Números complejos en geometría

Tomás Cantú, Diego Caballero

Mayo 2022

§1 Cosas básicas

Un número complejo se puede ver de la forma $a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$ y i un número tal que $i^2 = -1$.

Algebraicamente, se pueden sumar y multiplicar complejos como cualquier binomio:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$
$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Geométricamente, se pueden ver los complejos como puntos en el plano, como vectores, o como rotomotecias. Asociamos el complejo $z = a + bi$ al punto (a, b), al vector $\left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right]$ y a la rotomotecia de centro $(0, 0)$ que manda $(0, 1) \to (a, b)$.

Cualquier complejo z se puede expresar de la forma $z = re^{i\theta}$, donde $r, \theta \in \mathbb{R}$ son la magnitud y el ángulo del vector asociado. Si expresamos $z = a + bi$, vemos que $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $\theta = \arctan \frac{b}{a}$. La fórmula de Euler relaciona la forma polar y la forma cartesiana:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin \theta$$

Observa que $e^{i\theta}$ siempre tiene magnitud igual a 1. r, θ se representan a veces como

$$r = |z|$$
$$\theta = \arg z$$

Con la forma polar, observemos que el complejo $z = re^{i\theta}$ representa la rotomotecia con centro en el complejo 0 y que tiene razón r y ángulo θ. Geométricamente, la suma de complejos equivale a la suma de vectores: sumar por un complejo $a + bi$ es una traslación de a unidades a la derecha y b unidades hacia arriba. La multiplicación equivale a una rotomotecia. Es decir, multiplicar x por z equivale a estirar x por $|z|$ y luego girarlo $\arg z$. Observa que al multiplicar dos complejos, las magnitudes se multiplican y los ángulos se suman:

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

.

Para un número complejo z, el conjugado de $z = a + bi$ se expresa como $\overline{z} = a - bi$, y es la reflexión de z por la recta real. Observa que sacar conjugados se comporta bonito respecto a las operaciones básicas:

$$\overline{y + z} = \overline{y} + \overline{z}$$
$$\overline{y - z} = \overline{y} - \overline{z}$$
$$\overline{yz} = \overline{y} \cdot \overline{z}$$
$$\overline{(y/z)} = \overline{y}/\overline{z}$$

Además, hay una relación entre la magnitud de un complejo y su conjugado:

$$|z| = z\overline{z}$$

§2 Cosas fáciles de sacar

1. **Puntos medios**: El punto medio M de PQ es $m = \frac{p+q}{2}$
2. **Reflexión sobre un punto**: De manera similar, la reflexión A' de A sobre B es $a' = 2b - a$.
3. **Reflexión sobre el origen**: La reflexión de z sobre el origen es $-z$.

§3 Círculo unitario

El círculo unitario es útil porque sus puntos tienen propiedades que simplifican muchas fórmulas. Si z está en el círculo unitario, cumple lo siguiente

1. $|z| = 1$
2. $\overline{z} = \frac{1}{z}$
3. $z = e^{i\theta}$ para algún ángulo θ

§4 Formulas útiles

Generalmente, las fórmulas son fáciles de aplicar cuando la mayoría o todos los puntos están sobre el círculo unitario. Por esto, es esencial elegir el mejor arreglo posible antes de hacer cuentas.

§4.1 Rectas y perpendiculares

Lemma 4.1 (Perpendicularidad)

Sean A, B, C, D puntos distintos. Las rectas AB y CD son perpendiculares si y solo si $\frac{d-c}{b-a} \in i\mathbb{R}$, es decir,

$$\frac{d-c}{b-a} + \overline{\left(\frac{d-c}{b-a}\right)} = 0.$$

Esto sucede porque queremos que $90° = \arg(d-c) - \arg(b-a) = \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)$, que es equivalente a $\frac{d-c}{b-a} \in i\mathbb{R}$.

Si A, B, C, D están sobre la circunferencia unitaria, $AB \perp CD$ si y solo si $ab+cd = 0$.

Lemma 4.2 (Colinealidad)

Sean A, B, C puntos distintos en el plano. Entonces, A, B, y C son colineales si y solo si $\frac{c-a}{c-b} \in \mathbb{R}$, es decir:

$$\frac{c-a}{c-b} = \overline{\left(\frac{c-a}{c-b}\right)}.$$

Lemma 4.3 (Reflexión respecto a un segmento)
La reflexión W de Z sobre la recta AB tiene la ecuación

$$w = \frac{(a-b)\overline{z} + \overline{a}b - a\overline{b}}{\overline{a} - \overline{b}}.$$

En particular, si A y B están sobre la circunferencia unitaria, tenemos que

$$w = a + b - ab\overline{z}.$$

Lemma 4.4 (Pie de perpendicular)
Sean A y B puntos sobre el círculo unitario, y Z otro punto en el plano complejo. Por el lema anterior, el pie de perpendicular de Z a AB es

$$\frac{1}{2}(a + b + z - ab\overline{z}).$$

Lemma 4.5 (Intersección de dos rectas)
Sean A, B, C y D puntos en el plano complejo. Sea P la intersección de AB y CD. entonces,

$$p = \frac{(\overline{a}b - a\overline{b})(c-d) - (a-b)(\overline{c}d - c\overline{d})}{(\overline{a} - \overline{b})(c-d) - (a-b)(\overline{c} - \overline{d})}.$$

Generalmente esta fórmula es muy difícil de usar a menos que algún punto sea 0, o muchos de ellos estén sobre la circunferencia unitaria.

Si A, B, C, D están sobre la circunferencia unitaria, entonces

$$p = \frac{(c+d)ab - cd(a+b)}{ab - cd}.$$

Esta fórmula se puede utilizar aún cuando $A = B$ o $C = D$, creando así tangentes al círculo unitario.

§4.2 Triángulos

Para un triángulo ABC tal que el círculo unitario es su circuncírculo, los centros están dados por

1. **Circuncentro**: 0,
2. **Gravicentro**: $\frac{1}{3}(a + b + c)$. En general, el gravicentro G de $P_1P_1 \cdots P_k$es el promedio de los puntos. $g = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} p_i$.[1]
3. **Centro de nueve puntos**: $\frac{1}{2}(a + b + c)$
4. **Ortocentro**: $a + b + c$

[1]Esta condición sirve para cualquier triángulo, no debe estar en el círculo unitario.

Lemma 4.6 (Incentro)

Sea ABC un triángulo con vértices en el círculo unitario. Entonces, existen números complejos x, y, z tales que

$$a = x^2, \quad b = y^2, \quad c = z^2.$$

Sean D, E, F los puntos medios de los arcos BC, CA, AB, respectivamente. Entonces,

$$d = -yz, \quad e = -zx, \quad f = -xy.$$

Como I es el ortocentro de DEF, su ecuación es $j = -(xy + yz + xz)$ [a]

[a] Usamos j para el incentro, porque i se confundiría con la unidad imaginaria.

Lemma 4.7 (Área de un triángulo)

El área de un triángulo ABC (con A, B, C en contra del sentido de las manecillas del reloj visto desde arriba) es:

$$\frac{i}{4}\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix}.$$

También, A, B y C son colineales si y solo si este determinante es 0. A veces, es más fácil usar esta fórmula que la de colinealidad.

Lemma 4.8 (Circuncentro)

Sean X, Y, Z puntos en el plano. El circuncentro O de $\triangle XYZ$ es

$$o = \begin{vmatrix} x & x\overline{x} & 1 \\ y & y\overline{y} & 1 \\ z & z\overline{z} & 1 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} x & \overline{x} & 1 \\ y & \overline{y} & 1 \\ z & \overline{z} & 1 \end{vmatrix}.$$

Es buena idea trasladar primero el plano para que $z = 0$ y luego aplicar la fórmula. Si $x' = x - z$, y $y' = y - z$, tenemos que

$$o - z = \frac{x'y'(\overline{x'} - \overline{y'})}{\overline{x'}y' - x'\overline{y'}}.$$

Lemma 4.9 (Semejanza)

Dos triángulos ABC y XYZ son semejantes si y solo si

$$\begin{vmatrix} a & x & 1 \\ b & y & 1 \\ c & z & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

§4.3 Círculos

La debilidad de los números complejos son los problemas con más de dos círculos. Aún así, hay maneras de lidiar con ellos.

Lemma 4.10 (Cíclicos)

Sean A, B, C, D puntos distintos. Entonces, $ABCD$ es cíclico si y solo si

$$\left(\frac{c-a}{c-b}\right) \div \left(\frac{d-a}{d-b}\right) \in \mathbb{R}.$$

Esto sucede ya que $ABCD$ es cíclico si y solo si $\angle ABC = \angle ADC \iff \arg\left(\frac{b-a}{b-c}\right) = \arg\left(\frac{c-a}{d-c}\right) \iff \left(\frac{c-a}{c-b}\right) \div \left(\frac{d-a}{d-b}\right) \in \mathbb{R}$.

Lemma 4.11 (Intersección de tangentes)

Sea P la intersección de las tangentes al círculo unitario en dos puntos A y B. Por el Lema 3.5,

$$p = \frac{2ab}{a+b}.$$

Esta fórmula se conoce como la fórmula del cono de helado, y es muy útil.

Lemma 4.12 (Rotomotecia)

Si W es un punto en el plano complejo, entonces una rotomotecia f del plano complejo con centro en W se puede escribir de la forma

$$f(z) = \alpha(z-w) + w,$$

donde α es un número complejo. Podemos pensar que $z - w$ es una traslación del plano en la que el punto w va al origen, y al multiplicar por α, rotamos el plano $\arg \alpha$ y hacemos una homotecia de razón $|\alpha|$. Luego, al sumar w de nuevo, w regresa a su lugar original, y el resto de los puntos mantienen la rotomotecia.

Lemma 4.13 (Centro de rotomotecia)

Sea Y el centro de rotomotecia que manda AB a CD. Entonces,

$$y = \frac{ad-bc}{a+d-b-c}.$$

Sea X el punto de intersección de AC y BD. Podemos interpretar el resultado de otra manera: la intersección de los circuncírculos de ABX y CDX es Y.

Entonces, esta fórmula sirve para calcular la intersección de dos círculos en algunos casos.

Lemma 4.14 (Punto sobre una cuerda)
Un punto P sobre la cuerda AB del círculo unitario cumple

$$p + ab\overline{p} = a + b.$$

Lemma 4.15 (Segunda intersección al círculo unitario)
Si A es un punto del círculo unitario y B es un punto que no está en el círculo unitario, entonces la segunda intersección de AB con el círculo unitario es

$$\frac{a-b}{a\overline{b}-1}.$$

Esta fórmula se deriva de la anterior.

§5 Resolviendo problemas con números complejos

Resolver problemas con números complejos generalmente es un proceso de dos partes. Primero, debemos elegir nuestro círculo unitario, y luego calcular los puntos del problema y llegar a la conclusión.

Aunque no lo parezca, la parte más importante ed la primera. Mientras mejor sea nuestra elección del círculo unitairo y variables, menos cuentas debemos hacer. Para un ejemplo claro de esto, tomamos dos soluciones de un mismo problema de la shortlist:

ISL 2016 G4: Sea ABC un triángulo con $AB = AC \neq BC$ y sea I su incentro. BI corta a AC en D, y la perpendicular por D a AC corta a AI en E. Demuestra que la reflexión de I por AC está sobre el circuncírculo de BDE.

Existen dos maneras de resolver este problema con números complejos, una "fácil" y otra difícil.

Solución 1, Evan Chen: La manera "fácil" es tomar al incírculo de ABC como el círculo unitairo (digamos ω. Sean P, Q y R los puntos de tangenica de ω con BC, CA y AB, respectivamente. Entonces, podemos asumir que $p = 1$, y $\overline{q} = r$. Esto hace que ABC sea un triángulo isósceles (¿Por qué?). Luego, podemos calcular B mediante el Lema 4.11, y tomar puntos U y V que sean las intersecciones de BI con ω, que cumplen $u = -v$, y $uv = -pr$ (por el Lema 4.6). De esto, podemos calcular $D = UV \cap QQ$, usando Lema 4.5. Vemos que $ED \perp DQ$, entonces podemos usar el lema de perpendicularidad para encontrar E. Luego, I', la reflexión de I por Q es $2q$, entonces tenemos todos los puntos. Aplicando el Lema 4.10 a $BDEI'$, podemos concluir.

Solución 2, usuario yayups: Si usamos el circuncírculo de ABC como el círculo unitario, la solución es más o menos similar, pero las cuentas son más complicadas, ya que la construcción involucra la intersección de BI con AC (aunque podemos evitar esto usando el punto medio del arco AC en vez de I, para usar la versión fácil del Lema 4.5).

En fin, ambas soluciones requieren bastantes cuentas, pero la primera es más fácil:
Solución 1: https://artofproblemsolving.com/community/c6h1480714p8639402
Solución 2: https://artofproblemsolving.com/community/c6h1480714p11198213

§6 Problemas :D

1. Sea ABC un triángulo con circuncentro O. X, Y, Z son las reflexiones de O sobre BC, CA, AB. Demuestra que AX, BY, CZ concurren.

2. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Sean H_A, H_B, H_C, HD los ortocentros de BCD, ACD, ABD, ABC. Demuestra que AH_A, BH_B, CH_C, DH_D concurren.

3. Sean $BCDE, CAFG, ABHI$ cuadrados construidos exteriormente sobre los lados de $\triangle ABC$. Sean P, Q tales que $CDPG$ y $BEQH$ son paralelogramos. Demuestra que $\triangle APQ$ es isósceles y rectángulo.

4. Sean ABC y PQR dos triángulos cualesquiera, y sean L, M, N los puntos medios de AP, BQ, CR respectivamente. Demuestra que los gravicentros de ABC, PQR, LMN son colineales.

5. Sea $A_1A_2A_3A_4$ un cuadrilátero cíclico. Sea Ω_j la circunferencia de los nueve puntos de $A_{j-1}A_jA_{j+1}$ para $j = 1, 2, 3, 4 \pmod 4$. Prueba que Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 tienen un punto en común.

6. (Napoleón) Sea ABC un triángulo. Se construyen triángulos equiláteros XBA, YCB, ZAC con centros O_C, O_A, O_B hacia afuera del triángulo. Demuestra que $O_CO_AO_B$ es equilátero y su centro es el gravicentro de ABC.

7. Demuestra que un triángulo ABC es equilátero si y solo si $a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca$

8. Sean E, F, G, H los puntos medios de los lados AB, BC, CD, DA de un cuadrilátero convexo $ABCD$. Prueba que AB y CD son perpendiculares si y solo si $BC^2+AD^2 = 2(EG^2 + FH^2)$

9. (Recta de Simson) Sea ABC un triángulo con circuncentro ω. Sea P un punto arbitrario sobre ω, y X, Y, Z los pies de altura de P a BC, CA, AB, respectivamente. Sea H el ortocentro de ABC. Muestra que el punto medio de PH, X, Y, y Z son colineales.

10. Sea ABC un triángulo con incentro I. Prueba que las rectas de Euler de los triángulos AIB, BIC, CIA, ABC concurren

11. Sea $A_1A_2 \dots A_n$ un polígono regular inscrito en un círculo con centro O y radio R. Sea M un punto cualquiera. Demuestra que
$$\sum_{k=1}^{n} MA_k^2 = n(OM^2 + R^2)$$

12. Sea $ABCD$ un cuadrilátero con incírculo ω. Prueba que los puntos medios de AC y BD y el centro de ω son colineales.

13. Sea O el circuncentro de ABC Una recta ℓ por O corta a AB, AC en X, Y respectivamente. M, N son los puntos medios de BY, CX. Demuestra que $\angle MON = \angle BAC$

14. Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB > BC$ y $AC > BC$ Sean O, H el circuncentro y ortocentro del triángulo. El circuncírculo de AHC interseca a AB en A, M. El circuncírculo de AHB intersecta a AC en A, N. Demuestra que el circuncentro del triángulo MNH está en OH.

§7 Problemas X.X

Estos problemas requiren más experiencia, pero se pueden resolver con complejos.

1. Los puntos A_1, B_1, C_1 se escogen sobre los lados BC, CA, AB del triángulo ABC respectivamente. Los ciruncírculos de los triángulos AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 cortan al circuncírculo de ABC de nuevo en A_2, B_2, C_2 respectivamente ($A_2 \neq A, B_2 \neq B, C_2 \neq C$). Los puntos A_3, B_3, C_3 son las reflexiones de A_1, B_1, C_1 respecto a los puntos medios de BC, CA, AB respectivamente. Demuestra que los triángulos $A_2B_2C_2$ y $A_3B_3C_3$ son semejantes.

2. Sea ABC un triángulo con $AB = AC \neq BC$ y sea I su incentro. BI corta a AC en D, y la perpendicular por D a AC corta a AI en E. Demuestra que la reflexión de I por AC está sobre el circuncírculo de BDE.

3. Sea T un punto dentro del triángulo ABC. Sean A_1, B_1, C_1 las reflexiones de T por BC, CA, AB, respectivamente. Sea Ω el circuncírculo de $A_1B_1C_1$. Las rectas A_1T, B_1T, C_1T cortan a Ω por segunda vez en A_2, B_2, C_2, respectivamente. Demuestra que AA_2, BB_2, CC_2 se cortan sobre Ω.

4. Sea ABC un triángulo acutángulo de circuncírculo Γ. Sea ℓ una recta tangente a Γ, y sean ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c las reflexiones de ℓ por BC, CA y AB, respectivamente. Demuestra que el circuncírculo del triángulo formado por ℓ_a, ℓ_b

5. Sea ABC un triángulo acutángulo con circuncírculo Ω. Las bisectrices de $\angle B$ y $\angle C$ cortan a Ω de nuevo en M y N y se cortan en I. Sean M' y N' las reflexiones de M y N por AC y AB. Prueba que el circuncentro de $IM'N'$ está sobre la altura desde A sobre BC.

6. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Las mediatrices de AB y CD se cortan en Y. Sea X un punto dentro de $ABCD$ tal que $\measuredangle ADX = \measuredangle BCX < 90^\circ$ y $\measuredangle DAX = \measuredangle CBX < 90^\circ$. Demuestra que $\measuredangle AYB = 2 \cdot \measuredangle ADX$.

7. Sean AH_1, BH_2, CH_3 las alturas del triángulo acutángulo ABC. Su incírculo corta a los lados BC, AC y AB en T_1, T_2 y T_3 respectivamente. Considera las reflexiones de H_1H_2, H_2H_3 y H_3H_1 respecto a las rectas T_1T_2, T_2T_3 y T_3T_1 respectivamente. Demuestra que dichas imágenes forman un triángulo con vértices sobre el incírculo de ABC.