

Abrechnung und Pfade Clearing and Paths

Hans-Florian Hoyer, June 2023

1 Einleitung - Introduction

Die gegenseitige Abrechnung von offen gelassenen Zahlungsverpflichtungen kann unterschiedlichste Arten annehmen.

Beginnt man mit einer Gesellschaft, in der die Kaufgeschäfte und Dienstleistungen sofort bezahlt werden, hat man in einer bestimmten Periode Zeit ein Preisvolumen VOL^+ das mit einer Menge Zahlungsmittel $MATS$ ^a abgewickelt wurde.

Wenn jemand die erhaltenen Zahlungsmittel in der selben Periode seinerseits wieder zum Zahlen einsetzt, kann $MATS < VOL^+$ sein.

Weitere Möglichkeiten der Verringerung von $MATS$ werden eröffnet, wenn auf die sofortige Bezahlung verzichtet wird. Stattdessen werden die zwischen zwei Akteuren offenen Zahlungsverpflichtungen notiert und am Ende der Periode gegenseitig verrechnet.

Wenn ein Akteur mehrere Beziehungen hat, teilen diese sich auf in solche, wo er etwas zu erhalten hat und solche, wo er zahlen muss. Aus seinen Büchern (Accounts payable and receivable) kann er das für jeden Geschäftspartner ablesen und weiss auch, wie der Endsaldo für ihn ist, wenn alle gezahlt haben und bezahlt wurden.

Im normalen Zahlungsverkehr sind Konfigurationen möglich, in denen ein Akteur X nicht an Y zahlen kann, weil er nicht von A bezahlt wurde, weil A auf eine Zahlung von Z wartet, der auf einen Eingang von Y wartet, der wiederum auf X wartet.

Bei einer Matrix, aus der alle überflüssigen Zahlungsmittel entfernt wurden, ist das nicht möglich, wie der folgende Text zeigt.

The mutual settlement of payment obligations left open can take on a wide variety of forms.

Starting with a society in which purchase transactions and services are paid for immediately, one has in a given period of time a price volume VOL^+ that was settled with a certain quantity of means of payment $MATS$.

If someone in turn uses the cash received to pay again in the same period, $MATS < VOL^+$ can be.

Further possibilities for reducing $MATS$ are opened up if immediate payment is dispensed with. Instead, the payment obligations open between two actors are noted and mutually offset at the end of the period.

If an actor has several relationships, these are divided into those where he has to receive something and those where he has to pay. From his books (accounts payable and receivable) he can read this for each business partner and also knows what the final balance is for him when all have paid and have been paid.

In standard payment transactions, configurations are possible in which an actor X cannot pay Y because he has not been paid by A, because A is waiting for a payment from Z, who is waiting for an input from Y, who is in turn waiting for X.

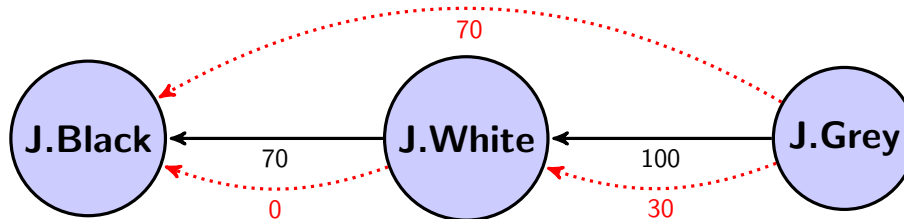
This is not possible with a matrix from which all superfluous means of payment have been removed, as the following text shows.

^aMaximum Amount To Settle

2.2 Drei oder mehr Beteiligte - Three or more participants

Wenn nach der Kompensation ein Saldo zwischen zwei Kaufleuten verblieben war, zogen sie einen Dritten hinzu, sodass eine Kette von Schuldverhältnissen gebildet wurde. Dann einigte man sich, dass Grey an White nur 30 zahlte, dafür aber die Schuld von White gegenüber Black über 70 zahlte.

If a balance remained between two merchants after compensation, they involved a third party, so that a chain of debts was formed. It was then agreed that Grey would pay White only 30, but in return pay White's debt to Black over 70.



Diese Technik löst ein Schuldverhältnis auf, verändert ein zweites und schafft ein neues. Anstatt 170 Münzen waren nur noch 100 erforderlich. Das war Grund genug, dass alle drei zusammenstanden, zustimmten und die neuen Verhältnisse in die Bücher schrieben. Nun konnten Grey und Black einen neuen Dritten suchen oder Grey und White.

This technique dissolves one debt relationship, changes a second and creates a new one. Instead of 170 coins, only 100 were needed. That was reason enough for all three of them to stand together, agree and write the new relationships in the books. Now Grey and Black could look for a new third party or Grey and White.

Der Algorithmus kann leicht formuliert werden, wenn die Pfeile in dieselbe Richtung zeigen, d.h. wenn der mittlere Akteur zahlt und erhält.

The algorithm can be easily formulated if the arrows point in the same direction, i.e. if the middle actor pays and receives.

"Ziehe den kleineren Wert (hier:70) der ursprünglichen Zahlungsverpflichtungen von beiden ab - das hat zur Folge, dass eine von beiden Verbindungen gelöst wird - und etabliere mit dem Wert eine neue Verbindung zwischen Anfang und Ende der Kette in Pfeilrichtung".

"Subtract the smaller value (here:70) of the original payment obligations from both - this has the effect of loosening one of the two links - and use the value to establish a new link between the beginning and the end of the chain in the direction of the arrows".

Der Algorithmus kann über eine Matrix gesteuert werden und entfernt überflüssige Zahlungen unter Beibehaltung der Knotenbilanzen.

The algorithm can be controlled via a matrix and removes superfluous payments while maintaining the node balances.

Das Kriterium für das Erreichen von *MATS* ist, dass es keine Knoten mehr gibt, die sowohl eingehende als auch ausgehende Pfeile haben, dass also keine Dreierketten mehr gebildet werden können.

The criterion for achieving *MATS* is that there are no more nodes that have both incoming and outgoing arrows, i.e. no more three-way chains can be formed.

2.3 Das kleinste Element spart - The smallest element saves

Beginnt man mit einer zirkulären Dreierkombination, so kann zunächst der kleinste Wert (3) aus der Loop entfernt werden. Er wird dreimal abgezogen und lässt an der Stelle, wo er war ein Loch.

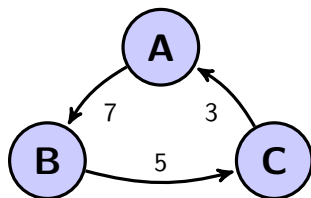
Die ursprüngliche Summe der zu bewegendenden Zahlungsmittel war:

$$3 + 7 + 5 = 15$$

und ist nun:

$$3 - 3 + 7 - 3 + 5 - 3 = 15 - 9 = 6$$

was eine beträchtliche Einsparung darstellt.



Im zweiten Schritt kann **B** einen Teil der Schuld, die **A** ihm gegenüber hat, an **C** delegieren und so seinerseits seine Schuld bei **C** erfüllen.

Dazu wird der kleinere Wert (2) zweimal abgezogen und einmal neu eingeführt. Die zu bewegendenden Zahlungsmittel werden um den kleineren Wert verringert.

Nun hat der Graph den Zustand erreicht, im die Knoten nur noch entweder ausgehende oder eingehende Pfeile haben, aber nicht beides. Dies war in den Zuständen zuvor der Fall.

Die Knotensalden in allen drei Konfigurationen sind dieselben.

A	3-7	-4	-2-2
B	7-5	4-2	2
C	5-3	2	2

Keine weiteren Ersparnisse an Zahlungsmitteln sind möglich.

If one starts with a circular triple combination, the smallest value (3) can first be removed from the loop. It is subtracted three times, leaving a hole where it was.

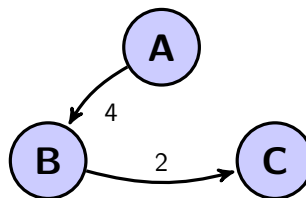
The original sum of the payment means to be moved was:

$$3 + 7 + 5 = 15$$

and is now:

$$3 - 3 + 7 - 3 + 5 - 3 = 15 - 9 = 6$$

which is a considerable saving.

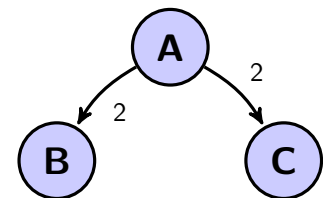


In the second step, **B** can delegate part of the debt **A** owes to it to **C** and thus in turn fulfil its debt to **C**.

To do this, the smaller value (2) is deducted twice and reintroduced once. The means of payment to be moved are reduced by the smaller value.

Now the graph has reached the state where the nodes only have either outgoing or incoming arrows, but not both. This was the case in the previous states.

The node balances in all three configurations are the same.

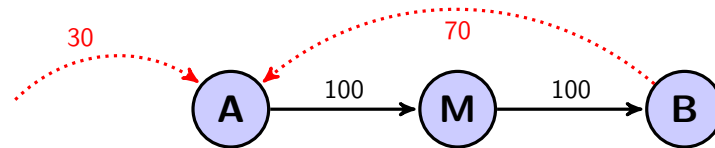


No further savings in means of payment are possible.

2.4 Kein Gridlock möglich - No gridlock possible

Ein Gridlock ist das Ausbleiben eines Zahlungseingangs, z.B. von **A** zu **M**, weil **B** auf den Eingang von **M** wartet, um den Ausgang an **A** zu machen, der den Eingang bei **M** ermöglicht.

A gridlock is the failure of an incoming payment, e.g. from **A** to **M**, because **B** is waiting for the input from **M** to make the output to **A** that enables the input to **M**.



Die Bedingung für Gridlocks ist also die Existenz von Knoten mit Eingängen und Ausgängen.

The condition for gridlocks is therefore the existence of nodes with inputs and outputs.

Wenn die Bedingung für das Erreichen von *MATS* erfüllt ist, kann es also keinen Gridlock geben, da die zahlenden Knoten keine Eingänge haben, von denen die Zahlungsfähigkeit abhängt. Diese ist nur von ihrer Kassenführung abhängig, und kann bei ordnungsgemäßer Buchführung keine Überraschung sein.

If the condition for reaching *MATS* is fulfilled, there can be no gridlock, as the paying nodes have no inputs on which the ability to pay depends. This depends only on their cash management, and cannot be a surprise if the accounts are kept properly.

2.5 Die Pfad-Methode in der Matrix - The path-method for the matrix

Pfeile im Graph sind Elemente in der Matrix. Der Pfeil von i nach j ist in Element $M_{i,j}$.

Arrows in the graph are elements in the matrix. The arrow from i to j is in element $M_{i,j}$.

M		i		j		k	
i				i, j		i, k	
j		j, i				j, k	
k		k, i		k, j			

Solange es Matricelemente gibt mit $M_{i,j} > 0$ und $M_{j,k} > 0$

Setze $x = \min(M_{i,j}, M_{j,k})$

Setze $M_{i,j} = M_{i,j} - x$

Setze $M_{j,k} = M_{j,k} - x$

Setze $M_{i,k} = M_{i,k} + x$

Wenn $M_{k,i} > 0$ dann

Setze $x = \min(M_{k,i}, M_{i,k})$

Setze $M_{k,i} = M_{k,i} - x$

Setze $M_{i,k} = M_{i,k} - x$

Ende Wenn

Ende Solange

While there are Elements

with $M_{i,j} > 0$ and $M_{j,k} > 0$

Set $x = \min(M_{i,j}, M_{j,k})$

Set $M_{i,j} = M_{i,j} - x$

Set $M_{j,k} = M_{j,k} - x$

Set $M_{i,k} = M_{i,k} + x$

If $M_{k,i} > 0$ then

Set $x = \min(M_{k,i}, M_{i,k})$

Set $M_{k,i} = M_{k,i} - x$

Set $M_{i,k} = M_{i,k} - x$

End if

End while

Dieser kleine Abschnitt Code kann angesehen werden als eine Art Termit, die an der Matrix selbst erkennt (Stigmergie), was zu tun ist, wenn sie überflüssige Zahlungsmittel entdeckt. Man kann eine einzelne Termit die ganze Arbeit machen lassen, oder eine ganze Kolonie auf eine große Matrix loslassen, sie gewissermaßen randomisiert mit Fallschirm auf der Matrix landen lassen und ihre Arbeit tun. Die einen links herum, die anderen rechts herum, die einen von oben nach unten, die anderen von unten nach oben.

This small section of code can be seen as a kind of termite that recognises (stigmergy) from the matrix itself what needs to be done, when it discovers superfluous means of payment. One can let a single termite do all the work, or let a whole colony work on a large matrix, let them land randomly, so to speak, with parachutes on the matrix and do their work. Some around to the left, others around to the right, some from top to bottom, others from bottom to top.

Eine interessante Aufgabe für Parallelrechner.

An interesting task for parallel computing.

3 Ein Gemeinschafts-Protokoll - A community protocol

3.1 Pfadloses Clearing - Pathless clearing

Die Einsicht der Akteure in einer Gemeinschaft in die simple Mathematik, kann es ihnen erlauben, nach einem neuen Protokoll zu wirtschaften.

Anstatt an ihre multiplen $\{1\} \rightleftharpoons \{1\}$ Beziehungen festzuhalten, können sie dazu übergehen, nur noch eine Beziehung $\{1\} \rightleftharpoons \{(N-1)\}$ zu haben: "Was schulde ich den anderen?", "Was schulden die anderen mir?"

The insight of the actors in a community into simple mathematics can allow them to manage according to a new protocol.

Instead of holding on to their multiple $\{1\} \rightleftharpoons \{1\}$ relationships, they can move to having only one relationship $\{1\} \rightleftharpoons \{(N-1)\}$: "What do I owe the others?", "What do the others owe me?"

<i>M</i>	A	B	C	D	E	Σ to settle	Δ to pay
A		7.504	8.393	849	1.456	18.202	0
B	6.132		1.432	5.701	5.489	18.754	0
C	3.187	7.252		956	612	12.007	0
D	6.216	5.829	8.818		1.282	22.145	14.088
E	3.616	8.142	6.926	551		19.235	10.396
Σ to settle	19.151	28.727	25.569	.8057	8.839	90.343	
Δ to get	949	9.973	13.562	0	0		24.484

Die Zeilensumme von **C** zeigt die offenen Obligationen gegenüber den anderen **A,B,D,E**, die Spaltensumme von **C** die Obligationen von **A,B,D,F**, der Saldo in der Spalte weist **C** als Empfangenden aus.

The row sum of **C** shows the open obligations to the others **A,B,D,E**, the column sum of **C** shows their **A,B,D,F** obligations, the balance in the column shows **C** as a recipient.

3.2 Ausgleichszahlung - Settling payment

Da die Determinante der Matrix Null ist, gibt es beliebig viele Lösungen, um die Ausgleichszahlungen zu leisten. Hier werden drei Lösungen als Beispiel angeführt:

Since the determinant of the matrix is zero, there are any number of solutions to make the equalisation payments. Three solutions are given here as examples:

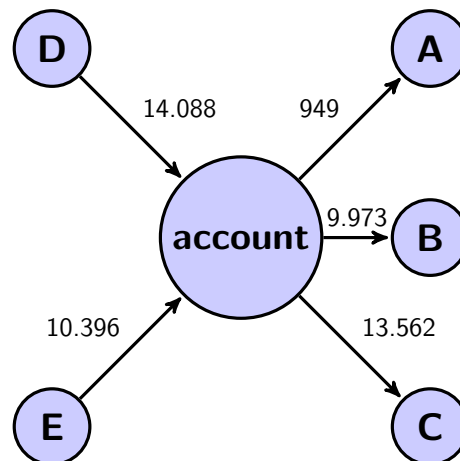
<i>M</i>	A	B	C	Δ to pay
D	546,05	5.738,43	7.803,52	14.088,00
E	402,95	4.234,57	5.758,48	10.396,00
Δ to get	949,00	9.973,00	13.562,00	24.484,00

<i>M</i>	A	B	C	Δ to pay
D	949	9.973	3.166	14.088
E			10.396	10.396
Δ to get	949	9.973	13.562	24.484

<i>M</i>	A	B	C	Δ to pay
D		9.973	4.115	14.088
E	949		9.447	10.396
Δ to get	949	9.973	13.562	24.484

Die Lösungen unterscheiden sich darin, wieviele Überweisungen eine Partei machen muss, nicht jedoch in der zu leistenden Summe. Die Gemeinschaft muss darüber eine Einigung erzielen, wie sie eine Möglichkeit auswählt.

The solutions differ in how many transfers a party has to make, but not in the amount to be transferred. The community must agree on how to choose one option.



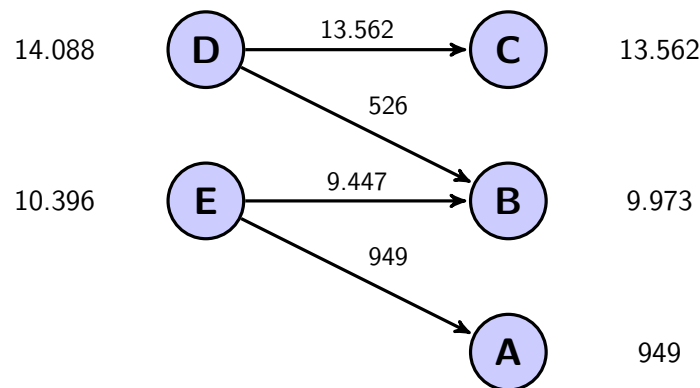
Die Zahlung über ein Konto der Gemeinschaft ist die sachgemäße Lösung. Sie hat allerdings den Nachteil, dass es sich dabei um eine Finanzdienstleistung handelt, die genehmigungspflichtig ist. Die Berechnungen in der Matrix sind reine Informationsverarbeitung über offene Zahlungen, keine Geldbewegungen. Daher erfordern sie keine Genehmigung der Aufsichtsbehörden.

Payment via a community account is the appropriate solution. However, it has the disadvantage that it is a financial service that requires authorisation. The calculations in the matrix are pure information processing about open payments, not money movements. Therefore, they do not require approval by the supervisory authorities.

3.3 Ausgleichs-Wasserfall - Settling cascade

Eine zweite Möglichkeit, die Zahlungen in gewisser Weise 'objektiv' festzulegen, ist die Anordnung von Zahlenden und Empfangenden nach absteigender Summe. Dann werden die Empfänger nach unten fortschreitend von den Zahlenden bedient.

A second way to determine payments in a somewhat 'objective' way is to arrange payers and receivers in descending sum. Then the recipients are served by the payers progressively downwards.



4 Zahlen oder übertragen? - Pay or carry forward?

Eine Gemeinschaft kann festlegen, dass nach jeder Abrechnungsperiode Abschlusszahlungen in allgemeiner Währung geleistet werden müssen. Mit der Zahlung sind dann alle offenen Obligationen beglichen.

A community can determine that final payments must be made in common currency to close each settlement period.

With the payments, all open obligations are then settled.

		A	B	C	D	E	F	G	Rollo	zahlen	erhalten	don't pay	don't receive
Month 1													
Fields filled	21	A	743	183		4.223				5.149	1.017	4.132	
of max	42	B	303							303	3.177		2.874
=Sparcity'	50%	C	344		518					862	1.043		181
	0,5	D	714	631	252	448	395			2.440	8.946		6.506
	0,1	E		772	195		566	7.004		8.537	4.900	3.637	
		F		275		4.608				4.883	961	3.922	
		G		412	413	3.820	229			4.874	7.004		2.130
		Rollo											
			1.017	3.177	1.043	8.946	4.900	961	7.004	27.048	27.048	11.691	11.691
										Total		NID	
Month 2												don't pay	don't receive
Fields filled	29	A			238	3.592	7.022		4.132	14.984	5.409	9.575	
of max	42	B	635		324	217	319	607		2.102	4.473		2.371
=Sparcity'	69%	C	313			670	2.475			3.458	2.392	1.066	
	0,6	D	3.824		440	533	699			5.496	8.026		2.530
	88	E	129	810	372	239	4.619	803	3.637	10.609	4.983	5.626	
		F	508	789	446	826		98	3.922	6.589	16.617		10.028
		G			629		188	4.657		5.474	6.812		1.338
		Rollo		2.874	181	6.506		2.130		11.691	11.691		
			5.409	4.473	2.392	8.026	4.983	16.617	6.812	60.403	60.403	16.267	16.267
										Total		NID	

Remark: 'NID' = $MATS$

Dabei nutzt die Gemeinschaft jedoch einen vorteilhaften Effekt nicht aus. Durch ein Offenhalten der Obligationen ergeben sich mehr Verrechnungsmöglichkeiten in der Zukunft.

Das zeigt der Vergleich von 12 Perioden mit Übertrag und einer Akkumulation deren Werte in eine lange Periode.

However, in doing so, the community is not taking advantage of a beneficial effect. By keeping the bonds open, there are more offsetting possibilities in the future.

This is shown by the comparison of 12 periods with carryover and an accumulation of their values into one long period.

Month 12		A	B	C	D	E	F	G	Rollo	Σ pay	Σ get	don't Δ pay	don't Δ get
Fields filled	26	A				1.120	9.040		11.482	21.642	2.425	19.217	
of max	42	B		1.351	1.035	2.044	334	2.498	2.543	9.805	2.006	7.799	
=Sparcity'	62%	C	964	391		4.224	791	224	1.515	8.109	3.319	4.790	
	0,6	D				1.202	183		11.212	12.597	22.695		10.098
	155	E	434	1.135		1.409		1.037		4.015	8.452		4.437
		F			681	9.391				10.072	26.464		16.392
		G	1.027	480	1.151	6.636		1.024		10.318	11.197		879
		Rollo			136	3.295	14.622	7.184		25.237	25.237		
			2.425	2.006	3.319	22.695	8.452	26.464	11.197	101.795	101.795	31.806	31.806
										Total		NID	

256.529 256.529

Year accumulated as 1 period		A	B	C	D	E	F	G	Rollo	Σ pay	Σ get	Δ pay	Δ get
Fields filled	42	A		4.209	4.901	2.081	10.294	19.355	14.938	55.778	36.561	19.217	
of max	42	B	11.292		19.609	5.622	7.654	9.651	5.583	59.411	51.612	7.799	
=Sparcity'	100%	C	3.383	12.539		12.481	18.037	2.941	15.632	65.013	60.223	4.790	
		D	6.810	12.630	2.882		14.219	23.055	3.467	63.063	73.161		10.098
		E	3.328	4.833	3.331	10.812		7.812	24.802	54.918	59.355		4.437
		F	1.441	12.488	11.555	29.074	4.886		3.092	62.536	78.928		16.392
		G	10.307	4.913	17.945	13.091	4.265	16.114		66.635	67.514		879
		Rollo											
			36.561	51.612	60.223	73.161	59.355	78.928	67.514	427.354	427.354	31.806	31.806
										Total		NID	

Der Übertrag der Salden auf den nächsten Monat hat dieselbe Auswirkung wie eine Verlängerung der Abrechnungsperiode.

Das NID des letzten Monats mit Übertrag ist das selbe, wie das der akkumulierten Monate ohne Übertrag.

Durch die Übertragung ist es möglich, das Verrechnungspotential zu erweitern.

Carrying forward the balances to the next month has the same effect as extending the accounting period.

The NID of the last month with carryover is the same as that of the accumulated months without carryover.

Using the carry-over, it is possible to expand the clearing potential.

5 Vertrauen - Trust

Das Vertrauen baut sich in einer Loop auf. Zunächst vertraut der Verkäufer dem Käufer, beide vertrauen in die Mathematik, die sie verstanden haben und der Verkäufer vertraut der Gemeinschaft, dass sie garantiert, dass jeder Zahlungsempfänger in der Endabrechnung sein Geld erhält. Das wiederum erleichtert ihm, auch anderen Kunden zu vertrauen.

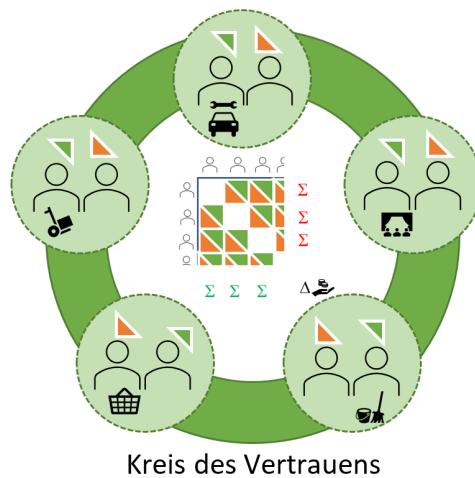
Fals Differenzen auftreten, tritt zunächst die Gemeinschaft dafür ein und untersucht erst dann, wo die Ursachen liegen.

Trust builds up in a loop. First, the seller trusts the buyer, both trust in the mathematics they have understood and the seller trusts the community to guarantee that each payment recipient will receive his money in the final settlement. This in turn makes it easier for him to trust other customers as well.

If differences arise, the community first takes responsibility and only then investigates the causes.

Das Vertrauen in die Gemeinschaft und die Mathematik stärkt das Vertrauen, Zahlungen offen zu lassen.

Trust in the community and mathematics strengthens the confidence to leave payments open.



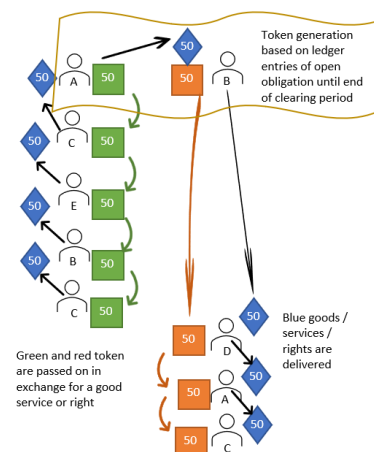
In dieser Gemeinschaft ist ein weiterer Schritt möglich. Neben dem ordnungsgemäßen Eintrag in die Bücher könne beide Parteien einen Future mit der Gemeinschaft abschliessen. Der Verkäufer kauft das Versprechen der Gemeinschaft, am Tag der Abrechnung zu zahlen, der andere verkauft der Gemeinschaft sein Versprechen, zu zahlen.

Diese Futures sind fungibel und können als Zahlungsmittel eingesetzt werden, solange nicht abgerechnet wurde.

In this community, a further step is possible. Besides the proper entry in the ledgers, both parties could enter into a future with the community. The seller buys the community's promise to pay on the day of settlement, the other sells the community his promise to pay.

These futures are fungible and can be used as a means of payment as long as they have not been settled.

	A	B	C	D	E	GSR=Good/Service/Right
50	50					A delivers to B 50 in GSR. Gets greenToken B gets red Token
50		50				
			50			
				50		A passes green Token to C and gets 50 GSR
					50	
						C passes greenToken to E and gets 50 GSR
						E passes greenToken to B and gets 50 GSR
						B passes greenToken to C and gets 50 GSR
						B passes redToken to D and D gets 50 GSR
						D passes redToken to A and A gets 50 GSR
						A passes redToken to C and C gets 50 GSR
50	0	0	50	0	0	
50	0	0	50	0	0	C has green and red Token - nothing to settle
400	100	100	100	50	50	400 GSR distributed



more on Twin Token here:

https://drive.google.com/file/d/1DvgWfDUz3hTbwPXSXz5s9GBXC8alaDf_/view?usp=sharing

6 Schluss - Conclusion

Dieser Text zeigt, mit welchen Techniken ein Netz von offenen Obligationen so bearbeitet werden kann, dass das Volumen der zu bewegendenden Zahlungsmittel minimal ist.

Das ist erreicht, wenn es nur noch Zahlende und Empfangende im Netz gibt. Ein einziger Knoten mit einkommenden und ausgehenden Zahlungen von zwei anderen Knoten bietet die Möglichkeit zu weiterer Delegation.

Mit dem Erreichen des *MATS* sind alle Bedingungen für das Eintreten eines Gridlock ausgeräumt. Es gibt keinen Knoten, dessen Eingang von seinem Ausgang abhängt, da dieser Knotentyp in der Matrix nicht mehr vorkommt.

Es ist gleichgültig, ob dieser Zustand der Matrix durch ein Vorgehen entlang von Pfaden oder über die Zeilen- und Spaltensummen erreicht wurde.

This text shows which techniques can be used to process a network of open bonds in such a way that the volume of cash to be moved is minimal.

This is achieved when there are only payers and receivers in the network. A single node with incoming and outgoing payments from two other nodes offers the possibility of further delegation.

By reaching *MATS*, all conditions for a gridlock to occur are removed. There is no node whose input depends on its output, as this type of node no longer occurs in the matrix

It does not matter whether this state of the matrix was reached by proceeding along paths or via the row and column sums.

English translation with:
<https://www.deepl.com/en/translator>