Sucesiones Arbitrarias

David Gómez, Laura Rincón, Daniel Pérez

ESCUELA COLOMBIANA DE INGENIERÍA JULIO GARAVITO

VIGILADA MINEDUCACIÓN

UNIVERSIDAD

Matemáticas

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

Colombia

22 de mayo de 2023

Índice

Introducción

El siguiente trabajo trata el tema de sucesiones, específicamente un algoritmo para representarlas con una expresión general.

Se piensa estudiar el comportamiento del algoritmo, con el fin de simplificar su uso y, a su vez, dar avances sobre el alcance que tiene.

Obtención del algoritmo

En esta sección se mostrará la idea del algoritmo y como se puede expresar en una forma más formal. Posteriormente, se estudiará para poder reducir su complejidad a la hora de usarse.

Ejemplo introductorio

Suponga que tiene los siguientes números: $36, 28, 15$

Suponga que se les asignan respectivamente los siguientes índices: $0, 1, 2$

¿Cómo se relacionan estos índices con los números dados? ¿Existe una expresión que represente esta relación?

Para esto, hacemos iteraciones sobre cómo debería ser el término general hasta un índice específico, de la siguiente manera:

Llamemos $a_0(n)$ el término general que relaciona los índices hasta el 0 con los números dados.

Lo más sencillo es hacer

$$a_0(n) = 36$$

Ahora veamos cómo podríamos obtener $a_1(n)$

Tenemos información de que $a_0(n)$ funciona para $n = 0$, entonces forzamos un término nuevo junto a este, que no altere a a_0 cuando $n = 0$ pero que en $n = 1$ nos dé el resultado deseado. Suponemos un y tal que se cumpla el siguiente sistema:

$$\begin{Bmatrix} a_1(n) = y \cdot n + 36 \\ 28 = y(1) + 36 \end{Bmatrix}$$

Nuevamente, ¿Por qué?, a_1 se define de esta manera debido a que en $n = 0$ el término añadido es nulo, y queda únicamente lo que ya servía (a_0) y en $n = 1$ queremos que y sea tal que se fuerce el valor de 28 Resolviendo, se obtiene que $y = -8$ y

$$a_1(n) = -8n + 36$$

De igual forma, para el siguiente valor, tenemos información de que en $n = 0$ y en $n = 1$, a_1 puede relacionar los índices con los valores dados. Entonces forzamos un tercer término para poder relacionar el siguiente valor (15) sin alterar lo que ya encontramos. De igual forma suponemos un y tal que:

$$\left\{ \begin{aligned} a_2(n) &= y \cdot n(n-1) - 8n + 36 \\ 15 &= y(2)(2-1) - 8(2) + 36 \end{aligned} \right\}$$

Resolviendo, se obtiene que $y = -2.5$ y

$$a_2(n) = -2.5n(n-1) - 8n + 36$$

Obtención general

Suponga ahora la siguiente sucesión S y sus índices I:

$$S = \langle x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$$
$$I = \langle 0, 1, 2, \dots, n \rangle$$

El objetivo es obtener el término general de S con índices I .

Procedemos de igual forma que en el ejemplo:

$$a_0(n) = x_0$$

Se tomará la Notación y_k para representar el coeficiente de la iteración k al resolver la ecuación que se mostró en el ejemplo, evitando hacer mención de la suposición de dicho y en cada procedimiento.

$$\left\{ \begin{aligned} a_1(n) &= y_1 \cdot n + x_0 \\ x_1 &= y_1(1) + x_0 \end{aligned} \right\}$$

Nuevamente, para $a_2(n)$

$$\left\{ \begin{aligned} a_2(n) &= y_2 \cdot n(n-1) + (x_1 - x_0)n + x_0 \\ x_2 &= y_2(2)(1) + (x_1 - x_0)(2) + x_0 \end{aligned} \right\}$$

Para $a_3(n)$

$$\left\{ \begin{aligned} a_3(n) &= y_3 \cdot n(n-1)(n-2) + \frac{1}{2}[x_2 - ((x_1 - x_0)(2) + x_0)]n(n-1) + (x_1 - x_0)n + x_0 \\ x_3 &= y_3(3)(2)(1) + \frac{1}{2}[x_2 - ((x_1 - x_0)(2) + x_0)](3)(2) + (x_1 - x_0)(3) + x_0 \end{aligned} \right\}$$

A partir de esta información, se conjetura lo siguiente:

Algorítmo

El término general de una sucesión de k términos, está dada por

$$\begin{Bmatrix} a_{k+1}(n) = \dfrac{1}{(k+1)!}[x_k - a_k(k+1)]n(n-1)(n-2)\dots(n-k) + a_k(n) \\ \\ a_0 = x_0 \end{Bmatrix}$$

$\equiv$ $\langle$ Notación $\rangle$

$$\begin{Bmatrix} a_{k+1}(n) = \dfrac{1}{(k+1)!}[x_k - a_{k-1}(k)]\displaystyle\prod_{c=0}^{k}(n-c) + a_k(n) \\ \\ a_0 = x_0 \end{Bmatrix}$$

Por su puesto, hace falta demostrarlo:

Por medio de la inducción, se toma un caso base, el cual será $k = 0$. Esto significa que la expresión obtenida funciona para la sucesión $S = \langle x_0 \rangle$ y usando la fórmula conjeturada, se obtiene que

$$a_0(n) = x_0$$

Que efectivamente, cumple. Ahora se supone que existe un b tal que la fórmula se cumple para todo número natural menor que o igual a b. Queremos ver qué sucede si queremos hallar una sucesión que también pueda seguir el valor de x_{b+1}
Tenemos $S = \langle x_0, x_1, \ldots x_b, x_{b+1} \rangle$ y que $a_b(n)$ relaciona a los naturales con los x_i de S hasta x_b
Queremos hallar una sucesión que pueda relacionar desde x_0 hasta x_{b+1}, a los naturales. Tomando la información anterior, suponemos que hay un y_{b+1} tal que:

$$\left\{ \begin{aligned} a_{b+1}(n) &= y_{b+1} \prod_{c=0}^{b} (n-c) + a_b(n) \\ x_{b+1} &= y_{b+1} \prod_{c=0}^{b} (b+1-c) + a_b(b+1) \end{aligned} \right\}$$

Se define de esta manera por la misma razón que se mencionó al principio. Sabemos que $a_b(n)$ sirve para todos los naturales antes que $b+1$ y relaciona cada uno respectivamente con un elemento de S. Entonces añadimos un nuevo término el cual se anule en todos los valores de n hasta b de forma que podamos seguir usando a_b y forzando a que en $n = b+1$ el valor obtenido sea x_{b+1} usando y_{b+1} .

Desarrollando la segunda igualdad.

$$
\begin{aligned}
& y_{b+1}\prod_{c=0}^{b}(b+1-c) = x_{b+1} - a_b(b+1) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Notación } \rangle \\
& y_{b+1}(b+1)(b)(b-1)\cdots 1 = x_{b+1} - a_b(b+1) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Notación } \rangle \\
& y_{b+1}(b+1)! = x_{b+1} - a_b(b+1) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Aritmética } \rangle \\
& y_{b+1} = \frac{1}{(b+1)!}[x_{b+1} - a_b(b+1)]
\end{aligned}
$$

Reemplazando en la primera igualdad, se obtiene lo siguiente:

$$a_{b+1}(n) = \frac{1}{(b+1)!}[x_{b+1} - a_b(b+1)]\prod_{c=0}^{b}(n-c) + a_b(n)$$

Con este resultado se demuestra la validez de la fórmula.

Ejemplo de uso

Se puede ver del algoritmo, que el uso de este, viene bastante bien para la obtención de expresiones polinómicas.

Un caso particular de esto sería la suma de n números naturales elevados al cuadrado. Partimos de unos cuantos términos, hallados manualmente:

$$S = \langle 0, 1, 5, 14, 30, 55, \dots \rangle$$

Entonces, hacemos iteraciones hasta poder conjeturar un resultado:

$$\begin{aligned}
a_0(n) &= 0 \\
a_1(n) &= (1-0)n = n \\
a_2(n) &= \frac{1}{2}(5-2)n(n-1) + n = \frac{n(3n-1)}{2} \\
a_3(n) &= \frac{1}{6}(14-12)n(n-1)(n-2) + \frac{n(3n-1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
a_4(n) &= \frac{1}{24}(30-30)n(n-1)(n-2)(n-3) + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = a_3(n)
\end{aligned}$$

En el momento en el que una iteración k funciona para el término deseado en $k+1$, es momento de detenerse. Es bueno ver si en siguientes valores también cumple, y de ser el caso, establecer la conjetura. Posteriormente, usar lo obtenido y demostrar la validez de la fórmula hallada. En nuestro ejemplo, la iteración a_3 efectivamente corresponde al resultado de sumar n números naturales al cuadrado.

Eliminación de la recursión

El algoritmo es fácil e incluso rápido de usar para pocos números. Sin embargo a medida que los valores deseados aumenten, hace que el proceso sea mucho más lento, pues para cada iteración, es necesario tener el paso anterior y operar con este en un n específico. Fuera de ese detalle es sencillo eliminar la recursión, pues tenemos un número y_k, el cual multiplica un polinomio que varía junto con la iteración. Esto nos dice que entonces, si se tiene una forma general de estos coeficientes, se podría dar el resultado de una iteración k de la siguiente forma:

$$a_k(n) = \sum_{i=0}^{k} y_i \prod_{c=0}^{i-1} (n - c)$$

El único inconveniente para escribirlo de esta forma, es precisamente y_i. Pues este valor depende de la iteración anterior evaluada en i. Por lo que se debe encontrar una sucesión la cual represente el valor de y_k.

Veamos algunos de los valores de y_k con $S = \langle x_0, x_1, \dots \rangle$

$$\begin{array}{lcl}
a_0(n) = x_0 & \looparrowright & y_0 = x_0 \\
a_1(n) = (x_1 - x_0)n + x_0 & \looparrowright & y_1 = x_1 - x_0 \\
a_2(n) = \dfrac{1}{2}[x_2 - 2x_1 + x_0]n(n-1) + (x_1 - x_0)n + x_0 & \looparrowright & y_2 = x_2 - 2x_1 + x_0 \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Sabemos desde antes que

$$y_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!}\left[x_{k+1} - a_k(k+1)\right]$$

De esto, el valor que se debe generalizar, es lo que se encuentra entre corchetes. Para visualizar mejor el resultado de esto, se omitirá la fracción con el factorial.

Valores desde $k = 0$ hasta $k = 6$

$k = 0 \quad \looparrowright \quad x_0$

$k = 1 \quad \looparrowright \quad -x_0 + x_1$

$k = 2 \quad \looparrowright \quad x_0 - 2x_1 + x_2$

$k = 3 \quad \looparrowright \quad -x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3$

$k = 4 \quad \looparrowright \quad x_0 - 4x_1 + 6x_2 - 4x_3 + x_4$

$k = 5 \quad \looparrowright \quad -x_0 + 5x_1 - 10x_2 + 10x_3 - 5x_4 + x_5$

$k = 6 \quad \looparrowright \quad x_0 - 6x_1 + 15x_2 - 20x_3 + 15x_4 - 6x_5 + x_6$

Ahora, como los valores de S no deben afectar el comportamiento de cada y, y para visualizar aún mejor el comportamiento de estos valores, vamos a organizar los valores en una matriz, la cual tenga por columna el índice de cada x y como fila los valores de k. De esta forma, podremos ver los coeficientes de los valores deseados en cada y_k

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccc} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 5 & -10 & 10 & -5 & 1 & 0 \\
1 & -6 & 15 & -20 & 15 & -6 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Fijándonos en cada columna por separado, podemos ver que hay cierto patrón. Para hallarlo, usamos la fórmula recursiva, ya demostrada.

Llamaremos $\phi_j(n)$ a la sucesión la cual relaciona k con los valores de una columna j.

Tras llegar a un punto en el que las siguientes iteraciones resultan iguales a una anterior, se halló entonces que:

$$\phi_j(i) = \frac{(-1)^{i+j}}{j!} \prod_{c=0}^{j-1} (i - c)$$

Bajo está conjetura, cada y_k se podría obtener directamente con las funciones que expresan cada columna de la matriz. Nótese que el subíndice de cada función ϕ corresponde al mismo subíndice de x, y el valor en el que se evalúa, corresponde a la iteración.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
& y_3 = \frac{1}{3!}(\, x_0\, \phi_0(3) + x_1\, \phi_1(3) + x_2\, \phi_2(3) + x_3\, \phi_3(3)\,) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Def.}(\phi_j(i)) \ \rangle \\
& y_3 = \frac{1}{3!}(-x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3)
\end{aligned}$$

Por ejemplo, si los valores de la matriz son válidos, se podría expresar la iteración $a_3(n)$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
& a_3(n) = \sum_{i=0}^{3} y_i \prod_{c=0}^{i-1} (n - c) \\
\equiv \quad & \\
& a_3(n) = y_0 + y_1\, n + y_2\, n(n-1) + y_3\, n(n-1)(n-2) \\
\equiv \quad & \langle \text{ Conjetura de } y_k \ \rangle \\
& a_3(n) = x_0 + (-x_0 + x_1)\, n + \frac{1}{2}(x_0 - 2x_1 + x_2)\, n(n-1) \\
& \qquad + \frac{1}{3!}(-x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3)\, n(n-1)(n-2)
\end{aligned}$$

Entonces lo que hace falta demostrar es la siguiente igualdad (el caso base, de $a_0(n)$, es inmediato):

$$a_{k+1}(n) = \sum_{i=0}^{k} y_i \prod_{c=0}^{i-1} (n - c)$$

Antes de seguir con dicha demostración, cabe mencionar que se facilita la lectura
de ambas expresiones, en términos de binomios:

Expresiones con binomios

(I) Recursiva

$$\left\{ \begin{aligned} a_0(n) &= x_0 \\ a_{k+1}(n) &= \binom{n}{k+1} \left(x_{k+1} - a_k(k+1)\right) + a_k(k+1) \end{aligned} \right\}$$

(II) Conjetura

$$\begin{aligned} a_k(n) &= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \left(x_0 \binom{i}{0} (-1)^i + \cdots x_k \binom{i}{k} (-1)^{i+k} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-1)^{i+j} x_j \end{aligned}$$

La expresión obtenida para la conjetura viene de que el valor de las funciones ϕ solo son diferentes a 0 desde que son evaluadas en un valor superior a su subíndice, y este coincide con el binomio entre ambos valores. A su vez, desde la presentación de la matriz, se puede ver la relación directa entre los coeficientes y el triángulo de pascal alternado.

Procediendo con la demostración, llamaremos $a^{(r)}$ a la función bajo la recursión, y $a^{(c)}$ a la función bajo la conjetura y siendo este un paso inductivo, suponiendo que la conjetura se cumple para $a_k(n)$:

$$a_{k+1}^{(c)}(n) = a_{k+1}^{(r)}(n)$$

$\equiv$ $\langle$ Igualdad con binomios $\rangle$

$$\sum_{i=0}^{k+1} \binom{n}{k+1} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-1)^{i+j} x_j = \binom{n}{k+1} (x_{k+1} - a_k(k+1)) + a_k(n)$$

$\equiv$ $\langle$ (izq.) La suma hasta k es $a_k(n)$, Hipótesis de inducción $\rangle$

$$\binom{n}{k+1} \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} (-1)^{k+1+j} x_j = \binom{n}{k+1} \left(x_{k+1} - \sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-1)^{i+j} x_j \right)$$

$\equiv$

$$(-1)^{k+1} \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} (-1)^{j} x_j = x_{k+1} - \sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-1)^{i+j} x_j$$

$\equiv$ $\langle$ (izq.) El último término de la suma, es x_{k+1} $\rangle$

$$(-1)^{k+1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} (-1)^{j} x_j = - \sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-1)^{i+j} x_j$$

$\equiv$

$$(-1)^{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} (-1)^{j} x_j = \sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-1)^{i+j} x_j$$

Dado que todo x_i es un valor arbitrario, y su coeficiente no depende en lo absoluto del valor que tome este, el problema se reduce a igualar los coeficientes de un x_m donde $0 \leq m \leq k$. Para la suma de sumas en $a_k^{(c)}$, se puede ver que

(I) x_m empieza a acumular coeficientes desde $i = m$

(II) Los demás elementos de la segunda suma no afectan el resultado para x_m

Por estos resultados, la igualdad de coeficientes queda de la siguiente manera:

$$(-1)^{k+m}\binom{k+1}{m} = \sum_{i=m}^{k}\binom{k+1}{i}\binom{i}{m}(-1)^{i+m}$$

$$\equiv \quad \left\langle \ \tbinom{a}{b}\tbinom{b}{c} = \tbinom{a}{c}\tbinom{a-c}{b-c} \ \right\rangle$$

$$(-1)^{k+m}\binom{k+1}{m} = \sum_{i=m}^{k}\binom{k+1}{m}\binom{k+1-m}{i-m}(-1)^{i+m}$$

$$\equiv$$

$$(-1)^{k+m} = \sum_{i=m}^{k}\binom{k+1-m}{i-m}(-1)^{i+m}$$

$$\equiv \quad \left\langle \ \text{Cambio de límites en la suma, } (-1)^{a+2b} = (-1)^a \ \right\rangle$$

$$(-1)^{k+m} = \sum_{i=0}^{k-m}\binom{k+1-m}{i}(-1)^{i}$$

$$\equiv \quad \langle \ \text{Añadiendo y restando la expresión de la suma en } i = k+1 \ \rangle$$

$$(-1)^{k+m} = -\binom{k+1-m}{k+1-m}(-1)^{k+1+m} + \sum_{i=0}^{k+1-m}\binom{k+1-m}{i}(-1)^{i}$$

$$\equiv \quad \langle \ \text{Teorema del binomio: } (1-1)^{k+1-m},\ (-1)^a = (-1)^{a-2} \ \rangle$$

$$(-1)^{k+m} = (-1)^{k+m} + (1-1)^{k+1-m}$$

$$\equiv$$

$$(-1)^{k+m} = (-1)^{k+m}$$

$$\equiv$$

$$true$$

Esto nos demuestra que para cualquier sucesión arbitraria, el término general está dado por la suma presentada como conjetura.
Veamos, el mismo ejemplo presentado anteriormente, la suma de cuadrados.

$$S = \langle 0, 1, 5, 14, 30, 55, \dots \rangle$$

Tomando hasta a_4, deberíamos obtener un polinomio de grado 4, por lo que si el polinomio resultante es de grado menor, podemos dar pausa al algoritmo.

$$a_4(n) = \sum_{i=0}^{4} \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (-1)^{i+j} x_j$$

$\equiv$ $\langle$ Los valores de x corresponden a S $\rangle$

$$\begin{aligned} a_4(n) &= 0 + n(-0+1) + \frac{n(n-1)}{2}(0 - 2(1) + 5) \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{6}(-0 + 3(1) - 3(5) + 14) \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{24}(0 - 4(1) + 6(5) - 4(14) + 30) \end{aligned}$$

$\equiv$

$$n + \frac{3n(n-1)}{2} + \frac{2n(n-1)(n-2)}{3} + 0$$

$\equiv$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$