

# Análisis no estándar

David Gómez

Escuela Colombiana de Ingeniería  
Matemáticas

18 de Diciembre del 2023

Sea  $I \neq \emptyset$ . Un filtro  $\mathcal{F}$  sobre  $I$  es un conjunto de subconjuntos de  $I$  con las siguientes características:

- 1  $\emptyset \notin \mathcal{F}$
- 2  $A \subseteq B \Rightarrow (A \in \mathcal{F} \Rightarrow B \in \mathcal{F})$
- 3  $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

$$I = \{a, b, c\}$$

$$\mathcal{F} = \{\{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$

Sea  $I \neq \emptyset$ . Un filtro  $\mathcal{F}$  sobre  $I$  es un conjunto de subconjuntos de  $I$  con las siguientes características:

- ❶  $\emptyset \notin \mathcal{F}$
- ❷  $A \subseteq B \Rightarrow (A \in \mathcal{F} \Rightarrow B \in \mathcal{F})$
- ❸  $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

$$I = \{a, b, c\}$$

$$\mathcal{F} = \{\{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$

Sea  $\mathcal{F}$  el conjunto de filtros sobre  $I$ .  $\mathcal{F}_1$  es *más fino* que  $\mathcal{F}_2$  cuando  $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1$ . un filtro  $\mathcal{U}$  es llamado ultrafiltro si es un elemento maximal.

$$(\forall \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \in \mathcal{F} - \{\mathcal{U}\} : \mathcal{U} \not\subseteq \mathcal{F})$$

$$I = \{a, b, c\}$$

$$\mathcal{F}_1 = \{\{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$

$$\mathcal{F}_2 = \{\{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

$$\mathcal{U}_1 = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

$$\mathcal{U}_2 = \{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Sea  $\mathcal{F}$  el conjunto de filtros sobre  $I$ .  $\mathcal{F}_1$  es *más fino* que  $\mathcal{F}_2$  cuando  $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1$ . un filtro  $\mathcal{U}$  es llamado ultrafiltro si es un elemento maximal.

$$(\forall \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \in \mathcal{F} - \{\mathcal{U}\} : \mathcal{U} \not\subseteq \mathcal{F})$$

$$I = \{a, b, c\}$$

$$\mathcal{F}_1 = \{\{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$

$$\mathcal{F}_2 = \{\{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

$$\mathcal{U}_1 = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

$$\mathcal{U}_2 = \{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Un filtro  $\mathcal{U}$  sobre  $I$  es un ultrafiltro si y solo si:

- ①  $(\forall A \mid A \subseteq I : A \in \mathcal{U} \neq I - A \in \mathcal{U})$
- ② Si una unión finita es elemento de  $\mathcal{U}$ , entonces al menos un elemento de la unión es elemento de  $\mathcal{U}$ :

$$\bigcup_{k=0}^n F_n \in \mathcal{U} \Rightarrow F_k \in \mathcal{U} \text{ para algún } k.$$

$$I = \{a, b, c\}$$

$$\mathcal{F} = \{\{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$

$$\mathcal{U} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Un filtro  $\mathcal{U}$  sobre  $I$  es un ultrafiltro si y solo si:

- ①  $(\forall A \mid A \subseteq I : A \in \mathcal{U} \neq I - A \in \mathcal{U})$
- ② Si una unión finita es elemento de  $\mathcal{U}$ , entonces al menos un elemento de la unión es elemento de  $\mathcal{U}$ :

$$\bigcup_{k=0}^n F_n \in \mathcal{U} \Rightarrow F_k \in \mathcal{U} \text{ para algún } k.$$

$$I = \{a, b, c\}$$

$$\mathcal{F} = \{\{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$

$$\mathcal{U} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

# Ultrafiltros $\delta$ -incompletos

Análisis no  
estándar

David G.

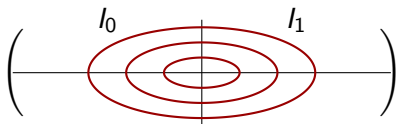
Filtros

Superestructura

Ultrapotencia

Números no  
estándar

Sea  $I$  un conjunto infinito.  $\mathcal{U}$  es un ultrafiltro  $\delta$ -incompleto cuando existe  $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , una partición contable de  $I$ , tal que para todo  $n$ ,  $I_n \notin \mathcal{U}$ .





$$(a) = a$$

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

$$(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = ((a_1, \dots, a_n), a_{n+1})$$

$$A \times B \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$$

$$A \times B \times C \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}((A \times B) \cup C))$$

$$\subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \cup C))$$

$$\vdots \quad \quad \vdots$$

Análisis no  
estándar

David G.

Filtros

Superestructura

Ultrapotencia

Números no  
estándar

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \\ \mathbb{R}_{n+1} = \mathcal{P} \left( \bigcup_{k=0}^n \mathbb{R}_k \right) \end{array} \right\}$$
$$\hat{\mathbb{R}} = \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{R}_n$$

Sea  $I$  un conjunto infinito,  $\mathcal{U}$  un ultrafiltro sobre  $I$ , y  $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una partición contable de  $I$  la cual cumple la definición de  $\delta$ -incompleto en  $\mathcal{U}$ .

$${}^I\widehat{\mathbb{R}} = \left\{ f \mid \text{dom } f = I \wedge \text{ran } f \subseteq \widehat{\mathbb{R}} \right\}$$

# Extensión de la igualdad y la pertenencia

Análisis no  
estándar

David G.

Filtros

Superestructura

Ultrapotencia

Números no  
estándar

Sean  $a, b \in {}^I\widehat{\mathbb{R}}$

$$\begin{array}{c|c}
 a =_{\mathcal{U}} b & a \in_{\mathcal{U}} b \\
 \equiv & \equiv \\
 \{i \mid a(i) = b(i)\} \in \mathcal{U} & \{i \mid a(i) \in b(i)\} \in \mathcal{U}
 \end{array}$$

$$\left( \forall a, b \mid a, b \in {}^I\widehat{\mathbb{R}} : a =_{\mathcal{U}} b \vee a \neq_{\mathcal{U}} b \right)$$

# Extensión de la igualdad y la pertenencia

Análisis no  
estándar

David G.

Filtros

Superestructura

Ultrapotencia

Números no  
estándar

Sean  $a, b \in {}^I\hat{\mathbb{R}}$

$$\begin{array}{c|c}
 a =_{\mathcal{U}} b & a \in_{\mathcal{U}} b \\
 \equiv & \equiv \\
 \{i \mid a(i) = b(i)\} \in \mathcal{U} & \{i \mid a(i) \in b(i)\} \in \mathcal{U}
 \end{array}$$

Se define, para todo  $a \in \hat{\mathbb{R}}$ , la incorporación a  ${}^I\hat{\mathbb{R}}$  por la función constante  $*a(i) = a$  para todo  $i \in I$ .

# Entidades internas y estándar

Análisis no  
estándar

David G.

Filtros

Superestructura

Ultrapotencia

Números no  
estándar

Sea  $a \in {}^I\hat{\mathbb{R}}$ ,  $a$  es llamada *entidad interna* cuando existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $a \in {}^*\mathbb{R}_n$ .  $a$  es llamada *estándar* cuando existe  $b \in \hat{\mathbb{R}}$  tal que,  $a = {}^*b$ . El conjunto  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} {}^*\mathbb{R}_n$ , es llamado la ultrapotencia de  $\hat{\mathbb{R}}$  con respecto a  $\mathcal{U}$ , y se denotará como  ${}^*(\hat{\mathbb{R}})$ . Existen entidades internas no-estándar.

Considerando algún  $\mathbb{R}_n$ , y una colección  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_n$  tal que, si  $m \neq n$  entonces  $a_m \neq a_n$ . Se define entonces  $a \in {}^I\hat{\mathbb{R}}$  por  $a(i) = a_n \quad (i \in I_n)$ .

$$\begin{array}{l|l}
 a \in {}^*\mathbb{R}_n & a = {}^*b \\
 \equiv & \equiv \\
 \{i \mid a(i) \in \mathbb{R}_n\} \in \mathcal{U} & \{i \mid a(i) = b\} \in \mathcal{U} \\
 \equiv & \equiv \\
 I \in \mathcal{U} & (\exists n \mid n \in \mathbb{N} : I_n \in \mathcal{U})
 \end{array}$$

Sean  $a, b, c \in {}^I\widehat{\mathbb{R}}$

$$a + b = c \equiv \{i \mid a(i) + b(i) = c(i)\} \in \mathcal{U}$$

$$a \leq b \equiv \{i \mid a(i) \leq b(i)\} \in \mathcal{U}$$

$$\| : {}^*R \rightarrow {}^*(R^+)$$



# Ejemplo de un número no estándar

Análisis no  
estándar

David G.

Filtros

Superestructura

Ultrapotencia

Números no  
estándar

Defínase  $\omega \in {}^*\mathbb{N}$  por

$$\omega(i) = n \quad (i \in I_n)$$

Sea  $k \in \mathbb{N}$

$$\omega \leq k$$

$\equiv$

$$\{i \mid \omega(i) \leq k\} \in \mathcal{U}$$

$\equiv$

$$\bigcup_{i=0}^k I_i \in \mathcal{U}$$

# Números finitos e infinitesimales

Análisis no  
estándar

David G.

Filtros

Superestructura

Ultrapotencia

Números no  
estándar

Un número  $a \in {}^*\mathbb{R}$  es llamado *finito* cuando existe  $r \in \mathbb{R}^+$  tal que  $|a| < r$ . un número no finito es llamado *infinito*. Un número  $a \in {}^*\mathbb{R}$  es llamado *infinitesimal* cuando, para todo  $r \in \mathbb{R}^+$ ,  $|a| < r$ .

$$M_0 = \{a \in {}^*\mathbb{R} \mid a \text{ es finito}\}$$

$$M_1 = \{a \in {}^*\mathbb{R} \mid a \text{ es infinitesimal}\}$$

## Isomorfismo con $\mathbb{R}$

- ①  $M_0$  es un subanillo de  ${}^*\mathbb{R}$ .
- ②  $M_1$  es un subanillo de  $M_0$ .
- ③  $M_1$  es un ideal maximal de  $M_0$ .
  - Con la relación  $=_1$  en  ${}^*R$ , definida por  $a =_1 b \equiv a - b \in M_1$ , se define el anillo cociente  $M_0/M_1$ .
  - $M_0/M_1$  es isomorfo a  $\mathbb{R}$ .