Compilación OMM

Proyecto MURO

3 de agosto de 2022

Introducción

Somos el proyecto MURO, y nuestro objetivo es conformar un Movimiento Unificador de Recursos Olímpicos.

Esta es una compilación con todos los problemas de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, (en un futuro agregaremos pistas y soluciones). Esperamos la disfrutes! y no dudes en compartirnos cualquier comentario o crítica constructiva.

Nos puedes contactar por aquí: proyectomuro.com.

Índice

I. Problemas

OMM 2021

Problema 1. Los números reales positivos a_1, a_2, a_3 son tres términos consecutivos de una progresión aritmética, y análogamente, b_1, b_2, b_3 son números reales positivos distintos y términos consecutivos de una progresión aritmética. ¿Es posible utilizar tres segmentos de longitudes a_1, a_2, a_3 como bases, y otros tres segmentos de longitudes b_1, b_2, b_3 como alturas, para construir tres rectángulos de igual área?

Problema 2. Sea ABC un triángulo tal que $\angle ACB > 90°$ y sea D el punto de la recta BC tal que AD es perpendicular a BC. Considera Γ la circunferencia de diámetro BC. Una recta que pasa por D es tangente a la circunferencia Γ en P, corta al lado AC en M (quedando M entre A y C) y corta al lado AB en N. Demuestra que M es punto medio de DP si y solo si N es punto medio de AB.

Problema 3. Sean $m, n \geq 2$ dos enteros. En una cuadrícula de $m \times n$, una hormiga empieza en el cuadrito inferior izquierdo y quiere caminar al camino superior derecho. Cada paso que da la hormiga debe ser a un cuadrito adyacente, y de acuerdo a las siguientes posibilidades: $\uparrow$, $\rightarrow$ y $\nearrow$. Sin embargo, un malvado mago ha dejado caer lava desde arriba de la cuadrícula y ha destruido algunos cuadritos, de forma tal que:

- Si un cuadrito está destruido, entonces todos los cuadritos superiores a él también también están destruidos.
- El número de cuadritos destruidos es mayor o igual a 0.
- Quedan suficientes cuadritos sin destruir para que la hormiga pueda llegar a la meta.

Sea P el número de caminos de longitud par que puede seguir la hormiga. Sea I el número de caminos de longitud impar que puede seguir la hormiga. Encuentra todos los posibles valores de $P - I$.

Problema 4. Sea ABC un triángulo acutángulo escálelo con $\angle BAC = 60°$ y ortocentro H. Sean ω_b la circunferencia que pasa por H y es tangente a AB en B, y ω_c la circunferencia que pasa por H y es tangente a AC en C. Prueba que ω_b y ω_c solamente tienen a H como punto común. Prueba que la recta que pasa por H y el circuncentro O del triángulo ABC es una tangente común a ω_b y ω_c.

Problema 5. Para cada entero $n < 0$ con expansión decimal $\overline{a_1a_2\cdots a_{k-1}a_k}$, definimos a $s(n)$ como sigue:

Si n es par, $s(n) = \overline{a_1a_2} + \overline{a_3a_4} \cdots + \overline{a_{k-1}a_k}$. Si n es impar, $s(n) = a_1 + \overline{a_2a_3} \cdots + \overline{a_{k-1}a_k}$. Por ejemplo, si $n = 123$, entonces $s(n) = 1 + 23 = 24$ y si $n = 2021$ entonces $s(n) = 20 + 21 = 41$.

Decimos que n es "digital"si n es múltiplo de $s(n)$. Muestra que entre cualesquiera 198 enteros positivos consecutivos, todos ellos menoress a 2000021, hay uno de ellos que es digital.

Problema 6. Determina todos los conjuntos no vacíos $C_1, C_2, C_3, \cdots$ tales que cada uno de ellos tiene un número finito de elementos, y todos sus elementos son enteros positivos, con la siguiente propiedad: Para cualesquiera enteros positivos n y m, el número de elementos del conjunto C_n más el número de elementos del conjunto C_m es igual a la suma de los elementos del conjunto C_{m+n}.

OMM 2020

Problema 1. Un conjunto de cinco enteros positivos distintos se llama "virtual"si el máximo común divisor de cualesquiera tres de sus elementos es mayor que 1, pero el máximo común divisor de cuatro de ellos es igual a 1. Demostrar que, en cualquier conjunto virtual, el producto de sus elementos tiene al menos 2020 divisores positivos distintos.

Problema 2. Sea ABC un triángulo con incentro I. La recta BI se encuentra con AC en D. Sea P un punto en CI tal que $DI = DP$, $(P \neq I)$, E el segundo punto de intersección del segmento BC con el circuncírculo de ABD y Q el segundo punto de intersección de la recta EP con el circuncírculo de AEC. Demuestra que $\angle PDQ = 90°$.

Problema 3. Sea $n \geq 3$ un número entero. Dos jugadores, Ana y Beto, juegan al siguiente juego. Ana etiqueta los vértices de un n-ágono regular con los números del 1 al n, en el orden que quiera. Cada vértice debe ser etiquetado con un número diferente. A continuación, colocamos un guajolote en cada uno de los n vértices.
Estos guajolotes se entrenan para lo siguiente. Si Beto silba, cada guajolote se mueve al vértice adyacente con mayor etiqueta. Si Beto aplaude, cada guajolote se mueve al vértice adyacente con la etiqueta menor.
Beto gana si, tras un cierto número de silbidos y palmadas, consigue mover todos los guajolotes al mismo vértice. Ana gana si consigue etiquetar los vértices para que Beto no pueda hacerlo. Para cada $n \geq 3$, determina qué jugador tiene una estrategia ganadora.

Problema 4. Sea $n \geq 3$ un número entero. En un juego hay n cajas en un círculo. Al principio, cada caja contiene un objeto que puede ser piedra, papel o tijeras, de forma que no hay dos cajas adyacentes con el mismo objeto, y cada objeto aparece en al menos una caja.

Al igual que en el juego, piedra gana a tijera, tijera gana a papel y papel gana a piedra.

El juego consiste en mover objetos de una caja a otra según la siguiente regla:

Se eligen dos cajas adyacentes y un objeto de cada una de ellas de forma que sean diferentes, y movemos el objeto perdedor a la caja que contiene el objeto ganador. Por ejemplo, si elegimos una piedra de la caja A y unas tijeras de la caja B, movemos las tijeras a la caja A.

Demuestra que, aplicando la regla suficientes veces, es posible mover todos los objetos a la misma caja.

Problema 5. Un conjunto $\{a, b, c, d\}$ de cuatro enteros positivos se llama "bueno"si hay dos de ellos tales que su producto es múltiplo del mayor común divisor de los dos restantes. Por ejemplo, el conjunto $\{2, 4, 6, 8\}$ es bueno ya que el máximo común divisor de 2 y 6 es 2, y divide a $4 \times 8 = 32$.

Encuentra el mayor valor posible de n, tal que cualquier conjunto de cuatro elementos con elementos menores o iguales a n sea bueno.

Problema 6. Sea $n \geq 2$ un número entero positivo. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reales no nulos que satisfacen la ecuación

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_3}\right)\ldots\left(x_n + \frac{1}{x_1}\right) = \left(x_1^2 + \frac{1}{x_2^2}\right)\left(x_2^2 + \frac{1}{x_3^2}\right)\ldots\left(x_n^2 + \frac{1}{x_1^2}\right).$$

Encuentra todos los valores posibles de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

OMM 2019

Problema 1. Un número entero $m \geq 1$ es mexica si es de la forma $n^{d(n)}$, donde n es un entero positivo y $d(n)$ es el número de enteros positivos que dividen a n. Encuentra todos los números de mexica menores que 2019.

Problema 2. Sea H el ortocentro del triángulo acutángulo ABC y M el punto medio de AH. La recta BH corta a AC en D. Se considera un punto E tal que BC es la bisectriz de DE. Los segmentos CM y AE se cruzan en F. Muestra que BF es perpendicular a CM.

Problema 3. Sea $n \geq 2$ un número entero. Considera $2n$ puntos alrededor de un círculo. Cada vértice se ha marcado con un número entero desde 1 hasta n, inclusive, y cada uno de estos enteros se ha utilizado exactamente dos veces. Isabel divide los puntos en n pares, y dibuja los segmentos que los unen, con la condición de que estos segmentos no se crucen. A continuación, asigna a cada segmento el mayor número entero entre sus puntos extremos. Muestra que, independientemente de cómo se hayan marcado los puntos, Isabel siempre puede elegir los pares de forma que utilice exactamente $\lceil n/2 \rceil$ números para marcar los segmentos. ¿Se pueden etiquetar los puntos de tal manera que, independientemente de cómo Isabel divida los puntos en pares, siempre utilice exactamente $\lceil n/2 \rceil$ números para etiquetar los segmentos?

Nota: Para cada número real x, $\lceil x \rceil$ denota el menor número entero mayor o igual que x. Por ejemplo, $\lceil 3,6 \rceil = 4$ y $\lceil 2 \rceil = 2$.

Problema 4. Una lista de enteros positivos se llama buena si el elemento máximo de la lista aparece exactamente una vez. Una sublista es una lista formada por uno o más elementos consecutivos de una lista. Por ejemplo, la lista $10, 34, 34, 22, 30, 22$ la sublista $22, 30, 22$ es buena y $10, 34, 34, 22$ no lo es. Una lista es muy buena si todas sus sublistas son buenas. Encontrar el valor mínimo de k tal que exista una lista muy buena de longitud 2019 con k valores diferentes en ella.

Problema 5. Sean $a > b$ enteros positivos relativamente primos. Un saltamontes se sitúa en el punto 0 de una recta numérica. Cada minuto, el saltamontes salta de acuerdo con las siguientes reglas:

Si el minuto actual es un múltiplo de a y no un múltiplo de b, salta a unidades hacia adelante. Si el minuto actual es un múltiplo de b y no un múltiplo de a, salta b unidades hacia atrás. Si el minuto actual es tanto un múltiplo de b como un múltiplo de a, salta $a - b$ unidades hacia adelante. Si el minuto actual no es ni un múltiplo de a ni un múltiplo de b, no se mueve.

Encuentra todas las posiciones de la recta numérica que el saltamontes acabará alcanzando.

Problema 6. Sea ABC un triángulo tal que $\angle BAC = 45°$. Sean H, O el ortocentro y el circuncentro de ABC, respectivamente. Sea ω la circunferencia de ABC y P el punto sobre ω tal que la circunferencia de PBH es tangente a BC. Sean X y Y los circuncentros de PHB y PHC respectivamente. Sean O_1, O_2 los circuncentros de PXO y PYO respectivamente. Muestra que O_1 y O_2 están en AB y AC, respectivamente.

OMM 2018

Problema 1. Sean A y B dos puntos de una recta ℓ, M el punto medio de AB, y X un punto del segmento AB distinto de M. Sea Ω una semicircunferencia de diámetro AB. Consideremos un punto P sobre Ω y sea Γ la circunferencia que pasa por P y X que es tangente a AB. Sea Q el segundo punto de intersección de Ω y Γ. La bisectriz del ángulo interno del $\angle PXQ$ interseca a Γ en un punto R. Sea Y un punto de ℓ tal que RY es perpendicular a ℓ. Muestra que $MX > XY$.

Problema 2. Para cada número entero positivo m, definimos L_m como la figura que se obtiene al superponer dos rectángulos de 1×1 y $m \times 1$ de manera que coincidan en el cuadrado de 1×1 en sus extremos, como se muestra en la figura.

Utilizando unas figuras $L_{m_1}, L_{m_2}, \ldots, L_{m_k}$, cubrimos completamente un tablero $n \times n$, de forma que las aristas de la figura coincidan con líneas del tablero. Entre todas las coberturas posibles del tablero, encontrar el mínimo valor posible de $m_1 + m_2 + \cdots + m_k$.

Nota: Al cubrir el tablero, las figuras pueden estar giradas o reflejadas, y pueden solaparse o no estar completamente contenidas en el tablero.

Problema 3. Una secuencia $a_2, a_3, \ldots, a_n$ de enteros positivos se dice que es campechana, si para cada i tal que $2 \leq i \leq n$ se cumple que exactamente a_i términos de la secuencia son relativamente primos de i. Decimos que el tamaño de dicha sucesión es $n-1$. Sea $m = p_1 p_2 \ldots p_k$, donde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ son primos distintos por parejas y $k \geq 2$. Muestra que existen al menos dos secuencias campechanas diferentes de tamaño m.

Problema 4. Sea $n \geq 2$ un número entero. Para cada pareja k de enteros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tal que $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$, consideramos las sumas $S_i = 1 + 2 + \ldots + a_i$ para $1 \leq i \leq k$. Determina, en términos de n, el máximo valor posible del producto $S_1 S_2 \cdots S_k$.

Problema 5. Sea $n \geq 5$ un número entero y consideremos un n-ágono regular. Inicialmente, Nacho se posiciona en uno de los vértices del n-ágono, en el que pone una bandera. Comienza a moverse en el sentido de las agujas del reloj. Primero se desplaza una posición y pone otra bandera, luego dos posiciones y pone otra bandera, etcétera, hasta que finalmente se desplaza $n-1$ posiciones y pone una bandera, de manera que pone n banderas en total. ¿Para qué valores de n, Nacho habrá puesto una bandera en cada uno de los n vértices?

Problema 6. Sea ABC un triángulo acutángulo con circunferencia Ω. Las bisectrices ángulos B y C intersectan a Ω en M y N. Sea I el punto de intersección de estas bisectrices. Sean M' y N' las respectivas reflexiones de M y N por AC y AB. Muestra que el centro de la circunferencia que pasa por I, M', N' se encuentra en la altitud del triángulo ABC desde A.

OMM 2017

Problema 1. En un tablero de ajedrez de 2017×2017, se han colocado en la primera columna 2017 caballos de ajedrez, uno en cada casilla de la columna. Una tirada consiste en elegir dos caballos distintos y de manera simulátnea moverlos como se mueven los caballos de ajedrez. Encuentra todos los posibles valores enteros de k con $1 \leq k \leq 2017$, para los cuales es posible llegar a través de varias tiradas, a que todos los caballos están en la columna k, uno en cada casilla. Nota. Un caballo se mueve de una casilla X a otra Y, solamente si X y Y son las esquinas opuestas de un rectángulo de 3×2 o de 2×3.

Problema 2. Un conjunto de n números enteros positivos distintos es equilibrado, si el promedio de cualesquiera k números del conjunto es un número entero, para toda $1 \leq k \leq n$. Encuentra la mayor suma que pueden tener los elementos de un conjunto equilibrado, con todos sus elementos menores o iguales que 2017.

Problema 3. Sea ABC un triángulo acutángulo cuyo ortocentro es el punto H. La circunferencia que pasa por los puntos B, H y C vuelve a intersectar a las rectas AB y AC en los puntos D y E, respectivamente. Sean P y Q los puntos de intersección de HB y HC con el segmento DE, respectivamente. Se consideran los puntos X e Y (distintos de A) que están sobre las recta AP y AQ, respectivamente, de manera que los puntos X, A, H y B están sobre un círculo y los puntos Y, A, H y C están sobre un círculo. Muestra que las rectas XY y BC son paralelas.

Problema 4. Un subconjunto B de $\{1, 2, \ldots, 2017\}$, tiene la propiedad T si cada tres números de B son las longitudes de los lados de un triángulo (de área positiva). Determina la mayor cantidad de números que puede tener un conjunto B que tenga la propiedad T.

Problema 5. Sobre una circunferencia Γ se encuentran los puntos A, B, N, C, D y M colocados en el sentido de las manecillas del reloj de manera que M y N son los puntos medios de los arcos DA y BC (recorridos en el sentido de las manecillas del reloj). Sea P la intersección de los segmentos AC y BD; y sea Q un punto sobre MB de manera que las rectas PQ y MN son perpendiculares. Sobre el segmento MC se considera un punto R de manera que $QB = RC$. Muestra que AC pasa por el punto medio del segmento QR.

Problema 6. Sean $n \geq 2$ y $m \geq 2$ enteros positivos. Se tienen m urnas dispuestas en fila. Los jugadores A y B juegan por turnos, comenzando por A, de la siguiente manera. En cada turno, A elige dos urnas y coloca un voto en cada una de ellas. Posteriormente, B elige una urna, y elimina todos los votos de esa. A gana si logra que haya una urna con n votos después de algún turno de B. Determina para cada n el mínimo valor de m para el cual A puede garantizar ganar, sin importar los movimientos que haga B.

OMM 2016

Problema 1. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos circunferencias tangentes externamente en S tales que el radio de $\mathcal{C}_2$ es el triple del radio de $\mathcal{C}_1$. Sea ℓ una recta que es tangente a $\mathcal{C}_1$ en P y tangente a $\mathcal{C}_2$ en Q, con P y Q distintos de S. Sea T el punto en $\mathcal{C}_2$ tal que TQ es diámetro de $\mathcal{C}_2$ y sea R la intersección de la bisectriz de $\angle SQT$ con el segmento ST . Demuestra que $QR = RT$.

Problema 2. Una pareja de enteros positivos m, n es "guerrera"si existen enteros positivos a, b, c, d con $m = ab, n = cd$ y $a+b = c+d$. Por ejemplo, la pareja $8, 9$ es guerrera pues $8 = 4\cdot 2$, $9 = 3 \cdot 3$ y $4 + 2 = 3 + 3$. Se colorean los enteros positivos de la siguiente manera: Empezamos coloreando el 3 y el 5. Después, si algún entero positivo no está coloreado y este tiene una pareja guerrera que ya está coloreado, entonces lo coloreamos. Encuentra todos los enteros positivos que eventualmente se colorean.

Problema 3. Encuentra el menor número real x que cumpla todas las siguientes desigualdades:

$$\lfloor x\rfloor < \lfloor x^2\rfloor < \lfloor x^3\rfloor < \dots \lfloor x^n\rfloor < \lfloor x^{n+1}\rfloor < \dots$$

Nota: $\lfloor x\rfloor$ es el mayor número entero menor o igual a x, es decir, es el único entero que cumple que $\lfloor x\rfloor \leq x < \lfloor x\rfloor + 1$.

Problema 4. Decimos que un número entero no-negativo n “contiene” a otro número entero no-negativo m, si los dígitos de su expansión (o desarrollo) decimal aparecen en forma consecutiva en la expansión (o desarrollo) decimal de n. Por ejemplo, 2016 contiene a $2, 0, 1, 6, 20, 16, 201$ y 2016. Determina el mayor número entero n que no contiene a ningún múltiplo de 7.

Problema 5. En una cuadrícula de $n \times n$ se escriben los números del 1 al n^2 en orden, por renglones, de manera que en el primer renglón aparecen los números del 1 al n, en el segundo los números de $n+1$ a $2n$, y así sucesivamente. Una operación permitida en la cuadrícula consiste en escoger cualesquiera dos cuadraditos que compartan un lado y sumar (o restar) el mismo número entero a los dos números que aparecen en esos cuadraditos. Por ejemplo, abajo se muestran dos operaciones sucesivas permitidas en una cuadrícula de 4×4: primero restando 7 a los cuadraditos sombreados y luego sumando 5 a los sombreados.

Determina para qué valores de n es posible lograr que todos los cuadraditos tengan escrito el número 0 después de repetir la operación tantas veces como sea necesario y, en los casos en que sea posible, determina el mínimo número de operaciones necesarias.

Problema 6. Sean $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, ℓ_1 la recta paralela a BC que pasa por A y ℓ_2 la recta paralela a AD que pasa por B. La recta DC corta a ℓ_1 y ℓ_2 en los puntos E y F, respectivamente. La recta perpendicular a ℓ_1 que pasa por A corta a BC en P y la recta perpendicular a ℓ_2 por B corta a AD en Q. Sean Γ_2 y Γ_1 las circunferencias que pasan por los vértices de los triángulos ADE y BFC, respectivamente. Demuestra que Γ_1 y Γ_2 son tangentes si y sólo si DP es perpendicular a CQ.

OMM 2015

Problema 1. Sea ABC un triángulo y sea H su ortocentro. Sea PQ un segmento que pasa por H con P en AB, Q en AC y tal que $\angle PHB = \angle CHQ$. Finalmente en el circuncírculo del triángulo ABC, considera M el punto medio del arco BC que no contiene a A. Muestra que $MP = MQ$.

Problema 2. Sea n un entero positivo y k un entero entre 1 y n. Se tiene un tablero de $n \times n$ color blanco. Se hace el siguiente proceso. Se dibujan k rectángulos con lados de longitud entera, con lados paralelos a los del tablero y tales que su esquina superior derecha coincide con la del tablero. Luego, estos k rectángulos se rellenan de negro. Esto deja una figura blanca en el tablero. ¿Cuántas figuras blancas diferentes podemos obtener, que no se puedan obtener haciendo el proceso con menos de k rectángulos?

Nota: A continuación se muestra un ejemplo para un tablero de 6×6. Se dibujan 3 rectángulos, uno de 1×5, uno de 2×4 y uno de 4×2, para obtener la figura blanca indicada en el tablero de la derecha.

Problema 3. Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ el conjunto de los números enteros positivos. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función, la cual asigna a cada número entero positivo, un número entero positivo. Supón que f satisface las siguientes dos condiciones: a) $f(1) = 1$. b) Para todos a, b enteros positivos, se cumple que

$$f(a + b + ab) = a + b + f(ab).$$

Encuentra el valor de $f(2015)$.

Problema 4. Sea n un entero positivo. María escribe en un pizarrón las n^3 ternas que se pueden formar tomando tres enteros, no necesariamente distintos, entre 1 y n, incluyéndolos. Después, para cada una de las ternas, María determina el mayor (o los mayores, en caso de que haya más de uno) y borra los demás. Por ejemplo, en la terna $(1, 3, 4)$ borrará los números 1 y 3, mientras que en la terna $(1, 2, 2)$ borrará sólo el número 1. Muestra que, al terminar este proceso, la cantidad de números que quedan escritos en el pizarrón no puede ser igual al cuadrado de un número entero.

Problema 5. Sea I el incentro de un triángulo acutángulo ABC. La recta AI corta por segunda vez al circuncírculo del triángulo BIC en E. Sean D el pie de la altura desde A sobre BC y J la reflexión de I con respecto a BC. Muestra que los puntos D, J y E son colineales.

Problema 6. Sea n un entero positivo y sean $d_1, d_2, \dots, d_k$ todos sus divisores positivos ordenados de menor a mayor. Considera el número

$$f(n) = (-1)^{d_1} d_1 + (-1)^{d_2} d_2 + \cdots + (-1)^{d_k} d_k$$

Por ejemplo, los divisores positivos de 10 son 1, 2, 5 y 10, así que

$$f(10) = (-1)^1 \cdot 1 + (-1)^2 \cdot 2 + (-1)^5 \cdot 5 + (-1)^{10} \cdot 10 = 6.$$

Supón que $f(n)$ es una potencia de 2. Muestra que si m es un entero mayor que 1, entonces m^2 no divide a n.

OMM 2014

Problema 1. Cada uno de los números del 1 al 4027 se ha coloreado de verde o de rojo. Cambiar el color de un número es pasarlo a verde si era rojo, y pasarlo a rojo si era verde. Diremos que dos enteros positivos m y n son çuates"si alguno de los números $\frac{m}{n}$ o $\frac{n}{m}$ es un número primo. Un paso consiste en elegir dos números que sean cuates y cambiar el color de cada uno de los números. Muestra que después de realizar algunos pasos es posible hacer que todos los números del 1 al 2014 sean verdes.

Problema 2. Un entero positivo a "se reduce.ª un entero positivo b, si al dividir a entre su dígito de las unidades se obtiene b. Por ejemplo, 2015 se reduce a $\frac{2015}{5} = 403$. Encuentra todos los enteros positivos que, mediante algunas reducciones, llegan al número 1. Por ejemplo, el número 12 es uno de tales enteros pues 12 se reduce a 6 y 6 se reduce a 1.

Problema 3. Sean Γ_1 una circunferencia y P un punto fuera de Γ_1. Las tangentes desde P a Γ_1 tocan a la circunferencia en los puntos A y B. Considera M el punto medio del segmento PA y Γ_2 la circunferencia que pasa por los puntos P, A y B. La recta BM intersecta de nuevo a Γ_2 en el punto C, la recta CA intersecta de nuevo a Γ_1 en el punto D, el segmento DB intersecta de nuevo a Γ_2 en el punto E y la recta PE intersecta a Γ_1 en el punto F (con E entre P y F). Muestra que las rectas AF, BP y CE concurren.

Problema 4. Sea $ABCD$ un rectángulo con diagonales AC y BD. Sean E el punto de intersección de la bisectriz del ángulo $\angle CAD$ con el segmento CD, F el punto sobre el segmento CD tal que E es el punto medio de DF y G el punto sobre la recta BC tal que $BG = AC$ (con C entre B y G). Muestra que la circunferencia que pasa por D, FyG es tangente BG.

Problema 5. Sean a, b y c números reales positivos tales que $a + b + c = 3$. Muestra que

$$\frac{a^2}{a + \sqrt[3]{bc}} + \frac{b^2}{b + \sqrt[3]{ca}} + \frac{c^2}{c + \sqrt[3]{ab}} \geq \frac{3}{2}$$

y determina para qué números a, b y c se alcanza la igualdad.

Problema 6. Para cada entero positivo n, sea $d(n)$ la cantidad de divisores positivos de n. Por ejemplo, los divisores positivos de 6 son 1, 2, 3 y 6, por lo que $d(6) = 4$. Encuentra todos los enteros positivos n tales que

$$n + d(n) = d(n)^2.$$

OMM 2013

Problema 1. Se escriben los números primos en orden, $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots$ Encuentra todas las parejas de números enteros positivos a y b con $a - b \geq 2$, tales que $p_a - p_b$ divide al número entero $2(a - b)$.

Problema 2. Sea $ABCD$ un paralelogramo con ángulo obtuso en A. Sea P un punto sobre el segmento BD de manera que la circunferencia con centro en P y que pasa por A, corte a la recta AD en A y Y, y corte a la recta AB en A y X. La recta AP intersecta a BC en Q y a CD en R, respectivamente. Muestra que $\angle XPY = \angle XQY + \angle XRY$.

Problema 3. ¿Cuál es la mayor cantidad de elementos que puedes tomar del conjunto de números enteros $\{1, 2, \ldots, 2013\}$, de tal manera que entre ellos no haya tres distintos, digamos a, b, c, tales que a sea divisor o múltiplo de $b - c$?

Problema 4. Un cubo de $n \times n \times n$ está construido con cubitos de $1 \times 1 \times 1$, algunos negros y otros blancos, de manera que en cada uno de los subprismas de $n \times 1 \times 1$, de $1 \times n \times 1$ y de $1 \times 1 \times n$ hay exactamente dos cubitos negros y entre ellos hay un número par (posiblemente 0) de cubitos blancos intermedios. Por ejemplo, en la ilustración, se muestra una posible rebanada del cubo de $6 \times 6 \times 6$ (formada por 6 subprismas de $1 \times 6 \times 1$). Muestra que es posible sustituir la mitad de los cubitos negros por cubitos blancos para que en cada subprisma de $n \times 1 \times 1$, de $1 \times n \times 1$ y de $1 \times 1 \times n$ haya exactamente un cubito negro.

Problema 5. Una pareja de enteros es especial si es de la forma $(n, n - 1)$ o de la forma $(n - 1, n)$ con n un entero positivo. Muestra que una pareja (n, m) de enteros positivos que no es especial, se puede representar como suma de dos o más parejas especiales diferentes si y sólo si los enteros n y m satisfacen la desigualdad $n + m \geq (n - m)^2$.

Problema 6. Sea $A_1A_2 \ldots A_8$ un octágono convexo, es decir, un octágono donde todos sus ángulos internos son menores que $180°$. Además los lados del octágono tienen la misma longitud y cada par de lados opuestos son paralelos. Para cada $i = 1, \ldots, 8$, definamos el punto B_i como la intersección del segmento A_iA_{i+4} con el segmento $A_{i-1}A_{i+1}$, donde $A_{j+8} = A_j$ y $B_{j+8} = B_j$, para todo número entero j. Muestra que para algún número i, de entre los números $1, 2, 3$ y 4, se cumple que

$$\frac{A_iA_{i+4}}{B_iB_{i+4}} \leq \frac{3}{2}$$

OMM 2012

Problema 1. Sean $\mathcal{C}_1$ una circunferencia con centro O, P un punto sobre ella y ℓ la recta tangente a $\mathcal{C}_1$ en P. Considera un punto Q sobre ℓ, distinto de P, y sea $\mathcal{C}_2$ la circunferencia que pasa por O, P y Q. El segmento OQ intersecta a $\mathcal{C}_1$ en S y la recta PS intersecta a $\mathcal{C}_2$ en un punto R distinto de P. Si r_1 y r_2 son las longitudes de los radios de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, respectivamente, muestra que

$$\frac{PS}{SR} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Problema 2. Sea $n \geq 4$ un número par. Considera una cuadrícula de $n \times n$. Dos celdas (cuadritos de 1×1) son vecinas si comparten un lado, si están en extremos opuestos de un mismo renglón o si están en extremos opuestos de una misma columna. De esta forma, toda celda en la cuadrícula tiene exactamente cuatro celdas vecinas. En cada celda está escrito un número del 1 al 4 de acuerdo con las siguientes reglas:

Si en una celda está escrito un 2 entonces en dos o más celdas vecinas está escrito un 1.

Si en una celda está escrito un 3 entonces en tres o más celdas vecinas está escrito un 1.

Si en una celda está escrito un 4 entonces en las cuatro celdas vecinas está escrito un 1.

Entre los acomodos que cumplan las condiciones anteriores, ¿cual el máximo número que se puede obtener sumando los números escritos en todas las celdas?

Problema 3. Muestra que entre cualesquiera 14 números enteros consecutivos siempre hay 6 números tales que cualesquiera dos de ellos son primos relativos.

Problema 4. A cada entero positivo se le aplica el siguiente proceso: al número se le resta la suma de sus dígitos, y el resultado se divide entre 9. Por ejemplo, el proceso aplicado al 938 es 102, ya que $\frac{938-(9+3+8)}{9} = 102$. Aplicado dos veces el proceso a 938 se llega a 11, aplicado tres veces se llega a 1, y aplicado cuatro veces se llega al 0. Cuando a un entero positivo n se le aplica el proceso una o varias veces, se termina en 0. Al número al que se llega antes de llegar al cero, lo llamamos la casa de n. ¿ Cuántos números menores que 26000 tienen la misma casa que el 2012?

Problema 5. Algunas ranas, unas de ellas rojas y otras verdes, se van a mover en un tablero de 11×11, de acuerdo a las siguientes reglas. Si una rana está ubicada, digamos, en la casilla marcada con # en la siguiente figura, entonces si es roja, puede saltar a cualquiera de las casillas marcadas con $\times$. Si es verde, puede saltar a cualquiera de las casillas marcadas con $\circ$. Diremos que dos ranas (de cualquier color) se pueden encontrar en una casilla si ambas pueden llegar hasta ella saltando una o más veces, no necesariamente con el mismo número de saltos. (a) Muestra que si ponemos 6 ranas (de cualquier color), entonces hay al menos 2 que se pueden encontrar. (b) ¿Para qué valores de k es posible poner una rana roja y una rana verde de manera que haya exactamente k casillas en las que estas ranas se pueden encontrar?

Problema 6. Considera un triángulo acutángulo ABC con circuncírculo Ω. Sean H el ortocentro del triángulo ABC y M el punto medio de BC. Las rectas AH, BH y CH cortan por segunda vez a Ω en D, E y F, respectivamente; y la recta MH corta a Ω en J de manera que H queda entre M y J. Sean K y L los incentros de los triángulos DEJ y DFJ, respectivamente. Muestra que KL es paralela a BC.

OMM 2011

Problema 1. Se tienen 25 focos distribuidos de la siguiente manera: los primeros 24 se disponen en una circunferencia colocando un foco en cada uno de los vértices de un 24-ágono regular, y el foco restante se coloca en el centro de dicha circunferencia. Se permite aplicar cualquiera de las siguientes dos operaciones:

1) Tomar dos vértices sobre la circunferencia tales que hay una cantidad impar de vértices en los arcos que definen, y cambiar el estado de los focos de estos dos vértices, así como del foco del centro.

2)Tomar tres vértices sobre la circunferencia que formen un triángulo equilátero, y cambiar el estado de los focos en estos tres vértices, así como del foco del centro.

Muestra que partiendo de cualquier configuración inicial de focos encendidos y apagados, siempre es posible llegar a una configuración en la que todos los focos están encendidos.

Problema 2. Sea ABC un triángulo acutángulo con vértices sobre una circunferencia Γ. Sea ℓ la recta tangente a Γ en A. Sean D y E los puntos de intersección de la recta ℓ y del segmento AC con la circunferencia de centro B y radio BA, respectivamente. Muestra que DE pasa por el ortocentro del triángulo ABC.

Problema 3. Sea n un entero positivo. Encuentra todas las soluciones $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de números reales que satisfacen el siguiente sistema de n ecuaciones:

$$\begin{gathered} a_1^2 + a_1 - 1 = a_2 \\ a_2^2 + a_2 - 1 = a_3 \\ \vdots \\ a_n^2 + a_n - 1 = a_1. \end{gathered}$$

Problema 4. Encuentra el menor entero positivo tal que al escribirlo en notación decimal utiliza exactamente dos dígitos distintos y que es divisible entre los números del 1 al 9. Nota: un ejemplo de un número que al escribirlo en notación decimal utiliza exactamente dos dígitos distintos es el 1121211222.

Problema 5. Considera un tablero de $(2^n - 1) \times (2^n + 1)$ casillas que se quiere dividir en rectángulos de tal forma que los lados de los rectángulos sean paralelos a los lados del tablero, de tal forma que el área (cantidad de casillas) de cada rectángulo sea una potencia de 2. Encuentra la menor cantidad de rectángulos en las que se puede dividir el tablero.

Problema 6. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos circunferencias que se cortan en los puntos A y B. Consideremos un punto C sobre la recta AB de modo que B queda entre A y C. Sean P y Q puntos sobre $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, respectivamente, tales que que CP es tangente a $\mathcal{C}_1$, CQ es tangente a $\mathcal{C}_2$, P no está dentro de $\mathcal{C}_2$ y Q no está dentro de $\mathcal{C}_1$. La recta PQ corta de nuevo a $\mathcal{C}_1$ en R y a $\mathcal{C}_2$ en S, ambos puntos distintos de B. Supongamos que CR corta de nuevo a $\mathcal{C}_1$ en X y CS corta de nuevo a $\mathcal{C}_1$ en Y . Sea Z un punto sobre la recta XY. Muestra que SZ es paralela a QX si y sólo si PZ es paralela a RX.

OMM 2010

Problema 1. Encuentra todas las ternas de números naturales (a, b, c) tales que $abc = a+b+c+1$.

Problema 2. En cada casilla de un tablero de $n \times n$ hay un foco. Inicialmente todos los focos están apagados. En un paso, se permite cambiar el estado de todos los focos en una fila o de todos los focos en una columna (los focos prendidos se apagan y los focos apagados se prenden). Muestra que si después de cierta cantidad de pasos hay uno o más focos prendidos entonces en ese momento hay al menos n focos prendidos.

Problema 3. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos circunferencias tangentes exteriormente en un punto A. Se traza una recta tangente a $\mathcal{C}_1$ en B y secante a $\mathcal{C}_2$ en C y D; luego se prolonga el segmento AB hasta intersecar a $\mathcal{C}_2$ en un punto E. Sea F el punto medio del arco CD sobre $\mathcal{C}_2$ que no contiene a E y sea H la intersección de BF con $\mathcal{C}_2$. Muestra que CD, AF y EH son concurrentes.

Problema 4. Sea n un entero positivo. En una cuadrícula de $n \times 4$, cada región es igual a

$$\boxed{2}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}$$

Un çambio.^{es} tomar tres casillas consecutivas en el mismo renglón y con dígitos distintos escritos en ellas y cambiar los tres dígitos de estas casillas escritas de la siguiente manera

$$0 \to 1, \quad 1 \to 2, \quad 2 \to 0.$$

Por ejemplo, un renglón $\boxed{2}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{0}$ puede cambiarse al renglón $\boxed{0}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{0}$ pero no al renglón $\boxed{2}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{1}$ pues 0, 1 y 0 no son distintos entre sí. Los cambios se pueden aplicar cuantas veces se quiera, aún a renglones ya cambiados. Muestra que para $n < 12$ no es posible hacer un número finito de cambios de forma que la suma de los números en cada una de las cuatro columnas sea la misma.

Problema 5. Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB \neq AC$, M el punto medio de BC y H el ortocentro de ABC. La circunferencia que pasa por B, H y C corta a la mediana AM en N. Muestra que $\angle ANH = 90^o$.

Problema 6. Sean p, q, r números primos positivos distintos. Muestra que si pqr divide a

$$(pq)^r + (qr)^p + (rp)^q - 1,$$

entonces $(pqr)^3$ divide a

$$3((pq)^r + (qr)^p + (rp)^q - 1).$$

OMM 2009

Problema 1. Sea ABC un triángulo y AD la altura sobre el lado BC. Tomando a D como centro y a AD como radio, se traza una circunferencia que corta a la recta AB en P , y corta a la recta AC en Q. Muestra que el triángulo AQP es semejante al triángulo ABC.

Problema 2. En cajas marcadas con los números $0, 1, 2, \ldots$ se van a colocar todos los enteros positivos de acuerdo con las siguientes reglas:

Si p es un número primo, este se coloca en la caja con el número 1.

Si el número a se coloca en la caja con el número m_a y b se coloca en la caja con el número m_b, entonces el producto de a y b, es decir ab, se coloca en la caja con el número $am_b + bm_a$.

Encuentra todos los enteros positivos n que cuando se coloquen queden en la caja con el número n.

Problema 3. Sean a, b, c números reales positivos tales que $abc = 1$. Muestra que

$$\frac{a^3}{a^3+2} + \frac{b^3}{b^3+2} + \frac{c^3}{c^3+2} \geq 1 \text{ y que } \frac{1}{a^3+2} + \frac{1}{b^3+2} + \frac{1}{c^3+2} \leq 1.$$

Problema 4. Sea $n > 1$ un entero impar y sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales distintos. Sea M el mayor de estos números y sea m el menor de ellos. Muestra que es posible escoger los signos en la expresión $s = \pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n$ de manera que

$$m < s < M.$$

Problema 5. Considera un triángulo ABC y un punto M sobre el lado BC. Sea P la intersección de las perpendiculares a AB por M y a BC por B, y sea Q la intersección de las perpendiculares a AC por M y a BC por C. Muestra que PQ es perpendicular a AM si y solo si M es el punto medio de BC.

Problema 6. En una fiesta con n personas, se sabe que de entre cualesquiera 4 personas, hay 3 de las 4 que se conocen entre sí o hay 3 que no se conocen entre sí. Muestra que las n personas se pueden separar en dos salones de manera que en un salón todos se conocen entre sí y en el otro no hay dos personas que se conozcan entre sí. Nota. Conocerse se considera una relación mutua.

OMM 2008

Problema 1. Sean $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \ldots < d_k = n$ los divisores del entero positivo n. Encuentra todos los números n tales que $n = d_2^2 + d_3^3$.

Problema 2. Considera una circunferencia Γ, un punto A fuera de Γ y las tangentes AB, AC a Γ desde A, con B y C los puntos de tangencia. Sea P un punto sobre el segmento AB, distinto de A y de B. Considera el punto Q sobre el segmento AC tal que PQ es tangente a Γ, y a los puntos R y S que están sobre las rectas AB y AC, respectivamente, de manera que RS es paralela a PQ y tangente a Γ. Muestra que el producto de las áreas de los triángulos APQ y ARS no depende de la elección del punto P .

Problema 3. Considera un tablero de ajedrez. Los números del 1 al 64 se escriben en las casillas del tablero como en la figura. Se disponen de suficientes caballos de ajedrez para colocarlos en las casillas del tablero de manera que no se ataquen entre sí. Calcula la suma de los números de las casillas donde están colocados los caballos. ¿Cuál es la suma máxima que puedes obtener? Nota. Dos caballos se atacan entre sí, cuando se encuentran en 2 esquinas opuestas de un rectángulo de 2×3 o de 3×2.

Problema 4. Un rey decide realizar un juego para premiar a uno de sus caballeros, para ello, acomoda a los n caballeros en una mesa redonda y hace que digan los números $1, 2, 3$ y repitan de nuevo $1, 2, 3$ y así sucesivamente (lo dicen en el sentido de las manecillas del reloj y cada persona dice un número). Las personas que dicen 2 ó 3 son retiradas inmediatamente y el juego continúa hasta que queda un sólo caballero, el ganador. Se numeran las personas del 1 al n conforme al primer turno. Encuentra todos los valores de n de tal manera que el ganador sea el caballero 2008.

Problema 5. En los vértices de un cubo están escritos 8 enteros positivos distintos y en cada una de las aristas del cubo está escrito el máximo común divisor de los números que están en los 2 vértices que forman a la arista. Sean A la suma de los números escritos en las aristas y V la suma de los números escritos en los vértices. Muestra que $\frac{2}{3}A \leq V$. ¿Es posible que $A = V$?

Problema 6. Las bisectrices internas de los ángulos A, B y C de un triángulo ABC concurren en I y cortan al circuncírculo de ABC en L, M, N, respectivamente. La circunferencia de diámetro IL corta al lado BC, en D y E; la circunferencia de diámetro IM corta al lado CA en F y G; la circunferencia de diámetro IN corta al lado AB en H y J. Muestra que D, E, F, G, H, J están sobre una misma circunferencia.

OMM 2007

Problema 1. Encuentra todos los enteros positivos N con la siguiente propiedad: entre todos los divisores positivos de N hay 10 números consecutivos pero no 11.

Problema 2. Dado un triángulo equilátero ABC, encuentra todos los puntos P del plano que cumplan $\angle APB = \angle BPC$.

Problema 3. Sean a, b, c números reales positivos tales que $a + b + c = 1$. Muestra que

$$\sqrt{a + bc} + \sqrt{b + ca} + \sqrt{c + ab} \leq 2.$$

Problema 4. Para un entero positivo n se definen: n_1 como la suma de los dígitos de n, n_2 como la suma de los dígitos de n_1 y n_3 como la suma de los dígitos de n_2. Por ejemplo para $n = 199, n_1 = 19, n_2 = 199_2 = 10$ y $n_3 = 199_3 = 1$. Encuentra todas las parejas de enteros positivos (m, n) tales que $m + n = 2007$ y $m_3 + n_2 = 2007_3$.

Problema 5. En cada cuadrado de una cuadrícula de 6×6 hay una luciérnaga apagada o encendida. Una movida es escoger tres cuadrados consecutivos ya sean los tres verticales o los tres horizontales, y cambiar de estado a las tres luciérnagas que se encuentran en dichos cuadrados. Cambiar de estado a una luciérnaga significa que si está apagada se enciende y viceversa. Muestra que si inicialmente hay una luciérnaga encendida y las demás apagadas, no es posible hacer una serie de movidas tales que al final todas las luciérnagas estén apagadas.

Problema 6. Sea ABC un triángulo tal que $AB > AC > BC$. Sea D un punto sobre el lado AB de tal manera que $CD = BC$, y sea M el punto medio del lado AC. Muestra que $BD = AC$ si y sólo si $\angle BAC = 2\angle ABM$.

OMM 2006

Problema 1. Sea ab un número entero d dos dígitos. Un entero positivo n es "pariente"de ab si el dígito de las unidades de n también es b, y los otros dígitos de n son distintos de cero y suman a. Por ejemplo, los parientes de 31 son 31, 121, 211 y 1111. Encuentra todos los números de dos dígitos que dividen a todos sus parientes.

Problema 2. Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en A, tal que $AB < AC$. Sean M el punto medio de BC y D la intersección de AC con la perpendicular a BC que pasa por M. Sea E la intersección de la paralela a AC que pasa por M con la perpendicular a BD que pasa por B. Muestra que los triángulos AEM y MCA son semejantes si y solo si $\angle ABC = 60^o$.

Problema 3. Sea n un número entero mayor que 1. ¿De cuántas formas se pueden acomodar todos los números $1, 2, 3, \ldots 2n$ en las casillas de una cuadrícula de $2 \times n$, uno en cada casilla, de manera que cualesquiera dos números consecutivos se encuentren en casillas que comparten un lado en la cuadrícula?

Problema 4. ¿Para qué enteros positivos n puede cubrirse una escalera como la de la figura (pero con n escalones en vez de 4) con n cuadrados de lados enteros, no necesariamente del mismo tamaño, sin que estos cuadrados se encimen y sin que sobresalgan del borde de la figura?

Problema 5. Sean ABC un triángulo acutángulo y AD, BE y CF sus alturas. La circunferencia con diámetro AD corta a los lados AB y AC en M y N, respectivamente. Sean P u Q los puntos de intersección de AD con EF y MN, respectivamente. Muestra que Q es el punto medio de PD.

Problema 6. Sea n la suma de los dígitos de un entero positivo A. Decimos que A es "surtido"si cada uno de los enteros $1, 2, 3, \ldots, n$ es la suma de algunos dígitos de A. Muestra que si $1, 2, \ldots, 8$ son sumas de algunos dígitos de un entero A, entonces A es surtido. Si $1, 2, \ldots, 7$ son sumas de algunos dígitos de un entero A, ¿es A necesariamente surtido?

Nota: El número 117 no es surtido porque no se puede sumar 3 con algunos de sus dígitos, y $3 < 1 + 1 + 7$.

OMM 2005

Problema 1. Sea O el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, y sea P un punto cualquiera del segmento BC ($P \neq B$ y $P \neq C$). Supón que la circunferencia circunscrita al triángulo BPO corta al segmento AB en R ($R \neq A$ y $R \neq B$) y que la circunferencia circunscrita al triángulo COP corta al segmento CA en el punto Q ($Q \neq C$ y $Q \neq A$). Muestra que el triángulo PQR que es semejante al triángulo ABC y su ortocentro es O. A demás, muestra que las circunferencias circunscritas a los triángulos BPO, COP, PQR son todas del mismo tamaño.

Problema 2. Dadas varias cuadrículas del mismo tamaño con números escritos en sus casillas, su suma se efectúa sumando las casillas que están en la misma posición, creando una cuadrícula del mismo tamaño. Dado un entero positivo N, diremos que una cuadrícula es N-balanceada si tiene números enteros escritos en sus casillas y si la diferencia entre los números escritos en cualesquiera dos casillas que comparten un lado es menor o igual a N. Muestra que toda cuadrícula $2n$-balanceada (de cualquier tamaño) se puede escribir como suma de dos cuadrículas n-balanceadas. A demás, muestra que toda cuadrícula $3n$-balanceada (de cualquier tamaño) se puede escribir como suma de tres cuadrículas n-balanceadas.

Problema 3. Determina todas las parejas (a, b) de números enteros distintos de cero para las cuales es posible encontrar un entero entero positivo x primo relativo con b y un entero cualquiera y, tales que en la siguiente lista hay una infinidad de números enteros:

$$\frac{a+xy}{b}, \frac{a+xy^2}{b^2}, \frac{a+xy^3}{b^3}, \ldots, \frac{a+xy^n}{b^n}, \ldots$$

Problema 4. Decimos que una lista de números enteros $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ contiene una terna aritmética a_i, a_j, a_k si $i < j < k$ y $2a_j = a_i + a_k$. Por ejemplo, $8, 1, 5, 3, 7$ tiene una terna aritmética $(8, 5, 2)$ pero $8, 1, 2, 5, 7$ no. Sea n un entero positivo. Muestra que los números $1, 2, 3, \ldots, n$ se pueden reordenar en una lista que no contenga ternas aritméticas.

Problema 5. Sea N un número entero mayor que 1. En cierta baraja de N^3 cartas, cada carta está pintada de uno de N colores distintos, tiene dibujada una de N posibles figuras,¡ y tiene escrito un número entero del 1 al N (no hay dos cartas idénticas). Una colección de cartas de la baraja se llama completa si tiene cartas de todos los colores, o si entre sus cartas aparecen todas las figuras o todos los números. ¿Cuántas colecciones no completas tienen la propiedad de que, al añadir cualquier otra carta de la baraja, se vuelven completas?

Problema 6. Sea ABC un triángulo y AD la bisectriz del ángulo $\angle BAC$, con D un punto del lado BC. Sea E un punto del segmento BC tal que $BD = EC$. Por E se traza ℓ, la recta paralela a AD. Sea P un punto en ℓ y dentro del triángulo ABC. Sea G el punto donde la recta BP corta al lado AC y sea F el punto donde la recta CP corta al lado AB. Muestra que $BF = CG$.

OMM 2004

Problema 1. Encuentra todos los números primos p, q, r con $p < q < r$, tales que $25pq + r = 2004$ y que $pqr + 1$ sea un cuadrado perfecto.

Problema 2. ¿Cuál es la mayor cantidad de enteros positivos que se pueden encontrar de manera que cualesquiera dos de ellos a y b (Con $a \neq b$) cumplan que $|a - b| \geq \frac{ab}{100}$?

Problema 3. Sean Z y Y los puntos de tangencia del incírculo del triángulo ABC con los lados AB y CA, respectivamente. La paralela a YZ por el punto medio M del lado BC corta a CA en N. Sea L el punto del segmento CA tal que $NL = AB$ (con L y A del mismo lado con respecto a N). La recta ML corta a AB en K. Muestra que $KA = NC$.

Problema 4. Al final de un torneo de fútbol en el que cada par de equipos jugó entre sí exactamente una vez y donde no hubo empates, se observó que para cualesquiera tres equipos A, B y C, si A le ganó a B y B le ganó a C, entonces A le ganó a C. Cada equipo calculó la diferencia (positiva) entre el número de partidos que ganó y el número de partidos que perdió. La suma de todas estas diferencias resultó ser 5000. ¿Cuántos equipos participaron en el torneo? Encuentra todas las respuestas posibles.

Problema 5. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos circunferencias tales que el centro O de $\mathcal{B}$ esté en $\mathcal{A}$. Sean C y D los dos puntos de intersección de las circunferencias. Se toman un punto A en $\mathcal{A}$ y un punto B en $\mathcal{B}$ tales que AC es tangente a $\mathcal{B}$ en C y BC es tangente a $\mathcal{A}$ en el mismo punto C. El segmento AB corta de nuevo a $\mathcal{B}$ en E y ese mismo segmento corta de nuevo a $\mathcal{A}$ en F. La recta CE vuelve a cortar a $\mathcal{A}$ en G y la recta CF corta a la recta GD en H. Muestra que el punto de intersección de GO y EH es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo DEF.

Problema 6. ¿Cuál es el mayor número posible de cambios de dirección en un recorrido sobre las líneas de una cuadrícula de 2004×2004 casillas, si el recorrido no pasa dos veces por el mismo lugar?

OMM 2003

Problema 1. Dado un número entero k de dos o más cifras, se forma otro número entero m insertando un cero entre la cifra de las unidades y la de las decenas de k. Encuentra todos los números k para los cuales m resulta ser un múltiplo de k.

Problema 2. Sean A, B y C tres puntos colineales con B entre A y C. Sea $\mathcal{Y}$ una circunferencia tangente a AC en B, sean $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Z}$ las circunferencias de diámetros AB y BC, respectivamente. Sea P el punto (además de B) en el que se cortan las circunferencias $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$; sea Q el otro punto (además de B) en el que se cortan las circunferencias $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{Z}$. Supón que la recta PQ corta a $\mathcal{X}$ en un punto R distinto de P y que esta misma recta PQ corta a $\mathcal{Z}$ en un punto S distinto de Q. Muestra que concurren AR, CS y la tangente común a $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Z}$ por B.

Problema 3. En una fiesta hay el mismo número n de muchachos que de muchachas. Supón que a cada muchacha le gustan a muchachos y a cada muchacho le gustan b muchachas. Para qué valores de a y b es correcto afirmar que hay un muchacho y una muchacha que se gustan mutuamente?

Problema 4. Sea $ABCD$ un trapecio con AB paralelo a DC. Se toman puntos P y Q en los lados AB y CD, respectivamente, tales que $\frac{AP}{PB} = \frac{DQ}{QC}$. Sea M la intersección de AQ con DP y sea N la intersección de PC con QB. Muestra que la longitud de MN depende únicamente de las longitudes de AB y CD, y calcula su valor.

Problema 5. Se escriben en tarjetas todas las parejas de números enteros (a, b) con $1 \leq a < b \leq 2003$. Dos personas juegan con las tarjetas como sigue; cada jugador en su turno elige (a, b) (que se retira del juego) y escribe el producto $a \cdot b$ en un pizarrón (ambos jugadores usan el mismo pizarrón). Pierde el jugador que ocasione que el máximo común divisor de los números escritos hasta el momento sea 1. ¿Quién tiene estrategia ganadora? (Es decir, ¿cuál de los dos jugadores puede inventar un método con el cual asegura su triunfo?).

Problema 6. Dado un número entero n, un cambio sensato consiste en sustituir n por $2n + 1$ o $3n + 1$. Dos enteros positivos a y b se llaman compatibles si existe un entero que se puede obtener haciendo uno o más cambios sensatos, tanto a partir de a, como a partir de b. Encuentra todos los enteros positivos compatibles con 2003 menores que 2003.

OMM 2002

Problema 1. En una cuadrícula de 32×32 se escriben los números del 1 al 1024 de izquierda a derecha, con los números del 1 al 32 en el primer renglón, los del 33 al 64 en el segundo, etc.

La cuadrícula se divide en cuatro cuadrículas de 16×16:
Estas cuadrículas se cambian de lugar entre sí, y queda el siguiente arreglo:
Después, cada cuadrícula de 16×16 se divide en cuatro cuadrículas de 8×8 que se cambian de lugar del mismo modo; a su vez cada una de esas se divide y así sucesivamente hasta llegar a cuadrículas de 2×2 que se dividen en cuadros de 1×1, los cuales se cambian de lugar del mismo modo.

Al terminar estas operaciones, ¿qué números quedan en la diagonal que va de la esquina superior izquierda a la inferior derecha en la cuadrícula de 32×32?

Problema 2. Sea $ABCD$ un paralelogramo y Γ el circuncírculo del triángulo ABD. Sean E y F las intersecciones de Γ con los lados BC y CD (o sus prolongaciones), respectivamente. Muestra que el circuncentro del triángulo CEF está en Γ.

Problema 3. Sea n un entero positivo. Entre los divisores positivos de n^2, ¿Hay más de la forma $4k+1$ o $4k-1$?

Problema 4. Una ficha de dominó tiene dos números (que pueden ser iguales) entre 0 y 6. Las fichas se pueden voltear, es decir, $\boxed{4}\boxed{5}$ es la misma ficha que $\boxed{5}\boxed{4}$. Se quiere formar una hilera de fichas de dominó distintas de manera que en cada momento de la construcción de la hilera, la suma de todos los números de fichas puestas hasta ese momento sea impar. Las fichas se pueden agregar de la manera usual a ambos lados de la hilera, es decir, de manera que en cualesquiera dos fichas consecutivas aparezca el mismo número en los extremos que se juntan. Por ejemplo, se podría hacer la hilera: $\boxed{1}\boxed{3}$, $\boxed{3}\boxed{4}$, $\boxed{4}\boxed{4}$, en la que se colocó primero la ficha del centro y luego la de la izquierda para mantener la suma impar. ¿Cuál es la mayor cantidad de fichas que de pueden colocar en una hilera? ¿Cuántas hileras de esa longitud máxima se pueden construir?

Problema 5. Tres números enteros distintos forman una terna compatible si alguno de ellos, digamos n, cumple que cada uno de los otros dos es, o bien divisor, o bien múltiplo de n. Para cada terna compatible de números entre 1 y 2002 se calcula la suma de los tres números de la terna. ¿Cuál es la mayor suma obtenida? ¿Cuáles son las ternas en las que se obtiene suma máxima?

Problema 6. Sea $ABCD$ un cuadrilátero con AD paralelo a BC, los ángulos en A y B rectos y con el ángulo $\angle CMD$ recto, donde M es el punto medio de AB. Sean K el pie de la perpendicular a CD que pasa por M, P el punto medio de intersección de AK con BD y Q el punto de intersección de BK con AC. Muestra que el ángulo $\angle AKB$ es recto y que $\frac{KP}{PA} + \frac{KQ}{QB} = 1$.

OMM 2001

Problema 1. Encuentra todos los números enteros de 7 dígitos que son múltiplos de 3 y de 7, y cada uno de cuyos dígitos es 3 o 7.

Problema 2. Se tienen algunas pelotas de colores (son por lo menos tres colores), y por lo menos tres cajas. Las pelotas se ponen en las cajas de manera que no quede vacía ninguna caja y que no haya tres pelotas de colores distintos que estén en tres cajas distintas. Muestra que hay una caja tal que todas las pelotas que están fuera de ella son del mismo color.

Problema 3. En un cuadrilátero $ABCD$ inscrito en una circunferencia llamemos P al punto de intersección de las diagonales AC y BD, y sea M el punto medio de CD. Una circunferencia que pasa por P y que es tangente a CD en M corta a BD y a AC en los puntos Q y R, respectivamente. Se toma un punto S en el segmento BD de tal manera que $BS = DQ$. Por S se traza una paralela a AB que corta a AC en un punto T. Muestra que $AT = RC$.

Problema 4. Dados dos enteros positivos n y a se forma una lista de 2001 números enteros como sigue: El primer número es a; a partir del segundo, cada número es el residuo que se obtiene al dividir el cuadrado del anterior entre n. A los números de la lista se les ponen los signos $+$ y $-$ alternadamente empezando con $+$. Los números con signo así obtenidos se suman y a esa suma se le llama suma final para n y a. ¿Para qué números enteros $n \geq 5$ existe alguna a tal que $2 \leq a \leq \frac{n}{2}$ y la suma final para n y a es positiva?

Problema 5. Sea ABC un triángulo tal que $AB < AC$ y el ángulo $\angle BAC$ es el doble del ángulo $\angle BCA$. EN el lado AC se toma un punto D tal que $CD = AB$. Por el punto B se traza una recta ℓ paralela a AC. La bisectriz exterior del ángulo en A intersecta a ℓ en el punto M, y la paralela a AB por el punto C intersecta a ℓ en el punto N. Muestra que $MD = ND$.

Problema 6. Un coleccionista de monedas raras tiene monedas de denominaciones $1, 2, 3, \ldots, n$ (tiene muchas monedas dude cada denominación). Desea poner algunas de sus monedas en 5 cajas de manera que se cumplan las siguientes condiciones:

a) En cada caja hay a lo más una moneda de cada denominación.

b) Todas las cajas tienen el mismo número de monedas y la misma cantidad de dinero.

c) Para cualesquiera dos cajas sucede que entre las dos tienen por lo menos una moneda de cada denominación.

d) No existe una denominación tal que todas las cajas tengan una moneda de esta denominación

¿Para qué valores de n puede el coleccionista hacer lo que se propone?

OMM 2000

Problema 1. Existen circunferencias A, B, C, D en el plano tales que las circunferencias A y B son tangentes externamente en P, B y C en Q, C y D en R, y D y A en S. Las circunferencias A y C no se encuentran, ni tampoco B y D. Muestra que los puntos P, Q, R, S se encuentran en una misma circunferencia.

Supongamos que A y C tienen radio $2, B$ y D tienen radio 3, y la distancia entre los centros de A y C es 6. Calcula el área del cuadrilátero $PQRS$.

Problema 2. Se construye un triángulo de números de la siguiente manera. La primera fila está formada por los números de 1 a 2000 en orden creciente, y debajo de dos números consecutivos cualesquiera se escribe su suma. ¿Cuál es el número de la última fila?

Problema 3. Dado un conjunto A de enteros positivos, el conjunto A' se compone de los elementos de A y de todos los enteros positivos que se pueden obtener de la siguiente manera: Se escriben algunos elementos de A uno tras otro sin repetir, se escribe un signo $+$ o $-$ antes de cada uno de ellos, y se evalúa la expresión obtenida. El resultado se incluye en A'.
Por ejemplo, si $A = \{2, 8, 13, 20\}$, los números 8 y $14 = 20 - 2 + 8$ son elementos de A'.
El conjunto A'' se construye a partir de A' de la misma manera.
Hallar el menor número posible de elementos de A, si A'' contiene todos los enteros de 1 a 40.

Problema 4. Sean a y b enteros positivos que no son múltiplos de 5. Se construye una sucesión de enteros como sigue: el primer término es 5, y cada término siguiente se obtiene multiplicando el anterior por a y añadiendo b. (Por ejemplo, si $a = 2$ y $b = 4$, los tres primeros términos son $5, 14, 32$.) ¿Cuál es el máximo número posible de números primos en la secuencia que pueden aparecer antes de que haya un término compuesto?

Problema 5. Un tablero $n \times n$ está coloreado en blanco y negro como un tablero de ajedrez. Se pueden realizar los siguientes pasos: Elegir un rectángulo dentro del tablero (formado por casillas enteras) cuyas longitudes de los lados sean ambas impares o ambas pares, pero no ambas iguales a 1, e invertir los colores de todas las casillas dentro del rectángulo. Determinar los valores de n para los que es posible hacer que todas las celdas tengan el mismo color en un número finito de dichos pasos.

Problema 6. Sea ABC un triángulo con $\angle B > 90^o$ tal que existe un punto H en el lado AC con $AH = BH$ y BH perpendicular a BC. Sean D y E los puntos medios de AB y BC respectivamente. La recta que pasa por H paralela a AB corta a DE en F. Muestra que $\angle BCF = \angle ACD$.

OMM 1999

Problema 1. En una mesa hay 1999 fichas, rojas en un lado y negras en el otro, colocadas aleatoriamente. Dos personas realizan movimientos alternados, donde cada movimiento es de uno de los dos tipos siguientes:

(1) Retirar varias fichas que tengan todas el mismo color hacia arriba;

(2) Invertir varias fichas que tienen todas el mismo color hacia arriba.

Gana el jugador que se lleva la última ficha. Determina cuál de los dos jugadores (el que juega primero o el otro) tiene una estrategia ganadora.

Problema 2. Demuestre que no existen 1999 primos en progresión aritmética, todos ellos menores que 12345.

Problema 3. Sea P un punto dentro de el triángulo ABC. Sean D, E, F los puntos medios de AP, BP, CP, y sean L, M, N los puntos de intersección de BF y CE, AF y CD, AE y BD, respectivamente. Muestra que DL, EM y FN son concurrentes.

Problema 4. Un tablero de 8×8 está dividido en cuadritos unitarios. Diez de estos cuadritos tienen sus centros marcados. Muestra que existen dos centros marcados que están a lo más a $\sqrt{2}$ de distancia, o existe un centro marcado a $1/2$ o menos del borde del tablero.

Problema 5. En un cuadrilátero $ABCD$ con $AB \parallel CD$, las bisectrices externas de los ángulos en B y C se intersectan en P, y que las bisectrices externas de los ángulos en A y D se encuentran en Q. Muestra que la longitud de PQ es igual al semiperímetro de $ABCD$.

Problema 6. Un polígono tiene lados de longitud entera, y cada par de lados adyacentes perpendiculares (no es necesariamente convexo). Muestra que si el polígono puede ser cubierto por dominós de 2×1 no superpuestos, entonces al menos uno de sus lados tiene longitud par.

OMM 1998

Problema 1. Un número se llama suertudo si al calcular la suma de los cuadrados de sus dígitos y repetir esta operación un número suficiente de veces se obtiene el número 1. Por ejemplo, 1900 es suertudo, ya que $1900 \rightarrow 82 \rightarrow 68 \rightarrow 100 \rightarrow 1$. Encuentra infinitas parejas de números suertudos consecutivos.

Problema 2. Los rayos l y m salen del mismo punto y forman un ángulo a. Sea P un punto fijo en l. Para cada circunferencia C tangente a l en P y que corta a m en Q y R, sea T el punto de intersección de la bisectriz del ángulo QPR con C. Describe el lugar geométrico de T y justifica tu respuesta.

Problema 3. Cada lado y diagonal de un octógono regular está coloreado de rojo o negro. Demuestra que hay al menos siete triángulos cuyos vértices son vértices del octógono y sus tres lados son del mismo color.

Problema 4. Encuentra todos los enteros que se pueden escribir de la forma $\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + ... + \frac{9}{a_9}$, tales que $a_1, a_2, ..., a_9$ son dígitos distintos de 0, no necesariamente distintos.

Problema 5. Las tangentes en los puntos B y C de una circunferencia dada se intersectan en el punto A. Sea Q un punto del segmento AC tal que BQ vuelva a encontrarse con la circunferencia en P. La recta que pasa por Q paralela a AB corta a BC en J. Muestra que PJ es paralela a AC si y sólo si $BC^2 = AC \cdot QC$.

Problema 6. Un plano en el espacio es equidistante de un conjunto de puntos si las distancias del plano a los puntos del conjunto son iguales. ¿Cuál es el mayor número posible de planos equidistantes de cinco puntos, de los cuales cuatro no son coplanares?

OMM 1997

Problema 1. Encuentra todos los números primos p tales que $8p^4 - 3003$ es un número primo positivo.

Problema 2. En el triángulo ABC, P y P' son puntos del lado BC, Q del lado CA, y R del lado AB, tales que

$$\frac{AR}{RB} = \frac{BP}{PC} = \frac{CQ}{QA} = \frac{CP'}{P'B}$$

. Sea G el centroide del triángulo ABC y K el punto de intersección de AP' y RQ. Muestra que los puntos P, G, K son colineales.

Problema 3. Se escriben los números del 1 al 16 en las casillas de un tablero de 4×4.

Muestra que se pueden acomodar los números de manera que dos números cualesquiera en las celdas que comparten un lado tengan diferencia máxima de 4.

Muestra que no se pueden acomodar los números de manera que dos números cualesquiera en las celdas que comparten un lado tengan diferencia máxima de 3.

Problema 4. ¿Cuál es el número mínimo de planos determinados por 6 puntos en el espacio tales que no son todos coplanares, y entre los cuales no hay tres colineales?

Problema 5. Sean P, Q, R puntos de los lados BC, CA, AB respectivamente de un triángulo ABC. BQ y CR se intersectan en A', AP y CR se intersectan en B', y AP y BQ se intersectan en C', de modo que $AB' = B'C', BC' = C'A'$, y $CA' = A'B'$. Encuentra el valor de el cociente entre el área del $\triangle PQR$ y el área del $\triangle ABC$.

Problema 6. Muestra que el número 1 tiene infinitas representaciones de la forma

$$1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n},$$

donde n y a_i son enteros positivos, y $5 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

OMM 1996

Problema 1. Sean P y Q puntos de la diagonal BD de un cuadrilátero $ABCD$ tal que $BP = PQ = QD$. Sea E el punto de intersección de AP y BC, y F el punto de intersección de AQ con DC. Muestra que $ABCD$ es un paralelogramo si y solo si E y F son los puntos medios de BC y DC, respectivamente.

Problema 2. Alrededor de una mesa circular hay 64 cabinas y en cada una hay una ficha. Las fichas y las cabinas correspondientes están numeradas de 1 a 64 en este orden. En el centro de la mesa hay 1996 bombillas que están apagadas. Cada minuto las fichas se mueven simultáneamente de forma circular (siguiendo el sentido de la numeración) de la siguiente manera: la ficha 1 se mueve una cabina, la ficha 2 se mueve dos cabinas, etc., de forma que más de una ficha puede estar en la misma cabina. Cada vez que una ficha comparte cabina con la ficha 1, se enciende una bombilla. ¿Dónde está la ficha 1 en el primer minuto en el que están encendidas todas las bombillas?

Problema 3. Muestra que no es posible cubrir un tablero cuadrado de 6×6 con dieciocho rectángulos de 2×1, tal que cada una de las líneas interiores de la cuadrícula corte al menos uno de los rectángulos. Muestra también que es posible cubrir un rectángulo de 6×5 con quince rectángulos de 2×1 de forma que se cumpla la condición anterior.

Problema 4. ¿Para qué números enteros $n \geq 2$ se pueden escribir los números 1 a 16, cada uno en un cuadrito de un papel cuadriculado de 4×4 de forma que las 8 sumas de los números en las filas y columnas sean todas diferentes y divisibles por n?

Problema 5. Los números de 1 a n^2 se escriben en un papel cuadriculado de $n \times n$ en el orden normal. Cualquier secuencia de pasos hacia la derecha y hacia abajo de un cuadrado a otro adyacente (compartiendo lado) que comienza en el cuadrado 1 y termina en el cuadrado n^2 se llama camino. Denotemos por $L(C)$ la suma de los números por los que pasa el camino C.

Para un n fijo, sean M y m el mayor y menor valor de $L(C)$ posibles. Muestra que $M - m$ es un cubo perfecto.

Muestra que para ningún n se puede encontrar un camino C con $L(C) = 1996$.

Problema 6. En un triángulo ABC con $AB < BC < AC$, los puntos A', B', C' son tales que $AA' \perp BC$ y $AA' = BC, BB' \perp CA$ y $BB' = CA$, y $CC' \perp AB$ y $CC' = AB$, como se muestra en la figura. Si $\angle AC'B$ es un ángulo recto, muestra que los puntos A', B', C' son colineales.

OMM 1995

Problema 1. N estudiantes están sentados en los pupitres en un arreglo de $m \times n$, donde $m, n \geq 3$. Cada alumno le da la mano a los alumnos que están adyacentes horizontal, vertical o diagonalmente. Si hay 1020 apretones de manos en total, ¿cuál es el valor de N?

Problema 2. Existen 6 puntos en el plano tales que 8 de las distancias entre ellos son iguales a 1. Muestra que hay al menos 3 puntos que forman un triángulo equilátero.

Problema 3. A, B, C, D son vértices consecutivos de un polígono regular de 7 vértices. AL y AM son tangentes a la circunferencia centro C radio CB. Sea N el punto de intersección de AC y BD. Muestra que L, M, N son colineales.

Problema 4. Encuentra 26 elementos de $\{1, 2, 3, ..., 40\}$ tales que el producto de dos de ellos nunca sea un cuadrado perfecto. Muestra que no se pueden encontrar 27 elementos que cumplan esta condición.

Problema 5. $ABCDE$ es un pentágono convexo tal que los triángulos ABC, BCD, CDE, DEA y EAB tienen áreas iguales. Muestra que $(1/4)$ área $(ABCDE) <$ área $(ABC) < (1/3)$ área $(ABCDE)$.

Problema 6. Se coloca un 1 o 0 en cada casilla de un tablero de 4×4. Se pueden cambiar de 0 a 1 y vice versa cada número de una fila, columna, o diagonal (hay 14 diagonales de longitudes 1 a 4). ¿Para qué arreglos se pueden hacer cambios de manera que únicamente queden 0s?

OMM 1994

Problema 1. La secuencia $1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 17, ...$ se forma de la siguiente manera: Primero tomamos un número impar, luego dos números pares, luego tres números impares, luego cuatro números pares, y así sucesivamente. Encuentre el número de la secuencia que más se acerque a 1994.

Problema 2. Los 12 números en un reloj se reordenan. Muestra que existen tres números consecutivos con suma 21 o más.

Problema 3. $ABCD$ es un paralelogramo. Sea E un punto en la recta AB tal que $BE = BC$ y B está entre A y E. La recta por C perpendicular a BD y la recta por E perpendicular a AB se intersectan en F. Muestra que $\angle DAF = \angle BAF$.

Problema 4. Un matemático caprichoso escribe un libro con páginas numeradas del 2 al 400. Las páginas las lee en el siguiente orden: El matemático toma la última página no leída (400), luego lee (en el orden normal) todas las páginas que no son relativamente primas a ella y que no se han leído antes. Repite este proceso hasta que haya leído todas las páginas. Así, el orden sería $2, 4, 5, ..., 400, 3, 7, 9, ..., 399, ...$ ¿Cuál es la última página que lee el matemático caprichoso?

Problema 5. $ABCD$ es un cuadrilátero convexo. Se toman los 12 puntos que son los pies de las alturas de los triángulos ABC, BCD, CDA, DAB. Demuestra que al menos uno de estos puntos está sobre un lado de $ABCD$.

Problema 6. Muestra que es imposible embaldosar un tablero de 10×10 con 25 piezas del tipo A, ni con 25 piezas del tipo B, ni con 25 piezas del tipo C.

OMM 1993

Problema 1. Sea ABC un triángulo con $\angle A = 90^o$. Sea E un punto tal que AEC es exterior a ABC, $AE = CE$ y $\angle AEC = 90^o$. Análogamente, tomamos D de manera que ADB es exterior a ABC y semejante a AEC. O es el punto medio de BC. Las rectas OD y EC se intersectan en D', y las rectas OE y BD se intersectan E'. Encuentra el área $DED'E'$ en términos de los lados de ABC.

Problema 2. Encuentre todos los enteros positivos entre 100 y 999 tales que son iguales a la suma de los cubos de sus dígitos.

Problema 3. Dado un pentágono de área 1993 y 995 puntos dentro del pentágono, sea S el conjunto que contiene los vértices del pentágono y los 995 punto. Muestra que existen tres puntos de S que formen un triángulo de área menor o igual a 1.

Problema 4. La función $f(n, k)$ se define de la siguiente manera:

(1) $f(n, 0) = f(n, n) = 1$ y
(2) $f(n, k) = f(n-1, k-1) + f(n-1, k)$ para $0 < k < n$.

¿Cuántas veces tenemos que usar (2) para encontrar $f(3991, 1993)$?

Problema 5. OA, OB, OC son tres cuerdas de una circunferencia. Las circunferencias con diámetros OA, OB se intersectan por segunda vez en Z, las circunferencias de diámetros OB, OC se intersectan por segunda vez en X, y las circunferencias de diámetros OC, OA se intersectan por segunda vez Y. Muestra que los puntos X, Y, Z son colineales.

Problema 6. Sea p un primo impar. Muestra que p divide a $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ para algún número entero n si y solo si p divide a $m^2 - 5$ para algún número entero m.

OMM 1992

Problema 1. El tetraedro $OPQR$ tiene el $\angle POQ = \angle POR = \angle QOR = 90^o$. X, Y, Z son los puntos medios de PQ, QR y RP. Demuestre que las cuatro caras del tetraedro $OXYZ$ tienen la misma área.

Problema 2. Dado un número primo p, ¿cuántas tuplas (a, b, c, d) de números enteros positivos con $0 \leq a, b, c, d \leq p-1$ satisfacen $ad = bc \pmod{p}$?

Problema 3. Dados 7 puntos dentro o sobre un hexágono regular, demuestra que tres de ellos forman un triángulo con área $\leq \frac{1}{6}$ el área del hexágono.

Problema 4. Demuestre que $1 + 11^{11} + 111^{111} + 1111^{1111} + ... + 111111111^{111111}$ es divisible por 100.

Problema 5. x, y, z son reales positivos con suma 3. Demuestra que

$$6 < \sqrt{2x+3} + \sqrt{2y+3} + \sqrt{2z+3} \leq 3\sqrt{5}$$

Problema 6. $ABCD$ es un rectángulo. I es el punto medio de CD. BI se encuentra con AC en M. Demostrar que la recta DM pasa por el punto medio de BC. E es un punto fuera del rectángulo tal que $AE = BE$ y $\angle AEB = 90^o$. Si $BE = BC = x$, demostrar que EM biseca a $\angle AMB$. Hallar el área de $AEBM$ en términos de x.

OMM 1991

Problema 1. Evaluar la suma de todas las fracciones irreducibles positivas menores que 1 y que tengan el denominador 1991.

Problema 2. Una compañía de n soldados es tal que n es un número palíndromo (se lee igual en ambas direcciones). Si los soldados se disponen en filas de 3, 4 o 5 soldados, entonces la última fila contiene 2, 3 y 5 soldados, respectivamente. Encontrar el menor n que satisfaga estas condiciones y demostrar que hay infinitos números n.

Problema 3. Se colocan cuatro esferas de radio 1 en el espacio de forma que cada una de ellas toca a las otras tres. ¿Cuál es el radio de la esfera más pequeña que las contiene a todas?

Problema 4. Las diagonales AC y BD de un cuadrilátero convexo $ABCD$ son perpendiculares. Sean M, N, R, S los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA respectivamente, y sean W, X, Y, Z las proyecciones de los puntos M, N, R y S sobre las rectas CD, DA, AB y BC, respectivamente. Demostrar que los puntos M, N, R, S, W, X, Y y Z se encuentran en una misma circunferencia.

Problema 5. La suma de cuadrados de dos enteros consecutivos puede ser un cuadrado, como en $3^2 + 4^2 = 5^2$. Demostrar que la suma de cuadrados de m enteros consecutivos no puede ser un cuadrado para $m = 3$ o 6 y encontrar un ejemplo de 11 enteros consecutivos cuya suma de cuadrados sea un cuadrado.

Problema 6. Dado un polígono de n lados ($n \geq 4$), considere un conjunto T de triángulos formados por vértices del polígono que con la siguiente propiedad: Cualesquiera dos triángulos en T tienen o bien dos vértices comunes, o bien ninguno. Demostrar que T contiene a lo más n triángulos.

OMM 1990

Problema 1. ¿Cuántos caminos hay desde$A$ hasta la recta BC si el camino no pasa dos veces por ningún vértice y se mueve siempre hacia la izquierda?

Problema 2. ABC es un triángulo con $\angle B = 90^o$ y altura BH. Los inradios de ABC, ABH, CBH son r, r_1, r_2. Encuentra una relación entre ellos.

Problema 3. Demuestre que $n^{n-1} - 1$ es divisible por $(n-1)^2$ para todo $n > 2$.

Problema 4. Considera las 27 fichas de dominó que quedan quitando la blanca-blanca. Tomando en cuenta los puntos que hay en una ficha, a cada ficha le corresponde un número racional menor o igual que uno. ¿Cuál es la suma de todos estos números?

Problema 5. Dados 19 puntos en el plano con coordenadas enteras, donde no hay tres colineales. Demuestre que siempre podemos encontrar tres de esos puntos cuyo centroide tiene coordenadas enteras.

Problema 6. ABC es un triángulo con $\angle C = 90^o$. E es un punto de AC, y F es el punto medio de EC. CH es una altura. I es el circuncentro de AHE, y G es el punto medio de BC. Demuestra que ABC y IGF son similares.

OMM 1989

Problema 1. En un triángulo ABC el área es 18, la longitud AB es 5, y las medianas de A y B son ortogonales. Hallar las longitudes de los lados BC, AC.

Problema 2. Encontrar dos enteros positivos a, b tales que $a|b^2, b^2|a^3, a^3|b^4, b^4|a^5$, pero a^5 no divide a b^6.

Problema 3. Demostrar que no hay ningún número natural de 1989 cifras que tenga al menos tres dígitos iguales a 5 y que el producto de sus dígitos sea igual a su suma.

Problema 4. Encontrar el menor número natural posible $n = \overline{a_m ... a_2 a_1 a_0}$ (en sistema decimal) tal que el número $r = \overline{a_1 a_0 a_m a_{m-1} ... a_2 0}$ sea igual a $2n$.

Problema 5. Sean C_1 y C_2 dos circunferencias unitarias tangentes a una circunferencia C de radio 2. La circunferencia C_3 dentro de C es tangente a las circunferencias C, C_1, C_2, y la circunferencia C_4 dentro de C es tangente a C, C_1, C_3. Demostrar que los centros de C_1, C_2, C_3 y C_4 son vértices de un rectángulo.

Problema 6. Determina el número de caminos desde A a B en la imagen que van sólo por las líneas de la cuadrícula, no pasan por ningún punto punto dos veces, y nunca van hacia arriba?

OMM 1988

Problema 1. ¿De cuántas maneras se pueden acomodar siete canicas blancas y cinco negras en una línea de tal manera que no haya dos canicas negras vecinas?

Problema 2. Si a y b son enteros positivos, demostrar que $11a + 2b$ es múltiplo de 19 si y sólo si lo es $18a + 5b$.

Problema 3. Se dan dos circunferencias externamente tangentes con radios diferentes. Sus tangentes comunes forman un triángulo. Halla el área de este triángulo en función de los radios de las dos circunferencias.

Problema 4. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar ocho enteros $a_1, a_2, ..., a_8$, no necesariamente distintos, tales que $1 \leq a_1 \leq ... \leq a_8 \leq 8$?

Problema 5. Si a y b son enteros positivos coprimos y n un entero, demostrar que el máximo común divisor de $a^2 + b^2 - nab$ y $a + b$ divide a $n + 2$.

Problema 6. Considera dos puntos fijos B, C en una circunferencia w. Encuentra el locus de los incentros de todos los triángulos ABC cuando el punto A se mueve sobre w.

Problema 7. Dos subconjuntos disjuntos del conjunto $\{1, 2, ..., m\}$ tienen la misma suma de elementos. Demostrar que cada uno de los subconjuntos A, B tiene menos de $m\sqrt{2}$ elementos.

Problema 8. Calcula el volumen de un octaedro regular circunscrito a una esfera de radio 1.

OMM 1987

Problema 1. Demuestra que si la suma de dos fracciones irreducibles es un número entero entonces las dos fracciones tienen el mismo denominador.

Problema 2. ¿Cuántos divisores positivos tiene el número 20!?

Problema 3. Consideremos dos rectas ℓ y ℓ' y un punto fijo P equidistante de estas rectas. Cuál es el lugar geométrico de las proyecciones M de P sobre AB, donde A está en ℓ, B en ℓ', y el ángulo $\angle APB$ es recto?

Problema 4. Calcular el producto de todos los enteros positivos menores que 100 y que tengan exactamente tres divisores positivos. Demuestra que este producto es un cuadrado.

Problema 5. En un triángulo rectángulo ABC, M es un punto de la hipotenusa BC y P y Q las proyecciones de M sobre AB y AC respectivamente. Demostrar que para ningún punto M los triángulos BPM, MQC y el rectángulo $AQMP$ tienen la misma área.

Problema 6. Demostrar que para todo entero positivo n el número $(n^3 - n)(5^{8n+4} + 3^{4n+2})$ es un múltiplo de 3804.

Problema 7. Demuestre que la fracción $\frac{n^2+n-1}{n^2+2n}$ es irreducible para todo entero positivo n.

Problema 8. Tres rectas l, m, n en el espacio pasan por el punto S. Un plano perpendicular a m interseca l, m, n en A, B, C respectivamente. Supongamos que $\angle ASB = \angle BSC = 45^o$ y $\angle ABC = 90^o$. Calcula $\angle ASC$. Además, si un plano perpendicular a l corta l, m, n en P, Q, R respectivamente y $SP = 1$, hallar los lados del triángulo PQR.