David Gómez, Laura Rincón

DEMOSTRACIONES DE PRYE

Matemáticas

2024

Índice

1. Introducción

Por ahora, cualquier cosa

2. Probabilidad

Uno de los problemas no resueltos de esta primera parte del curso fue hallar la probabilidad de una unión finita de eventos.

Esta probabilidad, sin embargo, se puede hallar mediante una forma recursiva con la siguiente expresión

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P(A_{n+1}) + P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) - P\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A_{n+1} \cap A_i)\right)$$

Lo que se quiere es resolver esta función de recursión. Para esto, se evaluaran unos cuantos de sus resultados.

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$

$$=$$

$$P(A_3) + P(A_1 \cup A_2) - P((A_3 \cap A_1) \cup (A_3 \cap A_2))$$

$$=$$

$$P(A_3) + P(A_2) + P(A_1) - P(A_1 \cap A_2)$$

$$-[P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)]$$

$$=$$

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3)$$

$$-P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$$=$$

$$\sum_{i=1}^{3} P(A_i) - \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=i+1}^{3} P(A_i \cap A_j) + P\left(\bigcap_{i=1}^{3} A_i\right)$$

Análogamente para cuatro eventos, usando lo obtenido

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$$
$$=$$
$$P(A_4) + P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) - P\left(\bigcup_{i=1}^{3}(A_4 \cap A_i)\right)$$
$$=$$
$$P(A_4) + \sum_{i=1}^{3} P(A_i) - \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=i+1}^{3} P(A_i \cap A_j) + P\left(\bigcap_{i=1}^{3} A_i\right)$$
$$-\left[\sum_{i=1}^{3} P(A_4 \cap A_i) - \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=i+1}^{3} P(A_4 \cap A_i \cap A_j) + P\left(\bigcap_{i=1}^{4} A_i\right)\right]$$
$$=$$
$$\sum_{i=1}^{4} P(A_i) - \sum_{i=1}^{3}\sum_{i=1}^{4} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=i+1}^{3}\sum_{k=j+1}^{4} P(A_1 \cap A_j \cap A_k) - P\left(\bigcap_{i=1}^{4} A_i\right)$$

Por último, recordar que

$$\sum_{i=a}^{b}\sum_{j=i+1}^{b+1} f(i,j) = \sum_{a \leq i < j \leq b} f(i,j)$$

Teorema 1: Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos de un espacio muestral. Entonces,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{1 \leq i \leq n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^n P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

De otra forma, la probabilidad de una unión finita es la suma de la probabilidad de cada evento menos las posibles intersecciones dos a dos, sumando las probabilidades tres a tres. . .

Demostración: Siguiendo por inducción. Los caso base $n = 1$ y $n = 2$ caen en la definición recursiva y para $n = 3$ fue el desarrollo anterior. Para el paso inductivo, supóngase que la propiedad se mantiene hasta un valor n.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right)$$

$$=$$

$$P(A_{n+1}) + P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) - P\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A_{n+1}\cap A_i)\right)$$

$$=$$

$$P(A_{n+1}) + P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$

$$-\left[\sum_{1\le i\le n}(A_{n+1}\cap A_i) - \sum_{1\le i<j\le n}(A_{n+1}\cap A_i\cap A_j) + \cdots + (-1)^n P\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right)\right]$$

$$=$$

$$\sum_{1\le i\le n+1} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n+1} P(A_i\cap A_j)$$

$$+$$

$$\sum_{1\le i<j<k\le n+1} P(A_i\cap A_j\cap A_k) - \cdots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right)$$

$\square$

Definición 1: Sean A y B eventos de un espacio muestral. Se dice que A y B son independientes, cuando $P(A\cap B) = P(A)\,P(B)$.

Teorema 2: Sean A y B eventos independientes. Entonces

(i) A^c y B^c son independientes.

(ii) A^c y B son independientes.

Demostración: Supóngase A y B eventos independientes de un espacio muestral.

(i) Partiendo de que $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$.

$$
\begin{aligned}
P(A^c \cap B^c) &= 1 - P(A \cup B) \\
&= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \\
&= 1 - P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\
&= (1 - P(A))(1 - P(B)) \\
&= P(A^c)\, P(B^c)
\end{aligned}
$$

Así, los eventos A^c y B^c también son independientes.

(ii) Partiendo de que $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P((B \cap A) \cup (B \cap A^c)) \\
&= P(B \cap A) + P(B \cap A^c) - P(\varnothing) \\
&= P(B)\, P(A) + P(B \cap A^c)
\end{aligned}
$$

Tomando la primera y última igualdad

$$
\begin{aligned}
P(B \cap A^c) &= P(B) - P(B)P(A) \\
&= P(B)(1 - P(A)) \\
&= P(B)\, P(A^c)
\end{aligned}
$$

Así, los eventos A^c y B también son independientes.

$\square$

3. Propiedades de la Varianza y el Valor Esperado

Demostración: Por definición $Var(X) = E(X-\mu)^2$ donde $\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ entonces $Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$.

Dado que $(x-\mu)^2 \geq 0$ y $f(x) \geq 0$ para toda función de densidad, entonces la integral siempre es mayor que cero $\square$

4. Distribuciones

En esta sección se repasarán las definiciones de algunas distribuciones de la probabilidad.

4.1. Distribuciones Discretas

Las distribuciones discretas son aquellas cuyas funciones de masa tienen dominio en los enteros. Este hecho se asumirá a lo largo de las definiciones y demostraciones a cerca de estas distribuciones. De no ser especificado el valor de una función de masa en algún subconjunto de $\mathbb{Z}$, se asumirá un como nulo.

4.1.1. Binomial

Supóngase que se realiza un experimento el cual tiene como posible resultado a o b exclusivamente, y además, el resultado de realizar nuevamente el experimento es independiente al resultado anterior. Dado que a y b son los únicos resultados, para un único experimento, se debe tener que $P(a) = 1 - P(b)$. Sea $p = P(a)$. Supóngase que este experimento es realizado n veces. Se define una variable aleatoria X correspondiente a la cantidad de ocurrencias de a. Entonces

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Definición 2: Sea X una variable aleatoria discreta. X sigue una distribución binomial con parámetros n y p ($n \in \mathbb{Z}^+, p \in [0,1]$), denotada por $B(n,p)$, cuando su función de masa es

$$f(x) = P(X = x) = B(n,p)(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad (0 \leq x \leq n)$$

Teorema 3: Sea $X \sim B(n,p)$. Entonces

(i) Para todo $x \in \mathbb{Z}$ con $0 \leq x \leq n$, $P(X = x) \geq 0$.

(ii) $\displaystyle\sum_{x \in \mathbb{Z}} P(X = x) = 1$.

(iii) $\mathrm{E}[X] = np$.

(iv) $\mathrm{Var}[X] = np(1-p)$.

Demostración: Desarrollando ambos valores, y recordando el teorema del binomio. . .

(i) Sea $x \in \mathbb{Z}$ con $0 \leq x \leq n$. Recordando que

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Dado todos los términos de la expresión son no negativos, se concluye que $P(X = x) \geq 0$

(ii)

$$\sum_{x=0}^{n} P(X = x)$$
$$=$$
$$\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$
$$=$$
$$(p + 1 - p)^n$$
$$=$$
$$1$$

(iii)

$$\mathrm{E}[X]$$
$$=$$
$$\sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$
$$=$$
$$np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(x-1)!} p^x (1-p)^{n-x}$$
$$=$$
$$np \sum_{x=0}^{n-1} \binom{n-1}{x} p^x (1-p)^{n-1-x}$$
$$=$$
$$np\,(p + 1 - p)^{n-1}$$
$$=$$
$$np$$

(iv)

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Var}[X] \\
=\ &\mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}^2[X] \\
=\ &\sum_{x=0}^{n} x^2 \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} - (np)^2 \\
=\ &np\left[\sum_{x=1}^{n} x \binom{n-1}{x-1} p^{x-1} (1-p)^{n-x} - np\right] \\
=\ &np\left[\sum_{x=0}^{n-1} (x+1) \binom{n-1}{x} p^{x} (1-p)^{n-1-x} - np\right] \\
=\ &np\left[\sum_{x=0}^{n-1} x \binom{n-1}{x} p^{x} (1-p)^{n-1-x} + \sum_{x=0}^{n-1} \binom{n-1}{x} p^{x} (1-p)^{n-1-x} - np\right] \\
=\ &np\left[p(n-1) \sum_{x=1}^{n-1} \binom{n-2}{x-1} p^{x-1} (1-p)^{n-1-x} + 1 - np\right] \\
=\ &np\left[p(n-1) \sum_{x=0}^{n-2} \binom{n-2}{x} p^{x} (1-p)^{n-2-x} + 1 - np\right] \\
=\ &np[p(n-1) + 1 - np] \\
=\ &np(1-p)
\end{aligned}
$$

Este argumento es válido siempre que $n \geq 2$. Si $n < 2$, entonces $n = 1$ y

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Var}[X] \\
=\ &\mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}^2[X] \\
=\ &\sum_{x=0}^{1} x^2 \binom{1}{x} p^x (1-p)^{1-x} - p^2 \\
=\ &p - p^2 \\
=\ &p\,(1-p)
\end{aligned}
$$

Así, el resultado se mantiene para todo $n \in \mathbb{Z}^+$

□

4.1.2. Hipergeométrica

Supóngase que se tienen dos tipos de objetos, a y b en un total de N objetos exclusivamente de estos dos tipos. Sea K el número de objetos de tipo a en el total de los N objetos, es decir hay $N - K$ objetos de tipo b. Supóngase que se toman ahora n objetos del total (N). Se define una variable aleatoria X correspondiente al número de objetos de tipo a en los n objetos tomados. Entonces

$$P(X = x) = \frac{\dbinom{K}{x}\dbinom{N-K}{n-x}}{\dbinom{N}{n}}$$

Definición 3: Sea X una variable aleatoria discreta. X sigue una distribución hipergeométrica con parámetros N, K, n ($N, K, n \in \mathbb{Z}^+, K \leq N, n \leq N$), denotada por $Hg(N, K, n)$, cuando su función de masa es

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\dbinom{K}{x}\dbinom{N-K}{n-x}}{\dbinom{N}{n}} \qquad (\text{máx}\{0, n + K - N\} \leq x \leq \text{mín}\{K, n\})$$

La razón de esta condición para x está en que tenga sentido para lo que se está representando. Por un lado, no tiene sentido pensar en la probabilidad de tomar más objetos de tipo a de los que hay en el total de la muestra o tomar más objetos de tipo a del total de estos. De la misma forma, no tiene sentido tomar una cantidad negativa de objetos tipo a, o tomar una cantidad de objetos tipo a de forma que haya una cantidad negativa de objetos tipo b para completar los n objetos o más objetos de tipo b de los que hay en total. De forma más concreta, se pueden ver las condiciones de x dada la expresión de la función de masa presentada.

$$\begin{aligned}
&0 \leq x \leq K \quad \wedge \quad 0 \leq n - x \leq N - K \\
\Leftrightarrow& \\
&0 \leq x \leq K \quad \wedge \quad n + K - N \leq x \leq n \\
\Leftrightarrow& \\
&\text{máx}\{0, n + K - N\} \leq x \leq \text{mín}\{K, n\}
\end{aligned}$$

Sin embargo, tomando la convención de que $\dbinom{n}{k} = 0$ cuando $k > n$, se puede tomar a x entre 0 y n.

Para demostrar la validez de esta función de masa, hace falta un resultado sobre la combinatoria.

Lema (Identidad de Vandermonde)**:** Sean $m, n, k \in \mathbb{Z}$ no negativos. Entonces

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{r=0}^{k} \binom{m}{r}\binom{n}{k-r}$$

Esta identidad tiene sentido tomando la convención mencionada anteriormente.

Demostración: La demostración se hará por inducción sobre m, tomando k, n como enteros no negativos arbitrarios. Caso base ($m = 0$):

$$\binom{0+n}{k} = \sum_{r=0}^{k} \binom{0}{r}\binom{n}{k-r} = \binom{n}{k}$$

Paso inductivo: sea $k \in \mathbb{Z}$ con $k \geq 1$ y supóngase que la propiedad se mantiene para todo entero no negativo hasta k. (Para $k = 0$ la propiedad es trivial)

$$\binom{m+n}{k+1}$$

$$=$$

$$\binom{m+n}{k} + \binom{m+n}{k-1}$$

$$=$$

$$\sum_{r=0}^{k} \binom{m}{r}\binom{n}{k-r} + \sum_{r=0}^{k-1} \binom{m}{r}\binom{n}{k-1-r}$$

$$=$$

$$\binom{m}{k} + \sum_{r=0}^{k-1} \binom{m}{r}\left(\binom{n}{k-r} + \binom{n}{k-1-r}\right)$$

$$=$$

$$\binom{m}{n} + \sum_{k=0}^{k-1} \binom{m}{r}\binom{n}{k-r}$$

$$=$$

$$\sum_{k=0}^{k} \binom{m}{k}\binom{n}{k-r}$$

□

Teorema 4: Sea $X \sim Hg(N, K, n)$. Entonces,

(i) para todo $x \in \mathbb{Z}$ con $0 \leq x \leq n$, $P(X = x) \geq 0$.

(ii) $\sum_{x \in \mathbb{Z}} P(X = x) = 1.$

(iii) $\mathrm{E}[X] = \dfrac{nK}{N}.$

(iv) $\mathrm{Var}[X] = \dfrac{n\,K(N-K)(N-n)}{N^2(N-1)}.$

Demostración:

(i) Sea $x \in \mathbb{Z}$ con $0 \leq x \leq n$. Recordando que

$$P(X = x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

dado que todos los términos de la expresión son no negativos, se concluye que $P(X = x) \geq 0$

(ii)

$$\sum_{x=0}^{n} P(X = x) = \sum_{x=0}^{n} \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{x=0}^{n} \binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x} = \frac{\binom{N}{n}}{\binom{N}{n}} = 1$$

(iii)

$$\mathrm{E}[X]$$

$$=$$

$$\sum_{x=0}^{n} x \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$=$$

$$\frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{x=0}^{n} x \binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}$$

$$=$$

$$\frac{K}{\binom{N}{n}} \sum_{x=1}^{n} \binom{K-1}{x-1}\binom{N-K}{n-x}$$

$$=$$

$$\frac{K}{\binom{N}{n}} \sum_{x=0}^{n-1} \binom{K-1}{x}\binom{N-K}{n-x-1}$$

$$=$$

$$\frac{K}{\binom{N}{n}} \binom{N-1}{n-1}$$

$$=$$

$$\frac{K\,n}{N}$$

(iv)

$$\mathrm{Var}[X]$$

$$=$$

$$\mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[X] - \mathrm{E}^2[X]$$

$$=$$

$$\frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{x=0}^{n} x^2 \binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x} - \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{x=0}^{n} x \binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x} + \frac{n\,K}{N} - \frac{n^2\,K^2}{N^2}$$

$$=$$

$$\frac{K}{\binom{N}{n}}\left[\sum_{x=0}^{n-1} x\binom{K-1}{x-1}\binom{N-K}{n-x-1} - \sum_{x=0}^{n-1}\binom{K-1}{x-1}\binom{N-K}{n-x-1}\right] + \frac{n\,K}{N} - \frac{n^2\,K^2}{N^2}$$

$$=$$

$$\frac{K(K-1)}{\binom{N}{n}}\sum_{x=0}^{n-2}\binom{K-2}{x}\binom{N-K}{n-x-2} + \frac{n\,K}{N} - \frac{n^2\,K^2}{N^2}$$

$$=$$

$$\frac{K(K-1)}{\binom{N}{n}}\binom{N-2}{n-2} + \frac{n\,K}{N} - \frac{n^2\,K^2}{N^2}$$

$$=$$

$$\frac{K(K-1)n(n-1)}{N(N-1)} + \frac{n\,K}{N} - \frac{n^2\,K^2}{N^2}$$

$$=$$

$$\frac{n\,K(N-K)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

$\square$

4.1.3. Uniforme Discreta

Algunas distribuciones surgen por la función de masa que las define, más que por la similitud con un evento real, esto debido a resultados conocidos sobre los enteros en este caso.

Definición 4: Sea X una variable aleatoria discreta. X sigue una distribución uniforme discreta, de parámetros $n, m \in \mathbb{Z}$ $(n < m)$, denotada por $U_d(n, m)$, cuando su función de masa es

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{m-n+1} \qquad (n \leq x \leq m)$$

Teorema 5: Sea $X \sim U(n, m)$. Entonces,

(i) Para todo $x \in \mathbb{Z}$, $P(X = x) \geq 0$.

(ii) $\sum_{x\in\mathbb{Z}} P(X = x) = 1$.

(iii) $\mathrm{E}[X] = \frac{n+m}{2}$

(iv) $\mathrm{Var}[X] = \frac{(m-n+1)^2-1}{12}$

Demostración:

(i) Se sigue inmediatamente de la definición.

(ii)

$$\sum_{x=n}^{m} \frac{1}{n+m+1} = \frac{n+m-1}{n+m-1} = 1$$

(iii)

$$\mathrm{E}[X]$$

$$=$$

$$\sum_{x=n}^{m} \frac{x}{m-n+1}$$

$$=$$

$$\frac{1}{m-n+1} \sum_{x=1}^{m-n+1} (x+n-1)$$

$$=$$

$$\frac{1}{m-n+1} \left[\frac{(m-n+1)(m-n+2)}{2} + n(m-n+1) - (m-n+1) \right]$$

$$=$$

$$\frac{m-n+2+2n-2}{2}$$

$$=$$

$$\frac{m+n}{2}$$

(iv) Tomando $N = m - n + 1$.

$$\mathrm{Var}[X]$$

$$=$$

$$\mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}^2[X]$$

$$=$$

$$\sum_{x=n}^{m} \frac{x^2}{m-n+1} - \left(\frac{n+m}{2} \right)^2$$

$$=$$

$$\frac{1}{N}\sum_{x=1}^{m-n+1}(x+n-1)^2-\left(\frac{n+m}{2}\right)^2$$

$$=$$

$$\frac{1}{N}\left[\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}+2(n-1)\frac{N(N+1)}{2}+N(n-1)^2\right]-\left(\frac{n+m}{2}\right)^2$$

$$=$$

$$(N+1)\frac{2N+1+6n-6}{6}+(n-1)^2-\left(\frac{n+m}{2}\right)^2$$

$$=$$

$$(N+1)\frac{2N+6n-5}{6}+\left(n-1-\frac{n+m}{2}\right)\left(n-1+\frac{n+m}{2}\right)$$

$$=$$

$$(N+1)\frac{2N+6n-5}{6}+\left(\frac{n-m-2}{2}\right)\left(\frac{3n+m-2}{2}\right)$$

$$=$$

$$(N+1)\frac{2N+6n-5}{6}+\left(\frac{m-n+2}{2}\right)\left(\frac{2-3n-m}{2}\right)$$

$$=$$

$$(N+1)\frac{2(2N+6n-5)+3(2-3n+m)}{12}$$

$$=$$

$$(N+1)\frac{4N-3n-3m-4}{12}$$

$$=$$

$$(N+1)\frac{4m-4n+4-3n-3m-4}{12}$$

$$=$$

$$\frac{N^2-1}{12}$$

$$=$$

$$\frac{(m-n+1)^2-1}{12}$$

$\square$

4.1.4. Poisson

Recordando que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, y que esta es una función creciente cuyo valor es estrictamente positivo, se genera una función la cual cumple la definición de función de masa, obteniendo la siguiente distribución.

Definición 5: Sea X una variable aleatoria discreta. X sigue una distribución de Poisson con parámetro $\lambda \in \mathbb{R}^+$, denotada por $\mathrm{Pois}(\lambda)$, cuando su función de masa es

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad (x \in \mathbb{N})$$

Teorema 6: Sea $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$. Entonces,

(i) Para todo $x \in \mathbb{Z}$, $P(X = x) \geq 0$.

(ii) $\sum_{x \in \mathbb{Z}} P(X = x) = 1$.

(iii) $\mathrm{E}[X] = \lambda$.

(iv) $\mathrm{Var}[X] = \lambda$.

Demostración:

(i) Sea $x \in \mathbb{N}$. Entonces

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

Como los términos involucrados son no negativos, se concluye que $P(X = x) \geq 0$.

(ii)

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$=$$

$$e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$=$$

$$e^{-\lambda} e^{\lambda}$$

$$=$$

$$1$$

(iii)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{(x-1)!}$$

$$=$$

$$\lambda e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$=$$

$$\lambda$$

(iv)

$$\sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} - \lambda^2$$

$$=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{(x-1)!} - \lambda^2$$

$$=$$

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} x\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} - \lambda^2$$

$$=$$

$$\lambda^2 + \lambda - \lambda^2$$

$$=$$

$$\lambda$$

Para finalizar, se mostrará la validez de los procedimientos usados para estos cálculos. Se afirma que la serie $\sum_x x^t \frac{\lambda^x}{x!}$ converge para todo $t \in \mathbb{R}$. Por el criterio de la razón, cuando $x \to \infty$,

$$\left| (x+1)^t \frac{\lambda^{x+1} e^{\lambda}}{(x+1)!} \frac{x!}{x^t \lambda^x} \right| = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^t \frac{\lambda}{x+1} \to 0 < 1$$

La convergencia de la serie permite el reordenamiento de la misma y la separación en sumas. $\square$

4.2. Distribuciones Continuas

4.2.1. Chi-cuadrada

Sea X una variable aleatoria tal que $X \sim \chi^2(v)$, entonces su fdd

$$F(x) = \frac{1}{2^{v/2}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} x^{(v/2)-1} e^{-x/2}$$

Entonces $\mathrm{Var}[X] = 2v$ y $\mathrm{E}[X] = v$

Demostración: Primero se comprueba $\mathrm{E}[X] = v$

$$\mathrm{E}[X]$$

$$=$$

$$\int_0^\infty x f(x) dx$$

$$=$$

$$\frac{1}{2^{v/2}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \int_0^\infty x^{(v/2)} e^{-x/2} dx$$

$$=$$

$$\frac{1}{2^{v/2}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} 2 \int_0^\infty 2^{v/2} u^{v/2} e^{-u} du$$

$$=$$

$$\frac{2}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \int_0^\infty u^{v/2} e^{-u} du$$

$$=$$

$$\frac{2}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{v}{2} + 1\right)$$

$$=$$

$$\frac{2}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left(\frac{v}{2}\right) \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)$$

$$=$$

$$v$$

Ahora, se demuestra que $\mathrm{Var}[x] = 2v$

$$\mathrm{Var}[X]$$

$$=$$

$$\mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}^2[X]$$

$$=$$

$$\frac{1}{2^{v/2}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \int_0^\infty x^2 x^{(v/2)-1} e^{-x/2} dx - v^2$$

$$=$$

$$\frac{1}{2^{v/2}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \int_0^\infty x^{(v/2)+1} e^{-x/2} dx - v^2$$

$$=$$

$$\frac{1}{2^{v/2}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} 2 \int_0^\infty 2^{1+v/2} u^{1+v/2} e^{-u} du - v^2$$

$$=$$

$$\frac{4}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{v}{2} + 2\right) - v^2$$

$$=$$

$$\frac{4}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left(\frac{v}{2} + 1\right)\left(\frac{v}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) - v^2$$

$$=$$

$$4\left(\frac{v^2}{4}\right) + 4\left(\frac{v}{2}\right) - v^2$$

$$=$$

$$v^2 + 2v - v^2$$

$$=$$

$$2v$$

□

4.3. Teoremas de Aproximación

Se puede ver una similitud entre la distribución binomial y la distribución hipergeométrica, pues si en esta última, manteniendo un tamaño de muestra (n) fijo, a medida que aumentan el total de objetos (N y K) bajo ciertas condiciones, los eventos que esta distribución describe tienen a ser independientes. Esto lleva al siguiente teorema de aproximación.

Teorema 7: Sea X una variable aleatoria con distribución hipergeométrica de parámetros N, K, n. Si para un $\varepsilon > 0$, $n > 1$, $x > 0$, se tiene que

$$\frac{x-1}{K} < \varepsilon$$
$$\frac{n-x-1}{N-K} < \varepsilon$$
$$\frac{n-1}{N-n+1} < \varepsilon$$

entonces,

$$\left| P(X=x) - B\left(n, \frac{K}{N}\right)(x) \right| < (\varepsilon + 1)^{2n} - 1$$

Antes de comenzar con la demostración de este teorema, se presenta el siguiente lema, el cual será de utilidad para obtener el resultado presentado.

Lema: Sean $r \in \mathbb{Z}^+$ y $\{S_{k,n}\}_1^r$ una colección de r sucesiones en función de n las cuales convergen a 1. Dado $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $1 \leq k \leq r$

$$n \geq N \Rightarrow |S_{k,n} - 1| < \varepsilon$$

entonces,

$$n \geq N \Rightarrow \left| \prod_{k=1}^{r} S_{k,n} - 1 \right| < (\varepsilon + 1)^r - 1$$

Demostración: La existencia de este N consta de tomar el máximo entre los diferentes N's dados por la convergencia de cada sucesión en la colección. La demostración del acotamiento se hará por inducción.

Caso base ($r = 1$): se tiene que $|S_{1,n} - 1| < \varepsilon$, con lo que se cumple la propiedad para una sucesión.

para $r = 2$

$$|S_{1,n}\, S_{2,n} - 1|$$
$$=$$
$$|(S_{1,n} - 1)(S_{2,n} - 1) + S_{1,n} - 1 + S_{2,n} - 1|$$
$$\leq$$
$$|S_{1,n} - 1|\,|S_{2,n} - 1| + |S_{1,n} - 1| + |S_{2,n} - 1|$$

$$
\begin{aligned}
&< \\
&\varepsilon^2 + 2\varepsilon \\
&= \\
&(\varepsilon+1)^2 - 1
\end{aligned}
$$

Paso inductivo: supóngase que para el producto de r sucesiones, la propiedad se mantiene. Para $r+1$ sucesiones

$$
\begin{aligned}
&\left|\prod_{k=1}^{r+1} S_{k,n} - 1\right| \\
&= \\
&\left|S_{r+1,n}\prod_{k=1}^{r} S_{k,n} - 1\right| \\
&= \\
&\left|(S_{r+1,n}-1)\left(\prod_{k=1}^{r} S_{k,n} - 1\right) + (S_{r+1,n}-1) + \left(\prod_{k=1}^{r} S_{k,n} - 1\right)\right| \\
&\leq \\
&\left|(S_{r+1,n}-1)\left(\prod_{k=1}^{r} S_{k,n} - 1\right)\right| + |(S_{r+1,n}-1)| + \left|\left(\prod_{k=1}^{r} S_{k,n} - 1\right)\right| \\
&< \\
&\varepsilon\left|\left(\prod_{k=1}^{r} S_{k,n} - 1\right)\right| + \varepsilon + \left|\left(\prod_{k=1}^{r} S_{k,n} - 1\right)\right| \\
&= \\
&\left|\left(\prod_{k=1}^{r} S_{k,n} - 1\right)\right|(\varepsilon+1) + \varepsilon \\
&< \\
&[(\varepsilon+1)^r - 1](\varepsilon+1) + \varepsilon \\
&= \\
&(\varepsilon+1)^{r+1} - 1
\end{aligned}
$$

Con esto ya estaría demostrado. Sin embargo, para entender de dónde surgió originalmente el lema se presenta esta demostración alternativa: Se define f de la siguiente manera: $f(1) = \varepsilon$ y $f(r+1) = f(r)(\varepsilon+1) + \varepsilon$. Nótese que, por el caso base y lo desarrollado, f cumple que $\left|\prod_{k=1}^{r} S_{k,r} - 1\right| < f(r)$.

Para resolver la ecuación de recurrencia, se define g como $g(r) = \dfrac{f(r)}{(\varepsilon+1)^r}$, es decir, $g(1) = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon+1}$ y $g(r+1) = \dfrac{f(r+1)}{(\varepsilon+1)^{r+1}}$. Desarrollando la última expresión, se obtiene

$$g(r+1) = \frac{f(r)}{(\varepsilon+1)^r} + \frac{\varepsilon}{(\varepsilon+1)^{r+1}} = g(r) + \frac{\varepsilon}{(\varepsilon+1)^{r+1}}$$

con lo que, por definición,

$$g(r) = \sum_{k=1}^{r} \frac{\varepsilon}{(\varepsilon+1)^k} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{(\varepsilon+1)^r} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1} \left(\frac{1 - \dfrac{1}{(\varepsilon+1)^k}}{1 - \dfrac{1}{\varepsilon+1}} \right) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1} \left(\frac{(\varepsilon+1)^r - 1}{(\varepsilon+1)^r} \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon} \right) = \frac{(\varepsilon+1)^r - 1}{(\varepsilon+1)^r}$$

Así, $f(r) = (\varepsilon+1)^r\, g(r) = (\varepsilon+1)^r - 1$. □

Siguiendo ahora con el teorema...

Demostración: Inicialmente, se expresará la función de masa de X en términos más prácticos para esta demostración:

$$\frac{\dbinom{K}{x}\dbinom{N-K}{n-x}}{\dbinom{N}{n}} =$$

$$\frac{K!}{(K-x)!\,x!}\,\frac{(N-K)!}{(N-K-n+x)!\,(n-x)!}\,\frac{(N-n)!\,n!}{N!}$$

$$=$$

$$\binom{n}{x}\frac{\prod_{i=1}^{K} i}{\prod_{i=1}^{K-x} i}\,\frac{\prod_{j=1}^{N-K} j}{\prod_{j=1}^{N-K-n+x} j}\,\frac{\prod_{s=1}^{N-n} s}{\prod_{s=1}^{N} s}$$

$$=$$

$$\binom{n}{x}\prod_{i=K-x+1}^{K} i \quad \prod_{j=N-K-n+x+1}^{N-K} j \quad \frac{1}{\prod_{s=N-n+1}^{N} s}$$

$$=$$

$$\binom{n}{x}\prod_{i=0}^{x-1}(K-i)\prod_{j=0}^{n-x-1}(N-K-j)\;\frac{1}{\prod_{s=0}^{n-1}(N-s)}$$

$$=$$

$$\binom{n}{x}\left(\frac{K}{N}\right)^{x}\left(\frac{N-K}{N}\right)^{n-x}\frac{\prod_{i=0}^{x-1}(K-i)}{K^{x}}\,\frac{\prod_{j=0}^{n-x-1}(N-K-j)}{(N-K)^{n-x}}\,\frac{N^{n}}{\prod_{s=0}^{n-1}(N-s)}$$

$$=$$

$$B\left(n,\frac{K}{N}\right)(x)\prod_{i=0}^{x-1}\left(1-\frac{i}{K}\right)\prod_{j=0}^{n-x-1}\left(1-\frac{j}{N-K}\right)\prod_{s=0}^{n-1}\left(1+\frac{s}{N-s}\right)$$

En este proceso no se toma en cuenta el caso en el que $x = 0$ o $x = n$. Estos casos se resolverán posterior a tratar con la última expresión.

Tomando en cuenta este resultado,

$$\left|\frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} - B\left(n,\frac{K}{N}\right)(x)\right|$$

$$=$$

$$B\left(n,\frac{K}{N}\right)(x)\left|\prod_{i=0}^{x-1}\left(1-\frac{i}{K}\right)\prod_{j=0}^{n-x-1}\left(1-\frac{j}{N-K}\right)\prod_{s=0}^{n-1}\left(1+\frac{s}{N-s}\right)-1\right|$$

$$\leq \left\langle B(n,p)(x) \text{ es una probabilidad, con lo que es siempre menor o igual a 1} \right\rangle$$
$$\left|\prod_{i=0}^{x-1}\left(1-\frac{i}{K}\right)\prod_{j=0}^{n-x-1}\left(1-\frac{j}{N-K}\right)\prod_{s=0}^{n-1}\left(1+\frac{s}{N-s}\right)-1\right|$$

Nótese que cada término en cada productorio tiende a 1 cuando $K, N, N-K$ tienden a infinito. Con esto basta para demostrar la convergencia.

En los productorios, se ven involucradas sucesiones las cuales convergen a 0 y además, son sencillas de acotar. Entonces, como

$$\left|1-\frac{i}{K}-1\right| = \frac{i}{K} \leq \frac{x-1}{K}$$

$$\left|1-\frac{j}{N-K}-1\right| = \frac{j}{N-K} \leq \frac{n-x-1}{N-K}$$

$$\left|1+\frac{s}{N-s}-1\right| = \frac{s}{N-s} \leq \frac{n-1}{N-n+1}$$

solo hace falta hallar una cota para los miembros derechos de las desigualdades para acotar todos los términos de los productorios.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{K} &< \varepsilon \\ \frac{n-x-1}{N-K} &< \varepsilon \\ \frac{n-1}{N-n+1} &< \varepsilon \end{aligned}$$

Entonces, por el lema,

$$\left|\prod_{i=0}^{x-1}\left(1-\frac{i}{K}\right)-1\right| < (\varepsilon+1)^x - 1$$

$$\left|\prod_{j=0}^{n-x-1}\left(1-\frac{j}{N-K}\right)-1\right| < (\varepsilon+1)^{n-x} - 1$$

$$\left|\prod_{s=0}^{n-1}\left(1+\frac{s}{N-s}\right)-1\right| < (\varepsilon+1)^n - 1$$

Denotando cada uno de estos productos como P_1, P_2 y P_3 respectivamente,

$$|P_1 P_2 P_3 - 1|$$

$$=$$

$$|(P_1 - 1)(P_2 P_3 - 1) + P_1 - 1 + P_2 P_3 - 1|$$

$$\leq$$

$$|P_1 - 1||P_2 P_3 - 1| + |P_1 - 1| + |P_2 P_3 - 1|$$

$$=$$

$$|P_2 P_3 - 1|(|P_1 - 1| + 1) + |P_1 - 1|$$

$$=$$

$$|(P_2 - 1)(P_3 - 1) + P_2 - 1 + P_3 - 1|(|P_1 - 1| + 1) + |P_1 - 1|$$

$$\leq$$

$$(|P_2 - 1||P_3 - 1| + |P_2 - 1| + |P_3 - 1|)(|P_1 - 1| + 1) + |P_1 - 1|$$

$$<$$

$$[((\varepsilon + 1)^{n-x} - 1)((\varepsilon + 1)^n - 1) + (\varepsilon + 1)^{n-x} - 1 + (\varepsilon + 1)^n - 1]((\varepsilon + 1)^x - 1 + 1) + (\varepsilon + 1)^x - 1$$

$$=$$

$$[(\varepsilon + 1)^{2n-x} - (\varepsilon + 1)^{n-x} - (\varepsilon + 1)^n + 1 + (\varepsilon + 1)^{n-x} - 1 + (\varepsilon + 1)^n - 1](\varepsilon + 1)^x + (\varepsilon + 1)^x - 1$$

$$=$$

$$[(\varepsilon + 1)^{2n-x} - 1](\varepsilon + 1)^x + (\varepsilon + 1)^x - 1$$

$$=$$

$$(\varepsilon + 1)^{2n} - 1$$

Recordando que todo lo anterior se hizo bajo la suposición de que $x > 0$ y $x \neq n$. Para $x = 0$

$$\left| \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} - \binom{n}{x}\left(\frac{K}{N}\right)^x \left(\frac{N-K}{N}\right)^{n-x} \right|$$

$$=$$

$$\left|\frac{\binom{N-K}{n}}{\binom{N}{n}} - \left(\frac{N-K}{N}\right)^n\right|$$

$=$

$$B\left(n, \frac{K}{N}\right)(0)\left|\prod_{j=0}^{n-1}\left(1-\frac{j}{N-K}\right)\prod_{s=0}^{n-1}\left(1+\frac{s}{N-s}\right)-1\right|$$

$\leq$

$$\left|\prod_{j=0}^{n-1}\left(1-\frac{j}{N-K}\right)-1\right|\left|\prod_{s=0}^{n-1}\left(1+\frac{s}{N-s}\right)-1\right|+\left|\prod_{j=0}^{n-1}\left(1-\frac{j}{N-K}\right)-1\right|+\left|\prod_{s=0}^{n-1}\left(1+\frac{s}{N-s}\right)-1\right|$$

$<$

$$[(\varepsilon+1)^n-1](\varepsilon+1)^n+(\varepsilon+1)^n-1$$

$=$

$$(\varepsilon+1)^{2n}-1$$

Para $x = n$

$$\left|\frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} - \binom{n}{x}\left(\frac{K}{N}\right)^x\left(\frac{N-K}{N}\right)^{n-x}\right|$$

$=$

$$\left|\frac{\binom{K}{n}}{\binom{N}{n}} - \left(\frac{K}{N}\right)^n\right|$$

$=$

$$B\left(n, \frac{K}{N}\right)(n)\left|\prod_{i=0}^{n-1}\left(1-\frac{i}{K}\right)\prod_{s=0}^{n-1}\left(1+\frac{s}{N-s}\right)-1\right|$$

$\leq$

$$\left|\prod_{i=0}^{n-1}\left(1-\frac{i}{K}\right)-1\right|\left|\prod_{s=0}^{n-1}\left(1+\frac{s}{N-s}\right)-1\right|+\left|\prod_{i=0}^{n-1}\left(1-\frac{i}{K}\right)-1\right|+\left|\prod_{s=0}^{n-1}\left(1+\frac{s}{N-s}\right)-1\right|$$

$<$

$$[(\varepsilon+1)^n-1](\varepsilon+1)^n+(\varepsilon+1)^n-1$$

$=$

$(\varepsilon + 1)^{2n} - 1$

Para $n = 1$ o $n = 0$, la diferencia presentada es nula. $\square$