Universidad Simón Bolívar
Departamento de Computación y Tecnología de la Información
Laboratorio de Lenguajes de Programación - CI3661

Tarea 2

Alejandra Cordero - 12-10645
Pablo Maldonado -12-10561

Abril - Julio 2016

1. Demuestre los teoremas TD y DM por Fitch (teorema de la disyunción y teorema de De Morgan respectivamente)

- $p \to q \leftrightarrow \neg p \lor q$

  Primero se demostrará $p \to q \to \neg p \lor q$

1	$\mid\ p \to q$	
2	$\mid\ \mid\ \neg(\neg p \lor q)$	
3	$\mid\ \mid\ \mid\ p$	
4	$\mid\ \mid\ \mid\ q$	$\Rightarrow$E, 1, 3
5	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg p \lor q$	$\lor$I, 5
6	$\mid\ \mid\ \mid\ (\neg p \lor q) \land \neg(\neg p \lor q), \perp$	$\land$I, 2, 5
7	$\mid\ \mid\ \neg p$	
8	$\mid\ \mid\ \neg p \lor q$	$\lor$I, 8
9	$\mid\ \mid\ (\neg p \lor q) \land \neg(\neg p \lor q), \perp$	$\land$I, 2, 8
10	$\mid\ \neg p \lor q$	

  Ahora se demostrará $\neg p \lor q \to p \to q$

1	$\mid\ \neg p \lor q$	
2	$\mid\ \mid\ p$	
3	$\mid\ \mid\ \neg p \lor q$	R, 1
4	$\mid\ \mid\ \mid\ \neg p$	
5	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \neg q$	
6	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ p$	R, 2
7	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ \neg p$	R, 4
8	$\mid\ \mid\ \mid\ \mid\ p \land \neg p, \perp$	$\land$I, 6, 7
9	$\mid\ \mid\ \mid\ q$	
10	$\mid\ \mid\ \mid\ q$	
11	$\mid\ \mid\ \mid\ q$	
12	$\mid\ \mid\ q$	
13	$\mid\ p \to q$	

  Como se demostró que se cumple: $p \to q \to \neg p \lor q$, y $\neg p \lor q \to p \to q$ entonces, en efecto queda demostrado $p \to q \leftrightarrow \neg p \lor q$

- $\neg(p \land q) \leftrightarrow \neg p \lor \neg q$

  Primero se demostrará $\neg(p \land q) \to \neg p \lor \neg q$

1	$\neg(p \land q)$	
2	$\neg(\neg p \lor \neg q)$	
3	p	
4	q	
5	$p \land q$	$\land$I, 3, 4
6	$p \land q \land \neg(p \land q), \bot$	$\land$I, 5, 1
7	$\neg q$	$\neg$I, 6
8	$\neg q \lor \neg p$	$\lor$I, 7
9	$\neg q \lor \neg p \land \neg(p \land q), \bot$	$\land$I, 9, 1
10	$\neg p$	$\neg$I, 9
11	$\neg p \lor \neg q$	$\lor$I, 10
12	$\neg p \lor \neg q \land \neg(\neg p \lor \neg q), \bot$	$\land$I, 11, 2
13	$\neg p \lor \neg q$	$\neg$I, 13
14	$\neg(p \land q) \to (\neg p \lor \neg q)$	$\Rightarrow$I, 1, 13

Ahora se demostrará $\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land q)$

1	$\neg p \lor \neg q$	
2	$\neg p$	
3	$p \land q$	
4	p	$\land$E, 3
5	$\neg p$	R, 2
6	$p \land \neg p, \bot$	$\land$I, 4, 5
7	$\neg(p \land q)$	$\neg$I, 6
8	$\neg q$	
9	$p \land q$	
10	q	$\land$E, 9
11	$q \land \neg q, \bot$	$\land$I, 9, 10
12	$\neg(p \land q)$	$\neg$I, 11
13	$\neg(p \land q)$	$\lor$E, 1, 7, 12
14	$(\neg p \lor \neg q) \to \neg(p \land q)$	$\Rightarrow$I, 1, 13

Como se demostró que se cumple: $\neg(p \wedge q) \rightarrow \neg p \vee \neg q$, y $\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q)$ entonces, en efecto queda demostrado $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

2. Las reglas en PROLOG son fórmulas en FNC que además deben ser cláusulas de Horn ¿Qué significa este concepto? Además deben estar "skolemizadas"¿Por qué? ¿Qué hace ese procedimiento? Por último existe la unificación ¿En qué consiste?

Cláusula de Horn

En primer lugar, se desea saber qué es una Cláusula de Horn. Para ello, hace falta definir primero los siguientes términos:

- Literal: Es una fórmula atómica o su negación. Por ejemplo, son literales: $p, \neg q, z, \neg t$, etc.
- Cláusula: Disyunción de literales. Ejemplo: $p \vee \neg q \vee \neg t \vee ... \vee z$

Luego, una Cláusula de Horn no es más que una cláusula, en la cual existe a lo sumo un literal positivo. Por ejemplo: $\neg p \vee \neg q \vee ... \vee \neg t \vee u$

Skolemización

La skolemización consiste en la eliminación de los cuantificadores existenciales. Uno de los usos de la skolemización es aplicarlo en el método de resolución de la lógica de predicados.

Las reglas bsicas para realizar la skolemizacińn son:

1. Si un cuantificador existencial no se encuentra dentro del ámbito de ningún cuantificador universal, se sustituye la variable cuantificada existencialmente por una constante que aun no haya sido utilizada y el cuantificador existencial es eliminado.
2. Si un cuantificador existencial se encuentra dentro del ámbito de un cuantificador universal, se ha de sustituir la variable cuantificada existencialmente por una función de la variable cuantificada universalmente y se elimina el cuantificador existencial.
3. Si un cuantificador existencial se encuentra dentro del ámbito de más de un cuantificador universal se sustituirá la variable cuantificada existencialmente por una función de todas las variables afectadas por estos cuantificadores universales y se elimina el cuantificador existencial. La función no puede haber sido utilizada previamente ni podrá utilizarse posteriormente.

Unificación

"Se puede definir la Unificación como un procedimiento de emparejamiento que compara dos literales y descubre si existe un conjunto de sustituciones que los haga idénticos" [3]

3. Demuestre por Fitch y Resolución por refutación

- $\{A \to ((B \vee \neg A) \wedge D), E \to (\neg B \wedge \neg C), (B \wedge G) \to (\neg C \wedge \neg D)\} \vdash G \to ((A \vee C) \to (\neg B \wedge \neg E))$

  - Método de Fitch:

1	$A \to ((B \vee \neg A) \wedge D)$	
2	$E \to (\neg B \wedge \neg C)$	
3	$(B \wedge G) \to (\neg C \wedge \neg D)$	
4	G	
5	$\quad A \vee C$	
6	$\quad\quad A$	
7	$\quad\quad\quad B \vee E$	
8	$\quad\quad\quad (B \vee \neg A) \wedge D$	$\Rightarrow$E, 1, 6
9	$\quad\quad\quad D$	$\wedge$E, 8
10	$\quad\quad\quad B \vee \neg A$	$\wedge$E, 8
11	$\quad\quad\quad A \to B, TeoremaTD$	
12	$\quad\quad\quad B$	$\Rightarrow$E, 11, 6
13	$\quad\quad\quad B \wedge G$	$\wedge$I, 12, 4
14	$\quad\quad\quad \neg C \wedge \neg D$	$\Rightarrow$E, 3, 13
15	$\quad\quad\quad \neg D$	$\wedge$E, 14
16	$\quad\quad\quad D \wedge \neg D, \perp$	$\wedge$I, 9, 15
17	$\quad\quad \neg(B \vee E)$	
18	$\quad\quad \neg B \wedge \neg E, TeoremaDM$	

19	C	
20	$E \to (\neg B \land \neg C)$	R, 2
21	$\neg E \lor (\neg B \land \neg C), Teorema TD$	
22	$\neg E \lor \neg(B \lor C), Teorema TD$	
23	$(B \lor C) \to \neg E, Teorema TD$	
24	$B \lor C$	$\lor$I, 19
25	$\neg E$	$\Rightarrow$E, 23, 24
26	$(B \land G) \to (\neg C \land \neg D)$	R, 3
27	$\neg(B \land G) \lor (\neg C \land \neg D), Teorema TD$	
28	$\neg(B \land G) \lor \neg(C \lor D), Teorema DM$	
29	$(C \lor D) \to \neg(B \land G), Teorema DM$	
30	$C \lor D$	$\lor$I, 19
31	$\neg(B \land G)$	$\Rightarrow$E, 29, 30
32	$\neg B \lor \neg G, Teorema DM$	
33	$G \to \neg B, Teorema TD$	
34	$\neg B$	$\Rightarrow$E, 33, 4
35	$\neg B \land \neg E$	$\land$I, 34, 25
36	$\neg B \land \neg E$	$\lor$E, 5, 18, 35
37	$(A \lor C) \to \neg B \land \neg E$	$\Rightarrow$I, 5, 36
38	$G \to ((A \lor C) \to \neg B \land \neg E)$	$\Rightarrow$I, 4, 37

– Método de Resolución por Refutación:

Para poder usar este método, es necesario transformar la expresión a la FNC correspondiente. Se tomarán cada una de las hipótesis y lo que se desea demostrar por separado para sus respectivas transformaciones. Esto se hará con uso de las leyes de De Morgan y las distributividades que existen entre la disyunción y la conjunción:

Se tiene:

* $A \to ((B \lor \neg A) \land D)$
  $\equiv <$ Teorema de la Disyunción, $p \to q \leftrightarrow \neg p \lor q >$
  $\neg A \lor ((B \lor \neg A) \land D)$
  $\equiv <$ Distributividad del $\lor$ sobre el $\land, p \lor (q \land r) \leftrightarrow (p \lor q) \land (p \lor r) >$
  $(\neg A \lor (B \lor \neg A)) \land (\neg A \lor D)$
  $\equiv <$ Simetría de la Disyunción, $p \lor q \leftrightarrow q \lor p >$
  $(\neg A \lor (\neg A \lor B)) \land (\neg A \lor D)$
  $\equiv <$ Asociatividad de la Disyunción, $p \lor (q \lor r) \leftrightarrow (p \lor q) \lor r) >$
  $((\neg A \lor \neg A) \lor B) \land (\neg A \lor D)$
  $\equiv <$ Idempotencia de la Disyunción, $p \lor p \leftrightarrow p$

$(\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee D)$

* $(B \wedge G) \rightarrow (\neg C \wedge \neg D)$
  $\equiv <$ Teorema de la Disyunción, $p \rightarrow q \leftrightarrow \neg p \vee q >$
  $\neg(B \wedge G) \vee (\neg C \wedge \neg D)$
  $\equiv <$ Distributividad del $\vee$ sobre el $\wedge, p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r) >$
  $(\neg(B \wedge G) \vee \neg C) \wedge (\neg(B \wedge G) \vee \neg D)$
  $\equiv <$ De Morgan, $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q >$
  $(\neg B \vee G \vee \neg C) \wedge (\neg(B \wedge G) \vee \neg D)$
  $\equiv <$ De Morgan, $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q >$
  $(\neg B \vee G \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee \neg G \vee \neg D)$

* $E \rightarrow (\neg C \wedge \neg D)$
  $\equiv <$ Teorema de la Disyunción, $p \rightarrow q \leftrightarrow \neg p \vee q >$
  $\neg E \vee (\neg B \wedge \neg C)$
  $\equiv <$ Distributividad del $\vee$ sobre el $\wedge, p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r) >$
  $(\neg E \vee \neg B) \wedge (\neg E \vee \neg C)$

Es decir, ya se tiene la FNC para cada una de las hipótesis. A continuación, para usar el método de resolución por refutación será necesario negar lo que se desea probar, y llevarlo a la Forma Normal Conjuntiva. Este proceso se mostrará en el siguiente punto:

* $\neg(G \rightarrow ((A \vee C) \rightarrow (\neg B \wedge \neg E)))$
  $\equiv <$ Teorema de la Disyunción, $p \rightarrow q \leftrightarrow \neg p \vee q >$
  $\neg(\neg G \vee ((A \vee C) \rightarrow (\neg B \wedge \neg E)))$
  $\equiv <$ De Morgan, $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$; Doble Negación, $\neg\neg p \leftrightarrow p >$
  $G \wedge \neg((A \vee C) \rightarrow (\neg B \wedge \neg E))$
  $\equiv <$ Teorema de la Disyunción, $p \rightarrow q \leftrightarrow \neg p \vee q >$
  $G \wedge \neg(\neg(A \vee C) \vee (\neg B \wedge \neg E))$
  $\equiv <$ De Morgan, $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q >$
  $G \wedge \neg(\neg(A \vee C) \vee \neg(B \vee E))$
  $\equiv <$ De Morgan, $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$; Doble Negación, $\neg\neg p \leftrightarrow p >$
  $G \wedge (A \vee C) \wedge (B \vee E)$

Luego, se tendrán como hipótesis todo el conjunto de cláusulas obtenidas para tratar de encontrar una contradicción haciendo uso del método de resolución. Es decir:

* $\Gamma = \{\neg A \vee B, \neg A \vee D, \neg B \vee \neg G \vee \neg C, \neg B \vee \neg G \vee \neg D, \neg E \vee \neg B, \neg E \vee \neg C, G, A \vee C, B \vee E\}$

Como puede observarse en las hipótesis, el único literal es G. Por esta razón, se intentará obtener una contradicción con este y su negado. La idea, es obtener $\neg G$ a partir de la hipótesis $\neg B \vee \neg G \vee \neg C$.

Para ello, en primer lugar se probará que puede obtenerse C como literal a partir de las cláusulas dadas. Este se usará tanto como para eliminarlo de la expresión de interés, como para obtener el literal B. Luego de esto, C se utilizará como nueva hipótesis en la demostración principal:

∗ Prueba para obtener el literal C a partir de las hipótesis:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg A \lor D \qquad \neg B \lor \neg G \lor \neg D}{\neg A \lor \neg B \lor \neg G} \qquad A \lor C}{\neg B \lor \neg G \lor \neg C} \qquad G}{\neg B \lor C} \qquad \neg A \lor B}{C \lor \neg A} \qquad A \lor C}{C}$$

A partir de este momento, se utilizará el literal C como si fuese parte de las hipótesis obtenidas al momento de la conversión de las expresiones en la Forma Normal Conjuntiva.

∗ Prueba del teorema por el método de resolución por refutación:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{C \qquad \neg E \lor \neg C}{\neg E} \qquad B \lor E}{B} \qquad \neg B \lor \neg G \lor \neg C}{\neg G \lor \neg C} \qquad C}{\neg G} \qquad G}{\bot}$$

Al obtener una contradicción, se habrá logrado probar la expresión por el método de resolución por refutación:

- $\neg(p \to (q \lor r)) \vdash ((\neg p \to \neg q) \lor r)$
  - Método de Fitch:

1	$\neg(p \to (q \lor r))$	
2	$\quad \neg p \lor (q \lor r)$	
3	$\quad p \to (q \lor r), TeoremaTD$	
4	$\quad p \to (q \lor r) \land \neg(p \to (q \lor r)), \bot$	$\land$I, 3, 1
5	$\neg(\neg p \lor (q \lor r))$	$\neg$I, 4
6	$\neg\neg p \land \neg(q \lor r)), TeoremaDM$	
7	$\neg\neg p$	$\land$E, 6
8	$\neg\neg p \lor \neg q$	$\lor$I, 7
9	$\neg p \to \neg q, TeoremaTD$	
10	$(\neg p \to \neg q) \lor r$	$\lor$I, 9

  - Método de Resolución por Refutación:

En primer lugar, es necesario transformar la expresión a la FNC correspondiente. Se tomarán la hipótesis y lo que se desea demostrar por separdo para la transformación. Esto se hará con uso de las leyes de De Morgan y las distributividades que existen entre la disyunción y la conjunción:

Se tiene:

* $\neg(p \rightarrow (q \vee r))$
  $\equiv <$ Teorema de la Disyunción, $p \rightarrow q \leftrightarrow \neg p \vee q >$
  $\neg(\neg p \vee (q \vee r))$
  $\equiv <$ De Morgan, $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$; Doble Negación, $\neg\neg p \leftrightarrow p >$
  $p \wedge \neg(q \vee r)$
  $\equiv <$ De Morgan, $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q >$
  $p \wedge \neg q \wedge \neg r$

  Es decir, ya se obtuvo la FNC para la hipótesis. A continuación, para usar el método de resolución por refutación será necesario negar lo que se desea probar, y llevarlo a la Forma Normal Conjuntiva. Este proceso se mostrará en el siguiente punto:

* $\neg((\neg p \rightarrow \neg q) \vee r))$
  $\equiv <$ Teorema de la Disyunción, $p \rightarrow q \leftrightarrow \neg p \vee q$; Doble Negación, $\neg\neg p \leftrightarrow p >$
  $\neg((p \vee \neg q) \vee r))$
  $\equiv <$ De Morgan, $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q >$
  $\neg(p \vee \neg q) \wedge \neg r$
  $\equiv <$ De Morgan, $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q >$
  $\neg p \wedge q \wedge \neg r$

  Luego, se tendrán como hipótesis todo el conjunto de cláusulas obtenidas para tratar de encontrar una contradicción haciendo uso del método de resolución. Es decir:
* $\Gamma = \{p, \neg q, \neg r, \neg p, q, \neg r\}$

Se puede observar que existe la posibilidad de encontrar dos contradicciones, tanto con p como con q. Si se elige q:

$$\frac{\neg q \qquad q}{\perp}$$

Al obtener una contradicción, se habrá logrado probar la expresión por el método de resolución por refutación

Referencias

[1] Wikipedia: Forma normal de Skolem,
`http://es.wikipedia.org/wiki/Forma_normal_de_Skolem`

[2] Lógica Matemática: Resolución y unificación, Métodos,
`http://www.uhu.es/nieves.pavon/pprogramacion/temario/anexo/anexo.html#_Toc495148247`

[3] Cuaderno Didáctico: Lógica de Predicados,
`http://wainu.ii.uned.es/grados/primero/LED/apuntes/logica-de-predicados-uniovi/view`