ESCUELA COLOMBIANA DE INGENIERÍA JULIO GARAVITO

Análisis no estándar

David G.

Filtros

Superestructura

Ultrapotencia

Números no estándar

Sucesiones

Análisis no estándar

David Gómez

Escuela Colombiana de Ingeniería
Matemáticas

18 de Diciembre del 2023

Definición

Sea $I \neq \varnothing$. Un filtro $\mathcal{F}$ sobre I es un conjunto de subconjuntos de I con las siguientes características:

1. $\varnothing \notin \mathcal{F}$
2. $A \subseteq B \Rightarrow (A \in \mathcal{F} \Rightarrow B \in \mathcal{F})$
3. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

$$I = \{a, b, c\}$$

$$\mathcal{F} = \{\{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$

Definición

Sea $I \neq \varnothing$. Un filtro $\mathcal{F}$ sobre I es un conjunto de subconjuntos de I con las siguientes características:

1. $\varnothing \notin \mathcal{F}$
2. $A \subseteq B \Rightarrow (A \in \mathcal{F} \Rightarrow B \in \mathcal{F})$
3. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

$$I = \{a, b, c\}$$
$$\mathcal{F} = \{\{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$

Relación de orden

Sea $\mathscr{F}$ el conjunto de filtros sobre I. $\mathcal{F}_1$ es *más fino* que $\mathcal{F}_2$ cuando $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1$. un filtro $\mathscr{U}$ es llamado ultrafiltro si es un elemento maximal.

$$(\forall \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \in \mathscr{F} - \{\mathscr{U}\} : \mathscr{U} \not\subset \mathcal{F})$$

$$\begin{aligned} I &= \{a, b, c\} \\ \mathcal{F}_1 &= \{\{a, b\}, \{a, b, c\}\} \\ \mathcal{F}_2 &= \{\{b, c\}, \{a, b, c\}\} \\ \mathscr{U}_1 &= \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\} \\ \mathscr{U}_2 &= \{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\} \end{aligned}$$

Relación de orden

Sea $\mathscr{F}$ el conjunto de filtros sobre I. $\mathcal{F}_1$ es *más fino* que $\mathcal{F}_2$ cuando $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1$. un filtro $\mathscr{U}$ es llamado ultrafiltro si es un elemento maximal.

$$(\forall \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \in \mathscr{F} - \{\mathscr{U}\} : \mathscr{U} \not\subset \mathcal{F})$$

$$\begin{aligned} I &= \{a, b, c\} \\ \mathcal{F}_1 &= \{\{a, b\}, \{a, b, c\}\} \\ \mathcal{F}_2 &= \{\{b, c\}, \{a, b, c\}\} \\ \mathscr{U}_1 &= \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\} \\ \mathscr{U}_2 &= \{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\} \end{aligned}$$

Caracterizaciones

Un filtro $\mathscr{U}$ sobre I es un ultrafiltro si y solo si:

1. $(\forall A \mid A \subseteq I : A \in \mathscr{U} \not\equiv I - A \in \mathscr{U})$
2. Si una unión finita es elemento de $\mathscr{U}$, entonces al menos un elemento de la unión es elemento de $\mathscr{U}$:
   $\bigcup_{k=0}^{n} F_n \in \mathscr{U} \Rightarrow F_k \in \mathscr{U}$ para algún k.

$$I = \{a, b, c\}$$
$$\mathcal{F} = \{\{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$
$$\mathscr{U} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Caracterizaciones

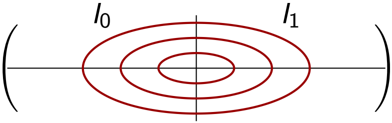
Un filtro $\mathscr{U}$ sobre I es un ultrafiltro si y solo si:

1. $(\forall A \mid A \subseteq I : A \in \mathscr{U} \not\equiv I - A \in \mathscr{U})$
2. Si una unión finita es elemento de $\mathscr{U}$, entonces al menos un elemento de la unión es elemento de $\mathscr{U}$: $\bigcup_{k=0}^{n} F_n \in \mathscr{U} \Rightarrow F_k \in \mathscr{U}$ para algún k.

$$
\begin{aligned}
I &= \{a, b, c\} \\
\mathcal{F} &= \{\{a, b\}, \{a, b, c\}\} \\
\mathscr{U} &= \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}
\end{aligned}
$$

Ulfrafiltros δ-incompletos

Sea I un conjunto infinito. $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro δ-incompleto cuando existe $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, una partición contable de I, tal que para todo n, $I_n \notin \mathscr{U}$.



n-uplas

$$
\begin{aligned}
(a) &= a \\
(a, b) &= \{\{a\}, \{a, b\}\} \\
(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) &= ((a_1, \ldots, a_n), a_{n+1})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A \times B &\subseteq \mathscr{P}(\mathscr{P}(A \cup B)) \\
A \times B \times C &\subseteq \mathscr{P}(\mathscr{P}((A \times B) \cup C)) \\
&\subseteq \mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(A \cup B)) \cup C)) \\
&\vdots \qquad \vdots
\end{aligned}
$$

Superestructura de $\mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbb{R}_0 &= \mathbb{R} \\ \mathbb{R}_{n+1} &= \mathscr{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} \mathbb{R}_k \right) \end{aligned} \right\}$$

$$\widehat{\mathbb{R}} = \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{R}_n$$

Construcción de la ultrapotencia

Sea I un conjunto infinito, $\mathscr{U}$ un ultrafiltro sobre I, y $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una partición contable de I la cual cumple la definición de δ-incompleto en $\mathscr{U}$.

$$^I\widehat{\mathbb{R}} = \left\{ f \,\middle|\, \operatorname{dom} f = I \wedge \operatorname{ran} f \subseteq \widehat{\mathbb{R}} \right\}$$

Extensión de la igualdad y la pertenencia

Sean $a, b \in {}^I\widehat{\mathbb{R}}$

$$\begin{array}{c|c} a =_{\mathscr{U}} b & a \in_{\mathscr{U}} b \\ \equiv & \equiv \\ \{i \mid a(i) = b(i)\} \in \mathscr{U} & \{i \mid a(i) \in b(i)\} \in \mathscr{U} \end{array}$$

$$\left(\forall a, b \,\middle|\, a, b \in {}^I\widehat{\mathbb{R}} : a =_{\mathscr{U}} b \vee a \neq_{\mathscr{U}} b\right)$$

Extensión de la igualdad y la pertenencia

Sean $a, b \in {}^{I}\widehat{\mathbb{R}}$

$a =_{\mathscr{U}} b$	$a \in_{\mathscr{U}} b$
$\equiv$	$\equiv$
$\{i \mid a(i) = b(i)\} \in \mathscr{U}$	$\{i \mid a(i) \in b(i)\} \in \mathscr{U}$

Se define, para todo $a \in \widehat{\mathbb{R}}$, la incorporación a ${}^{I}\widehat{\mathbb{R}}$ por la función constante ${}^{*}a(i) = a$ para todo $i \in I$.

Entidades internas y estándar

Sea $a \in {}^I\widehat{\mathbb{R}}$, a es llamada *entidad interna* cuando existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a \in {}^*\mathbb{R}_n$. a es llamada *estándar* cuando existe $b \in \widehat{\mathbb{R}}$ tal que, $a = {}^*b$. El conjunto $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} {}^*\mathbb{R}_n$, es llamado la ultrapotencia de $\widehat{\mathbb{R}}$ con respecto a $\mathscr{U}$, y se denotará como ${}^*(\widehat{\mathbb{R}})$.
Existen entidades internas no-estándar.

Demostración

Considerando algún $\mathbb{R}_n$, y una colección $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_n$ tal que, si $m \neq n$ entonces $a_m \neq a_n$. Se define entonces $a \in {}^{I}\widehat{\mathbb{R}}$ por $a(i) = a_n \quad (i \in I_n)$.

$$
\begin{aligned}
& a \in {}^{*}\mathbb{R}_n \\
\equiv\ & \\
& \{i \mid a(i) \in \mathbb{R}_n\} \in \mathscr{U} \\
\equiv\ & \\
& I \in \mathscr{U}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& a = {}^{*}b \\
\equiv\ & \\
& \{i \mid a(i) = b\} \in \mathscr{U} \\
\equiv\ & \\
& (\exists n \mid n \in \mathbb{N} : I_n \in \mathscr{U})
\end{aligned}
$$

Extensión de otras relaciones y operaciones

Sean $a, b, c \in {}^{I}\widehat{\mathbb{R}}$

$$a + b = c \equiv \{i \mid a(i) + b(i) = c(i)\} \in \mathscr{U}$$
$$a \leq b \equiv \{i \mid a(i) \leq b(i)\} \in \mathscr{U}$$
$$|| : {}^{*}R \to {}^{*}(R^{+})$$

Ejemplo de un número no estádar

Defínase $\omega \in {}^*\mathbb{N}$ por

$$\omega(i) = n \quad (i \in I_n)$$

Sea $k \in \mathbb{N}$

$$\omega \leq k$$

$$\equiv$$

$$\{i \mid \omega(i) \leq k\} \in \mathscr{U}$$

$$\equiv$$

$$\bigcup_{i=0}^{k} I_i \in \mathscr{U}$$

Números finitos e infinitesimales

Un número $a \in {}^*\mathbb{R}$ es llamado *finito* cuando existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $|a| < r$. un número no finito es llamado *infinito*. Un número $a \in {}^*\mathbb{R}$ es llamado *infinitesimal* cuando, para todo $r \in \mathbb{R}^+$, $|a| < r$.

$$M_0 = \{a \in {}^*\mathbb{R} \mid a \text{ es finito}\}$$

$$M_1 = \{a \in {}^*\mathbb{R} \mid a \text{ es infinitesimal}\}$$

Isomorfismo con $\mathbb{R}$

1. M_0 es un subanillo de ${}^*\mathbb{R}$.
2. M_1 es un subanillo de M_0.
3. M_1 es un ideal maximal de M_0.

- Con la relación $=_1$ en ${}^*R$, definida por $a =_1 b \equiv a - b \in M_1$, se define el anillo cociente M_0/M_1.
- M_0/M_1 es isomorfo a $\mathbb{R}$.
- El homomorfismo de M_0 a $\mathbb{R}$ con kernel M_1 se denotará como $\mathrm{st}()$

Isomorfismo con $\mathbb{R}$

1. M_0 es un subanillo de ${}^*\mathbb{R}$.
2. M_1 es un subanillo de M_0.
3. M_1 es un ideal maximal de M_0.

- El homomorfismo de M_0 a $\mathbb{R}$ con kernel M_1 se denotará como $\mathrm{st}()$

Sistema numérico no estándar $^*\mathbb{C}$

- Superestructura $\widehat{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$.
- Ultrapotencia $^*\left(\widehat{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}\right)$.
- $^*\mathbb{C} = {}^*\mathbb{R}\times{}^*\mathbb{R}$.

Sistema numérico no estándar ${}^{*}\mathbb{C}$

Un número $z \in {}^{*}\mathbb{C}$ es llamado *finito* cuado existe $r \in \mathbb{R}^{+}$ tal que $\|z\| < r$. Un número no finito es llamado *infinito*.
Un número $z \in {}^{*}\mathbb{C}$ es llamado *infinitesimal* cuando, para todo $r \in \mathbb{R}^{+}$, $\|z\| < r$.
$z = a + b\,i$ es infinitesimal si y solo si a, b son infinitesimales.

Sucesiones Reales

Al ser funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$ son subconjuntos de $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$, por lo que son entidades de $\widehat{\mathbb{R}}$. La extensión de una sucesión $\{s_n\}$ es $\{^*s_n\}$ la cual es una función de $^*\mathbb{N}$ a $^*\mathbb{R}$.

$$^*(\text{dom } \{s_n\}) = \text{dom } ^*\{s_n\}$$

Convergencia y Sucesiones de Cauchy

$$\{s_n\} \to s$$

1. Convergencia:
   - Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$(\forall n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \geq N \ : \ |s_n - s| < \varepsilon)$$

   - De forma análoga:

$$(\forall n \mid n \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N} \ : \ {}^*s_n =_1 s)$$

Convergencia y Sucesiones de Cauchy

$$\{s_n\} \to s$$

2. Sucesión de Cauchy
   - Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$(\forall n, m \,|\, n, m \in \mathbb{N} \wedge n, m \geq N \;:\; |s_n - s_m| < \varepsilon)$$

   - De form análoga:

$$(\forall n, m \,|\, n, m \in {}^{*}\mathbb{N} - \mathbb{N} \;:\; s_n =_1 s_m)$$

Sucesiones en otros espacios métricos

Sea $\{s_n\}$ una sucesión en un espacio métrico X con función distancia d_X. Sea $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

- $\{s_n\} \to s$:
$$(\forall n \,|\, n \geq N \;:\; d_X(s_n, s) < \varepsilon)$$
- $\{s_n\}$ es una sucesión de Cauchy:
$$(\forall n, m \,|\, n, m \geq N \;:\; d_X(s_n, s_m) < \varepsilon)$$

$$q_n = d_X(s_n, s)$$
$$p_{n,m} = d_X(s_n, s_m)$$

Sucesiones en otros espacios métricos

Sea $\{s_n\}$ una sucesión en un espacio métrico X con función distancia d_X. Sea $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

- $\{s_n\} \to s$:
$$(\forall n \mid n \geq N : d_X(s_n, s) < \varepsilon)$$
- $\{s_n\}$ es una sucesión de Cauchy:
$$(\forall n, m \mid n, m \geq N : d_X(s_n, s_m) < \varepsilon)$$

$$q_n = d_X(s_n, s)$$
$$p_{n,m} = d_X(s_n, s_m)$$

Sucesiones en otros espacios métricos

Sea $\{s_n\}$ una sucesión en un espacio métrico X con función distancia d_X. Sea $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

- $\{s_n\} \to s$:
$$(\forall n \mid n \geq N \ : \ |q_n - 0| < \varepsilon)$$
- $\{s_n\}$ es una sucesción de Cauchy:
$$(\forall n, m \mid n, m \geq N \ : \ |p_{n,m} - 0| < \varepsilon)$$

$$q_n = d_X(s_n, s)$$
$$p_{n,m} = d_X(s_n, s_m)$$

Sucesiones en otros espacios métricos

Sea $\{s_n\}$ una sucesión en un espacio métrico X con función distancia d_X. Sea $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

- $\{s_n\} \to s$:

$$(\forall n \mid n \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N} \;:\; d_X(s_n, s) =_1 0)$$

- $\{s_n\}$ es una sucesión de Cauchy:

$$(\forall n, m \mid n, m \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N} \;:\; d_X(s_n, s_m) =_1 0)$$

$$q_n = d_X(s_n, s)$$
$$p_{n,m} = d_X(s_n, s_m)$$