p}$. 因此, 我们可以平行于上一节的结论, 建立起形式 $\mathcal{O}$-模的 Cartier 理论.

每个 $E_{\mathcal{O}}(B)$ 中元素 x 可以典范地写作

$$x=\sum_{m,n\geq 0}V^m[a_{m,n}]F^n,\ a_{m,n}\in B,\ n\gg 0\implies a_{m,n}=0.$$

特别地, 嵌入 $W_{\mathcal{O}}(B)\hookrightarrow E_{\mathcal{O}}(B)$ 由

$$(a_0,\cdots)\mapsto\sum_{n\geq 0}V^n[a_n]F^n$$

给出.

定义 5.3. 一个 B 上的 **Cartier $\mathcal{O}$-模**指一个左 $E_{\mathcal{O}}(B)$-模, 满足

1. M/VM 是有限秩自由 B-模,
2. V 在 M 上为单射,
3. M 关于 V-进拓扑分离且完备, 即 $M\simeq\varprojlim M/V^nM$ 且 $\bigcap_n V^nM=0$.

这样的模也称为**既约 Cartier $\mathcal{O}$-模**.

仿照定理 4.7 的证明并结合定理 4.2, 我们得到:

定理 5.1. *B 上的形式 $\mathcal{O}$-模范畴与 B 上的 Cartier $\mathcal{O}$-模范畴等价. 而且, 如果 M 是相应于形式 $\mathcal{O}$-模 X 的 Cartier $\mathcal{O}$-模, 则 $M/VM=\mathrm{Lie}(X)$.*

5.1.2 形式 $\mathcal{O}_D$-模的 Cartier 理论

回忆 D 是 K 上的四元数代数, $\mathcal{O}_D$ 为其整数环. 由 [Voi21, Theorem 13.3.11], K 的二次非分歧扩张 K' 唯一地嵌入 D. 记 $\mathcal{O}'$ 为 K' 的整数环, $\sigma\in\mathrm{Gal}(K'/K)$ 为其 Galois 群中的非平凡元素. 同样由 [Voi21, Theorem 13.3.11], 存在 $\Pi\in\mathcal{O}_D$, 使得 $\Pi^2=\varpi$, 且对任何 $a\in\mathcal{O}'$, $\Pi a=\sigma(a)\Pi$. 固定一个这样的 Π.

定义 5.4. 一个 B 上的**形式 $\mathcal{O}_D$-模**指 B 上的形式 $\mathcal{O}$-模 X 连同一个 $\mathcal{O}_D$-作用 $i:\mathcal{O}_D\to\mathrm{End}\,X$ 延拓了 X 本身的 $\mathcal{O}$-作用. 称形式 $\mathcal{O}_D$-模 X 是**特殊 (special)** 的, 如果其 $\mathcal{O}'$-作用使 $\mathrm{Lie}\,X$ 成为秩 1 自由 $B\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{O}'$ 模.

Cartier 环 $E_{\mathcal{O}}(B)$ 带有自然的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次, 由 $\deg F=\deg V=1$ 定义; 齐次分量为

$$E_{\mathcal{O}}(B)_i=\left\{\sum V^m[a_{m,n}]F^n: m+n\equiv i \pmod 2,\ \forall m,n\right\},\ i=0,1.$$

特别地, $W_{\mathcal{O}}(B)\subset E_{\mathcal{O}}(B)_0$.

定义 5.5. 一个**分次 Cartier $\mathcal{O}[\Pi]$-模**指一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次 Cartier $\mathcal{O}$-模 $M=M_0\oplus M_1$ 连同一个 1 次 $E_{\mathcal{O}}(B)$ 线性自同态 Π, 满足 $\Pi^2=\varpi$. 此时 M_0 与 M_1 自动成为 $W_{\mathcal{O}}(B)$-模. 称分次 Cartier $\mathcal{O}[\Pi]$-模 M 是**特殊的**, 如果 M_0/VM_1 和 M_1/VM_0 皆为秩 1 自由 B 模.

定理 5.2. *[BC91, II, 2.3] 设 B 是 $\mathcal{O}'$-模, 则 B 上的形式 $\mathcal{O}_D$-模范畴与 B 上的分次 Cartier $\mathcal{O}[\Pi]$-模范畴等价, 且此范畴等价保持特殊性.*

5.2 Drinfeld 定理: 陈述

回忆 $\overline{k}$ 为 k 的代数闭包, 其 Witt 向量环为 $W_{\mathcal{O}}(\overline{k}) = \widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}$. 根据 [BC91, II, 5.2], $\overline{k}$ 上高度 4 的特殊形式 $\mathcal{O}_D$-模具有唯一的同源类. 固定一个 $\overline{k}$ 上高度 4 的特殊形式 $\mathcal{O}_D$-模 Φ.

定义 5.6. 定义 $\mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}}$ 上的函子 G 如下: 对 $B \in \mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}}$, $G(B)$ 为三元组 (ψ, X, ρ) 的同构类, 其中

- $\psi : \overline{k} \to B/\varpi B$ 为 k-同态,
- X 为 B 上高度 4 的特殊形式 $\mathcal{O}_D$-模,
- $\rho : \psi_* \Phi \to X_{B/\varpi B}$ 为高度 0 的拟同源.

定理 5.3 (Drinfeld)**.** *函子 $G : \mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}} \to \mathbf{Set}$ 由形式 $\mathcal{O}$-概形 $\widehat{\Omega}\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}}\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}$ 表出.*

根据 Witt 向量环的泛性质, 给出一个 k-同态 $\psi : \overline{k} \to B/\varpi B$, 等价于给出一个 $\mathcal{O}$-同态 $\widetilde{\psi} : \mathcal{O}^{\mathrm{nr}} \to B$. 于是, 给出 $G(B)$ 中的一个点等价于给出 $\mathcal{O}$-同态[①] $\widetilde{\psi} : \mathcal{O}^{\mathrm{nr}} \to B$ 连同 $G(B_{\widetilde{\psi}})$ 中的一个点, 其中 $B_{\widetilde{\psi}}$ 表示赋予 B 以来自 $\widetilde{\psi}$ 的 $\mathcal{O}^{\mathrm{nr}}$-代数结构, 而 $\overline{G}$ 定义如下.

定义 5.7. 令 $\mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}^{\mathrm{nr}}}$ 为 ϖ 在其中幂零的 $\mathcal{O}^{\mathrm{nr}}$-代数组成的范畴[②]. 定义 $\mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}^{\mathrm{nr}}}$ 上的函子 $\overline{G}$ 如下: 对 $B \in \mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}^{\mathrm{nr}}}$, $\overline{G}(B)$ 为二元对 (X, ρ) 的同构类, 其中

- X 为 B 上高度 4 的特殊形式 $\mathcal{O}_D$-模,
- $\rho : \Phi_{B/\varpi B} \to X_{B/\varpi B}$ 为高度 0 的拟同源.

注意到给出 $\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}}(B, \widehat{\Omega}\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}}\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}})$ 中的一个点等价于给出交换图

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Spf}\, B \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\psi^*"'] & \widehat{\Omega}\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}}\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}} \arrow[d] \\
& \mathrm{Spf}\, \widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}
\end{tikzcd}
$$

其中 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(B, \widehat{\Omega}\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}}\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}})$, $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O},\mathrm{cont}}(\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}^{\mathrm{nr}}, B)$. 因此为了证明定理 5.3, 只需证明下述定理.

定理 5.4 (Drinfeld)**.** *函子 $\overline{G} : \mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}^{\mathrm{nr}}} \to \mathbf{Set}$ 由形式 $\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}$-概形 $\widehat{\Omega}\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}}\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}$ 表出.*

记 $\overline{H} : \mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}^{\mathrm{nr}}} \to \mathbf{Set}$ 为定义 3.1 中的函子 $F : \mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}} \to \mathbf{Set}$ 在 $\mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}^{\mathrm{nr}}}$ 上的限制. 因为 F 由形式 $\mathcal{O}$-概形 $\widehat{\Omega}$ 表出, 所以 $\overline{H}$ 由形式 $\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}$-概形 $\widehat{\Omega} \otimes_{\mathcal{O}} \widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}$ 表出. 定理 5.4 也就是说函子 $\overline{G}$ 同构于 $\overline{H}$. 我们将在下一小节中构造自然变换 $\xi : \overline{G} \to \overline{H}$; ξ 实为同构的证明请参阅 [BC91] 或 [Dri76].

[①] 由于 ϖ 在 B 中幂零, 这等价于给出连续的 $\mathcal{O}$-同态 $\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}} \to B$.
[②] 自然也等于 ϖ 在其中幂零的 $\widehat{\mathcal{O}}^{\mathrm{nr}}$-代数组成的范畴.

5.3 自然变换 $\xi : \overline{G} \to \overline{H}$ 的构造

设 $B \in \mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}^{\mathrm{nr}}}$, M 是 B 上的分次 Cartier $\mathcal{O}[\Pi]$-模.

回忆 Frobenius 同态 $\sigma : W_{\mathcal{O}}(B) \to W_{\mathcal{O}}(B)$ 为 $\mathcal{O}$-代数同态. 将 M 透过 σ 进行系数限制 (restriction of scalars) 得到一个 $W_{\mathcal{O}}(B)$-模, 记作 M^{σ}.

我们定义 $N(M)$ 为 $\mathcal{O}$-模同态

$$M \to M \oplus M^{\sigma},\ m \mapsto (Vm, -\Pi m)$$

的余核, 其上带有来自 $M \oplus M$ 的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-分次. 由于 $m \mapsto (Vm, -\Pi m)$ 对于 V 和 Π 的作用等变, $N(M)$ 上也带有 V 和 Π 的 1 次作用.

定义映射

$$\lambda_M : N(M) \to M,\ [(m, m')] \mapsto \Pi m + Vm'.$$

命题 5.1. 存在唯一的映射 $L_M : M \to N(M)$, 满足:

1. $\lambda_M \circ L_M = F$,
2. L_M 对 B 呈函子性: 对任何 $\mathcal{O}$-同态 $B \to B'$, 图

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{L_M} & N(M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M' & \xrightarrow{L_{M'}} & N(M') \end{array}$$

交换, 其中 $M' = M \widehat{\otimes}_{E_{\mathcal{O}}(B)} E_{\mathcal{O}}(B')$.

定义

$$\phi_M : N(M) \to N(M),\ [(m, m')] \mapsto L_M(m) + [(m', 0)].$$

再取 ϕ_M 的不动点

$$\eta_M := N(M)^{\phi_M} = \{z \in N(M) : \phi(z) = z\}.$$

则 η_M 继承了来自 $N(M)$ 的分次 $\mathcal{O}[\Pi]$-模结构.

有了以上的准备, 我们就能够对 $(X, \rho) \in \overline{G}(B)$ 定义四元组 $\xi(X, \rho) = (\eta_X, T_X, u_X, r_{X,\rho})$ 如下. 记 $M(Y)$ 为形式 $\mathcal{O}_D$-模 Y 的分次 Cartier $\mathcal{O}[\Pi]$-模, $S = \operatorname{Spec} B$.

- ◇ η_X 为 X 上的层, 在每个仿射开集 $\operatorname{Spec} A \subset S$ 上取值 $\eta_X(\operatorname{Spec} A) = \eta_{M(X_A)}$.
- ◇ T_X 为 X 上的层, 在每个仿射开集 $\operatorname{Spec} A \subset S$ 上取值 $T_X(\operatorname{Spec} A) = \operatorname{Lie} X_A = M_{X_A}/VM_{X_A}$.
- ◇ $u_X : \eta_X \to T_X$, 在每个仿射开集 $\operatorname{Spec} A \subset S$ 由 $[(m, m')] \mapsto m \bmod V$ 定义.
- ◇ $r_{X,\rho} : \underline{K}^2 \to \eta_{X,0} \otimes_{\mathcal{O}} K$ 由 ρ 根据 [BC91, II, 7.5] 诱导而出.

这便是我们寻求的自然变换 $\xi : \overline{G} \to \overline{H}$.

6 附录

本节考虑的概形统一认为是 Noether 的.

6.1 射影丛

考虑概形 X 上的一个分次 $\mathcal{O}_X$-代数 $\mathscr{B}$, 即带有 $\mathcal{O}_X$-代数结构的拟凝聚分次 $\mathcal{O}_X$-模. 任何 X 的仿射开子概形 U 都给出其上的概形 $\operatorname{Proj}\mathscr{B}(U)\to U$. 如果 V 是 U 的仿射开子概形, 则

$$\mathscr{B}(V)=\mathscr{B}(U)\otimes_{\mathscr{O}_X(X)}\mathscr{O}_X(V),$$

因此 $\operatorname{Proj}\mathscr{B}(V)=\operatorname{Proj}\mathscr{B}(U)\times_X V$. 于是, 取 X 的仿射开覆盖 U_i, $\operatorname{Proj}\mathscr{B}(U_i)$ 可以粘合成为 X 上的概形, 记作 $\operatorname{Proj}\mathscr{B}\to X$.

例 6.1. 取 $\mathscr{B}=\mathscr{O}_X[T_0,\dots,T_n]$ 为多项式代数, 则 $\operatorname{Proj}\mathscr{B}=\mathbb{P}^n_X=\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}\times_{\mathbb{Z}}X$.

对于 X 上的拟凝聚层 $\mathscr{E}$, 我们定义 X-概形范畴上取值在集合范畴 **Set** 中的函子 $\mathbb{P}(\mathscr{E})$, 将 $h:Y\to X$ 映到二元对 $(\mathscr{L},\ h^*\mathscr{E}\twoheadrightarrow\mathscr{L})$ 的集合, 其中 $\mathscr{L}$ 为 Y 上可逆层. 由 [Har77, II, Proposition 7.12] 知, 此函子由射影概形 $\operatorname{Proj}(\operatorname{Sym}(\mathscr{E}))$ 表出, 因而为 X 上射影概形, 称为相应于 $\mathscr{E}$ 的**射影丛 (projective bundle)**.

例 6.2. 取 $X=\operatorname{Spec}\mathcal{O}$. 自由模 $M=\mathcal{O}^2$ 给出 X 上的凝聚层 $\widetilde{M}$, 于是给出 $\mathbb{P}(M):=\mathbb{P}(\widetilde{M})$.

设 A 为 $\mathcal{O}$-代数, 则 $\mathbb{P}(M)$ 的 A-点由

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M)(A)&=\{M\otimes_{\mathcal{O}}A\twoheadrightarrow L: L\text{ 为秩 1 的自由 }A\text{ 模}\}\\&=\{N\subset_A M\otimes_{\mathcal{O}}A: M\otimes_{\mathcal{O}}A/N\text{ 为秩 1 的自由 }A\text{ 模}\}.\end{aligned}$$

如果 $A=F$ 是一个域, 那么 $\mathbb{P}(M)(F)$ 中可以实现为 F^2 中余维数 1 的 F-子空间之集合, 因此 $\mathbb{P}(M)(F)=\mathbb{P}^1(F)$. 特别地, $\mathbb{P}(M)(K)=\mathbb{P}^1(K)$, $\mathbb{P}(M)(k)=\mathbb{P}^1(k)$. 此外, 存在双射

$$\begin{tikzcd}\mathbb{P}(M)(\mathcal{O}) \arrow[rr, bend left, "N\mapsto N\otimes_{\mathcal{O}}K"] && \mathbb{P}(M)(K) \arrow[ll, bend left, "N'\cap\mathcal{O}^2\mapsfrom N'"]\end{tikzcd}.$$

6.2 爆破

定义 6.3. 设 $\mathscr{I}$ 为 X 上的凝聚理想层. 称 $\widetilde{X}:=\operatorname{Proj}\left(\bigoplus_{n\geq 0}\mathscr{I}^n\right)\to X$ 为 X 沿理想层 $\mathscr{I}$ 或闭子概形 $Z:=V(\mathscr{I})$ 的**爆破 (blow up)**.

由 Proj 的构造, 我们可以在仿射开集上作爆破再粘合. 所以不妨设 $X=\operatorname{Spec}A$, 于是存在 A 的有限生成的理想 $I=(f_1,\dots,f_n)$ 使得 $\mathscr{I}=\widetilde{I}$, 爆破 $\widetilde{X}=\operatorname{Proj}B$, $B:=\bigoplus_{d\geq 0}I^d$ 的分次 A-代数结构给出态射 $\widetilde{X}\to X$. 为了区分 B 的一次部分 $I=B_1$ 和零次部分的子集 $I\subset A=B_0$, 记 $t_i=f_i\in B_1$, 而 $f_i\in B_0$. 考虑满同态

$$\phi:A[T_1,\dots,T_n]\to B,\ T_i\mapsto t_i.$$

这是分次代数同态, 因而 $\widetilde{X} = \operatorname{Proj} B \simeq \operatorname{Proj} A[T_1, \ldots, T_n]/\ker\phi$ 是 $\mathbb{P}^n_A$ 的闭子概形. 注意到多项式 $P(T_1, \ldots, T_n) \in \ker\phi$ 当且仅当 $P(f_1, \ldots, f_n) = 0 \in A$.

命题 6.1. 令 $J := (f_iT_j - f_jT_i)_{1\leq i,j\leq n}$, 则 $J \subset \ker\phi$. 如果 $Z := V_+(J) \subset \mathbb{P}^{n-1}_A$ 是整的 (integral), 则 $\widetilde{X} \simeq Z$.

证明. 参见 [Liu02, Lemma 8.1.2]. □

例 6.4. 取 $X = \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}_p} = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}_p[T]$. 我们考虑 X 沿极大齐次理想 $I = (p, T)$ 定出的闭点 $x = V(I)$ 的爆破 $\widetilde{X}$. 记 $A = \mathbb{Z}_p[T]$, $B = \bigoplus_{d\geq 0} I^d$. 我们考虑满同态 $\phi : A[S, W] \to B$ 和理想 $J = (TS - pW) \subset \ker\phi$. 由于 $TS - pW$ 不可约, 命题 6.1 导出

$$\widetilde{X} \simeq \operatorname{Proj}\frac{A[S, W]}{TS - pW} = V_+(J) \subset \mathbb{P}^1_A.$$

开子概形

$$D_+(W) = \operatorname{Spec}\frac{\mathbb{Z}_p[T, s]}{Ts - p},\ s = S/W$$

和

$$D_+(S) = \operatorname{Spec}\frac{\mathbb{Z}_p[T, w]}{T - pw} \simeq \operatorname{Spec}\mathbb{Z}_p[w] \simeq \operatorname{Spec}\mathbb{Z}_p[T/p],\ w = W/S$$

组成了 $\widetilde{X}$ 的一个仿射开覆盖; 它们透过同构

$$D_+(W)_S = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}_p[T, s, s^{-1}] = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}_p[T, w^{-1}, w] = D_+(S)_W$$

粘合成为 $\widetilde{X}$.

6.3 形式概形

6.3.1 形式概形作为环层空间

如前所述, 形式概型是那些局部上形如 $\operatorname{Spf} A$ 的环层空间, 其中环 A 关于其理想 I 定出的进制拓扑完备. 对于一般的概型 X, 我们定义其沿其闭子概型 Y 的形式完备化 (formal completion) 为

$$\widehat{X} := \varinjlim X/\mathscr{I}^n = \left(Y, \varprojlim \mathscr{O}/\mathscr{I}^n\right),$$

其中 $\mathscr{I}$ 是截出 Y 的理想层. 这样的空间是形式概型. 本文中, 我们主要考虑的离散赋值环上的概形沿其特殊纤维的形式完备化.

例 6.5. 考虑射影直线 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}_p} = \operatorname{Proj}\mathbb{Z}_p[T_0, T_1]$ 沿其特殊纤维 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_p}$ 的形式完备化. 闭浸入 $i : \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_p} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}_p}$ 在仿射开集 $D_+(T_0)$ 和 $D_+(T_1)$ 上由模 p 给出, 因而 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}_p}$ 沿其特殊纤维的形式完备化 $\widehat{\mathbb{P}}^1_{\mathbb{Z}_p} = \left(|\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_p}|, \varprojlim \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}_p}}/(\ker i^{\#})^n\right)$ 确为两片 $\widehat{\mathbb{A}}^1_{\mathbb{Z}_p}$ 透过 $\operatorname{Spf}\mathcal{O}\langle T, 1/T\rangle$ 的自同构 $T \mapsto 1/T$ 粘合而成, 是形式概型.

6.3.2 形式概形作为函子

任何 $\mathcal{O}$ 上的概形 X 定出 $\mathcal{O}$-代数范畴 $\mathbf{Alg}_{\mathcal{O}}$ 上的函子 $R \mapsto X(R)$, 其沿特殊纤维的完备化 $\widehat{X}$ 定出 ϖ-进完备 $\mathcal{O}$-代数范畴 $\mathbf{Compl}_{\mathcal{O}}$ 上的函子

$$R \mapsto \widehat{X}(R) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Spf}\, R, X).$$

命题 6.2. 成立函子同构 $\widehat{X} \simeq X|_{\mathbf{Compl}_{\mathcal{O}}}$.

证明. 只需对仿射概形 $X = \mathrm{Spec}\, A$ 验证. 由于任何完备 $\mathcal{O}$-代数都是 ϖ-幂零 $\mathcal{O}$-代数的逆向极限, 而逆向极限与 $\mathrm{Hom}(A, -)$ 交换, 我们只要验证上述函子限制在 $\mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}}$ 上成立, 即

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(A, R) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O},\mathrm{cont}}(\varprojlim A/\varpi^n, R), \ \forall R \in \mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}}.$$

记 $\widehat{A} = \varprojlim A/\varpi^n$. 同态 $\widehat{A} \to R$ 自然给出同态 $A \to \widehat{A} \to R$. 反之, 给定 $\mathcal{O}$-同态 $A \to R$, 由于 ϖ 在 R 中幂零, 对充分大的自然数 n 有交换图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & R, \\ A/\varpi^n \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

从而诱导出 $\widehat{A} \to R$. 可以直接验证这两个对应互逆. $\square$

作者签名: ________________________________

参考文献

[BC91] J.-F. Boutot and H. Carayol. Uniformisation p-adique des courbes de Shimura: les théorèmes de Čerednik et de Drinfeld. Number 196-197, pages 7, 45–158. 1991. Courbes modulaires et courbes de Shimura (Orsay, 1987/1988).

[Bos14] Siegfried Bosch. *Lectures on formal and rigid geometry*, volume 2105 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Cham, 2014.

[Čer76] IV Čerednik. Uniformization of algebraic curves by discrete arithmetic subgroups of $\mathrm{PGL}_2(k_w)$ with compact quotients. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 29(1):55, 1976.

[Dri76] Vladimir G Drinfel'd. Coverings of p-adic symmetric regions. *Functional Analysis and its Applications*, 10(2):107–115, 1976.

[FvdP04] Jean Fresnel and Marius van der Put. *Rigid analytic geometry and its applications*, volume 218 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2004.

[Har77] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume No. 52 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[Liu02] Qing Liu. *Algebraic geometry and arithmetic curves*, volume 6 of *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 2002. Translated from the French by Reinie Erné, Oxford Science Publications.

[Ray74] Michel Raynaud. Géométrie analytique rigide d'apres tate, kiehl. *Table ronde d' analyse non archimédienne (Paris, 1972)*, pages 319–327, 1974.

[SS91] P. Schneider and U. Stuhler. The cohomology of p-adic symmetric spaces. *Invent. Math.*, 105(1):47–122, 1991.

[Voi21] John Voight. *Quaternion algebras*, volume 288 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Cham, [2021] ©2021.

[Zin84] Thomas Zink. *Cartiertheorie kommutativer formaler Gruppen*, volume 68 of *Teubner-Texte zur Mathematik [Teubner Texts in Mathematics]*. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1984. With English, French and Russian summaries.

[李 19] 李文威. *代数学方法 (第一卷)*, volume 67.1 of *现代数学基础丛书*. 北京: 高等教育出版社, 2019.

致谢

首先, 我想感谢亲人们长久以来在物质上和精神上对我的支持. 因为他们, 我才得以来到中国人民大学, 并在此学习数学; 他们始终如一的支持让我得以成长为今天的样貌.

感谢老师们在过去四年对我的指导和帮助. 其中王善文老师不仅指导了我的本科毕业论文, 而且一直在数学上指引着我. 正是在他的引导下, 我产生了对数论与代数几何的强烈兴趣, 并立志在未来继续钻研.

感谢我的同学和朋友们, 他们的陪伴在学术和生活方面于我不可或缺. 特别地, 我要感谢姜杰东师兄一次又一次耐心而详尽地解答我 naïve 的数学问题.

本文至此结束, 但这只是一条长路的起点, 而我希望自己有意志与能力长久地走下去.