La Caracterización de Kuratowski-Mrówa Para Conjuntos Compactos

David Gómez, Laura Rincón

21 de mayo de 2025

Para este proyecto se investigó sobre la caracterización de Kuratowski-Mrówa para conjuntos compactos. El teorema es un resultado el cual inicialmente parece no tener relación con la definición usual de compacidad, sin embargo, basta con un lema para "aterrizar" esta idea.

Aún después de enteder este teorema, trabajar con este da una sensación no muy diferente a la que se tiene al trabajar por primera vez con conjuntos compactos. Es una idea que parece tan extraña que realmente pareciera que los resultados al respecto no tienen algo que ver con esta propiedad.

Después de varios intentos e investigación sobre el uso de esta caracterización, se evidenció que algunos de los teoremas más conocidos sobre la compacidad resultan bastante sencillos en su demostración con esta nueva idea.

Definición 1 (Kuratowski-Mrówa)**:** Un espacio topológico X es compacto si y solo si para todo espacio topológico Y, la segunda proyección $\pi_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ es cerrada.

Antes de demostrar la equivalencia con la definición usual, se presenta un lema el cual facilita entender este enunciado y la demostración.

Lema 2: Sean X, Y, espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$. f es cerrada si y solo si, para todo $y \in Y$, $U \subseteq X$ tal que $f^{-1}(\{y\}) \subseteq U$, existe una vecindad V de y tal que $f^{-1}(V) \subseteq U$.

Demostración: (i) Supóngase que f es cerrada y sean $y \in Y$, $U \subseteq X$ tal que $f^{-1}(\{y\}) \subseteq U$. Entones $X - U$ es cerrado y $f(X - U)$ también. Se define $V = Y - f(X - U)$ que es abierto en Y y además $y \in V$, pues de no ser el caso, $y \in f(X - U) \cap f(U) = \varnothing$.

Se afirma que $f^{-1}(V) \subseteq U$: sea $p \in f^{-1}(V)$, entonces $f(p) \notin f(X - U)$ y $p \notin X - U$, es decir $p \in U$.

(ii) Supóngase que f satisface la hipótesis del recíproco y sean $C \subseteq X$ cerrado, $y \notin f(C)$. Como C es cerrado, entonces $X - U$ es un abierto el cual contiene a $f^{-1}(\{y\})$ y por hipótesis, se cuenta con una vecindad V de y tal que $f^{-1}(V) \subseteq X - C$, con lo que $V \cap f(C) = \varnothing$ y $y \in \mathbf{int}(Y - f(C))$. Así, $f(C)$ es cerrado.

$\square$

Lema 3 (Lema del Tubo)**:** Sean X, Y espacios topológicos, $y \in Y$ y $W \subseteq X \times Y$ abierto tal que $X \times \{y\} \subseteq W$. Si X es compacto entonces existe una vecindad V de y tal que $X \times V \subseteq W$.

Demostración: Dado que $X \times \{y\}$ es homeomorfo a X, el cual es compacto, se cuenta con una cantidad finita de abiertos básicos $U_1 \times E_1, \ldots, U_n \times E_n \subseteq W$ los cuales cubren a $X \times \{y\}$. Sin pérdida de generalidad supóngase que cada uno de estos abiertos interseca al conjunto. Se define $V = \bigcap_{i=1}^{n} E_i$ que es abierto en Y y $y \in V$. Sea $(x, z) \in X \times V$. Entonces para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$, $(x, y) \in U_i \times E_i$ y como $z \in \bigcap_{i=1}^{n} E_i$, entonces $(x, z) \in U_i \times E_i$. Así, $X \times W \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i \times E_i \subseteq W$. $\square$

Aplicando el primer lema, el enunciado el teorema presentado resulta equivalente al siguiente

Teorema 4 (Kuratowski-Mrówa modificado)**:** Un espacio topológico X es compacto (en el sentido de las cubiertas abiertas) si y solo si para todo espacio topológico Y, se satisface lo siguiente: para todo $y \in Y$, $W \subseteq X \times Y$ abierto tal que $X \times \{y\} \subseteq W$, existe una vecindad V de y la cual cumple que $X \times V \subseteq U$.

Demostración: La primera implicación es el lema del tubo.

Supóngase que X que satisface la propiedad y sea $(C_i)_{i \in I}$ una colección de conjuntos cerrados de X la cual satisface la propiedad de las intersecciones finitas (esto es que cualquier intersección finita de los C_i es no vacía). Para demostrar que X es compacto, basta con demostrar que $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \varnothing$

Se considera $\infty \notin X$ y se define $Y = X \cup \{\infty\}$ con la topología generada por la subbase la cual consiste de $\mathcal{P}(X)$ y los conjuntos de la forma $C_i \cup \{\infty\}$. Sean $A = \{(x, x) : x \in X\} \subseteq X \times Y$ y $K = \mathbf{adh}(A)$. Por hipótesis, la proyección $\pi_2(K)$ es cerrada en Y y contiene a X. Entonces $\infty \in \pi_2(K)$ ya que la propiedad de intersección finita de la colección $(C_i)_{i \in I}$ garantiza que $\{\infty\}$ no sea un conjunto abierto de Y con lo que existe $x \in X$ tal que $(x, \infty) \in K$. Esto es, para todo $i \in I$ y U vecindad de x, $(U \times (C_i \cup \{\infty\})) \cap \Delta \neq \varnothing$, lo que implica que $U \cap C_i \neq \varnothing$ pues x debe estar en ambos. Pero esto es $x \in \bigcap_{i \in I} C_i$. $\square$

Teorema 5: Si X es un espacio compacto y $K \subseteq X$ es cerrado, entonces K es compacto.

Demostración: Sea Y un espacio topológico. Por hipótesis la segunda proyección $\pi_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ es cerrada.

Como K es cerrado, entonces todo cerrado de K es cerrado en X y $\pi_2 \mid_{K \times Y}$ es también cerrada. $\square$

Teorema 6: Sean X un espacio de Hausdorff y $K \subseteq X$. Si K es compacto, entonces es cerrado.

Demostración: Como X es Hausdorff, entonces $\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\}$ es cerrado en $X \times X$ con lo que $\Delta_K = \Delta \cap (K \times X)$ es cerrado en $K \times X$. Por la compacidad de K, se tiene que en particular $\pi_2 : K \times X \longrightarrow X$ es cerrada, luego $K = \pi_2(\Delta_K) = K$ es cerrado en K. $\square$

Teorema 7: Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Si X es compacto entonces $f(X)$ es compacto en Y.

Demostración: Sea Z un espacio topológico. Por hipótesis, la segunda proyección $p_2 : X \times Z \longrightarrow Z$ es cerrada. Sean $\pi_2 : f(X) \times Z \longrightarrow Z$ la segunda proyección y $C \subseteq f(X) \times Z$ cerrado. El conjunto $A = \{(x,z) \in X \times Z \mid (f(x), z) \in C\}$ es cerrado en $X \times Z$ pues, denotando por $I : Z \longrightarrow Z$ la función $z \longmapsto z$, A es la imagen inversa de C mediante la función $(x,z) \longmapsto (f(x), I(z))$ la cual es continua. Como $p_2(A) = \pi_2(C)$ se concluye que p_2 es cerrada y en consecuencia, $f(X)$ es compacto. $\square$

Teorema 8: Sean X_1, X_2 espacios topológicos y $X = X_1 \times X_2$. X_1, X_2 son compactos si y solo si X es compacto.

Demostración: (i) Supóngase que X_1, X_2 son compactos y sea Y un espacio topológico. Por hipótesis, las segundas proyecciones $p_2 : X_1 \times (X_2 \times Y) \longrightarrow (X_2 \times Y)$ y $q_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ son cerradas. Como $(X_1 \times X_2) \times Y$ es homeomorfo a $X_1 \times (X_2 \times Y)$ mediante la función $((x_1, x_2), y) \longmapsto (x_1, (x_2, y))$, entonces todo cerrado $C \subseteq (X_1 \times X_2) \times Y$ tiene un único cerrado asociado $C^* = \{(x_1, (x_2, y)) \mid ((x_1, x_2), y) \in C\} \subseteq X_1 \times (X_2 \times Y)$. Por hipótesis, $p_2(C^*)$ es cerrado y enconsecuencia $q_2(p_2(C^*))$ es cerrado en Z. Nótese que la segunda proyección $\pi_2 : (X_1 \times X_2) \times Y \longrightarrow Y$ $q_2 \circ p_2$ satisface que $\pi_2(C) = (q_2 \circ p_2)(C^*)$. Así, X es compacto.

$\square$

Teorema 9: Sea X un conjunto totalmente ordenado con la propiedad del supremo. Si X es dotado de la topología del orden, entonces todo intervalo cerrado de X es compacto.

Demostración: Para evitar ambigüedad, las parejas $(x,y) \in X \times Y$ se denotarán por $x \times y$. La notación $(\cdot, \cdot)$ se reserva para intervalos abiertos de X.

Sean $a, b \in X$ con $a \leq b$ y Y un espacio topológico. Como $[a,b]$ es convexo, entonces la topología heredada coincide con la del orden. Para $y \in Y$ se denotará $\mathcal{V}(y)$ el conjunto de las vecindades de y.

Sea $C \subseteq [a, b] \times Y$ cerrado y $y \in \mathbf{adh}(\pi_2(C))$. Para $W \in \mathcal{V}(y)$, se define $A_W = \{x \in [a, b] \mid (\exists w \mid w \in W : x \times w \in C)\}$. Como $y \in \mathbf{adh}(\pi_2(C))$, este conjunto es no vacío. En efecto, existe $p \in W \cap \pi_2(C)$, luego por sobreyectividad de la segunda proyección, existe $x \in [a, b]$ tal que $x \times p \in C$, con lo que $x \in A_W$. Evidentemente $A_W \subseteq [a, b]$, luego es acotado superiormente por b y en consecuencia, $a_W = \sup A_W \in [a, b]$ existe. Análogamente, el conjunto $\{a_W \mid W \in \mathcal{V}(y)\}$ está contenido en $[a, b]$ por lo anterior y $\alpha = \text{ínf}\,\{a_W \mid W \in \mathcal{V}(y)\} \in [a, b]$.

Se quiere ver que $\alpha \times y \in \mathbf{adh}(C)$.

Sean $V \cap [a, b]$ una vecindad de α en $[a, b]$ con $\alpha \neq \sup(V)$ y W una vecindad de y. Como $\alpha \neq \sup(V)$ entonces existe $W_1 \in \mathcal{V}(y)$ tal que $\alpha \leq a_{W_1} < sup(V)$. Nótese que $a_{W_1 \cap W} \leq a_{W_1}$ para todo W.

Si $\alpha < a_{W_1 \cap W}$ entonces α no es una cota superior de $A_{W_1 \cap W}$, luego existe $x \in A_{W_1 \cap W}$ tal que $\alpha < x \leq a_{W_1 \cap W}$. Es claro que $x \in V$ y que existe $w \in W_1 \cap W \subseteq W$ tal que $x \times w \in K$. Además $x \times w \in (V \times W) \cap K$. Si $\alpha = a_{W_1 \cap W}$, entonces para toda vecindad U de α en X, $U \cap A_{W_1 \cap W} \neq \varnothing$ para todo $W \in \mathcal{V}(y)$. Entonces existen $x \in U$ y $w \in W_1 \cap W$ tales que $x \times w \in K$ por lo que $(V \times (W_1 \cap W)) \cap K \neq \varnothing$. Así $\alpha \times y \in \mathbf{adh}(C) = C$.

Nótese que en caso de que X sea bien ordenado, entonces α es un mínimo. Entonces existe $W \in \mathcal{V}(y)$ tal que $\alpha = a_W$, y se sigue el procedimiento anterior. $\square$

Definición 10: Una colección $\{(X_\alpha, f_{\alpha,\beta}) : \Lambda\}$ es llamada *sistema inverso* cuando cada X_α es un espacio topológico, Λ es dirigido por una relación $<$, para todo $\alpha < \beta$, las funciones $f_{\alpha,\beta}$ están definidas, son continuas, $f_{\beta,\alpha} \colon X_\alpha \longrightarrow X_\beta$ y si $\alpha < \gamma < \beta$ entonces $f_{\gamma,\alpha} \circ f_{\beta,\gamma} = f_{\beta,\alpha}$.

El límite inverso de este sistema es el subespacio de $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ tal que para todo $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ en el límite y $\beta > \gamma$,

$$f_{\beta,\gamma}((x_\alpha)_{\alpha \leq \beta}) = (x_\alpha)_{\alpha \leq \gamma}$$

Lema 11: Sean $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una colección de espacios topológicos, $X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$, $(x_\alpha)_{\alpha \in J} \in X$ y $A \subseteq X$. $(x_\alpha)_{\alpha \in J} \in \mathbf{adh}(A)$ si y solo si para todo $I \subseteq J$ finito,

$$\pi_I((x_\alpha)_{\alpha \in J}) = (x_\alpha)_{\alpha \in I} \in \mathbf{adh}(\pi_I(A))$$

Tomando este último como subconjunto de $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ con la topología producto.

Demostración: la primera implicación es trivial. Para la otra implicación, basta con demostrar que toda vecindad básica de $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ interseca con A. Sea $U = \prod_{\alpha \in J} U_\alpha$ un abierto básico al cual pertenece $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$

y $I \subseteq J$ el conjunto de índices para los que $\alpha \in I$ implica que $U_\alpha \neq X_\alpha$. Como I es finito, por hipótesis, $\pi_I((x_\alpha)_{\alpha\in J}) \in \mathbf{adh}(\pi_I(A))$ luego

$$\prod_{\alpha\in I} U_\alpha \cap \pi_I(A) \neq \varnothing$$

Como $\alpha \notin I$ implica que $U_\alpha = X_\alpha$, entonces trivialmente

$$U \cap A \neq \varnothing$$

□

Teorema 12: Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ una colección de compactos indexados por un ordinal κ. El espacio $X = \prod_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ es compacto bajo la topología producto.

Demostración: La demostración se realizará por inducción transfinita. El caso base, $\kappa = 0$ es trivial. Antes de continuar con el paso inductivo, se introduce una notación que será de utilidad:

Para $\gamma \leq \kappa$ se denotará $X^\gamma = \left(\prod_{\alpha<\gamma} X_\alpha\right) \times Y$. Se toma la convención de que $X^0 = Y$. Para $\beta < \gamma$ se define

$$\pi^\gamma_\beta : X^\gamma \longrightarrow X^\beta$$

por $(y, (x_\alpha)_{\alpha<\gamma}) \longmapsto (y, (x_\alpha)_{\alpha<\beta})$. Sea $K \subseteq X^\kappa$ cerrado. Se denotará $K_\beta = \mathbf{adh}\left(\pi^\kappa_\beta(K)\right)$, con lo que $K_\kappa = K$ y $K_0 = \mathbf{adh}\left(\pi^\beta_0(K)\right)$ sería la segunda proyección en $X \times Y$. Basta con demostrar justamente que $K_0 = \pi^\beta_0(K)$.

Para la hipótesis de inducción, se va a suponer que, para todo $\beta < \kappa$, la segunda proyección

$$\pi_2 \colon \left(\prod_{\alpha<\beta} X_\alpha\right) \times Y \longrightarrow Y$$

es cerrada. Esto es equivalente a que la función π^β_0 sea cerrada. Es decir, dado $x_0 \in K_0$, existe $x_\beta \in K_\beta$ tal que $\pi^\beta_0(x_\beta) = x_0$.

Si κ es un sucesor ($\kappa = \beta + 1$), entonces por hipótesis, la proyección

$$\pi_2 \colon X_\beta \times X^\beta \longrightarrow X^\beta$$

es cerrada. Esto es equivalente a que la función π^κ_β es cerrada.

$$
\begin{aligned}
& K_\beta = \pi_\beta^\kappa(K) \\
\Rightarrow & \\
& \pi_0^\beta(K_\beta) = (\pi_0^\beta \circ \pi_\beta^\kappa)(K) \\
\equiv & \\
& K_0 = \pi_0^\kappa(K)
\end{aligned}
$$

Si κ es un ordinal límite (no es un sucesor), se considera el sistema inverso de espacios $\left\{(X^\gamma, \pi_\beta^\gamma) \,\middle|\, \kappa\right\}$. Se comprueba fácilmente que este es un sistema inverso pues las funciones dadas son efectivamente continuas y para $\gamma > \beta > \mu$,

$$\pi_\mu^\beta \circ \pi_\beta^\gamma = \pi_\mu^\gamma$$

Con esto, el espacio X^κ es justamente el límite inverso de este sistema. La razón está justamente en el comportamiendo de las funciones dadas, lo cual fue descrito al momento de introducirlas.

Debido a esto, para todo $\beta < \kappa$ cualquier elemento de la forma $(x_\alpha)_{\alpha<\beta}$ define un elemento $x_\kappa \in X^\kappa$.

Por hipótesis, basta con demostrar que los x_κ definidos por elementos $x_\beta \in K_\beta$, están en K. Por el lema anterior, basta con considerar F una colección finita de ordinales menores a κ.

$$
\begin{aligned}
& \pi_F(x_\kappa) \\
= & \\
& (\pi_F^\beta \circ \pi_\beta^\kappa)(x_\kappa) \\
= & \\
& \pi_F^\beta(x_\beta) \\
\in & \\
& \pi_F^\beta(K_\beta) \\
= & \\
& \pi_F(\mathbf{adh}(\pi_\beta^\kappa(K))) \\
\subseteq & \\
& \mathbf{adh}((\pi_F \circ \pi_\beta^\kappa)(K)) \\
= & \\
& \mathbf{adh}(\pi_F(K))
\end{aligned}
$$

□