



# 中国人民大学本科毕业论文（设计）

## $p$ -进半平面与 Drinfeld 定理

作者:	雷笔畅
学院:	数学学院
专业:	数学拔尖人才实验班
年级:	2020 级
指导教师:	王善文
论文成绩:	A-(87)
完成日期:	2024 年 5 月 25 日



## 中国人民大学学位论文原创性声明和使用授权说明

### 原创性声明

本人郑重声明: 所呈交的学位论文, 是本人在导师的指导下, 独立进行研究工作所取得的成果. 除文中已经注明引用的内容外, 本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品或成果. 对本文的研究做出重要贡献的个人和集体, 均已在文中以明确方式标明.

论文作者签名:

日期: 年 月 日

### 学位论文使用授权说明

本人完全了解中国人民大学关于收集、保存、使用学位论文的规定, 即:

- 按照学校要求提交学位论文的印刷本和电子版本;
- 学校可以公布论文的全部或部分内容, 可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文.

论文作者签名:

指导教师签名:

日期: 年 月 日



## 摘要

设  $D$  是在素数  $p$  处分歧的  $\mathbb{Q}$  上的四元数代数. Cerednik-Drinfeld 定理给出了相应于  $D(\mathbb{A}_f)^\times$  的紧开子群  $U$  的志村曲线的  $p$ -进单值化. 此定理最初由 Cerednik 证明; 而 Drinfeld 利用他的“基本定理”, 即  $p$ -进半平面  $\Omega = \mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^1 - \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$  的一个形式模型  $\hat{\Omega}$  参数化了一族  $p$ -可除群, 重新导出了 Cerednik 的原始结果. 为了证明 Drinfeld 的定理, 首先需要利用 Deligne 与 Drinfeld 的函子给出  $\hat{\Omega}$  的一个模诠释, 然后利用形式模的 Cartier 理论构造出 Drinfeld 定理中所需的同构. 这篇文章将主要跟随 [BC91], 构造  $p$ -进半平面及其形式模型, 并补充其中部分细节, 随后参照 [Zin84] 给出 Cartier 理论的主要内容, 最后陈述 Drinfeld 定理.

**关键词:**  $p$ -进半平面   Cartier 理论   Drinfeld 定理

---

## Abstract

Let  $D$  be a quaternion algebra over  $\mathbb{Q}$ , ramified at a prime  $p$ . The Cerednik-Drinfeld theorem gives the  $p$ -adic uniformisation of Shimura curves associated to compact open subgroups  $U$  of  $D(\mathbb{A}_f)^\times$ . This theorem was first proved by Cerednik. Then Drinfeld reinterpreted Cerednik's original result in another way using his theorem using his "fundamental theorem", which states that a formal model  $\widehat{\Omega}$  of the  $p$ -adic half plane  $\Omega = \mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^1 - \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$  parameterised a family of  $p$ -divisible groups.

To prove the Drinfeld's theorem, the first step is to give a modular discription of  $\widehat{\Omega}$  through Deligne's and Drinfeld's functor. Then with the help of the Cartier theory on formal modules, one can construct the isomorphism in Drinfeld's theorem. Following mainly to [BC91], this article will construct the  $p$ -adic half plane and its formal model with more details depicted. Then, the main contents of Cartier theory will be given with reference to [Zin84]. Finally, we state Drinfeld's theorem.

**Keywords:**  $p$ -adic half plane   Cartier theory   Drinfeld's theorem



## 目录

1	绪论 . . . . .	1
2	$p$ -进半平面的构造 . . . . .	2
2.1	$\mathrm{PGL}_2(K)$ 的 Bruhat-Tits 树 . . . . .	2
2.1.1	定义 . . . . .	2
2.1.2	$I$ 的几何实现 . . . . .	3
2.2	刚性解析空间 $\Omega$ . . . . .	4
2.3	形式概形 $\hat{\Omega}$ . . . . .	5
3	$\hat{\Omega}$ 的模诠释 . . . . .	6
3.1	Deligne 的函子 . . . . .	6
3.2	Drinfeld 的函子: 定义和陈述 . . . . .	8
3.3	自然变换 $\hat{\Omega} \rightarrow \mathcal{F}$ 的构造 . . . . .	9
3.3.1	嵌入 $\mathcal{F}_s \rightarrow \mathcal{F}$ . . . . .	10
3.3.2	嵌入 $\mathcal{F}_{[s,s']} \rightarrow \mathcal{F}$ . . . . .	11
4	形式群与 Cartier 理论 . . . . .	12
4.1	形式群: 函子观点 . . . . .	12
4.1.1	形式群 . . . . .	12
4.1.2	切空间 . . . . .	13
4.1.3	形式群律 . . . . .	14
4.2	Cartier 理论的主定理 . . . . .	15
4.2.1	第一主定理与 Cartier 环 . . . . .	15
4.2.2	既约 Cartier 模与第二主定理 . . . . .	16
4.3	局部 Cartier 理论 . . . . .	18
4.3.1	$p$ -典型元素 . . . . .	18
4.3.2	主定理的局部版本 . . . . .	19
4.3.3	Witt 向量 . . . . .	19
4.3.4	高度 . . . . .	21
5	Drinfeld 定理 . . . . .	22
5.1	形式模 . . . . .	22
5.1.1	形式 $\mathcal{O}$ -模的 Cartier 理论 . . . . .	22
5.1.2	形式 $\mathcal{O}_D$ -模的 Cartier 理论 . . . . .	23
5.2	Drinfeld 定理: 陈述 . . . . .	24
5.3	自然变换 $\xi: \overline{G} \rightarrow \overline{H}$ 的构造 . . . . .	25
附录	. . . . .	26
6	附录 . . . . .	26
6.1	射影丛 . . . . .	26
6.2	爆破 . . . . .	26
6.3	形式概形 . . . . .	27

---

6.3.1	形式概形作为环层空间 . . . . .	27
6.3.2	形式概形作为函子 . . . . .	28
参考文献	. . . . .	29
致谢	. . . . .	30

## 1 绪论

对复上半平面  $\mathcal{H} = \{\tau \in \mathbb{C} : \text{Im } \tau > 0\} \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  的研究由来已久. 作为复上半平面的  $p$ -进类比,  $p$ -进半平面  $\Omega = \mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^1 - \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$  对于数论而言是同样重要的研究对象, 其应用之一是给出所谓的  $p$ -进单值化.

在复几何中, 某个或某类空间的单值化 (uniformisation) 通常指给出其万有覆叠. 例如, 熟知的黎曼单值化定理指出, 任何连通黎曼面一定同构于复平面  $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$ , 复射影平面  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ , 或者复上半平面  $\mathcal{H}$  的商. 在  $p$ -进的情形, 类似的结论被称为  $p$ -进单值化.

为了研究  $p$ -进半平面, 首先需要建立一种  $p$ -进域上的解析理论: 刚性解析几何. 事实上, 最初正是 Tate 在研究  $\mathbb{Q}_p$  上的椭圆曲线及其单值化时发现了这种理论. 粗略地讲, 刚性解析几何理论关心刚性解析空间 (rigid analytic spaces) 范畴. 正如复流形由  $\mathbb{C}^n$  中的高维圆盘 (polydisk) 粘合而成, 刚性解析空间是由仿射胚子集 (affinoid subset) 粘合而成的; 这种子集是  $\mathbb{C}_p^n$  或  $\mathbb{Q}_p^n$  中的高维圆盘的推广. 例如, 射影空间  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$  中的仿射胚子集就是  $\mathbb{P}^1$  挖去有限个开圆盘. 具体的理论可以参考 [Bos14] 和 [FvdP04].

Raynaud 发展了源自 Tate 的刚性解析几何, 并将其与形式概型的理论联系了起来. 对于环  $A$  及其理想  $I$ , 考虑  $I$  给出的进制拓扑以及  $A$  关于  $I$ -进拓扑的完备化  $\hat{A} := \varprojlim A/I^n$ . 我们可以在 Zariski 拓扑空间  $\text{Spec } A/I$  上装备环层

$$D(f) \mapsto A\langle f^{-1} \rangle := \varprojlim A/I^n[f^{-1}],$$

所得环层空间 (ringed space) 记作  $\text{Spf } \hat{A}$ . 所谓的形式概型 (formal scheme) 便是那些局部上形如  $\text{Spf } \hat{A}$  的环层空间. 形式概型范畴与刚性解析空间范畴由函子  $\text{rig}$  联系起来: 取  $\mathbb{Z}_p$  上形式概型  $X$  的刚性泛在纤维 (rigid generic fibre) 可以得到  $\mathbb{Q}_p$  上的刚性解析空间  $X^{\text{rig}}$ . 如果形式概型  $X$  的刚性泛在纤维是刚性解析空间  $Y$ , 我们就称  $X$  是  $Y$  的形式模型 (formal model). 在 [Ray74] 中, Raynaud 证明了每个可容许刚性解析空间 (admissible rigid analytic space) 都有形式模型, 并且在可容许爆破 (admissible blow-up) 的意义下唯一. 具体的理论可以参考 [Bos14].

1976 年, Čerednik 在 [Čer76] 中利用  $p$ -进半平面给出了一族志村曲线的单值化. 设  $D$  是  $\mathbb{Q}$  上的四元数代数,  $U$  是  $D(\mathbb{A}_f)^\times$  的紧开子群, 其中  $\mathbb{A}_f$  是  $\mathbb{Q}$  的有限 adèle. Čerednik 证明了以下结果: 如果  $U$  在  $p$  位置的分量  $U_p$  为极大紧子群, 则相应的志村曲线  $S_U$  基变换到  $\mathbb{Q}_p$  上所得曲线  $S_U \otimes \mathbb{Q}_p$  是一些  $p$ -进半平面关于  $\text{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$  的离散子群的商之并; 这就是  $S_U$  的  $p$ -进单值化. 其后, Drinfeld 在 [Dri76] 给出了他的“基本定理”, 以形式群的模空间重现了  $p$ -进半平面  $\Omega$ ; 更准确地说, 他证明了  $\hat{\Omega} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \hat{\mathbb{Z}_p}^{\text{nr}}$  参数化了一族带有  $D$  的整数环的作用的高度 4 的形式群, 其中  $\hat{\Omega}$  为  $\Omega$  的一个形式模型,  $\hat{\mathbb{Z}_p}^{\text{nr}}$  是  $\mathbb{Z}_p$  的极大非分歧扩张的完备化. 利用此结果, Drinfeld 重新证明了 Čerednik 的单值化定理, 并且揭示了其后更丰富的结构. 这一单值化结果就此被称为 Čerednik-Drinfeld 定理. 然而, Drinfeld 的论文 [Dri76] 过于简短而难以阅读. 于是, Boutot 与 Carayol 在 [BC91] 中对一维情形更具体地解释了 Drinfeld 对 Čerednik-Drinfeld 定理的证明.

本文主要关心的是 Drinfeld 的基本定理, 即  $p$ -进半平面的模诠释. 首先, Drinfeld 使用了 Deligne 的函子来局部地描述  $\hat{\Omega}$ , 以此给出了  $\hat{\Omega}$  的一个模诠释. 随后, 利用形式群的 Cartier 理论, Drinfeld 构造出了函子  $\hat{\Omega}$  到该模问题的自然变换, 并且证明其为同构, 从而完成基本定理的证明.

本文主要参考了 [BC91]. 首先, 本文具体地构造和描述了  $p$ -进局部域  $K$  上的  $p$ -进半平面及其形式模型  $\hat{\Omega}$ . 随后, 本文回顾了形式群以及形式群的 Cartier 理论的主要结果. 最后, 本文陈述

了 Drinfeld 定理并给出其中的主要构造.

## 符号说明

在这篇文章中, 固定素数  $p$  以及特征零而剩余类域特征  $p$  的非阿局部域  $K$ , 即  $\mathbb{Q}_p$  的有限扩张  $K$ . 记  $\mathcal{O} := K^\circ$  为  $K$  的整数环,  $\varpi$  为一个选定的素元 (uniformizer),  $k := \mathcal{O}/\varpi$  为剩余类域,  $q := \#k$  为剩余类域的阶. 选定  $K$  的代数闭包  $\bar{K}$  及其完备化  $C := \widehat{\bar{K}}$ . 局部域  $K$  上的范数由  $|\varpi| = q^{-1}$  规范, 并延拓至  $C$  上.

除非特别说明, 我们约定环为含么环.

记集合范畴为 **Set**, Abel 群范畴为 **Ab**, 交换环范畴为 **CRing**. 交换环  $A$  上的模范畴记作  $\mathbf{Mod}_A$ , 含么代数范畴记作  $\mathbf{Alg}_A$ .

对环  $A$ , 记  $A^\times$  为其单位群,  $A^{\text{op}}$  为其反环. 如果  $A$  是交换环 (相应地, 分次环),  $M$  是  $A$ -模 (相应地, 分次  $A$ -模), 由  $M$  的给出的  $\text{Spec } A$  (相应地,  $\text{Proj } A$ ) 上拟凝聚层记作  $\widetilde{M}$ .

对拓扑空间  $X$ , 集合 (或群, 环, 代数等)  $G$  给出的  $X$  上常值层记作  $\underline{G}_X$  或在底空间明确时略去下标.

对环层空间 (ringed space)  $X$ , 记其结构层 (structure sheaf) 为  $\mathcal{O}_X$ , 底空间为  $|X|$  (或在含义清楚时以  $X$  代替).

对于范畴  $\mathfrak{C}$ , 以  $x \in \mathfrak{C}$  表示  $x$  是  $\mathfrak{C}$  的对象. 记  $x \in \mathfrak{C}$  的恒等态射为  $\text{id}_x$ .

对于集合  $X$  上的等价关系  $\sim$ , 记商映射  $X \twoheadrightarrow X/\sim$  为  $x \mapsto [x]$ .

## 2 $p$ -进半平面的构造

设  $K$  是  $p$ -进局部域,  $C$  是  $K$  的代数闭包的完备化.  $K$  上的  $p$ -进半平面是一个  $K$  上的刚性解析空间  $\Omega$ , 其  $C$ -点在集合意义上等于  $\mathbb{P}^1(C) - \mathbb{P}^1(K)$ . 在这一节中, 我们将首先构造  $\text{PGL}_2(K)$  的 Bruhat-Tits 树  $I$  及其几何实现  $I_{\mathbb{R}}$ , 以此构造出  $\Omega(C) = \mathbb{P}^1(C) - \mathbb{P}^1(K)$  上的刚性解析结构. 然后, 我们通过粘合局部信息, 构造出  $\Omega$  的一个形式模型  $\widehat{\Omega}$ .

### 2.1 $\text{PGL}_2(K)$ 的 Bruhat-Tits 树

#### 2.1.1 定义

有限维  $K$ -向量空间  $V$  中的格 (lattice) 指  $V$  的满秩自由子  $\mathcal{O}$ -模. 同一向量空间中的两个格  $M$  与  $M'$  称为是位似的 (homothetic), 如果存在  $\lambda \in K^\times$ , 使得  $M' = \lambda M$ . 位似是一个等价关系.

**定义 2.1.** 群  $\text{PGL}_2(K)$  的 Bruhat-Tits 树 (Bruhat-Tits tree) 是无向图  $I$ , 定义如下:

- ◇ 顶点之集合为全体  $K^2$  中格的位似类. 格  $M \subset K^2$  对应的顶点记作  $[M]$ .
- ◇ 顶点  $s$  与  $s'$  被一条边  $[s, s']$  连接, 当且仅当存在  $s$  的代表元  $M$  和  $s'$  的代表元  $M'$ , 满足  $\varpi M \subsetneq M' \subsetneq M$ .



设  $s' = [M']$  与  $s = [M]$  相邻, 则选取代表元可以使得  $\varpi M \subsetneq M' \subsetneq M$ , 即

$$0 \subsetneq M'/\varpi M \subsetneq M/\varpi M \simeq k^2,$$

因此每个与  $s$  相邻的顶点对应着二维  $k$ -向量空间中  $k^2$  的一条直线, 或  $\mathbb{P}^1(k)$  中的一个点. 容易看出这是一个双射, 因此与一个顶点邻接的顶点数或与其相连的边数总是  $q + 1$ .

### 2.1.2 $I$ 的几何实现

按定义, 图  $I$  的几何实现  $I_{\mathbb{R}}$  是向  $I$  的每一条边  $[s, s']$  指定一条线段

$$\{ts + (1 - t)s' : 0 \leq t \leq 1\},$$

再将所有边以顶点相连接所得到的对象图形; 上式中的加法看作形式和. 我们可以将  $I_{\mathbb{R}}$  与二维  $K$ -向量空间  $K^2$  中 (非 Archimedean)  $K$ -范数的  $K^\times$ -等价类等同起来; 其中  $K^2$  中的两个  $K$ -范数  $|\cdot|$  与  $|\cdot|'$  是  $K^\times$ -等价的, 如果存在  $\lambda \in K^\times$ , 使得  $|\cdot| = \lambda|\cdot|'$ .

1. 对于顶点  $s = [M]$ , 定义范数  $|\cdot|_M$  为以  $M$  为单位球的  $K^2$  中范数. 具体地, 如果  $M = \mathcal{O}e_1 + \mathcal{O}e_2$ , 则

$$|a_1e_1 + a_2e_2|_M := \max\{|a_1|, |a_2|\}.$$

对于不同的代表元, 这样定义出的范数自然也相差一个  $K^\times$  中元素的数乘.

2. 设顶点  $s = [M]$  与  $s' = [M']$  相邻, 且  $\varpi M \subset M' \subset M$ . 通过取  $M/\varpi M$  的  $k$ -基再提升回  $M$  中, 我们总是可以取得  $M$  的一组  $\mathcal{O}$ -基  $e_1, e_2$ , 使得  $M' = \mathcal{O}e_1 + \mathcal{O}\varpi e_2$ . 于是对于  $v = a_1e_1 + a_2e_2 \in K^2$ ,

$$|v|_M = \max\{|a_1|, |a_2|\},$$

$$|v|_{M'} = \max\{|a_1|, q|a_2|\}.$$

对于边  $[s, s']$  中的点  $x = (1 - t)s + ts'$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , 我们定义  $K^2$  上的范数  $|\cdot|_x$  为

$$|v|_x = |v|_t := \max\{|a_1|, q^t|a_2|\}.$$

基于  $K$  上赋值的离散性, 我们看到

$$\{v \in K^2 : |v|_t \leq \lambda\} = \begin{cases} M, & q^t \leq \lambda < q, \\ M', & 1 \leq \lambda < q^t. \end{cases}$$

反之, 设  $|\cdot|$  是  $K^2$  上的范数. 首先注意到如果  $|\cdot|$  是  $K^2$  中的范数, 则闭球  $M_\lambda := \{v \in K : |v| \leq \lambda\}$  对任何正实数  $\lambda$  都是  $K^2$  中的格, 并且

$$M_{\lambda'} \subset M_\lambda \iff \lambda' \leq \lambda, \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}_{>0}.$$

又因为  $\varpi M_\lambda = M_{q^{-1}\lambda}$ , 所以格  $M_\lambda$  的位似类对于不同正实数  $\lambda$  至多取两个值, 并且  $\lambda \mapsto [M_\lambda]$  是周期的.

1. 如果  $[M_\lambda] = s$  恒成立,  $|\cdot|$  自然对应着  $|\cdot|_s$ .
2. 如果  $[M_\lambda]$  或者等于  $s$ , 或者等于  $s'$ , 则乘以适当的  $K^\times$  中元素后,

$$M_\lambda = \begin{cases} M, & q^t \leq \lambda < q, \\ M', & 1 \leq \lambda < q^t. \end{cases}$$

于是  $|\cdot|$  对应于  $(1-t)s + ts' \in [s, s']$ .

## 2.2 刚性解析空间 $\Omega$

记  $\Omega := \mathbb{P}^1(C) - \mathbb{P}^1(K)$ . 全体  $K$ -线性同态  $K^2 \rightarrow C$  组成的空间

$$\text{Hom}_K(K^2, C) \simeq \text{Hom}_K(K^2, K) \otimes_K C$$

是二维的  $C$ -线性空间; 并且在此同构下,  $K^2 \subset C^2$  的原像正是那些满足  $f(0, 1)$  与  $f(1, 0)$  在  $K$  上线性相关的同态  $f$  之集合. 因此存在自然的双射

$$(\text{Hom}_K(K^2, C) - \{0\})/C^\times \simeq \mathbb{P}^1(C),$$

并且  $\mathbb{P}^1(K)$  在此双射下的原像为秩为 1 的同态之集合. 于是  $\Omega$  作为集合可以与  $K$ -线性嵌入  $K^2 \hookrightarrow C$  之集合的  $K^\times$ -数乘等价类等同; 这里的数乘等价与范数的定义相似: 称  $z, z' : K^2 \hookrightarrow C$  是  $K^\times$ -数乘等价的, 如果存在  $\lambda \in K^\times$ , 使得  $z = \lambda z'$ . 对于每个这样的嵌入  $z : K^2 \hookrightarrow C$ , 可以定义出  $K^2$  上的范数  $|\cdot|_z := |z(\cdot)|$ , 由此定义出映射

$$\lambda : \Omega \rightarrow I_{\mathbb{R}}, [z] \mapsto [|\cdot|_z].$$

**命题 2.1.** 固定  $I$  中相邻的顶点  $s = [M]$  和  $s' = [M']$ , 并且固定  $M$  的基  $e_1, e_2$  使得  $M' = \mathcal{O}e_1 + \mathcal{O}\varpi e_2$ . 对  $\Omega$  中的每个嵌入的等价类, 选取代表元  $z : K^2 \hookrightarrow C$  使得  $z(e_2) = 1$ , 则  $z(e_1) \in C - K$ ; 以  $z \mapsto z(e_1) = \zeta$  将  $\Omega$  与  $C - K$  等同.

在上述选取下, 我们有:

$$\lambda^{-1}(s) = B(0, 1) - \bigcup_{a \in \mathcal{O}/\varpi\mathcal{O}} B^\circ(a, 1),$$

$$\lambda^{-1}(s') = B(0, q^{-1}) - \bigcup_{b \in \varpi\mathcal{O}/\varpi^2\mathcal{O}} B^\circ(b, q^{-1}),$$

$$\lambda^{-1}(x) = \{\zeta \in C : |\zeta| = q^{-t}\}, \quad x = (1-t)s + ts', \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$\lambda^{-1}([s, s']) = B(0, 1) - \bigcup_{a \in (\mathcal{O}/\varpi\mathcal{O})^\times} B^\circ(a, 1) - \bigcup_{b \in \varpi\mathcal{O}/\varpi^2\mathcal{O}} B^\circ(b, q^{-1}).$$

其中  $B(x, r) = \{x \in C : |x| \leq r\}$ ,  $B^\circ(x, r) = \{x \in C : |x| < r\}$ .

证明. 参见 [BC91, Chapter I, (2.3)]. □

此命题说明任何 Bruhat-Tits 树的顶点和边在  $\lambda$  下的原像都是  $\mathbb{P}_K^1(C)$  中的仿射胚子集, 即  $\mathbb{P}_K^1(C)$  中有限个开圆盘的补集; 并且  $\lambda^{-1}(s)$  与  $\lambda^{-1}(s')$  均为  $\lambda^{-1}([s, s'])$  的开子集. 将所有边在  $\lambda$  下的原像沿相应顶点的原像粘合, 我们就得到了一个  $K$  上的刚性解析空间的  $C$ -点集, 它作为集合等于  $\Omega(C)$ . 我们称刚性解析空间  $\Omega$  为  $K$  上的  $p$ -进半平面 ( $p$ -adic half plane).

## 2.3 形式概形 $\widehat{\Omega}$

对于  $K^2$  中的格  $M$ , 我们可以定义相应的射影空间  $\mathbb{P}(M)$ . 选取  $M$  的一组基等价于固定同构  $M \simeq \mathcal{O}^2$ , 从而诱导同构  $\mathbb{P}(M) \simeq \mathbb{P}_{\mathcal{O}}^1$ . 而格之间的位似  $M' = \lambda M$  决定出唯一的同构  $\mathbb{P}(M) \simeq \mathbb{P}(M')$ , 因而我们可以任意选取  $s = [M]$  的代表元  $M$ , 定义  $\mathbb{P}_s := \mathbb{P}(M)$ .

令  $\Omega_s$  为  $\mathbb{P}_s$  去除其特殊纤维的有理点得到的开子概形,  $\widehat{\Omega}_s$  为  $\Omega_s$  沿其特殊纤维的形式完备化.

**命题 2.2.** 我们有形式概形的同构

$$\widehat{\Omega}_s \simeq \mathrm{Spf} \mathcal{O} \left\langle T, \frac{1}{T^q - T} \right\rangle.$$

证明. 首先,  $\Omega_s$  的特殊纤维是  $(\Omega_s)_k \simeq \mathbb{P}_k^1 - \mathbb{P}_k^1(k) = \mathrm{Spec} k[T, 1/(T^q - T)]$ . 其次, 选取  $\mathbb{P}_s^1$  的仿射开覆盖  $U_0 = \mathrm{Spec} \mathcal{O}[T]$  和  $U_1 = \mathrm{Spec} \mathcal{O}[1/T]$ , 使得  $\infty \in \mathbb{P}_k^1(k)$  对应到  $(p, 1/T) \in U_1$ . 尽管

$$\Omega_{s0} := U_0 \cap \Omega_s = \mathbb{A}_{\mathcal{O}}^1 - \mathbb{A}_k^1(k) = \mathbb{A}_K^1 \cup (\mathbb{A}_k^1 - \mathbb{A}_k^1(k))$$

也不是仿射概形, 但随着  $\mathbb{A}_K^1$  在模可逆元  $\varpi$  时被消灭,

$$\Omega_{s0}/\varpi^n = \Omega_{s0} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/\varpi^n = \mathrm{Spec} \mathcal{O}/\varpi^n[T, 1/(T^q - T)].$$

故  $\widehat{\Omega}_{s0} = \mathrm{Spf} \mathcal{O} \langle T, 1/(T^q - T) \rangle$ . 同理  $\widehat{\Omega}_{s1} = \mathrm{Spf} \mathcal{O} \langle 1/T, T^q/(1 - T^{q-1}) \rangle$ . 这两片仿射空间相等, 并通过恒等映射粘合成  $\widehat{\Omega}_s = \mathrm{Spf} \mathcal{O} \langle T, 1/T, 1/(T^{q-1} - 1) \rangle$ . □

因此  $\widehat{\Omega}_s$  的刚性泛在纤维  $\Omega_s^{\mathrm{rig}}$  同构于  $\mathrm{Sp} K \langle T, 1/(T^q - T) \rangle$ , 其  $C$  点正是  $\mathbb{P}_K^1(C) = \mathbb{P}_{\mathcal{O}}^1(\mathcal{O}_C)$  去除那些不特殊化到  $\mathbb{P}_k^1(k)$  的点. 在命题 2.1 中的选取下,  $\Omega_s^{\mathrm{rig}}(C) = \lambda^{-1}(s)$ .

然后, 考虑邻接  $s$  的顶点  $s' = [M']$ , 它按下述方式定出  $\mathbb{P}_s^1$  的特殊纤维上的一个有理点: 选取代表元使得  $\varpi M \subset M' \subset M$ , 则满射

$$M \otimes_{\mathcal{O}} k = M/\varpi M \twoheadrightarrow M/M' \simeq k$$

给出  $\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}_s$  的特殊纤维的一个  $k$  点. 不妨将此闭点记作  $s'$ . 具体来说, 选取基使得

$$M = \mathcal{O}e_1 + \mathcal{O}e_2, \quad M' = \mathcal{O}e_1 + \mathcal{O}\varpi e_2.$$

在等同

$$\mathbb{P}_s(k) = (\mathbb{P}_s)_k(k) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(k\bar{e}_1 + k\bar{e}_2) = \mathbb{P}^1(k) = \left\{ [a : b] = \frac{b}{a} \in \mathbb{P}^1(k) = k \cup \infty \right\}$$

下,  $M'/\varpi = k\bar{e}_1 \in \mathbb{P}_s(k)$  对应到  $[1 : 0] = 0$ , 即  $I := (\varpi, T_0) \in \text{Proj } \mathcal{O}[T_0, T_1] \simeq \mathbb{P}_s$ .

令  $\mathbb{P}_{[s, s']}$  为  $\mathbb{P}_s$  沿  $s'$  的爆破. 命  $\Omega_{[s, s']}$  为  $\mathbb{P}_{[s, s']}$  去除其特殊纤维中  $s'$  以外的有理点所得开子概形, 再定义  $\hat{\Omega}_{[s, s']}$  为  $\Omega_{[s, s']}$  沿其特殊纤维的形式完备化.

**命题 2.3.** 我们有形式概形的同构

$$\hat{\Omega}_{[s, s']} \simeq \text{Spf } \mathcal{O} \left\langle T_0, T_1, \frac{1}{T_0^{q-1} - 1}, \frac{1}{T_1^{q-1} - 1} \right\rangle / (T_0 T_1 - \varpi),$$

并且  $T_0, T_1$  分别给出  $\hat{\Omega}_s$  和  $\hat{\Omega}_{s'}$  到  $\hat{\Omega}_{[s, s']}$  的开浸入.

证明. 参考例 6.4 和命题 2.2, 容易证明. □

最终, 沿命题 2.3 中的浸入粘合所有  $\hat{\Omega}_{[s, s']}$ , 我们就得到了  $\mathcal{O}$  上的形式概型  $\Omega$ , 其刚性泛在纤维的  $C$ -点等于  $\Omega(C)$ .

## 3 $\hat{\Omega}$ 的模诠释

### 3.1 Deligne 的函子

记  $\mathbf{Alg}_{\mathcal{O}}$  为交换  $\mathcal{O}$ -代数范畴. 我们考虑  $\mathbf{Alg}_{\mathcal{O}}$  的以下两个子范畴:

- ◇  $\varpi$ -幂零  $\mathcal{O}$ -代数范畴  $\mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}}$ , 其对象为  $\varpi$  在其中幂零的交换  $\mathcal{O}$ -代数, 态射为  $\mathcal{O}$ -同态;
- ◇ 完备  $\mathcal{O}$ -代数范畴  $\mathbf{Compl}_{\mathcal{O}}$ , 其对象为  $\varpi$ -进完备交换  $\mathcal{O}$ -代数, 态射为连续  $\mathcal{O}$ -同态.

易见  $\mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}}$  是  $\mathbf{Compl}_{\mathcal{O}}$  的全子范畴, 而  $\mathbf{Compl}_{\mathcal{O}}$  可以看作  $\mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}}$  的完备化. 我们将形式概型看作  $\mathbf{Compl}_{\mathcal{O}}$  上的函子, 详见附录 6.3.2.

对  $I$  的顶点  $s = [M]$ , 定义  $\mathbf{Compl}_{\mathcal{O}}$  上取值在集合范畴  $\mathbf{Set}$  的函子  $\mathcal{F}_s$  如下. 对  $R \in \mathbf{Compl}_{\mathcal{O}}$ , 命  $\mathcal{F}_s(R)$  为二元对  $(L, \alpha)$  的同构类, 其中:

- ◇  $L$  为秩 1 的自由  $R$ -模,  $\alpha : M \rightarrow L$  为  $\mathcal{O}$ -模同态.
- ◇ 对每个  $x \in \text{Spec } R/\varpi$ , 由于  $\varpi$  属于  $x$  对应的  $R$  中素理想  $\mathfrak{p}$ , 故从  $\mathbf{k}(x) = R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$  看出  $\varpi M$  落在  $M \xrightarrow{\alpha} L \rightarrow L \otimes \mathbf{k}(x)$  的核中, 于是可以定义  $\alpha_x : M/\varpi \rightarrow L \otimes_R \mathbf{k}(x)$ ; 我们要求  $\alpha_x$  为单射.

**命题 3.1.** 函子  $\mathcal{F}_s$  由  $\hat{\Omega}_s$  表出.

证明. 同态  $\alpha$  的条件表明对任意  $u \in M - \varpi M$ ,  $\alpha(u) \in L$  不等于 0, 从而是  $L$  的生成元. 特别地, 这说明  $\alpha \otimes \text{id}_R : M \otimes_{\mathcal{O}} R \rightarrow L$  为满射. 因此

$$(L, \alpha) \mapsto \alpha \otimes \text{id}_R : M \otimes_{\mathcal{O}} R \twoheadrightarrow L$$

给出了函子的嵌入

$$\mathcal{F}_s(R) \hookrightarrow \widehat{\mathbb{P}}_s(R) = \mathbb{P}_s(R) = \{\widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_{\text{Spec } R} \rightarrow \mathcal{L} : \mathcal{L} \text{ 为可逆 } \mathcal{O}_{\text{Spec } R} \text{ -模}\} / \simeq.$$

为了描述这个函子, 取  $M$  的一组基  $e_1, e_2$ . 则  $\alpha(e_1), \alpha(e_2)$  都是  $L$  的生成元, 故  $(L, \alpha)$  的同构类由唯一的  $\zeta \in R$  使得  $\alpha(e_1) = \zeta \alpha(e_2)$  决定; 事实上还立刻看出  $\zeta \neq 0$ . 不妨命  $\alpha(e_2) = 1$ . 定义等价于

$$M/\varpi = ke_1 \oplus ke_2 \rightarrow L \otimes_R \mathbf{k}(x) \simeq R \otimes_R \mathbf{k}(x) = \mathbf{k}(x), \quad e_1 \mapsto \bar{\zeta}, \quad e_2 \mapsto 1$$

为单射, 即对所有  $a \in k, \bar{\zeta} - a \cdot 1 \neq 0 \in \mathbf{k}(x)$ .

另一方面, 由命题 6.2 和命题 2.2 知,

$$\widehat{\Omega}_s(R) = \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\text{Spf } R, \widehat{\Omega}_s) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\text{Spec } R, \text{Spec } \mathcal{O}[T, 1/(T^q - T)]).$$

注意到给出态射  $\text{Spec } R \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}[T, 1/(T^q - T)]$  等价于给出态射  $\text{Spec } R \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}[T]$ , 使得  $\text{Spec } R$  中的每个点  $x$  都不被映到  $\mathbb{A}_k^1(k) \hookrightarrow \text{Spec } \mathcal{O}[T]$  中; 即对于对所有  $x \in \text{Spec } R$  和  $a \in k$ , 不存在交换图

$$\begin{array}{ccc} R & \longleftarrow & \mathcal{O}[T] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{k}(x) & \longleftarrow & k[T]/(T - a); \end{array}$$

因此, 给出态射  $\text{Spec } R \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}[T]$  等价于决定  $T$  在  $\mathcal{O}[T] \rightarrow R$  下的像  $\zeta$ , 而上述交换图不存在等价于  $\zeta$  在  $\mathbf{k}(x)$  中的像  $\bar{\zeta}$  满足  $\bar{\zeta} - a \cdot 1 \neq 0$ , 对任何  $a \in k$  成立.

如果  $x \in \text{Spec } R[1/\varpi] \hookrightarrow \text{Spec } R$ , 则作为泛在纤维中的点, 其剩余类域  $\mathbf{k}(x)$  是  $K$  的扩张, 从而是特征零的域, 因此不存在态射  $k \rightarrow \mathbf{k}(x)$ . 所以只需考察  $\text{Spec } R/\varpi \hookrightarrow \text{Spec } R$  中的点; 而  $x$  在  $\text{Spec } R$  与  $\text{Spec } R/\varpi$  中的剩余类域相等. 这正说明  $\widehat{\Omega}_s(R) = \mathcal{F}_s(R)$ .  $\square$

对 Bruhat-Tits 树  $I$  的边  $[s, s']$ , 定义  $\mathbf{Compl}_{\mathcal{O}}$  上的函子  $\mathcal{F}_{[s, s']}$  如下. 取  $s$  与  $s'$  的代表元  $M, M'$ , 使得  $\varpi M \subset M' \subset M$ . 命  $\mathcal{F}_{[s, s']}(R)$  为六元组  $(L, L', \alpha, \alpha', c, c')$  的同构类, 其中:

- ◇  $L, L'$  为秩 1 的自由  $R$ -模;  $\alpha : M \rightarrow L, \alpha' : M \rightarrow L'$  为  $\mathcal{O}$ -模同态;  $c : L \rightarrow L', c' : L' \rightarrow L$  为  $R$ -模同态.

- ◇ 图

$$\begin{array}{ccccc} \varpi M & \hookrightarrow & M' & \hookrightarrow & M \\ \downarrow \alpha/\varpi & & \downarrow \alpha' & & \downarrow \alpha \\ L & \xrightarrow{c} & L' & \xrightarrow{c'} & L \end{array} \quad (1)$$

交换.

- ◇ 对每个  $x \in \text{Spec } R/\varpi$ ,

$$\begin{aligned} \ker[\alpha_x : M/\varpi \rightarrow L \otimes_R \mathbf{k}(x)] &\subset M'/\varpi M, \\ \ker[\alpha'_x : M'/\varpi \rightarrow L \otimes_R \mathbf{k}(x)] &\subset \varpi M/\varpi M'; \end{aligned}$$



**命题 3.2.** 函子  $\mathcal{F}_{[s,s']}$  由  $\widehat{\Omega}_{[s,s']}$  表出.

证明. 选取基使得  $M = \mathcal{O}e_1 + \mathcal{O}e_2$ ,  $M' = \mathcal{O}e_1 + \mathcal{O}\varpi e_2$ . 条件

$$\begin{aligned}\ker[\alpha_x : M/\varpi \rightarrow L \otimes_R \mathbf{k}(x)] &\subset M'/\varpi M, \\ \ker[\alpha'_x : M'/\varpi \rightarrow L \otimes_R \mathbf{k}(x)] &\subset \varpi M/\varpi M'.\end{aligned}$$

等价于

$$\begin{aligned}\alpha_x : M/M' \simeq ke_2 &\hookrightarrow L \otimes_R \mathbf{k}(x) \simeq \mathbf{k}(x), \\ \alpha'_x : M'/\varpi M \simeq ke_1 &\hookrightarrow L \otimes_R \mathbf{k}(x) \simeq \mathbf{k}(x).\end{aligned}$$

即  $\alpha(e_2)$  为  $L$  的生成元,  $\alpha'(e_1)$  为  $L'$  的生成元. 于是二元组  $(L, \alpha)$  和  $(L', \alpha')$  的同构类分别由唯一的  $\zeta, \eta \in R$ , 使得

$$\alpha(e_1) = \zeta\alpha(e_2), \quad \eta\alpha(e_1) = \alpha'(e_2)$$

决定. 不妨命  $\alpha(e_2) = 1 \in L$ ,  $\alpha'(e_1) = 1 \in L'$ . 为了得到六元组, 只需添入交换图(1)的信息; 直接的验算表明它等价于

$$c = \eta, \quad c' = \zeta, \quad \zeta\eta = \eta\zeta = \varpi.$$

于是, 给出六元组的同构类归结为给出  $\zeta, \eta \in R$ , 使得  $\zeta\eta = \varpi$ , 且对所有  $a, b \in k$ ,  $\bar{\zeta} - a \cdot 1 \neq 0 \in \mathbf{k}(x)$ ,  $\bar{\eta} - b \cdot 1 \neq 0 \in \mathbf{k}(x)$ . 而

$$\widehat{\Omega}_{[s,s]}(R) = \text{Hom}_{\mathcal{O}} \left( \mathcal{O} \left[ T_0, T_1, \frac{1}{T_0^{q-1} - 1}, \frac{1}{T_1^{q-1} - 1} \right] / (T_0 T_1 - \varpi), R \right).$$

类似于命题 3.1, 按定义展开即可看出  $\widehat{\Omega}_{[s,s]}(R) = \mathcal{F}_{[s,s]}(R)$ . □

### 3.2 Drinfeld 的函子: 定义和陈述

对任何  $\mathcal{O}$ -代数  $R$ , 定义

$$R[\Pi] := R[X]/(X^2 - \varpi)$$

并装备  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -分次:  $R[\Pi]_0 = R$ ,  $R[\Pi]_1 = R\Pi$ .

**定义 3.1.** 定义  $\mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}}$  上取值在集合范畴的函子  $\mathcal{F}$  如下. 任取  $B \in \mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}}$ , 记  $S = \text{Spec } B$ . 定义  $\mathcal{F}(B) = \mathcal{F}(S)$  为四元组  $(\eta, T, u, r)$  的同构类, 其中:

- ◇  $\eta = \eta_0 \oplus \eta_1$  为  $S$  上 Zariski-可构造的平坦  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -分次  $\mathcal{O}[\Pi]$ -模.
- ◇  $T = T_0 \oplus T_1$  为  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -分次  $\mathcal{O}_S[\Pi]$ -模, 满足齐次分支  $T_0$  和  $T_1$  皆为  $S$  上可逆层.
- ◇  $u : \eta \rightarrow T$  为 0 次  $\mathcal{O}[\Pi]$ -线性态射, 满足  $u \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_S : \eta \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_S \hookrightarrow T$  为单射.
- ◇  $r : \underline{K}^2 \rightarrow \eta_0 \otimes_{\mathcal{O}} K$  为  $K$ -线性同构.

并且这些资料被以下条件限制. 记  $S_i$  为  $\Pi : T_i \rightarrow T_{i+1}$  的零点集 (zero locus).

C1  $\eta_i|_{S_i} = \underline{\mathcal{O}}^2$ .

C2 对每个  $S$  的几何点  $x$ ,  $u$  诱导的映射  $\eta_x/\Pi\eta_x \hookrightarrow T(x)/\Pi T(x)$  为单射.

C3  $\bigwedge^2 \eta_i|_{S_i} = \varpi^{-i} (\bigwedge^2 (\Pi^i r \underline{\mathcal{O}}^2))|_{S_i}$ .

让我们初步观察该定义.

1. 给出层  $\eta$  与  $T$  上的  $\Pi$  作用和态射  $u$  等价于给出周期 2 的  $\mathcal{O}$ -模范畴中交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \xrightarrow{\Pi} & \eta_0 & \xrightarrow{\Pi} & \eta_1 & \xrightarrow{\Pi} & \eta_0 \xrightarrow{\Pi} \cdots \\
 & & \downarrow u_0 & & \downarrow u_1 & & \downarrow u_0 \\
 \cdots & \xrightarrow{\Pi} & T_0 & \xrightarrow{\Pi} & T_1 & \xrightarrow{\Pi} & T_0 \xrightarrow{\Pi} \cdots
 \end{array}$$

2. 取  $S$  的仿射开覆盖  $\{U_j = \text{Spec } R_j\}_j$  使得可逆层  $T_0$  与  $T_1$  限制在  $U_j$  上同构于  $\mathcal{O}_{U_j}$ . 于是  $\Pi : T_i|_{U_j} \rightarrow T_1|_{U_j}$  由元素  $f_i \in R_j$  给出,  $i = 0, 1$ . 按定义, 限制在  $U_j$  上,  $\Pi = f_i$  的零点集为

$$\{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R_j : [R_{j\mathfrak{p}} \ni 1 \mapsto f_i \in R_{j\mathfrak{p}}] = 0\} = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } R_j : f_i \in \mathfrak{p}\} = V(f_i),$$

即  $S_i \cap U_j = V(f_i)$ . 作为态射,  $\Pi^2 = \varpi$ ; 故作为元素,  $f_0 f_1 = \varpi$ . 由于  $R_j$  是  $R$ -代数,  $\varpi$  在  $R$  中幂零说明  $\varpi$  也在  $R_j$  中幂零, 所以

$$(S_0 \cap U_j) \cup (S_1 \cap U_j) = V(f_0) \cup V(f_1) = V(\varpi) = \text{Spec } R_j.$$

因此,  $S = S_0 \cup S_1$ .

**定理 3.1.** 函子  $\mathcal{F} : \text{Nilp}_{\mathcal{O}} \rightarrow \text{Set}$  由形式概形  $\widehat{\Omega}$  表出.

### 3.3 自然变换 $\widehat{\Omega} \rightarrow \mathcal{F}$ 的构造

首先注意到以下事实. 取 Bruhat-Tits 树  $I$  的顶点  $s = [M]$ . 由于  $\bigwedge^2 M$  是  $\bigwedge^2 K = K$  的  $\mathcal{O}$ -子模, 一定存在  $n \in \mathbb{Z}$  使得  $\bigwedge^2 M = \varpi^n \mathcal{O}$ . 如果  $\lambda M$  是  $s$  的另一个代表元, 其中  $\lambda = u\varpi^m$ ,  $u \in \mathcal{O}^\times$ , 则

$$\bigwedge^2 \lambda M = \lambda^2 \bigwedge^2 M = \varpi^{2m+n} \mathcal{O},$$

故整数  $n$  的奇偶性无关代表元  $M$  的选取. 我们称顶点  $s = [M]$  是**奇的** (相应地, **偶的**), 如果上述整数  $n$  是奇数 (相应地, 偶数). 又注意到, 如果  $s' = [M']$  是邻接  $s$  的顶点, 且  $\varpi M \subset M' \subset M$ , 则

$$\varpi^2 \bigwedge^2 M \subset \bigwedge^2 M' \subset \bigwedge^2 M^2,$$

因此  $s'$  的奇偶性与  $s$  相反.

此后我们总是选取代表元  $M$ , 使得  $\bigwedge^2 M = \varpi^{-1} \mathcal{O}$  或者  $\bigwedge^2 M = \mathcal{O}$ , 并且固定边  $[s, s']$  的定向, 使得  $s$  为奇而  $s'$  为偶.

### 3.3.1 嵌入 $\mathcal{F}_s \rightarrow \mathcal{F}$

取  $I$  的顶点  $s$  和  $B \in \mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}}$ . 先考虑  $s$  为奇顶点的情形. 对每个点  $(L, \alpha) \in \mathcal{F}_s(R)$ , 我们定义交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
 \longrightarrow & \eta_0 = \underline{M} & \xrightarrow{\Pi=1} & \eta_1 = \underline{M} & \xrightarrow{\Pi=\varpi} & \eta_0 = \underline{M} & \longrightarrow \\
 & \downarrow u_0=\alpha & & \downarrow u_1=\alpha & & \downarrow u_0=\alpha & \\
 \longrightarrow & T_0 = \tilde{L} & \xrightarrow{\Pi=1} & T_1 = \tilde{L} & \xrightarrow{\Pi=\varpi} & T_0 = \tilde{L} & \longrightarrow
 \end{array}$$

嵌入  $M \hookrightarrow K^2$  诱导出同构  $r: K^2 \xrightarrow{\sim} \underline{M} \otimes_{\mathcal{O}} K = \eta_0 \otimes_{\mathcal{O}} K$ . 显然四元组  $(\eta, T, u, r)$  适合定义 3.1 中的类型要求; 我们来验证剩余的三个条件.

C1 层  $\eta_0$  和  $\eta_1$  均为常值层  $\underline{M}$ , 条件显然成立.

C2 取  $S$  的几何点  $x$ . 在  $\eta_x = \eta_{0,x} \oplus \eta_{1,x} = M \oplus M$  上,  $\Pi$  的作用由

$$\Pi: M^2 \rightarrow M^2, (m_0, m_1) \mapsto (\varpi m_1, m_0),$$

给出, 于是商

$$\eta_x / \Pi \eta_x = \frac{M \oplus M}{\varpi M \oplus M} \simeq M / \varpi M.$$

类似地,  $T(x) = T_x \otimes_R \mathbf{k}(x) = L^2 \otimes_R \mathbf{k}(x)$ ,

$$\Pi: T(x) \rightarrow T(x), (l_0, l_1) \otimes a \mapsto (\varpi l_1, l_0) \otimes a,$$

商

$$T(x) / \Pi T(x) = \frac{(L \oplus L) \otimes_R \mathbf{k}(x)}{(\varpi L \oplus L) \otimes_R \mathbf{k}(x)} \simeq \frac{\mathbf{k}(x)}{\varpi \mathbf{k}(x)}.$$

因为  $\mathbf{k}(x)$  是  $R \in \mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}}$  上的代数,  $\varpi$  也在域  $\mathbf{k}(x)$  中幂零, 故  $\varpi \mathbf{k}(x) = 0$ ,  $T(x) / \Pi T(x) \simeq \mathbf{k}(x)$ .

态射  $u$  诱导出映射

$$u_x: \eta_x \rightarrow T(x), (m_0, m_1) \mapsto (\alpha(m_0), \alpha(m_1)) \otimes 1,$$

进而诱导出  $M / \varpi M \simeq \eta_x / \Pi \eta_x \rightarrow \mathbf{k}(x) \simeq T(x) / \Pi T(x)$ , 这正是  $\mathcal{F}_s$  定义中的单射  $\alpha_x: M / \varpi \hookrightarrow L \otimes_R \mathbf{k}(x) \simeq \mathbf{k}(x)$ .

C3 显然  $S_0 = \emptyset$ , 故  $S_1 = S$ . 观察  $S$  上任意一点  $x$  处的茎. 由定义,  $r(\mathcal{O}^2) = M = \eta_{0,x}$ , 而  $\Pi|_{\eta_0} = 1$ ; 由奇顶点的定义立刻看到 C3 成立.

若  $s$  为偶顶点, 则对每个点  $(L, \alpha) \in \mathcal{F}_s(R)$ , 我们定义交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
 \longrightarrow & \eta_0 = \underline{M} & \xrightarrow{\Pi=\varpi} & \eta_1 = \underline{M} & \xrightarrow{\Pi=1} & \eta_0 = \underline{M} & \longrightarrow \\
 & \downarrow u_0=\alpha & & \downarrow u_1=\alpha & & \downarrow u_0=\alpha & \\
 \longrightarrow & T_0 = \tilde{L} & \xrightarrow{\Pi=\varpi} & T_1 = \tilde{L} & \xrightarrow{\Pi=1} & T_0 = \tilde{L} & \longrightarrow
 \end{array}$$



嵌入  $M \hookrightarrow K^2$  诱导出同构  $r : \underline{K}^2 \xrightarrow{\sim} \underline{M} \otimes_{\mathcal{O}} K$ . 验证与奇顶点的情形类似, 略去不表.

### 3.3.2 嵌入 $\mathcal{F}_{[s,s']} \rightarrow \mathcal{F}$

取  $I$  的边  $[s, s']$ ,  $B \in \mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}}$  和  $\mathcal{F}_{[ss']}(B)$  中的点

$$\begin{array}{ccccc}
 \varpi M & \hookrightarrow & M' & \hookrightarrow & M \\
 \downarrow \alpha/\varpi & & \downarrow \alpha' & & \downarrow \alpha \\
 L & \xrightarrow{c} & L' & \xrightarrow{c'} & L.
 \end{array} \tag{2}$$

我们逐次构造如下.

以图

$$\longrightarrow T_0 = \tilde{L} \xrightarrow{\Pi=c} T_1 = \tilde{L}' \xrightarrow{\Pi=c'} T_0 = \tilde{L} \longrightarrow$$

定义  $T$  及其上的  $\Pi$ -作用. 于是  $S_0$  为  $c : L' \rightarrow L$  的零点集,  $S_1$  为  $c' : L \rightarrow L'$  的零点集. 令  $U_0 \subset S_0$  收集所有使得  $c'_x$  可逆的  $x \in S$ ,  $U_1 \subset S_1$  收集所有使得  $c_x$  可逆的  $x \in S$ .

在  $U_0$  和  $U_1$  上, (2) 分别退化为  $\mathcal{F}_s(U_0)$  和  $\mathcal{F}_{s'}(U_1)$  的点, 从而对应到  $\mathcal{F}(U)$  和  $\mathcal{F}(U')$  的点. 在  $V := S - (U_0 \cup U_1) = S_0 \cap S_1$  上, 我们以资料

$$\begin{array}{ccccc}
 \underline{M}' & \hookrightarrow & \underline{M} & \xrightarrow{\Pi=\varpi} & \underline{M}' \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \tilde{L}' & \xrightarrow{c'} & \tilde{L} & \xrightarrow{c} & \tilde{L}'
 \end{array}.$$

和  $M' \hookrightarrow K^2$  定义  $\mathcal{F}(V)$  的一个点.

然后, 我们证明这三个点粘合为  $\mathcal{F}(S)$  的点  $(\eta, T, u, r)$ , 其中  $T$  已经被定义. 我们以交换图

$$\begin{array}{ccccc}
 M|_{U_0} & \xlongequal{\quad} & M|_{U_0} & \xrightarrow{\varpi} & M|_{U_0} \\
 \uparrow & & \text{id} \uparrow & & \uparrow \\
 M'|_V & \hookrightarrow & M|_V & \xrightarrow{\varpi} & M'|_V \\
 \downarrow \text{id} & & \downarrow \varpi & & \downarrow \text{id} \\
 M'|_{U_1} & \xrightarrow{\varpi} & M'|_{U_1} & \xlongequal{\quad} & M'|_{U_1}
 \end{array}$$

定义

$$\eta_0 \xrightarrow{\Pi} \eta_1 \xrightarrow{\Pi} \eta_0.$$

特别地,  $\eta_0|_{S_0} = M$  而  $\eta_1|_{S_1} = M'$ . 上图的交换性又表明三个点中的  $r$  粘合为  $r : \underline{K}^2 \simeq \eta_0 \otimes_{\mathcal{O}} K$ . 最后, 定义  $u_0|_{S_0} := \alpha'$ ,  $u_0|_{U_1} := c^{-1}\alpha$ , 并类似地定义  $u_1$ . 这就给出了嵌入  $\mathcal{F}_{[s,s']} \hookrightarrow \mathcal{F}$ . 粘合所有这些信息, 便得到  $\hat{\Omega} \rightarrow \mathcal{F}$ ; [BC91, I, 5.6] 证明了此自然变换为同构.

## 4 形式群与 Cartier 理论

形式群在有些文献中被定义为满足类似群乘法性质的形式幂级数, 即形式群律; 有些文献中则将形式群看作一类群函子. 本节将主要参考 [Zin84], 采用函子的观点建立形式群的 Cartier 理论. 囿于篇幅限制, 陈述的大多数结论将不给出证明.

### 4.1 形式群: 函子观点

我们以幂零代数上的函子定义形式群, 并指出形式群律与作为函子的形式群的联系.

#### 4.1.1 形式群

环  $R$  上的一个**幂零代数** (nilpotent algebra) 指  $R$ -代数  $N$ , 使得存在某个自然数  $r$ ,  $N^r = 0$ . 记  $\mathbf{Nil}_R$  为  $R$  上幂零代数构成的范畴.

任何非零的幂零代数都不含幺, 但是我们可以将幂零  $R$ -代数范畴嵌入含幺  $R$ -代数的范畴中: 设  $N$  为幂零  $R$ -代数, 我们在  $R \oplus N$  上定义自然的乘法:

$$(r_1, n_1) \cdot (r_2, n_2) := (r_1 r_2, r_1 n_2 + r_2 n_1 + n_1 n_2).$$

于是  $R \oplus N \in \mathbf{Alg}_R$ . 注意到投影  $R \oplus N \rightarrow R$  与嵌入  $R \hookrightarrow R \oplus N$  的复合等于  $\text{id}_R$ , 于是我们可以具体描述  $\mathbf{Nil}_R$  在  $\mathbf{Alg}_R$  中的像.

**定义 4.1.** 一个**增广  $R$ -代数** (augmented  $R$ -algebra) 指含幺的  $R$  代数  $A$  并装备以**增广同态** (augmentation)  $\epsilon: A \rightarrow R$ , 使得同态的复合  $R \rightarrow A \xrightarrow{\epsilon} R$  为恒等同态  $\text{id}_R$ , 其中第一个箭头为  $A$  的结构映射 (structure map). 记  $A^+ := \ker \epsilon$  为增广  $R$ -代数  $A$  的**增广理想** (augmentation ideal). 称增广代数  $A$  是**幂零的**, 如果其增广理想  $A^+$  是幂零的. 记  $\mathbf{NilAug}_R$  为幂零的增广  $R$ -代数范畴.

结合以上讨论, 容易看出范畴  $\mathbf{Nil}_R$  与范畴  $\mathbf{NilAug}_R$  等价.

**定义 4.2.** 一个  $R$  上的**光滑交换形式群** (smooth commutative formal group), 简称**形式群** (formal group), 指保持无穷直和的正合函子  $G: \mathbf{Nil}_R \rightarrow \mathbf{Ab}$ .

最简单的两个例子是加法群

$$\mathbb{G}_a: N \mapsto (N, +)$$

和乘法群

$$\mathbb{G}_m: N \mapsto (1 + N)^\times,$$

其中  $(N, +)$  表示  $N$  的加法群, 而  $(1 + N)^\times$  表示形如  $1 + n, n \in N$  的元素组成的集合连同显然的乘法. 下面的例子是  $\mathbb{G}_m$  的推广.

**例 4.3.** 设  $S$  为增广  $R$  代数. 我们定义  $\mathbf{Nil}_R$  上的函子

$$\mathbb{G}_m S: N \mapsto (1 + S^+ \otimes_R N)^\times.$$

此函子保持直和, 且当  $S$  在  $R$  上平坦 (flat) 时正合, 从而是形式群. 特别地,

$$\Lambda_R := \mathbb{G}_m R[t] : N \mapsto \Lambda(N) = (1 + tN[t])^\times$$

是形式群, 并且在 Cartier 理论中发挥至关重要的作用.

现在我们考虑  $\mathbf{Nil}_R$  范畴的“完备化”. 一个完备的增广  $R$ -代数指增广  $R$ -代数  $A$  连同一系列理想降链  $\{\mathfrak{a}_n\}$ , 满足  $\mathfrak{a}_1 = A^+$ , 且  $A$  对这组理想给出的拓扑完备, 即  $A \simeq \varprojlim A/\mathfrak{a}_n$ . 完备的增广  $R$ -代数连同其间的连续同态组成一个范畴, 记作  $\mathbf{ComplAug}_R$ . 我们有显然的嵌入  $\mathbf{Nil}_R \hookrightarrow \mathbf{ComplAug}_R$ , 且任何  $\mathbf{Nil}_R$  上的函子  $H$  都能延拓到  $\mathbf{ComplAug}_R$  上:

$$H(A) := H(A^+) := \varprojlim H(A^+/\mathfrak{a}_n).$$

例如,  $\Lambda_R$  在  $R[[X]]$  上的取值  $\Lambda_R(R[[X]])$  为幂级数环  $R[[X, t]]$  中形如

$$1 + \sum_{m,n \geq 1} b_{mn} X^m t^n$$

的元素组成的集合, 装备以  $R[[X, t]]$  中的乘法, 其中  $b_{mn} \in R$ , 且对固定的  $m$ , 当  $n$  充分大时  $b_{mn} = 0$ .

#### 4.1.2 切空间

通过定义平凡的乘法, 我们可以将  $R$  上的模范畴嵌入  $R$  上的幂零代数范畴, 即对  $x, y \in M \in \mathbf{Mod}_R$  定义  $xy := 0$ . 称函子  $H : \mathbf{Nil}_R \rightarrow \mathbf{Set}$  在  $\mathbf{Mod}_R \hookrightarrow \mathbf{Nil}_R$  上的限制为  $H$  的切函子 (tangent functor), 记作  $t_H$ .

注意到如果函子  $t : \mathbf{Mod}_R \rightarrow \mathbf{Set}$  保持有限直积, 则  $t$  将透过忘却函子  $\mathbf{Mod}_R \rightarrow \mathbf{Set}$  分解; 即对任何  $M \in \mathbf{Mod}_R$ ,  $t(M)$  容许典范的  $R$ -模结构. 而且, 如果  $t : \mathbf{Mod}_R \rightarrow \mathbf{Ab}$  保持有限直积, 则  $t(M)$  由此获得的加法与其 Abel 群结构的加法相同.

对于函子  $t : \mathbf{Mod}_R \rightarrow \mathbf{Mod}_R$ , 我们可以构造自然变换  $(-) \otimes_R t(R) \rightarrow t$  如下: 设  $M \in \mathbf{Mod}_R$ , 每个  $m \in M$  给出  $R$  线性同态

$$c_m : R \rightarrow M, 1 \mapsto m;$$

于是定义

$$M \otimes_R t(R) \rightarrow t(M), m \otimes \xi \mapsto t(c_m)\xi. \quad (3)$$

**定义-命题 4.4.** 如果  $t : \mathbf{Mod}_R \rightarrow \mathbf{Mod}_R$  是保持无穷直和的右正合函子, 则自然变换 (3) 为同构. 特别地, 任何  $R$  上的形式群  $G$  的切函子  $t_G$  都透过这样的函子分解, 因此  $t_G$  由  $t_G(R) = G(R)$  决定; 记  $\mathrm{Lie}(G) := G(R)$ , 称为  $G$  的切空间 (tangent space).

**证明.** 两侧的函子皆右正合, 因而取模的展示便将问题划归为对自由模  $R^{(I)}$  证明 (3) 为同构; 由于两侧的函子保持无穷直和, 问题再次划归为证明 (3) 对  $R$  成立; 这是显然的.  $\square$

**定义 4.5.** 如果形式群  $G$  的切空间  $\mathrm{Lie} G$  是秩为  $d$  的有限生成射影模, 我们就称  $G$  的维度有限, 并记  $\dim G = d$ .

正如实李群的情形, 形式群之间的态射如果诱导出切空间的同构, 则此态射本身也是同构. 为此, 我们需要利用函子与自然变换的光滑性.

**定义 4.6.** 设  $H, G : \mathbf{Nil}_R \rightarrow \mathbf{Set}$ . 自然变换  $\xi : H \rightarrow G$  称为是光滑的 (smooth), 如果对任何  $\mathbf{Nil}_R$  中的满射  $M \twoheadrightarrow N$ ,

$$H(M) \rightarrow H(N) \times_{G(N)} G(M)$$

也是满射. 称函子  $H$  光滑, 如果典范的态射  $H \rightarrow \mathrm{Hom}(R, -)$  光滑.

注意到函子  $H$  光滑当且仅当  $H$  保持满射, 所以特别地, 形式群皆光滑.

**定理 4.1.** [Zin84, Theorem 2.30] 设  $H, G : \mathbf{Nil}_R \rightarrow \mathbf{Set}$  正合. 若自然变换  $\alpha : H \rightarrow G$  诱导出切函子的同构  $\alpha|_{\mathrm{Mod}_R} : t_H \rightarrow t_G$ , 则当  $H$  或  $\alpha$  光滑时,  $\alpha : H \rightarrow G$  为同构.

### 4.1.3 形式群律

**定义 4.7.** 交换环  $R$  上的一个维数  $n$  的形式群律 (formal group law of dimension  $n$ ) 指幂级数的  $n$  元组  $G = (G_1, \dots, G_n)$ , 其中  $G_i(X, Y) \in R[[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n]]$ , 满足以下公理.

- ◇  $G_i(X, 0) = G_i(0, X) = X_i$ ; 特别地, 这说明  $G_i(X, Y) = X_i + Y_i$  + 同时包含  $X_i$  与  $Y_i$  的高阶项.
- ◇  $G_i(G(X, Y), Z) = G_i(X, G(Y, Z))$ .
- ◇  $G_i(X, Y) = G_i(Y, X)$ .

称环  $R[[X]] = R[[X_1, \dots, X_n]]$  为  $G$  的坐标环 (coordinate ring).

若  $G$  是  $R$  上  $n$  维的形式群律,  $H$  是  $R$  上  $m$  维的形式群律, 其间的态射  $\varphi : G \rightarrow H$  定义为  $m$  个  $n$  元形式幂级数

$$\varphi(X) = \varphi_i(X_1, \dots, X_n) \in A[[X_1, \dots, X_n]], \quad 1 \leq i \leq m,$$

满足

$$\varphi(G(X, Y)) = H(\varphi(X), \varphi(Y)),$$

即

$$\varphi_i(G_1(X, Y), \dots, G_n(X, Y)) = H_i(\varphi_1(X), \dots, \varphi_m(X), \varphi_1(Y), \dots, \varphi_m(Y)), \quad 1 \leq i \leq m.$$

加法群律  $\mathbb{G}_a(X, Y) = X + Y$  和乘法群律  $\mathbb{G}_m(X, Y) = X + Y + XY$  是最简单的一维形式群律, 可以定义在任何交换环上. 后者的表达式  $\mathbb{G}_m(X, Y) = (1 + X)(1 + Y) - 1$  更清楚地显示出  $\mathbb{G}_m$  表示着乘法.

设  $G$  为维数  $n$  的形式群律,  $N$  为幂零  $R$ -代数. 在  $N^n$  上,  $G$  定义出运算

$$(a_n)_n +_G (b_n)_n := (G_n(a, b)).$$

形式群律的定义和 [Zin84, Corollary 1.5] 表明  $+_G$  赋予了  $N^n$  一个新的群结构. 容易验证

$$\tilde{G} : \mathbf{Nil}_R \rightarrow \mathbf{Ab}, N \mapsto (N^n, +_G)$$

是  $n$  维的形式群. 不仅如此, 在态射层面, 如果  $H$  是形式群律, 则

$$\mathrm{Hom}(G, H) \simeq \mathrm{Hom}(\tilde{G}, \tilde{H}).$$

注意到  $\tilde{G}$  的切空间  $\mathrm{Lie}(G) = R^n$  的 Abel 群结构仍是直和  $R^n$  的群结构. 反过来, 观察切空间即可确定形式群是否来自形式群律.

**定理 4.2.** [Zin84, Corollary 2.32] 设  $H$  为  $R$  上的形式群. 若切空间  $\mathrm{Lie}(H)$  为  $R$  上有限秩的自由模, 则  $H$  来自形式群律, 即存在形式群律  $G$  使得  $H = \tilde{G}$ .

## 4.2 Cartier 理论的主定理

### 4.2.1 第一主定理与 Cartier 环

回忆  $n$  元对称群  $\mathfrak{S}_n$  在  $n$  元多项式环  $A[X_1, \dots, X_n]$  上以重排变元作用着, 其中  $A$  为环; 并且

$$A[X_1, \dots, X_n] \rightarrow A[X_1, \dots, X_n]^{\mathfrak{S}_n}, X_i \mapsto \sigma_i(X)$$

为环同构<sup>①</sup>, 其中  $\sigma_i(X)$  为初等对称多项式.

**定义 4.8.** 称函子  $H : \mathbf{Nil}_R \rightarrow \mathbf{Set}$  是弱对称的, 如果对任何  $n \geq 1$  和  $A \in \mathbf{NilAug}_R$ , 嵌入

$$A[[X_1, \dots, X_n]]^{\mathfrak{S}_n} \hookrightarrow A[[X_1, \dots, X_n]]$$

诱导出的映射

$$H(A[[X_1, \dots, X_n]]^{\mathfrak{S}_n}) \rightarrow H(A[[X_1, \dots, X_n]])^{\mathfrak{S}_n}$$

为同构.

**例 4.9.** 左正合函子弱对称. 特别地, 形式群弱对称.

**定理 4.3** (Cartier 第一主定理). [Zin84, Theorem 3.5] 设函子  $H : \mathbf{Nil}_K \rightarrow \mathbf{Ab}$  是弱对称的, 则我们有 Abel 群的同构

$$\begin{aligned} \lambda_H : \mathrm{Hom}(\Lambda_R, H) &\xrightarrow{\sim} H(R[[X]]) \\ \Phi &\longmapsto \Phi_{R[[X]]}(1 - Xt). \end{aligned}$$

**定义 4.10.** 命  $\mathbb{E}_R := (\mathrm{End} \Lambda_R)^{\mathrm{op}}$ , 称为  $R$  的 **Cartier 环**. 对任何函子  $H$ , 群  $\mathrm{Hom}(\Lambda, H)$  带有  $\mathrm{End}(\Lambda)$  自然的右作用, 相应的左  $\mathbb{E}$ -模记作  $M_H$ , 称为  $H$  的 **Cartier 模**.

<sup>①</sup>参见 [李 19, 定理 5.8.5]



我们考虑 Cartier 环  $\mathbb{E}$  中的一些特殊元素. 透过同构  $\lambda_\Lambda : \mathbb{E}_R \simeq \Lambda(R[[X]]) \subset R[[X, t]]$ , 我们定义:

$$\begin{aligned} V_n &:= \lambda_\Lambda^{-1}(1 - X^n t), & n \in \mathbb{N}, \\ F_n &:= \lambda_\Lambda^{-1}(1 - X t^n), & n \in \mathbb{N}, \\ [c] &:= \lambda_\Lambda^{-1}(1 - c X t), & c \in R. \end{aligned}$$

利用这些元素, 我们可以具体地描述 Cartier 环中的元素.

**定理 4.4.** [Zin84, Theorem 3.12] 每个  $\xi \in \mathbb{E}$  具有唯一的展开式

$$x = \sum_{m, n \geq 0} V_m[a_{m, n}]F_n,$$

其中  $a_{m, n} \in B$ , 且对固定的  $m$ , 当  $n \gg 0$  时  $a_{m, n} = 0$ .

#### 4.2.2 既约 Cartier 模与第二主定理

**定义 4.11.** 一个  $V$ -既约 Cartier 模 ( $V$ -reduced Cartier module) 是一个左  $\mathbb{E}$ -模  $M$  装备以一族 Abel 群的滤过

$$M = M^1 \supset M^2 \supset \cdots,$$

满足以下条件:

1.  $V_m[c]M^n \subset M^{mn}$ ,  $\forall m, n \in \mathbb{N}$ ,  $c \in K$ ;
2.  $F_m$  是连续自同态, 即对任何  $n$ , 存在  $r$ ,  $F_m M^r \subset M^n$ ;
3.  $V_m : M/M^2 \rightarrow M^m/M^{m+1}$  为双射;
4.  $M$  完备, 即  $M = \varprojlim M/M^n$ .

例如, [Zin84, Example 3.10] 指出正合函子  $H$  的 Cartier 模  $M_H$  是既约的, 其滤过由

$$M_H^n := \text{im} [H(X^n R[[X]]) \rightarrow H(XR[[X]])]$$

给出. 对于  $M_\Lambda \simeq \mathbb{E}$ , 我们命

$$\mathbb{E}_n := M_\Lambda^n.$$

设  $M$  是  $V$ -既约 Cartier 模. 我们将对每个既约 Cartier 模构造一个  $\mathbf{Nil}_R$  上的右正合函子. 设  $Q$  是右  $\mathbb{E}$ -模. 对每个自然数  $n$ , 置

$$Q_n := \{x \in Q : x\mathbb{E}_n = 0\}.$$

于是  $\{Q_n\}$  构成  $Q$  的子模升链. 称  $Q$  是扭的右  $\mathbb{E}$ -模, 如果存在  $n$  使得  $Q = Q_n$

**定义-命题 4.12.** 设  $M$  为既约左  $\mathbb{E}$ -模,  $Q$  为右  $\mathbb{E}$ -模. 对自然数  $n$ , 记

$$Q_n \circ M^n := \text{im} [Q_n \otimes_{\mathbb{Z}} M^n \rightarrow Q \otimes_{\mathbb{E}} M].$$

成立  $Q_n \circ M^n \subset Q_{n+1} \circ M^{n+1}$ , 于是可以定义

$$(Q \otimes_{\mathbb{E}} M)_{\infty} := \varinjlim Q_n \circ M^n$$

和既约张量积 (reduced tensor product)

$$Q \overline{\otimes}_{\mathbb{E}} M := \frac{Q \otimes_{\mathbb{E}} M}{(Q \otimes_{\mathbb{E}} M)_{\infty}}.$$

**引理 4.1.** [Zin84, Theorem 3.21] 如果

$$Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow Q_3 \rightarrow 0$$

是扭的右  $\mathbb{E}$ -模的正合列, 则

$$Q_1 \overline{\otimes}_{\mathbb{E}} M \rightarrow Q_2 \overline{\otimes}_{\mathbb{E}} M \rightarrow Q_3 \overline{\otimes}_{\mathbb{E}} M \rightarrow 0$$

正合.

**定义-命题 4.13.** 设  $N \in \mathbf{Nil}_R$ . 定义函子

$$\Lambda \overline{\otimes}_{\mathbb{E}} M : N \mapsto \Lambda(N) \overline{\otimes}_{\mathbb{E}} M,$$

则  $\Lambda \overline{\otimes}_{\mathbb{E}} M$  是  $\mathbf{Nil}_R \rightarrow \mathbf{Ab}$  的右正合函子.

证明. 取  $\Phi \in \mathbb{E}$  和  $x \in N$ , 右作用按

$$x \cdot \Phi := \Phi_N(n)$$

定义并延拓至  $\Lambda(N)$ . [Zin84, Theorem 3.22] 证明了  $\Lambda(N)$  为扭, 故引理 4.1 给出右正合性. □

**定义 4.14.** 称  $V$ -既约 Cartier 模  $M$  是  $V$ -平坦的 ( $V$ -flat) 如果  $M/M^2$  是平坦的  $R$ -模.

**定理 4.5** (Cartier 第二主定理). 环  $R$  上的形式群范畴与  $V$ -平坦  $V$ -既约 Cartier 模范畴等价, 相应的函子分别由

$$H \longmapsto M_H$$

和

$$\Lambda \overline{\otimes}_{\mathbb{E}} M \longleftarrow M$$

给出.

### 4.3 局部 Cartier 理论

记  $\mathbb{Z}_{(p)}$  为  $\mathbb{Z}$  在素理想  $(p) = p\mathbb{Z}$  处的局部化. 从现在起, 我们设  $R$  为  $\mathbb{Z}_{(p)}$ -代数.

#### 4.3.1 $p$ -典型元素

设  $H$  为  $R$  上的形式群. 如果  $n$  是与  $p$  互素的整数, 则乘以  $n$  的自同态  $n: H \rightarrow H$  为同构; 因为根据定理 4.1 和定义-命题 4.4, 只需要验证  $n$  在  $t_H(R) = H(R)$  上为同构. 特别地,  $n \in \mathbb{E}^\times$ .

我们定义

$$\epsilon_1 := \prod_{\ell} \left( 1 - \frac{1}{\ell} F_{\ell} V_{\ell} \right) \in \mathbb{E},$$

其中  $\ell$  取遍不等于  $p$  的素数. 对于与  $p$  互素的整数  $n$ , 定义

$$\epsilon_n := \frac{1}{n} V_n \epsilon_1 F_n \in \mathbb{E}_n.$$

**引理 4.2.**  $\epsilon_n$  构成  $\mathbb{E}$  的一组投影子 (projector), 即

$$\epsilon^2 = \epsilon, \quad \epsilon_n \epsilon_m = 0 (m \neq n), \quad \sum_{p \nmid n} \epsilon_n = 1.$$

证明. 归结到  $R$  为  $\mathbb{Q}$ -代数的情形. 参见 [Zin84, Lemma 4.11]. □

因此对于任何幂零  $R$ -代数  $N$ , 有分解

$$\Lambda(N) = \bigoplus_{p \nmid n} \Lambda(N) \epsilon_n.$$

置  $\Lambda_n(N) := \Lambda(N) \epsilon_n$ . 由于  $\epsilon_n$  为投影子,  $\Lambda_n$  均为形式群. 记  $\widehat{W} := \Lambda_1$ , 称为 **Witt 向量的形式群 (formal group of Witt vectors)**.

注意到  $F_n V_n = n$ , 故右乘  $V_n$  与右乘  $\frac{1}{n} F_n$  给出互逆的态射  $\Lambda_n \rightarrow \widehat{W}$  和  $\widehat{W} \rightarrow \Lambda_n$ . 因此上述分解可以重写为同构

$$\Lambda \simeq \bigoplus_{p \nmid n} \widehat{W}.$$

此同构能够转移到所有既约 Cartier 模上.

**定义 4.15.** 设  $M$  为既约 Cartier 模. 子群  $\epsilon_1 M \subset M$  中的元素称为是  $p$ -典型的 ( $p$ -typical).

**定理 4.6.** 元素  $m \in M$  是  $p$ -典型的当且仅当

$$F_n m = 0, \quad \forall n > 1, p \nmid n.$$

每个元素  $m \in M$  能唯一地分解为

$$m = \sum_{p \nmid n} V_n m_n,$$

其中  $m_n$  为  $p$ -典型元素.



证明. 由于  $F_\bullet$  对下标具乘性, 只要考虑素数  $\ell \neq p$  即可验证  $p$ -典型性的判别. 直接计算得证.

分解取  $m_n := \frac{1}{n}\epsilon_1 F_n m$ . □

#### 4.3.2 主定理的局部版本

设  $H$  为  $R$  上的形式群. 结合定理 4.3, 我们得到同构

$$\mathrm{Hom}(\widehat{W}, H) = \mathrm{Hom}(\Lambda\epsilon_1, H) \simeq \epsilon_1 \mathrm{Hom}(\Lambda, H) \simeq \epsilon_1 H(R[[X]]).$$

**定义-命题 4.16.** Witt 向量的形式群之自同态环  $\mathrm{End} \widehat{W} \simeq \epsilon_1 \mathbb{E} \epsilon_1$ . 定义关联于素数  $p$  的**局部 Cartier 环 (local Cartier ring)** 为  $\mathbb{E}_p := \epsilon_1 \mathbb{E} \epsilon_1$ . 命

$$V := \epsilon_1 V_p = V_p \epsilon_1, \quad F := \epsilon_1 F_p = F_p \epsilon_1, \quad [a]_p := \epsilon_1 [a] = [a] \epsilon_1 \quad (a \in R),$$

则  $\mathbb{E}_p$  的每个元素具有唯一的分解

$$x = \sum_{m,n \geq 0} V^m [a_{m,n}] F^n,$$

其中  $a_{m,n} \in B$ , 且对固定的  $m$ , 有  $n \gg 0 \implies a_{m,n} = 0$ .

证明. 参见 [Zin84, Definition and Theorem 4.17]. □

**定义 4.17.** 称左  $\mathbb{E}_p$ -模  $M$  是  $V$ -既约的, 如果:

1.  $V : M \rightarrow M$  为单射,
2.  $M$  为  $V$ -进完备, 即  $M \simeq \varprojlim M/V^n M$ .

**定理 4.7** (Cartier 第二主定理, 局部版本). 设  $H : \mathbf{Nil}_R \rightarrow \mathbf{Ab}$  为形式群.

1. Cartier 模  $M_H = H(R[[X]])$  的  $p$ -典型元素之集  $\epsilon_1 H(R[[X]])$  具有  $V$ -既约  $\mathbb{E}_p$ -模结构, 记作  $M_{p,H}$ .
2. 存在典范同构

$$\widehat{W} \otimes_{\mathbb{E}_p} M_{p,H} \simeq H.$$

3. 函子  $H \mapsto M_{p,H}$  给出了  $R$  上形式群与  $V$ -既约  $\mathbb{E}_p$ -模中那些  $M_p/V M_p$  为平坦  $R$ -模的元素组成的子范畴之间的等价, 且  $H$  的切空间  $\mathrm{Lie}(H)$  在此等价下被映到  $M_{p,H}/V M_{p,H}$ .

#### 4.3.3 Witt 向量

回顾对于素数  $p$ , 取 Witt 向量环给出了交换环范畴到自身的函子  $W : \mathbf{CRing} \rightarrow \mathbf{CRing}$ ; 它由以下性质刻画: 作为集合,  $W(R) = R^{\mathbb{N}}$ , 装备以环结构使得

$$W(R) \rightarrow R^{\mathbb{N}}, \quad (a_n)_n \mapsto (w_n(a_0, \dots, a_n))_n$$

为环同态, 其中多项式

$$w_n(X_0, \dots, X_n) = X_0^{p^n} + pX_1^{p^{n-1}} + \dots + p^n X_n \in \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_n].$$

本小节中, 我们将以另一种方式刻画 Witt 向量的形式群  $\widehat{W}$ , 并建立它与 Witt 向量的一些联系.

**引理 4.3.** 取  $N \in \mathbf{Nil}_R$ . 群  $\Lambda(N)$  的每个元素可以唯一地表示为有限乘积

$$\prod_{i=1}^n (1 - x_i t^i), \quad x_i \in N;$$

而  $\widehat{W}(N)$  的每个元素可以唯一地表示为有限乘积

$$\prod_{i=1}^n (1 - y_i t^{p^i}) \epsilon_1, \quad y_i \in N.$$

证明. 考虑一般并非群同态的映射

$$\bigoplus_{i=1}^{\infty} N \rightarrow \Lambda(N), \quad (x_i) \mapsto \prod_i (1 - x_i t^i). \quad (4)$$

注意到右边的乘积有限, 且此映射对于  $N$  呈函子性; 我们断言(4)是自然同构, 从而说明每个  $\Lambda(N)$  中元素可唯一地表作有限积. 由定理 4.1, 只要在  $N^2 = 0$  时证明; 此时  $\prod_i (1 - x_i t^i) = 1 - \sum_i x_i t^i$ . 按定义, 右边的求和唯一, 是故(4)为同构.

因为  $F_\ell \epsilon_1 = 1$  在素数  $\ell \neq p$  时成立, 所以每个  $\widehat{W}$  中元素都可写作

$$\prod (1 - x_i t^i) \epsilon_1 = \prod (1 - x_i t) F_i \epsilon_1 = \prod (1 - x_{p^j} t) F_{p^j} \epsilon_1.$$

我们证明将  $\Lambda \rightarrow \Lambda \epsilon_1$  限制到  $\bigoplus_{i=p^n} N$  在同构(4)下的像上为到  $\widehat{W}$  的同构. 仍然只需在  $N^2 = 0$  处检验: 此时对任何  $m > 1$ , 当  $(m, p) = 1$  时

$$(1 - y_n t^{p^n}) V_m = (1 - y_n t) F_{p^n} V_m = (1 - y_n^m t) F_{p^n} = 1 \cdot F_{p^n} = 1,$$

故

$$(1 - y_n t^{p^n}) \epsilon_m = (1 - y_n t^{p^n}) \frac{1}{m} V_m \epsilon_1 F_m = 1 \cdot \frac{1}{m} \epsilon_1 F_m = 1;$$

因此当  $\prod (1 - y_n t^{p^n}) = 1$  时,

$$\prod (1 - y_n t^{p^n}) = \prod \sum_{p \nmid m} (1 - y_n t^{p^n}) \epsilon_m = 1,$$

明所欲证. □

**定理 4.8.** 多项式族  $\{w_n\}$  定出了群函子同态

$$\widehat{W}(N) \longrightarrow \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{G}_a(N)$$

$$\prod (1 - y_n t^{p^n}) \longmapsto (w_n(y_0, \dots, y_n))_n.$$

是故嵌入  $\bigoplus_{n \geq 0} N \rightarrow N^{\mathbb{N}}$  诱导出群同态

$$\widehat{W}(N) \longrightarrow W(N)$$

$$\prod (1 - y_n t^{p^n}) \longmapsto (y_n)_n.$$

证明. 由于  $N$  幂零, 上述映射良定. 同态性参见 [Zin84, Theorem 4.2.5] □

借助 Witt 环, 我们可以给出局部 Cartier 环的另一种描述.

**推论 4.4.** 映射

$$W(R) \longrightarrow \mathbb{E}_p$$

$$(a_n) \longmapsto \sum_n V^n [a_n] F^n$$

是环的嵌入. 透过此嵌入将  $W(R)$  视为局部 Cartier 环  $\mathbb{E}_p$  的子环, 则  $\mathbb{E}_p$  同构于  $W(R)[V, F]$  关于右理想滤过  $\{(V^n)\}_n$  的完备化.

#### 4.3.4 高度

高度是形式群的一个重要不变量. 为此, 我们要先定义同源的概念.

**定义 4.18.** 设  $G, H$  为来自形式群律的  $R$  上形式群. 态射  $\varphi: G \rightarrow H$  称为一个**同源 (isogeny)**, 如果  $\ker \varphi: \mathbf{Nil}_R \rightarrow \mathbf{Set}$  可表.

设  $\varphi: G \rightarrow H$  为同源, 则  $\ker \varphi$  由有限生成的射影  $R$ -代数  $A$  表出. 考虑  $A$  的素理想  $\mathfrak{p}$  的剩余类域  $\mathbf{k}(\mathfrak{p}) = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ . [Zin84, Theorem 5.3] 表明存在自然数  $h(\mathfrak{p})$  使得  $\dim_{\mathbf{k}(\mathfrak{p})} A \otimes_R \mathbf{k}(\mathfrak{p}) = p^{h(\mathfrak{p})}$ . 交换代数的结果指出  $\mathfrak{p} \mapsto h(\mathfrak{p})$  是局部常值函数.

**定义 4.19.** 称同源  $\varphi$  的**高度 (height)** 为  $h \in \mathbb{N}$ , 如果  $h(\mathfrak{p}) = h$  对所有  $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$  成立. 称形式群  $G$  的高度为  $h$ , 如果  $p \in \operatorname{End} G$  为同源且高度为  $h$ .

例如, 设  $R$  的特征为  $p$ , 我们考察  $\mathbb{G}_{\mathbf{m}/R}$  的乘  $p$  同态

$$\mathbb{G}_{\mathbf{m}}(N) \rightarrow \mathbb{G}_{\mathbf{m}}(N), 1 + n \mapsto (1 + n)^p = 1 + n^p.$$

则  $\ker \varphi$  由  $R[X]/X^p$  表出, 因此  $p: \mathbb{G}_{\mathbf{m}} \rightarrow \mathbb{G}_{\mathbf{m}}$  是高度为 1 的同源,  $\mathbb{G}_{\mathbf{m}}$  的高度为 1.



## 5 Drinfeld 定理

从现在起, 让我们考虑  $K$  上的一个四元数代数除环  $D$ , 其整数环记作  $\mathcal{O}_D$ . 记  $\mathcal{O}^{\text{ur}}$  为  $K$  的极大非分歧扩张 (maximal unramified extension) 的整数环,  $\widehat{\mathcal{O}}^{\text{ur}}$  为  $\mathcal{O}^{\text{ur}}$  的  $\varpi$ -进完备化. Drinfeld 的“基本定理”称形式  $\mathcal{O}$ -概形  $\widehat{\Omega} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \widehat{\mathcal{O}}^{\text{ur}}$  参数化了一族幂零  $\mathcal{O}$ -代数上高度为 4 的形式  $\mathcal{O}_D$ -模.

### 5.1 形式模

#### 5.1.1 形式 $\mathcal{O}$ -模的 Cartier 理论

**定义 5.1.** 一个  $B$  上的形式  $\mathcal{O}$ -模 (formal  $\mathcal{O}$ -module) 指  $B$  上的一个来自形式群律的光滑形式群  $X$  连同同一个  $\mathcal{O}$ -作用, 即环同态  $i: \mathcal{O} \rightarrow \text{End } X$ ; 并且, 我们要求此  $\mathcal{O}$ -作用在切空间  $\text{Lie } X$  上诱导的  $\mathcal{O}$ -作用与  $\text{Lie } X$  的  $B$ -代数结构诱导的  $\mathcal{O}$ -作用相同; 即对任何  $a \in \mathcal{O}$ , 相应的  $B$  上幂级数  $i(a)(T) \equiv aT \pmod{T^2}$ . 特别地, 对于  $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p$ ,  $B$  上的形式  $\mathbb{Z}_p$ -模范畴与  $B$  上的形式群范畴等价.

设  $B$  是一个  $\mathcal{O}$ -代数. 仿照 Witt 向量环的定义, 容易证明  $B^{\mathbb{N}}$  容许唯一的  $\mathcal{O}$ -代数结构, 记作  $W_{\mathcal{O}}(B)$ , 使得鬼映射 (ghost map)  $w: W_{\mathcal{O}}(B) \rightarrow B^{\mathbb{N}}$  为  $\mathcal{O}$ -代数同态, 其中  $w = (w_n)_n$  的分量由多项式映射

$$w_n: (a_n)_n \mapsto a_0^{q^n} + \varpi a_1^{q^{n-1}} + \cdots + \varpi^n a_n$$

给出. 同样地, 我们考虑  $W_{\mathcal{O}}(B)$  上的移位映射 (Verschiebung map)

$$\tau: (a_0, a_1, a_2, \cdots) \mapsto (0, a_0, a_1, \cdots),$$

由关系

$$w_n \sigma = w_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

决定的 Frobenius 同态  $\sigma$ , 和 Teichmüller 提升

$$[\cdot]: a \mapsto (a, 0, 0, \cdots).$$

记  $a \in \mathcal{O}$  在结构映射  $\mathcal{O} \rightarrow W_{\mathcal{O}}(B)$  下的像为  $a = a \cdot 1$ , 则其鬼分量显然为  $w_n(a) = a$ .

**定义 5.2.** 相应于  $B$  的 Dieudonné 环被定义为非交换的  $\mathcal{O}$ -代数  $W_{\mathcal{O}}(B)[F, V]$ , 其中  $F$  和  $V$  满足: 对任何  $x \in W_{\mathcal{O}}(B)$ ,

$$Fx = \sigma(x)F,$$

$$xV = V\sigma(x),$$

$$VxF = \tau(x),$$

$$FV = \varpi$$

我们在 Dieudonné 环上装备由右理想  $(V)$  定出的  $V$ -进滤过, 并定义 **Cartier 环**  $E_{\mathcal{O}}(B)$  为 Dieudonné 环  $W_{\mathcal{O}}(B)[F, V]$  关于  $V$ -进拓扑的完备化.

当  $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p$  时,  $E_{\mathbb{Z}_p}(B)$  正是上一节定义的局部 Cartier 环  $\mathbb{E}_{B,p}$ . 因此, 我们可以平行于上一节的结论, 建立起形式  $\mathcal{O}$ -模的 Cartier 理论.

每个  $E_{\mathcal{O}}(B)$  中元素  $x$  可以典范地写作

$$x = \sum_{m,n \geq 0} V^m[a_{m,n}]F^n, \quad a_{m,n} \in B, \quad n \gg 0 \implies a_{m,n} = 0.$$

特别地, 嵌入  $W_{\mathcal{O}}(B) \hookrightarrow E_{\mathcal{O}}(B)$  由

$$(a_0, \dots) \mapsto \sum_{n \geq 0} V^n[a_n]F^n$$

给出.

**定义 5.3.** 一个  $B$  上的 **Cartier  $\mathcal{O}$ -模**指一个左  $E_{\mathcal{O}}(B)$ -模, 满足

1.  $M/VM$  是有限秩自由  $B$ -模,
2.  $V$  在  $M$  上为单射,
3.  $M$  关于  $V$ -进拓扑分离且完备, 即  $M \simeq \varprojlim M/V^n M$  且  $\bigcap_n V^n M = 0$ .

这样的模也称为**既约 Cartier  $\mathcal{O}$ -模**.

仿照定理 4.7 的证明并结合定理 4.2, 我们得到:

**定理 5.1.**  $B$  上的形式  $\mathcal{O}$ -模范畴与  $B$  上的 Cartier  $\mathcal{O}$ -模范畴等价. 而且, 如果  $M$  是相应于形式  $\mathcal{O}$ -模  $X$  的 Cartier  $\mathcal{O}$ -模, 则  $M/VM = \text{Lie}(X)$ .

### 5.1.2 形式 $\mathcal{O}_D$ -模的 Cartier 理论

回忆  $D$  是  $K$  上的四元数代数,  $\mathcal{O}_D$  为其整数环. 由 [Voi21, Theorem 13.3.11],  $K$  的二次非分歧扩张  $K'$  唯一地嵌入  $D$ . 记  $\mathcal{O}'$  为  $K'$  的整数环,  $\sigma \in \text{Gal}(K'/K)$  为其 Galois 群中的非平凡元素. 同样由 [Voi21, Theorem 13.3.11], 存在  $\Pi \in \mathcal{O}_D$ , 使得  $\Pi^2 = \varpi$ , 且对任何  $a \in \mathcal{O}'$ ,  $\Pi a = \sigma(a)\Pi$ . 固定一个这样的  $\Pi$ .

**定义 5.4.** 一个  $B$  上的**形式  $\mathcal{O}_D$ -模**指  $B$  上的形式  $\mathcal{O}$ -模  $X$  连同同一个  $\mathcal{O}_D$ -作用  $i: \mathcal{O}_D \rightarrow \text{End } X$  延拓了  $X$  本身的  $\mathcal{O}$ -作用. 称形式  $\mathcal{O}_D$ -模  $X$  是**特殊 (special)** 的, 如果其  $\mathcal{O}'$ -作用使  $\text{Lie } X$  成为秩 1 自由  $B \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}'$  模.

Cartier 环  $E_{\mathcal{O}}(B)$  带有自然的  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -分次, 由  $\deg F = \deg V = 1$  定义; 齐次分量为

$$E_{\mathcal{O}}(B)_i = \left\{ \sum V^m[a_{m,n}]F^n : m+n \equiv i \pmod{2}, \forall m, n \right\}, \quad i = 0, 1.$$

特别地,  $W_{\mathcal{O}}(B) \subset E_{\mathcal{O}}(B)_0$ .

**定义 5.5.** 一个分次 **Cartier  $\mathcal{O}[\Pi]$ -模**指一个  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -分次 Cartier  $\mathcal{O}$ -模  $M = M_0 \oplus M_1$  连同同一个 1 次  $E_{\mathcal{O}}(B)$  线性自同态  $\Pi$ , 满足  $\Pi^2 = \varpi$ . 此时  $M_0$  与  $M_1$  自动成为  $W_{\mathcal{O}}(B)$ -模. 称分次 Cartier  $\mathcal{O}[\Pi]$ -模  $M$  是**特殊的**, 如果  $M_0/VM_1$  和  $M_1/VM_0$  皆为秩 1 自由  $B$  模.

**定理 5.2.** [BC91, II, 2.3] 设  $B$  是  $\mathcal{O}'$ -模, 则  $B$  上的形式  $\mathcal{O}_D$ -模范畴与  $B$  上的分次 Cartier  $\mathcal{O}[\text{II}]$ -模范畴等价, 且此范畴等价保持特殊性.

## 5.2 Drinfeld 定理: 陈述

回忆  $\bar{k}$  为  $k$  的代数闭包, 其 Witt 向量环为  $W_{\mathcal{O}}(\bar{k}) = \hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}$ . 根据 [BC91, II, 5.2],  $\bar{k}$  上高度 4 的特殊形式  $\mathcal{O}_D$ -模具有唯一的同源类. 固定一个  $\bar{k}$  上高度 4 的特殊形式  $\mathcal{O}_D$ -模  $\Phi$ .

**定义 5.6.** 定义  $\mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}}$  上的函子  $G$  如下: 对  $B \in \mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}}$ ,  $G(B)$  为三元组  $(\psi, X, \rho)$  的同构类, 其中

- ◇  $\psi: \bar{k} \rightarrow B/\varpi B$  为  $k$ -同态,
- ◇  $X$  为  $B$  上高度 4 的特殊形式  $\mathcal{O}_D$ -模,
- ◇  $\rho: \psi_*\Phi \rightarrow X_{B/\varpi B}$  为高度 0 的拟同源.

**定理 5.3** (Drinfeld). 函子  $G: \mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}} \rightarrow \mathbf{Set}$  由形式  $\mathcal{O}$ -概形  $\hat{\Omega} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}} \hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}$  表出.

根据 Witt 向量环的泛性质, 给出一个  $k$ -同态  $\psi: \bar{k} \rightarrow B/\varpi B$ , 等价于给出一个  $\mathcal{O}$ -同态  $\tilde{\psi}: \mathcal{O}^{\text{nr}} \rightarrow B$ . 于是, 给出  $G(B)$  中的一个点等价于给出  $\mathcal{O}$ -同态<sup>①</sup>  $\tilde{\psi}: \mathcal{O}^{\text{nr}} \rightarrow B$  连同  $G(B_{\tilde{\psi}})$  中的一个点, 其中  $B_{\tilde{\psi}}$  表示赋予  $B$  以来自  $\tilde{\psi}$  的  $\mathcal{O}^{\text{nr}}$ -代数结构, 而  $\bar{G}$  定义如下.

**定义 5.7.** 令  $\mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}^{\text{nr}}}$  为  $\varpi$  在其中幂零的  $\mathcal{O}^{\text{nr}}$ -代数组成的范畴<sup>②</sup>. 定义  $\mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}^{\text{nr}}}$  上的函子  $\bar{G}$  如下: 对  $B \in \mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}^{\text{nr}}}$ ,  $\bar{G}(B)$  为二元对  $(X, \rho)$  的同构类, 其中

- ◇  $X$  为  $B$  上高度 4 的特殊形式  $\mathcal{O}_D$ -模,
- ◇  $\rho: \Phi_{B/\varpi B} \rightarrow X_{B/\varpi B}$  为高度 0 的拟同源.

注意到给出  $\text{Hom}_{\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}}(B, \hat{\Omega} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}} \hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}})$  中的一个点等价于给出交换图

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Spf } B & \xrightarrow{f} & \hat{\Omega} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}} \hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}} \\
 & \searrow \psi^* & \downarrow \\
 & & \text{Spf } \hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}
 \end{array}$$

其中  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(B, \hat{\Omega} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}} \hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}})$ ,  $\psi \in \text{Hom}_{\mathcal{O}, \text{cont}}(\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}, B) = \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}^{\text{nr}}, B)$ . 因此为了证明定理 5.3, 只需证明下述定理.

**定理 5.4** (Drinfeld). 函子  $\bar{G}: \mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}^{\text{nr}}} \rightarrow \mathbf{Set}$  由形式  $\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}$ -概形  $\hat{\Omega} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}} \hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}$  表出.

记  $\bar{H}: \mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}^{\text{nr}}} \rightarrow \mathbf{Set}$  为定义 3.1 中的函子  $F: \mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}} \rightarrow \mathbf{Set}$  在  $\mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}^{\text{nr}}}$  上的限制. 因为  $F$  由形式  $\mathcal{O}$ -概形  $\hat{\Omega}$  表出, 所以  $\bar{H}$  由形式  $\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}$ -概形  $\hat{\Omega} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}} \hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}$  表出. 定理 5.4 也就是说函子  $\bar{G}$  同构于  $\bar{H}$ . 我们将在下一小节中构造自然变换  $\xi: \bar{G} \rightarrow \bar{H}$ ;  $\xi$  实为同构的证明请参阅 [BC91] 或 [Dri76].

<sup>①</sup>由于  $\varpi$  在  $B$  中幂零, 这等价于给出连续的  $\mathcal{O}$ -同态  $\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}} \rightarrow B$ .

<sup>②</sup>自然也等于  $\varpi$  在其中幂零的  $\hat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}$ -代数组成的范畴.

### 5.3 自然变换 $\xi: \overline{G} \rightarrow \overline{H}$ 的构造

设  $B \in \mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}_{\text{nr}}}$ ,  $M$  是  $B$  上的分次 Cartier  $\mathcal{O}[\Pi]$ -模.

回忆 Frobenius 同态  $\sigma: W_{\mathcal{O}}(B) \rightarrow W_{\mathcal{O}}(B)$  为  $\mathcal{O}$ -代数同态. 将  $M$  透过  $\sigma$  进行系数限制 (restriction of scalars) 得到一个  $W_{\mathcal{O}}(B)$ -模, 记作  $M^{\sigma}$ .

我们定义  $N(M)$  为  $\mathcal{O}$ -模同态

$$M \rightarrow M \oplus M^{\sigma}, m \mapsto (Vm, -\Pi m)$$

的余核, 其上带有来自  $M \oplus M$  的  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -分次. 由于  $m \mapsto (Vm, -\Pi m)$  对于  $V$  和  $\Pi$  的作用等变,  $N(M)$  上也带有  $V$  和  $\Pi$  的 1 次作用.

定义映射

$$\lambda_M: N(M) \rightarrow M, [(m, m')] \mapsto \Pi m + Vm'.$$

**命题 5.1.** 存在唯一的映射  $L_M: M \rightarrow N(M)$ , 满足:

1.  $\lambda_M \circ L_M = F$ ,
2.  $L_M$  对  $B$  呈函子性: 对任何  $\mathcal{O}$ -同态  $B \rightarrow B'$ , 图

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{L_M} & N(M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M' & \xrightarrow{L_{M'}} & N(M') \end{array}$$

交换, 其中  $M' = M \hat{\otimes}_{E_{\mathcal{O}}(B)} E_{\mathcal{O}}(B')$ .

定义

$$\phi_M: N(M) \rightarrow N(M), [(m, m')] \mapsto L_M(m) + [(m', 0)].$$

再取  $\phi_M$  的不动点

$$\eta_M := N(M)^{\phi_M} = \{z \in N(M) : \phi(z) = z\}.$$

则  $\eta_M$  继承了来自  $N(M)$  的分次  $\mathcal{O}[\Pi]$ -模结构.

有了以上的准备, 我们就能够对  $(X, \rho) \in \overline{G}(B)$  定义四元组  $\xi(X, \rho) = (\eta_X, T_X, u_X, r_{X, \rho})$  如下. 记  $M(Y)$  为形式  $\mathcal{O}_D$ -模  $Y$  的分次 Cartier  $\mathcal{O}[\Pi]$ -模,  $S = \text{Spec } B$ .

- ◇  $\eta_X$  为  $X$  上的层, 在每个仿射开集  $\text{Spec } A \subset S$  上取值  $\eta_X(\text{Spec } A) = \eta_{M(X_A)}$ .
- ◇  $T_X$  为  $X$  上的层, 在每个仿射开集  $\text{Spec } A \subset S$  上取值  $T_X(\text{Spec } A) = \text{Lie } X_A = M_{X_A}/VM_{X_A}$ .
- ◇  $u_X: \eta_X \rightarrow T_X$ , 在每个仿射开集  $\text{Spec } A \subset S$  由  $[(m, m')] \mapsto m \bmod V$  定义.
- ◇  $r_{X, \rho}: \underline{K}^2 \rightarrow \eta_{X, 0} \otimes_{\mathcal{O}} K$  由  $\rho$  根据 [BC91, II, 7.5] 诱导而出.

这便是我们寻求的自然变换  $\xi: \overline{G} \rightarrow \overline{H}$ .



## 6 附录

本节考虑的概形统一认为是 Noether 的.

### 6.1 射影丛

考虑概形  $X$  上的一个分次  $\mathcal{O}_X$ -代数  $\mathcal{B}$ , 即带有  $\mathcal{O}_X$ -代数结构的拟凝聚分次  $\mathcal{O}_X$ -模. 任何  $X$  的仿射开子概形  $U$  都给出其上的概形  $\text{Proj } \mathcal{B}(U) \rightarrow U$ . 如果  $V$  是  $U$  的仿射开子概形, 则

$$\mathcal{B}(V) = \mathcal{B}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_X(V),$$

因此  $\text{Proj } \mathcal{B}(V) = \text{Proj } \mathcal{B}(U) \times_X V$ . 于是, 取  $X$  的仿射开覆盖  $U_i$ ,  $\text{Proj } \mathcal{B}(U_i)$  可以粘合成为  $X$  上的概形, 记作  $\text{Proj } \mathcal{B} \rightarrow X$ .

**例 6.1.** 取  $\mathcal{B} = \mathcal{O}_X[T_0, \dots, T_n]$  为多项式代数, 则  $\text{Proj } \mathcal{B} = \mathbb{P}_X^n = \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\mathbb{Z}} X$ .

对于  $X$  上的拟凝聚层  $\mathcal{E}$ , 我们定义  $X$ -概形范畴上取值在集合范畴 **Set** 中的函子  $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ , 将  $h: Y \rightarrow X$  映到二元对  $(\mathcal{L}, h^*\mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{L})$  的集合, 其中  $\mathcal{L}$  为  $Y$  上可逆层. 由 [Har77, II, Proposition 7.12] 知, 此函子由射影概形  $\text{Proj}(\text{Sym}(\mathcal{E}))$  表出, 因而为  $X$  上射影概形, 称为相应于  $\mathcal{E}$  的射影丛 (**projective bundle**).

**例 6.2.** 取  $X = \text{Spec } \mathcal{O}$ . 自由模  $M = \mathcal{O}^2$  给出  $X$  上的凝聚层  $\widetilde{M}$ , 于是给出  $\mathbb{P}(M) := \mathbb{P}(\widetilde{M})$ .

设  $A$  为  $\mathcal{O}$ -代数, 则  $\mathbb{P}(M)$  的  $A$ -点由

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M)(A) &= \{M \otimes_{\mathcal{O}} A \twoheadrightarrow L : L \text{ 为秩 } 1 \text{ 的自由 } A \text{ 模}\} \\ &= \{N \subset_A M \otimes_{\mathcal{O}} A : M \otimes_{\mathcal{O}} A/N \text{ 为秩 } 1 \text{ 的自由 } A \text{ 模}\}. \end{aligned}$$

如果  $A = F$  是一个域, 那么  $\mathbb{P}(M)(F)$  中可以实现为  $F^2$  中余维数 1 的  $F$ -子空间之集合, 因此  $\mathbb{P}(M)(F) = \mathbb{P}^1(F)$ . 特别地,  $\mathbb{P}(M)(K) = \mathbb{P}^1(K)$ ,  $\mathbb{P}(M)(k) = \mathbb{P}^1(k)$ . 此外, 存在双射

$$\begin{array}{ccc} & N \mapsto N \otimes_{\mathcal{O}} K & \\ \mathbb{P}(M)(\mathcal{O}) & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{P}(M)(K) \\ & N' \cap \mathcal{O}^2 \mapsto N' & \end{array}$$

### 6.2 爆破

**定义 6.3.** 设  $\mathcal{I}$  为  $X$  上的凝聚理想层. 称  $\widetilde{X} := \text{Proj}(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{I}^n) \rightarrow X$  为  $X$  沿理想层  $\mathcal{I}$  或闭子概形  $Z := V(\mathcal{I})$  的爆破 (**blow up**).

由  $\text{Proj}$  的构造, 我们可以在仿射开集上作爆破再粘合. 所以不妨设  $X = \text{Spec } A$ , 于是存在  $A$  的有限生成的理想  $I = (f_1, \dots, f_n)$  使得  $\mathcal{I} = \widetilde{I}$ , 爆破  $\widetilde{X} = \text{Proj } B$ ,  $B := \bigoplus_{d \geq 0} I^d$  的分次  $A$ -代数结构给出态射  $\widetilde{X} \rightarrow X$ . 为了区分  $B$  的一次部分  $I = B_1$  和零次部分的子集  $I \subset A = B_0$ , 记  $t_i = f_i \in B_1$ , 而  $f_i \in B_0$ . 考虑满同态

$$\phi: A[T_1, \dots, T_n] \rightarrow B, \quad T_i \mapsto t_i.$$





这是分次代数同态, 因而  $\tilde{X} = \text{Proj } B \simeq \text{Proj } A[T_1, \dots, T_n] / \ker \phi$  是  $\mathbb{P}_A^n$  的闭子概形. 注意到多项式  $P(T_1, \dots, T_n) \in \ker \phi$  当且仅当  $P(f_1, \dots, f_n) = 0 \in A$ .

**命题 6.1.** 令  $J := (f_i T_j - f_j T_i)_{1 \leq i, j \leq n}$ , 则  $J \subset \ker \phi$ . 如果  $Z := V_+(J) \subset \mathbb{P}_A^{n-1}$  是整的 (integral), 则  $\tilde{X} \simeq Z$ .

证明. 参见 [Liu02, Lemma 8.1.2]. □

**例 6.4.** 取  $X = \mathbb{A}_{\mathbb{Z}_p}^1 = \text{Spec } \mathbb{Z}_p[T]$ . 我们考虑  $X$  沿极大齐次理想  $I = (p, T)$  定出的闭点  $x = V(I)$  的爆破  $\tilde{X}$ . 记  $A = \mathbb{Z}_p[T]$ ,  $B = \bigoplus_{d \geq 0} I^d$ . 我们考虑满同态  $\phi : A[S, W] \rightarrow B$  和理想  $J = (TS - pW) \subset \ker \phi$ . 由于  $TS - pW$  不可约, 命题 6.1 导出

$$\tilde{X} \simeq \text{Proj } \frac{A[S, W]}{TS - pW} = V_+(J) \subset \mathbb{P}_A^1.$$

开子概形

$$D_+(W) = \text{Spec } \frac{\mathbb{Z}_p[T, s]}{Ts - p}, \quad s = S/W$$

和

$$D_+(S) = \text{Spec } \frac{\mathbb{Z}_p[T, w]}{T - pw} \simeq \text{Spec } \mathbb{Z}_p[w] \simeq \text{Spec } \mathbb{Z}_p[T/p], \quad w = W/S$$

组成了  $\tilde{X}$  的一个仿射开覆盖; 它们透过同构

$$D_+(W)_S = \text{Spec } \mathbb{Z}_p[T, s, s^{-1}] = \text{Spec } \mathbb{Z}_p[T, w^{-1}, w] = D_+(S)_W$$

粘合成为  $\tilde{X}$ .

## 6.3 形式概形

### 6.3.1 形式概形作为环层空间

如前所述, 形式概型是那些局部上形如  $\text{Spf } A$  的环层空间, 其中环  $A$  关于其理想  $I$  定出的进制拓扑完备. 对于一般的概型  $X$ , 我们定义其沿其闭子概型  $Y$  的形式完备化 (formal completion) 为

$$\hat{X} := \varprojlim X / \mathcal{I}^n = (Y, \varprojlim \mathcal{O} / \mathcal{I}^n),$$

其中  $\mathcal{I}$  是截出  $Y$  的理想层. 这样的空间是形式概型. 本文中, 我们主要考虑的离散赋值环上的概形沿其特殊纤维的形式完备化.

**例 6.5.** 考虑射影直线  $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_p}^1 = \text{Proj } \mathbb{Z}_p[T_0, T_1]$  沿其特殊纤维  $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_p}^1$  的形式完备化. 闭浸入  $i : \mathbb{P}_{\mathbb{F}_p}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Z}_p}^1$  在仿射开集  $D_+(T_0)$  和  $D_+(T_1)$  上由模  $p$  给出, 因而  $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_p}^1$  沿其特殊纤维的形式完备化  $\hat{\mathbb{P}}_{\mathbb{Z}_p}^1 = \left( |\mathbb{P}_{\mathbb{F}_p}^1|, \varprojlim \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_p}^1} / (\ker i^\#)^n \right)$  确为两片  $\hat{\mathbb{A}}_{\mathbb{Z}_p}^1$  透过  $\text{Spf } \mathcal{O}(T, 1/T)$  的自同构  $T \mapsto 1/T$  粘合而成, 是形式概型.

### 6.3.2 形式概形作为函子

任何  $\mathcal{O}$  上的概形  $X$  定出  $\mathcal{O}$ -代数范畴  $\mathbf{Alg}_{\mathcal{O}}$  上的函子  $R \mapsto X(R)$ , 其沿特殊纤维的完备化  $\hat{X}$  定出  $\varpi$ -进完备  $\mathcal{O}$ -代数范畴  $\mathbf{Compl}_{\mathcal{O}}$  上的函子

$$R \mapsto \hat{X}(R) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Spf} R, X).$$

**命题 6.2.** 成立函子同构  $\hat{X} \simeq X|_{\mathbf{Compl}_{\mathcal{O}}}$ .

证明. 只需对仿射概形  $X = \mathrm{Spec} A$  验证. 由于任何完备  $\mathcal{O}$ -代数都是  $\varpi$ -幂零  $\mathcal{O}$ -代数的逆向极限, 而逆向极限与  $\mathrm{Hom}(A, -)$  交换, 我们只要验证上述函子限制在  $\mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}}$  上成立, 即

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(A, R) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}, \mathrm{cont}}(\varprojlim A/\varpi^n, R), \quad \forall R \in \mathbf{Nilp}_{\mathcal{O}}.$$

记  $\hat{A} = \varprojlim A/\varpi^n$ . 同态  $\hat{A} \rightarrow R$  自然给出同态  $A \rightarrow \hat{A} \rightarrow R$ . 反之, 给定  $\mathcal{O}$ -同态  $A \rightarrow R$ , 由于  $\varpi$  在  $R$  中幂零, 对充分大的自然数  $n$  有交换图

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\quad} & R, \\
 \downarrow & \nearrow \text{---} & \\
 A/\varpi^n & & 
 \end{array}$$

从而诱导出  $\hat{A} \rightarrow R$ . 可以直接验证这两个对应互逆. □

作者签名: \_\_\_\_\_



## 参考文献

- [BC91] J.-F. Boutot and H. Carayol. Uniformisation  $p$ -adique des courbes de Shimura: les théorèmes de Čerednik et de Drinfeld. Number 196-197, pages 7, 45–158. 1991. Courbes modulaires et courbes de Shimura (Orsay, 1987/1988).
- [Bos14] Siegfried Bosch. *Lectures on formal and rigid geometry*, volume 2105 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Cham, 2014.
- [Čer76] IV Čerednik. Uniformization of algebraic curves by discrete arithmetic subgroups of  $\mathrm{PGL}_2(k_w)$  with compact quotients. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 29(1):55, 1976.
- [Dri76] Vladimir G Drinfel'd. Coverings of  $p$ -adic symmetric regions. *Functional Analysis and its Applications*, 10(2):107–115, 1976.
- [FvdP04] Jean Fresnel and Marius van der Put. *Rigid analytic geometry and its applications*, volume 218 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2004.
- [Har77] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume No. 52 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.
- [Liu02] Qing Liu. *Algebraic geometry and arithmetic curves*, volume 6 of *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 2002. Translated from the French by Reinie Ern , Oxford Science Publications.
- [Ray74] Michel Raynaud. G om trie analytique rigide d'apres tate, kiehl. *Table ronde d'analyse non archim dienne (Paris, 1972)*, pages 319–327, 1974.
- [SS91] P. Schneider and U. Stuhler. The cohomology of  $p$ -adic symmetric spaces. *Invent. Math.*, 105(1):47–122, 1991.
- [Voi21] John Voight. *Quaternion algebras*, volume 288 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Cham, [2021]  2021.
- [Zin84] Thomas Zink. *Cartiertheorie kommutativer formaler Gruppen*, volume 68 of *Teubner-Texte zur Mathematik [Teubner Texts in Mathematics]*. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1984. With English, French and Russian summaries.
- [李 19] 李文威. 代数学方法 (第一卷), volume 67.1 of 现代数学基础丛书. 北京: 高等教育出版社, 2019.

## 致谢

首先,我想感谢亲人们长久以来在物质上和精神上对我的支持.因为他们,我才得以来到中国人民大学,并在此学习数学;他们始终如一的支持让我得以成长为今天的样貌.

感谢老师们在过去四年对我的指导和帮助.其中王善文老师不仅指导了我的本科毕业论文,而且一直在数学上指引着我.正是在他的引导下,我产生了对数论与代数几何的强烈兴趣,并立志在未来继续钻研.

感谢我的同学和朋友们,他们的陪伴在学术和生活方面于我不可或缺.特别地,我要感谢姜杰东师兄一次又一次耐心而详尽地解答我 naïve 的数学问题.

本文至此结束,但这只是一条长路的起点,而我希望自己有意志与能力长久地走下去.