Demostraciones de PRYE

David Gómez, Laura Rincón

15 de Noviembre de 2024

Probabilidad de una unión finita

La probabilidad de una unión finita está dada por

$$P\left(A_1 \cup A_2\right) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P(A_{n+1}) + P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_{n+1} \cap A_i)\right)$$

Probabilidad de una unión finita

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{1\leq i\leq n} P(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^n P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Sobre eventos independientes

Dos eventos, A y B, de un espacio muestral, son llamados independientes cuando $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Si A y B son independientes, entonces A^c y B son independientes; $A^c y B^c$ son independientes.

Sobre eventos independientes

Dos eventos, A y B, de un espacio muestral, son llamados independientes cuando $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
Si A y B son independientes, entonces A^c y B son independientes; $A^c y B^c$ son independientes.

Sobre eventos independientes

Dos eventos, A y B, de un espacio muestral, son llamados independientes cuando $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
Si A y B son independientes, entonces A^c y B son independientes; $A^c y B^c$ son independientes.
Usando la igualdad $P(B) = P(B)\,P(A) + P(B \cap A^c)$

$$P(B \cap A^c)$$
$$=$$
$$P(B) - P(B)P(A)$$
$$=$$
$$P(B)(1 - P(A))$$
$$=$$
$$P(B)\,P(A^c)$$

Sobre eventos independientes

Dos eventos, A y B, de un espacio muestral, son llamados independientes cuando $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
Si A y B son independientes, entonces A^c y B son independientes; $A^c y B^c$ son independientes.

$$P(A^c \cap B^c)$$
$$=$$
$$1 - P(A \cup B)$$
$$=$$
$$1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$$
$$=$$
$$(1 - P(A))(1 - P(B))$$
$$=$$
$$P(A^c)\,P(B^c)$$

Valor Esperado

1. Si $P(X \geq 0) = 1$ y E$[X]$ existe entonces E$[X] \geq 0$
2. E$[\alpha] = \alpha$ para α constante
3. Si existe $M \geq 0$ tal que P$(|X| \leq M) = 1$ entonces E$[X]$ existe.
4. Si α y β son constantes, y si g y h son funciones tales que $g(X)$ y $h(X)$ son variables aleatorias cuyos valores esperados existen, entonces E$[\alpha g(X) + \beta h(X)] = \alpha$E$[g(X)] + \beta$E$[h(X)]$
5. Si g y h son funciones tales que $g(X)$ y $h(X)$ son variables aleatorias cuyos valores esperados existen y $g(x) \leq h(x)$ para todo x, entonces E$[g(X)] \leq$ E$[h(X)]$
6. Sean Y una variable aleatoria independiente de X y g, h funciones tales que $g(X)$ y $g(Y)$ sean variables aleatorias cuyos valores esperados existen. Entonces, $textE[g(X)h(Y)] = \mathrm{E}[g(X)]\mathrm{E}[h(Y)]$.

Varianza

Sea X una variable aleatoria cuyo valor esperado existe y α, $\beta \in \mathbb{R}$ constantes

1. $\text{Var}[X] \geq 0$
2. $\text{Var}[\alpha] = 0$
3. $\text{Var}[\alpha X] = \alpha^2 \text{Var}[\text{X}]$
4. $\text{Var}[X + \beta] = \text{Var}[X]$
5. $\text{Var}[X] = 0$ si y solo si $P(X = E(X)) = 1$

Binomial

$$X \sim B(n, p)$$

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad (0 \leq x \leq n)$$

1. Para todo $x \in \mathbb{Z}$ con $0 \leq x \leq n$, $P(X = x) \geq 0$.
2. $\sum_{x=0}^{n} P(X = x) = 1$.
3. $\mathrm{E}[X] = np$.
4. $\mathrm{Var}[X] = np(1-p)$.

Binomial

$$X \sim B(n, p)$$

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad (0 \leq x \leq n)$$

1. Para todo $x \in \mathbb{Z}$ con $0 \leq x \leq n$, $P(X = x) \geq 0$.
2. $\sum_{x=0}^{n} P(X = x) = 1$.
3. $\mathrm{E}[X] = np$.
4. $\mathrm{Var}[X] = np(1-p)$.

Binomial

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

☕

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad (0 \leq x \leq n)$$

1. Para todo $x \in \mathbb{Z}$ con $0 \leq x \leq n$, $P(X = x) \geq 0$.
2. $\sum_{x=0}^{n} P(X = x) = 1$.
3. $\mathrm{E}[X] = np$.
4. $\mathrm{Var}[X] = np(1-p)$.

Geométrica

$$X \sim \text{Geom}(p)$$

$$f(x) = P(X = x) = p(1-p)^{x-1} \qquad (x \in \mathbb{Z}^+)$$

1. Para todo $x \in \mathbb{Z}^+$, $P(X = x) \geq 0$.
2. $\sum_{x \in \mathbb{Z}^+} P(X = x) = 1$.
3. $\text{E}[X] = \frac{1}{p}$.
4. $\text{Var}[X] = \frac{1-p}{p^2}$.

Geométrica

$$X \sim \text{Geom}(p)$$

$$f(x) = P(X = x) = p(1-p)^{x-1} \qquad (x \in \mathbb{Z}^+)$$

1. Para todo $x \in \mathbb{Z}^+$, $P(X = x) \geq 0$.
2. $\sum_{x \in \mathbb{Z}^+} P(X = x) = 1$.
3. $\text{E}[X] = \frac{1}{p}$.
4. $\text{Var}[X] = \frac{1-p}{p^2}$.

Geométrica

$$\sum_{k=0}^{n} p^k = \frac{1-p^{n+1}}{1-p}$$

$$f(x) = P(X = x) = p(1-p)^{x-1} \qquad (x \in \mathbb{Z}^+)$$

1. Para todo $x \in \mathbb{Z}^+$, $P(X = x) \geq 0$.
2. $\sum_{x \in \mathbb{Z}^+} P(X = x) = 1$.
3. $\mathrm{E}[X] = \frac{1}{p}$.
4. $\mathrm{Var}[X] = \frac{1-p}{p^2}$.

Hipergeométrica

$$X \sim Hg(N, K, n)$$

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$(\text{máx}\{0, n + K - N\} \leq x \leq \text{mín}\{K, n\})$$

1. para todo $x \in \mathbb{Z}$ con $0 \leq x \leq n$, $P(X = x) \geq 0$.
2. $\sum_{x \in \mathbb{Z}} P(X = x) = 1$.
3. $\mathrm{E}[X] = \frac{nK}{N}$.
4. $\mathrm{Var}[X] = \frac{n\,K(N-K)(N-n)}{N^2(N-1)}$.

Hipergeométrica

$$X \sim Hg(N, K, n)$$

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$(\max\{0, n + K - N\} \leq x \leq \min\{K, n\})$$

1. para todo $x \in \mathbb{Z}$ con $0 \leq x \leq n$, $P(X = x) \geq 0$.
2. $\sum_{x \in \mathbb{Z}} P(X = x) = 1$.
3. $\mathrm{E}[X] = \frac{nK}{N}$.
4. $\mathrm{Var}[X] = \frac{n\,K(N-K)(N-n)}{N^2(N-1)}$.

Hipergeométrica

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{r=0}^{k} \binom{m}{r}\binom{n}{k-r}$$

☕

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$(\max\{0, n+K-N\} \leq x \leq \min\{K, n\})$$

1. para todo $x \in \mathbb{Z}$ con $0 \leq x \leq n$, $P(X = x) \geq 0$.
2. $\sum_{x \in \mathbb{Z}} P(X = x) = 1$.
3. $\mathrm{E}[X] = \frac{nK}{N}$.
4. $\mathrm{Var}[X] = \frac{n\,K(N-K)(N-n)}{N^2(N-1)}$.

Poisson

$$X \sim \text{Pois}(\lambda)$$

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad (x \in \mathbb{N})$$

1. Para todo $x \in \mathbb{N}$, $P(X = x) \geq 0$.
2. $\sum_{x \in \mathbb{N}} P(X = x) = 1$.
3. $\text{E}[X] = \lambda$.
4. $\text{Var}[X] = \lambda$.

Poisson

$$X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$$

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad (x \in \mathbb{N})$$

1. Para todo $x \in \mathbb{N}$, $P(X = x) \geq 0$.
2. $\sum_{x \in \mathbb{N}} P(X = x) = 1$.
3. $\mathrm{E}[X] = \lambda$.
4. $\mathrm{Var}[X] = \lambda$.

Poisson

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad (x \in \mathbb{N})$$

1. Para todo $x \in \mathbb{N}$, $P(X = x) \geq 0$.
2. $\sum_{x \in \mathbb{N}} P(X = x) = 1$.
3. $\mathrm{E}[X] = \lambda$.
4. $\mathrm{Var}[X] = \lambda$.

Normal

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/\left(2\sigma^2\right)} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

1. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
2. $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 1$.
3. $\mathrm{E}[X] = \mu$.
4. $\mathrm{Var}[X] = \sigma^2$.

Normal

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/\left(2\sigma^2\right)} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

1. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
2. $\int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{d}x = 1$.
3. $\mathrm{E}[X] = \mu$.
4. $\mathrm{Var}[X] = \sigma^2$.

Normal

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

☕

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/\left(2\sigma^2\right)} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

1. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
2. $\int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{d}x = 1$.
3. $\mathrm{E}[X] = \mu$.
4. $\mathrm{Var}[X] = \sigma^2$.

Gamma

$$X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$$

$$f(x) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \qquad (x \in \mathbb{R}^{+})$$

1. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
2. $\int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{d}x = 1$.
3. $\text{E}[X] = \frac{\alpha}{\beta}$
4. $\text{Var}[X] = \frac{\alpha}{\beta^2}$

Gamma

$$X \sim \mathrm{Gamma}(\alpha, \beta)$$

$$f(x) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \qquad (x \in \mathbb{R}^{+})$$

1. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
2. $\int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{d}x = 1$.
3. $\mathrm{E}[X] = \frac{\alpha}{\beta}$
4. $\mathrm{Var}[X] = \frac{\alpha}{\beta^2}$

Gamma

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$

☕

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \qquad (x \in \mathbb{R}^+)$$

1. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
2. $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 1$.
3. $\mathrm{E}[X] = \frac{\alpha}{\beta}$
4. $\mathrm{Var}[X] = \frac{\alpha}{\beta^2}$

Chi-Cuadrado

$$X \sim \chi^2(v)$$

$$f(x) = \frac{1}{2^{v/2}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} x^{(v/2)-1} e^{-x/2} \qquad (x \geq 0)$$

1. para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \geq 0$
3. $\mathrm{E}[X] = v \qquad (v \geq 0)$
4. $\mathrm{Var}[X] = 2v \qquad (v \geq 0)$

Chi-Cuadrado

$$X \sim \chi^2(v)$$

$$f(x) = \frac{1}{2^{v/2}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} x^{(v/2)-1} e^{-x/2} \qquad (x \geq 0)$$

1. para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \geq 0$
3. $\mathrm{E}[X] = v \qquad (v \geq 0)$
4. $\mathrm{Var}[X] = 2v \qquad (v \geq 0)$

Chi-Cuadrado

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{2^{v/2}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} x^{(v/2)-1} e^{-x/2} \qquad (x \geq 0)$$

1. para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \geq 0$
3. $\mathrm{E}[X] = v \qquad (v \geq 0)$
4. $\mathrm{Var}[X] = 2v \qquad (v \geq 0)$

Distribución t

$$T \sim \mathbf{t}(v)$$

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{v\pi}\,\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{v}\right)^{-(v+1)/2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

1. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
2. $\int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{d}x = 1$.
3. $\mathrm{E}[F] = 0 \qquad (v > 1)$
4. $\mathrm{Var}[F] = \frac{v}{v-2} \qquad (v > 2)$

Distribución t

$$T \sim \mathbf{t}(v)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{v}\,B\left(\frac{1}{2},\frac{v}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{v}\right)^{-(v+1)/2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

1. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
2. $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 1$.
3. $\mathrm{E}[F] = 0 \qquad (v > 1)$
4. $\mathrm{Var}[F] = \frac{v}{v-2} \qquad (v > 2)$

Distribución t

$$T \sim \mathbf{t}(v)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{v}\,B\left(\frac{1}{2},\frac{v}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{v}\right)^{-(v+1)/2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

1. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
2. $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 1$.
3. $\mathrm{E}[F] = 0 \qquad (v > 1)$
4. $\mathrm{Var}[F] = \frac{v}{v-2} \qquad (v > 2)$

Distribución t

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{v}\,B\left(\frac{1}{2},\frac{v}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{v}\right)^{-(v+1)/2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

1. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
2. $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 1$.
3. $\mathrm{E}[F] = 0 \qquad (v > 1)$
4. $\mathrm{Var}[F] = \frac{v}{v-2} \qquad (v > 2)$

f

$$F \sim \mathbf{f}(u, v)$$

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{u+v}{2}\right)\left(\frac{u}{v}\right)^{u/2}}{\Gamma\left(\frac{u}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \frac{x^{(u/2)-1}}{\left(1+\frac{u}{v}x\right)^{(u+v)/2}} \qquad (x \in \mathbb{R}^+)$$

1. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
2. $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 1$.
3. $E[F] = \frac{v}{v-2} \qquad (v > 2)$
4. $\mathrm{Var}[F] = \frac{2v^2(u+v-2)}{u(v-2)^2(v-4)} \qquad (v > 4)$

f

$$F \sim \mathbf{f}(u, v)$$

$$f(x) = \frac{\left(\frac{u}{v}\right)^{u/2}}{B\left(\frac{u}{2}, \frac{v}{2}\right)} \frac{x^{(u/2)-1}}{\left(1 + \frac{u}{v}x\right)^{(u+v)/2}} \qquad (x \in \mathbb{R}^+)$$

1. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
2. $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 1$.
3. $\mathrm{E}[F] = \frac{v}{v-2} \qquad (v > 2)$
4. $\mathrm{Var}[F] = \frac{2v^2(u+v-2)}{u(v-2)^2(v-4)} \qquad (v > 4)$

f

$$F \sim \mathbf{f}(u, v)$$

$$f(x) = \frac{\left(\frac{u}{v}\right)^{u/2}}{B\left(\frac{u}{2}, \frac{v}{2}\right)} \frac{x^{(u/2)-1}}{\left(1 + \frac{u}{v}x\right)^{(u+v)/2}} \qquad (x \in \mathbb{R}^+)$$

1. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
2. $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 1$.
3. $\mathrm{E}[F] = \frac{v}{v-2} \qquad (v > 2)$
4. $\mathrm{Var}[F] = \frac{2v^2(u+v-2)}{u(v-2)^2(v-4)} \qquad (v > 4)$

f

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

$$f(x) = \frac{\left(\frac{u}{v}\right)^{u/2}}{B\left(\frac{u}{2}, \frac{v}{2}\right)} \frac{x^{(u/2)-1}}{\left(1 + \frac{u}{v}x\right)^{(u+v)/2}} \qquad (x \in \mathbb{R}^+)$$

1. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
2. $\int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{d}x = 1$.
3. $\mathrm{E}[F] = \frac{v}{v-2} \qquad (v > 2)$
4. $\mathrm{Var}[F] = \frac{2v^2(u+v-2)}{u(v-2)^2(v-4)} \qquad (v > 4)$

Hipergeométrica a Binomial

Sea $X \sim Hg(N, K, n)$. Para n fijo, si N, K cumplen que

$$\frac{x-1}{K} < \varepsilon_1$$
$$\frac{n-x-1}{N-K} < \varepsilon_2$$
$$\frac{n-1}{N-n+1} < \varepsilon_3$$

Entonces,

$$\left| \frac{Hg(N, K, n)(x)}{B\left(n, \frac{K}{N}\right)(x)} - 1 \right| < (\varepsilon_1 + 1)^x (\varepsilon_2 + 1)^{n-x} (\varepsilon_3 + 1)^n - 1$$

Teorema Central del Límite

Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ una colección de variables aleatorias independientes, igualmente distribuidas, con media y varianza iguales (μ y σ respectivamente). Entonces, cuando $n \longrightarrow \infty$,

$$\sqrt{n}\,\overline{X}_n \longrightarrow N(0,1)$$

Teorema Central del Límite

Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ una colección de variables aleatorias independientes, igualmente distribuidas, con media y varianza iguales (μ y σ respectivamente). Entonces, cuando $n \longrightarrow \infty$,

$$\sqrt{n}\,\overline{X}_n \longrightarrow N(0,1)$$

$$\begin{array}{rl} |x_n| & \leq M \\ |y_n| & \leq M \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left|\prod_{k=1}^{n} x_k - \prod_{j=1}^{n} y_j\right| \leq M^{n-1} \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$$