David Gómez, Laura Rincón

DEMOSTRACIONES DE PRYE

Matemáticas

2024

Índice

1. Introducción

Por ahora, cualquier cosa

2. Probabilidad

Un primer resultado en el curso es a cerca de la probabilidad de una unión finita de eventos de un mismo espacio muestral. Para esto, se puede hacer uso del resultado para la unión de dos eventos, mismo que se puede aplicar a una unión finita para generar una función recursiva.

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P(A_{n+1}) + P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_{n+1} \cap A_i)\right)$$

Para obtener una expresión más explícita, se desarrolla la recursión hasta $n = 4$. Claramente se omiten los resultados para $n = 1$ y $n = 2$.

$$\begin{aligned}
&P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\
=& \\
&P(A_3) + P(A_1 \cup A_2) - P((A_3 \cap A_1) \cup (A_3 \cap A_2)) \\
=& \\
&P(A_3) + P(A_2) + P(A_1) - P(A_1 \cap A_2) \\
&-[P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)] \\
=& \\
&P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) \\
&-P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\
=& \\
&\sum_{i=1}^{3} P(A_i) - \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=i+1}^{3} P(A_i \cap A_j) + P\left(\bigcap_{i=1}^{3} A_i\right)
\end{aligned}$$

Análogamente para cuatro eventos, usando lo obtenido

$$\begin{aligned}
&P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) \\
=& \\
&P(A_4) + P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) - P\left(\bigcup_{i=1}^{3} (A_4 \cap A_i)\right)
\end{aligned}$$

$$=$$

$$P(A_4) + \sum_{i=1}^{3} P(A_i) - \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=i+1}^{3} P(A_i \cap A_j) + P\left(\bigcap_{i=1}^{3} A_i\right)$$
$$- \left[\sum_{i=1}^{3} P(A_4 \cap A_i) - \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=i+1}^{3} P(A_4 \cap A_i \cap A_j) + P\left(\bigcap_{i=1}^{4} A_i\right)\right]$$

$$=$$

$$\sum_{i=1}^{4} P(A_i) - \sum_{i=1}^{3} \sum_{i=1}^{4} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=i+1}^{3} \sum_{k=j+1}^{4} P(A_1 \cap A_j \cap A_k) - P\left(\bigcap_{i=1}^{4} A_i\right)$$

Por último, recordar que

$$\sum_{i=a}^{b} \sum_{j=i+1}^{b+1} f(i,j) = \sum_{a \leq i < j \leq b} f(i,j)$$

Teorema 1: Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos de un espacio muestral. Entonces,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{1 \leq i \leq n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^n P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

De otra forma, la probabilidad de una unión finita es la suma de la probabilidad de cada evento menos las posibles intersecciones dos a dos, sumando las probabilidades tres a tres...

Demostración: Siguiendo por inducción. Los caso base $n = 1$ y $n = 2$ caen en la definición recursiva y para $n = 3$ fue el desarrollo anterior. Para el paso inductivo, supóngase que la propiedad se mantiene hasta un valor n.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right)$$

$$=$$

$$P(A_{n+1}) + P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_{n+1} \cap A_i)\right)$$

$$=$$

$$P(A_{n+1}) + P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$
$$- \left[\sum_{1 \leq i \leq n} (A_{n+1} \cap A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} (A_{n+1} \cap A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^n P\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right)\right]$$

$$= \sum_{1\le i\le n+1} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n+1} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1\le i<j<k\le n+1} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right)$$

□

Definición 1: Sean A y B eventos de un espacio muestral. Se dice que A y B son independientes, cuando $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$.

Teorema 2: Sean A y B eventos independientes. Entonces

(i) A^c y B^c son independientes.

(ii) A^c y B son independientes.

Demostración: Supóngase A y B eventos independientes de un espacio muestral.

(i) Partiendo de que $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$.

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \\ &= 1 - P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\ &= (1 - P(A))(1 - P(B)) \\ &= P(A^c)\,P(B^c) \end{aligned}$$

Así, los eventos A^c y B^c también son independientes.

(ii) Partiendo de que $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$

$$P(B)$$
$$=$$
$$P((B \cap A) \cup (B \cap A^c))$$
$$=$$
$$P(B \cap A) + P(B \cap A^c) - P(\varnothing)$$
$$=$$
$$P(B)\,P(A) + P(B \cap A^c)$$

Tomando la primera y última igualdad

$$P(B \cap A^c)$$
$$=$$
$$P(B) - P(B)P(A)$$
$$=$$
$$P(B)(1 - P(A))$$
$$=$$
$$P(B)\,P(A^c)$$

Así, los eventos A^c y B también son independientes.

$\square$

3. Propiedades de la Varianza y el Valor Esperado

3.1. Propiedades da valor esperado

Teorema 3: Sea X una variable aleatoria real entonces:

(i) Si $P(X \geq 0) = 1$ y E$[X]$ existe entonces E$[X] \geq 0$

(ii) E$[\alpha] = \alpha$ para α constante

(iii) Si existe $M \geq 0$ tal que P$(|X| \leq M) = 1$ entonces E$[X]$ existe.

(iv) Si α y β son constantes, y si g y h son funciones tales que $g(X)$ y $h(X)$ son variables aleatorias cuyos valores esperados existen, entonces E$[\alpha g(X) + \beta h(X)] = \alpha$E$[g(X)] + \beta$E$[h(X)]$

(v) Si g y h son funciones tales que $g(X)$ y $h(X)$ son variables aleatorias cuyos valores esperados existen y $g(x) \leq h(x)$ para todo x, entonces E$[g(X)] \leq$E$[h(X)]$

Demostración: Para hacer la demostración, se hará con variables discretas y variables continuas por aparte.

(i) Para variables discretas: Si $P[X \geq 0] = 1$ entonces $P(X < x) = 0$, luego:

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{x=0}^{\infty} xP(X = x) \geq 0$$

Debido a que $x \geq 0$ y $P(X = x) \geq 0$ para todo x. Similarmente para para variables aleatorias continuas, se tiene que $f(x) = 0$ si $x \geq 0$. Entonces, como $f(x) \geq 0$ para todo x, $xf(x) \geq 0$, y por tanto, la integral también.

(ii) Para α constante, $P[X = \alpha] = 1$, y por tanto el valor esperado es α

(iii) Si existe $M \geq 0$ tal que $|x| \leq M$ para todo X, entonces:

Para X variable aleatoria discreta, se tiene:

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{-M}^{M} xP(X = x)$$

y al ser una suma finita, el resultado existe.

Para X variable aleatoria contínua:

$$\mathrm{E}[X]$$

$$=$$

$$\int_{-M}^{M} xf(x)\mathrm{d}x$$

$$\leq$$

$$M\int_{-M}^{M} f(x)\mathrm{d}x$$

Dado que f describe el comportamiento de x, esa integral no es otra cosa que la integral total, es decir:

$$M\int_{-M}^{M} f(x)\mathrm{d}x$$

$$=$$

$$M\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

$$=$$

$$M$$

Así pues, $\mathrm{E}[X] \leq M$, y por lo tanto existe.

(iv) Para funciones discretas:

$$\mathrm{E}[\alpha g(x) + \beta h(x)]$$

$$=$$

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} (\alpha g(x) + \beta h(x))P[X = x]$$

$$=$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \alpha g(x)P[X = x] + \sum_{x=-\infty}^{\infty} \beta h(x)P[X = x]$$

$$=$$

$$\alpha \sum_{x=-\infty}^{\infty} g(x)P[X = x] + \beta \sum_{x=-\infty}^{\infty} h(x)P(X = x)$$

$$=$$

$$\alpha\mathrm{E}[g(x)] + \beta\mathrm{E}[f(x)]$$

Para las variables continuas, es un argumento similar

$$\mathrm{E}[\alpha g(x) + \beta f(x)]$$

$$=$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\alpha g(x) + \beta h(x)\mathrm{d}x)$$

$$=$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha g(x)f(x)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{\infty} \beta h(x)f(x)\mathrm{d}x$$

$$=$$

$$\alpha \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x + \beta \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)\mathrm{d}x$$

$$=$$

$$\alpha\mathrm{E}[g(x)] + \beta\mathrm{E}[h(x)]$$

(v) Para variables aleatorias discretas:

$$\mathrm{E}[g(x)]$$

$$=$$

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} g(x)P(X = x)$$

$$\leq$$

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} h(x)P(X = x)$$

$$=$$

$$\mathrm{E}[h(x)]$$

De manera similar, con las variables aleatorias continuas

$$\mathrm{E}[g(x)]$$

$$=$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$$

$$\leq$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)\mathrm{d}x$$

$$=$$

$$\mathrm{E}[h(x)]$$

Lo que termina la demostración.

□

3.2. Propiedades de varianza

Teorema 4: Sea X una variable aleatoria cuyo valor esperado existe y α, $\beta \in \mathbb{R}$ constantes. Entonces:

(i) $\mathrm{Var}[X] \geq 0$

(ii) $\mathrm{Var}[\alpha] = 0$

(iii) $\mathrm{Var}[\alpha X] = \alpha^2\mathrm{Var[X]}$

(iv) $\mathrm{Var}[X + \beta] = \mathrm{Var}[X]$

(v) $\mathrm{Var}[X] = 0$ si y solo si $P(X = E(X)) = 1$

Demostración: La demostración se hará en base a que $\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}[X^2]-\mathrm{E}^2[X] = \mathrm{E}[(X - E(X))^2]$

(i) Por propiedad de valor esperado, como $(X - E(x))^2 \geq 0$, entonces $\mathrm{E}[(X - E(X))^2] \geq 0$.

(ii) $\mathrm{Var}[\alpha] = \mathrm{E}[\alpha^2] - \mathrm{E}^2[\alpha] = \alpha^2 - \alpha^2 = 0$

(iii) Se usa la misma propiedad del item anterior.

$$\mathrm{Var}[\alpha X]$$

$$=$$

$$\mathrm{E}[\alpha^2 X^2] - \mathrm{E}^2[\alpha X]$$

$$=$$

$$\alpha^2\mathrm{E}[X^2] - (\alpha\mathrm{E}[X])^2$$

$$=$$

$$\alpha^2(\mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}^2[X])$$

$$=$$

$$\alpha^2\mathrm{Var}[X]$$

(iv) Por definición de varianza y propiedades del valor esperado

$$\mathrm{Var}[X+\beta]$$

$$=$$

$$\mathrm{E}[(X+\beta)^2]-\mathrm{E}^2[x+\beta]$$

$$=$$

$$\mathrm{E}[X^2+2\beta X+\beta^2]-(\mathrm{E}[X]-\mathrm{E}[\beta])^2$$

$$=$$

$$\mathrm{Var}[X]+2\beta\mathrm{E}[X]+\beta^2-2\beta\mathrm{E}[X]-\beta^2$$

$$=$$

$$\mathrm{Var}[X]$$

(v) $P(X=\mathrm{E}[X])=1$ es lo mismo que decir que $X=\mathrm{E}[X]$, esto es,X es constate. Por el teorema del valor esperado, $\mathrm{E}[\mathrm{E}[X]^2]=\mathrm{E}^2[X]$, y por lo tanto $\mathrm{Var}[X]=\mathrm{E}^2[X]-\mathrm{E}^2[X]=0$

□

4. Funciones Características

Definición 2: Sean X una variable aleatoria y f su función de densidad o de masa (dependiendo si X es continua o discreta). Se define la *función característica* de X como

$$\phi_X(t) := \mathrm{E}[e^{itX}] = \mathrm{E}[\cos(tX)] + i\mathrm{E}[\sin(tX)]$$

Teorema 5: La función característica existe para todo $t \in \mathbb{R}$ para toda variable aleatoria tanto discreta como absolutamente continua ($|A| \leq |\mathbb{N}| \Rightarrow P(X \in A) = 0$).

Demostración: Sean X una variable aleatoria y f su función de densidad o de masa. Entonces, para todo x en el dominio de X, $f(x) \geq 0$, luego, para todo $t \in \mathbb{R}$ y x en el dominio de X, $|\cos(tx)f(x)| \leq f(x)$ y $|\sin(tx)f(x)| \leq f(x)$. Por criterio de convergencia absoluta, la serie o integral que define la función característica, converge para todo $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Teorema 6: Sea X una variable aleatoria. Entonces

(i) $\phi_X(0) = 1$.

(ii) Para todo $t \in \mathbb{R}$, $|\phi_X(t) \leq 1$.

(iii) Sea $k \in \mathbb{Z}^+$. Si $\mathrm{E}[X^k]$ existe, entonces, $\mathrm{E}[X^k] = \left.\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\phi_X(t)\right|_{t=0}$

Solo se demostrará el primer enunciado

Demostración: Sea f la función de densidad o masa de X. En las expresiones que definen ϕ_X, evaluadas en 0, se obtiene $\cos(0x)f(x) = f(x)$ y $\sin(0x)f(x) = 0$. Se sigue que la serie o integral resultante tenga como integrando únicamente a f, luego $\phi_X(0) = 1$. $\square$

Por último, se deja enunciado el siguiente teorema

Teorema 7: Sean X, Y dos variables aleatorias independientes. Si para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_X(t) = \phi_Y(t)$$

entonces, X y Y tienen la misma distribución

5. Distribuciones

En esta sección se repasarán las definiciones de algunas distribuciones de la probabilidad.

5.1. Distribuciones Discretas

Las distribuciones discretas son aquellas cuyas funciones de masa tienen dominio en algún conjunto discreto. Esto se extenderá para esta sección a los enteros, lo cual se asumirá a lo largo de las definiciones y demostraciones a cerca de estas distribuciones. De no ser especificado el valor de una función de masa en algún subconjunto de $\mathbb{Z}$, se asumirá un como nulo.

5.1.1. Binomial

Supóngase que se realiza un experimento el cual tiene como posible resultado a o b exclusivamente, y además, el resultado de realizar nuevamente el experimento es independiente al resultado anterior. Dado que a y b son los únicos resultados, para un único experimento, se debe tener que $P(a) = 1 - P(b)$. Sea $p = P(a)$. Supóngase que este experimento es realizado n veces. Se define una variable aleatoria X correspondiente a la cantidad de ocurrencias de a. Entonces

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Definición 3: Sea X una variable aleatoria discreta. X sigue una distribución binomial con parámetros n y p ($n \in \mathbb{Z}^+, p \in (0,1)$), denotada por $B(n,p)$, cuando su función de masa es

$$f(x) = P(X = x) = B(n,p)(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad (0 \leq x \leq n)$$

Teorema 8: Sea $X \sim B(n,p)$. Entonces

(i) Para todo $x \in \mathbb{Z}$ con $0 \leq x \leq n$, $0 \leq P(X = x) \leq 1$.

(ii) $\displaystyle\sum_{x \in \mathbb{Z}} P(X = x) = 1$.

(iii) $\mathrm{E}[X] = np$.

(iv) $\mathrm{Var}[X] = np(1-p)$.

Demostración:

(i) Sea $x \in \mathbb{Z}$ con $0 \leq x \leq n$. Recordando que

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Dado todos los términos de la expresión son no negativos, se concluye que $P(X = x) \geq 0$. Para la otra parte de la desigualdad,

$$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{n!}{(n-x)!\,x!} p^x (1-p)^{n-x} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$n!\,p^x (1-p)^n \leq (n-x)!\,x!\,(1-p)^x$$

Procediendo por inducción sobre n

Caso base, $n = 1$:

$$p^x (1-p)^n \leq (1-x)!x!(1-p)^x$$

En este caso $x \in \{0, 1\}$ y las desigualdades respectivas son $1 \leq 1$ y $p \leq 1$.

Paso inductivo:

Supóngase que la propiedad se mantiene para algún $n \in \mathbb{Z}^+$. Para $0 \leq x \leq n$, se tiene entonces que

$$n!\,p^x (1-p)^n \leq (n-x)!\,x!\,(1-p)^x$$

$\Leftrightarrow$ $\langle$ Usando el hecho de que $n+1 \geq n+1-x$. Multiplicando miembro a miembro $\rangle$

$$(n+1)!\,p^x (1-p)^n \leq (n+1-x)!\,x!\,(1-p)^x$$

$\Leftrightarrow$ $\Big\langle$Como $p \in (0, 1)$, entonces, $(1-p)^{n+1} \leq (1-p)^n$. Por transitividad$\Big\rangle$

$$(n+1)!\,p^x (1-p)^{n+1} \leq (n+1-x)!\,x!\,(1-p)^x$$

Para $x = n+1$, se obtiene que

$$(n+1)! \leq 0$$

Así, para todo $x \in \mathbb{Z}$ con $0 \leq x \leq n$, $0 \leq P(X = x) \leq 1$.

(ii)

$$\sum_{x=0}^{n} P(X=x)$$
$$=$$
$$\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$
$$=$$
$$(p+1-p)^n$$
$$=$$
$$1$$

(iii)

$$\mathrm{E}[X]$$
$$=$$
$$\sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$
$$=$$
$$np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(x-1)!} p^x (1-p)^{n-x}$$
$$=$$
$$np \sum_{x=0}^{n-1} \binom{n-1}{x} p^x (1-p)^{n-1-x}$$
$$=$$
$$np\,(p+1-p)^{n-1}$$
$$=$$
$$np$$

(iv)

$$\mathrm{Var}[X]$$
$$=$$
$$\mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}^2[X]$$
$$=$$
$$\sum_{x=0}^{n} x^2 \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} - (np)^2$$
$$=$$

$$np\left[\sum_{x=1}^{n} x\binom{n-1}{x-1}p^{x-1}(1-p)^{n-x} - np\right]$$
$$=$$
$$np\left[\sum_{x=0}^{n-1}(x+1)\binom{n-1}{x}p^{x}(1-p)^{n-1-x} - np\right]$$
$$=$$
$$np\left[\sum_{x=0}^{n-1} x\binom{n-1}{x}p^{x}(1-p)^{n-1-x} + \sum_{x=0}^{n-1}\binom{n-1}{x}p^{x}(1-p)^{n-1-x} - np\right]$$
$$=$$
$$np\left[p(n-1)\sum_{x=1}^{n-1}\binom{n-2}{x-1}p^{x-1}(1-p)^{n-1-x} + 1 - np\right]$$
$$=$$
$$np\left[p(n-1)\sum_{x=0}^{n-2}\binom{n-2}{x}p^{x}(1-p)^{n-2-x} + 1 - np\right]$$
$$=$$
$$np[p(n-1)+1-np]$$
$$=$$
$$np(1-p)$$

Este argumento es válido siempre que $n \geq 2$. Si $n < 2$, entonces $n = 1$ y

$$\mathrm{Var}[X]$$
$$=$$
$$\mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}^2[X]$$
$$=$$
$$\sum_{x=0}^{1} x^2\binom{1}{x}p^{x}(1-p)^{1-x} - p^2$$
$$=$$
$$p - p^2$$
$$=$$
$$p\,(1-p)$$

Así, el resultado se mantiene para todo $n \in \mathbb{Z}^+$

□

5.1.2. Hipergeométrica

Supóngase que se tienen dos tipos de objetos, a y b en un total de N objetos exclusivamente de estos dos tipos. Sea K el número de objetos de tipo a en el total de los N objetos, es decir hay $N-K$ objetos de tipo b.

Supóngase que se toman ahora n objetos del total (N). Se define una variable aleatoria X correspondiente al número de objetos de tipo a en los n objetos tomados. Entonces

$$P(X = x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Definición 4: Sea X una variable aleatoria discreta. X sigue una distribución hipergeométrica con parámetros N, K, n ($N, K, n \in \mathbb{Z}^+, K \leq N, n \leq N$), denotada por $Hg(N, K, n)$, cuando su función de masa es

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad (\max\{0, n+K-N\} \leq x \leq \min\{K, n\})$$

La razón de esta condición para x está en que tenga sentido para lo que se está representando. Por un lado, no tiene sentido pensar en la probabilidad de tomar más objetos de tipo a de los que hay en el total de la muestra o tomar más objetos de tipo a del total de estos. De la misma forma, no tiene sentido tomar una cantidad negativa de objetos tipo a, o tomar una cantidad de objetos tipo a de forma que haya una cantidad negativa de objetos tipo b para completar los n objetos o más objetos de tipo b de los que hay en total. De forma más concreta, se pueden ver las condiciones de x dada la expresión de la función de masa presentada.

$$\begin{aligned}
& 0 \leq x \leq K \quad \wedge \quad 0 \leq n - x \leq N - K \\
\Leftrightarrow & \\
& 0 \leq x \leq K \quad \wedge \quad n + K - N \leq x \leq n \\
\Leftrightarrow & \\
& \max\{0, n+K-N\} \leq x \leq \min\{K, n\}
\end{aligned}$$

Sin embargo, tomando la convención de que $\binom{n}{k} = 0$ cuando $k > n$, se puede tomar a x entre 0 y n.

Para demostrar la validez de esta función de masa, hace falta un resultado sobre la combinatoria.

Lema (Identidad de Vandermonde)**:** Sean $m, n, k \in \mathbb{Z}$ no negativos. Entonces

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{r=0}^{k} \binom{m}{r}\binom{n}{k-r}$$

Esta identidad tiene sentido tomando la convención mencionada anteriormente.

Demostración: La demostración se hará por inducción sobre n, tomando m, k como enteros no negativos arbitrarios. Si $k \geq n+m$, la propiedad resulta trivial. Supóngase que $0 \leq k \leq n+m$.

Caso base ($n=0$):

$$\binom{m+0}{k} = \sum_{r=0}^{k} \binom{m}{r}\binom{0}{k-r} = \binom{m}{k}$$

Paso inductivo:

Nótese que para $k=0$, la identidad resulta en

$$1 = \sum_{r=0}^{0} \binom{m}{r}\binom{n}{0-r}$$

lo cual es cierto para todo $n, m \in \mathbb{Z}^+$. Supóngase que $k \geq 1$, y que la identidad se mantiene para $m \geq 0$. Entonces,

$$\binom{m+n+1}{k+1}$$

$$=$$

$$\binom{m+n}{k} + \binom{m+n}{k-1}$$

$$=$$

$$\sum_{r=0}^{k} \binom{m}{r}\binom{n}{k-r} + \sum_{r=0}^{k-1} \binom{m}{r}\binom{n}{k-1-r}$$

$$=$$

$$\binom{m}{k} + \sum_{r=0}^{k-1} \binom{m}{r}\left(\binom{n}{k-r} + \binom{n}{k-1-r}\right)$$

$$=$$

$$\binom{m}{n} + \sum_{k=0}^{k-1} \binom{m}{r}\binom{n}{k-r}$$

$$=$$

$$\sum_{k=0}^{k} \binom{m}{k}\binom{n+1}{k-r}$$

$\square$

Teorema 9: Sea $X \sim Hg(N, K, n)$. Entonces,

(i) para todo $x \in \mathbb{Z}$ con $0 \leq x \leq n$, $0 \leq P(X=x) \leq 1$.

(ii) $\displaystyle\sum_{x\in\mathbb{Z}} P(X=x)=1.$

(iii) $\mathrm{E}[X]=\dfrac{nK}{N}.$

(iv) $\mathrm{Var}[X]=\dfrac{n\,K(N-K)(N-n)}{N^2(N-1)}.$

Demostración:

(i) Sea $x\in\mathbb{Z}$ con $0\le x\le n$. Recordando que

$$P(X=x)=\frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

dado que todos los términos de la expresión son no negativos, se concluye que $P(X=x)\ge 0$. Para la otra parte de la desigualdad, recordando la identidad de Vandermonde, se tiene que

$$\binom{N}{n}=\sum_{x=0}^{n}\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}$$

Dado que la suma presentada es de términos no negativos, entonces, para todo $x\in\mathbb{Z}$ con $0\le x\le n$, se tiene que

$$\binom{N}{n}\ge\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}$$

(ii)

$$\sum_{x=0}^{n}P(X=x)$$

$$=$$

$$\sum_{x=0}^{n}\frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$=$$

$$\frac{1}{\binom{N}{n}}\sum_{x=0}^{n}\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}$$

$$=$$

$$\frac{\binom{N}{n}}{\binom{N}{n}}$$

$$=$$

$$1$$

(iii)

$$\mathrm{E}[X]$$

$$=$$

$$\sum_{x=0}^{n} x \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$=$$

$$\frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{x=0}^{n} x \binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}$$

$$=$$

$$\frac{K}{\binom{N}{n}} \sum_{x=1}^{n} \binom{K-1}{x-1}\binom{N-K}{n-x}$$

$$=$$

$$\frac{K}{\binom{N}{n}} \sum_{x=0}^{n-1} \binom{K-1}{x}\binom{N-K}{n-x-1}$$

$$=$$

$$\frac{K}{\binom{N}{n}} \binom{N-1}{n-1}$$

$$=$$

$$\frac{K\,n}{N}$$

(iv)

$$\mathrm{Var}[X]$$

$$=$$

$$\mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[X] - \mathrm{E}^2[X]$$

$$=$$

$$\frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{x=0}^{n} x^2 \binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x} - \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{x=0}^{n} x \binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x} + \frac{n\,K}{N} - \frac{n^2\,K^2}{N^2}$$

$$=$$

$$\frac{K}{\binom{N}{n}} \left[\sum_{x=0}^{n-1} x \binom{K-1}{x-1}\binom{N-K}{n-x-1} - \sum_{x=0}^{n-1} \binom{K-1}{x-1}\binom{N-K}{n-x-1}\right] + \frac{n\,K}{N} - \frac{n^2\,K^2}{N^2}$$

$$=$$

$$\frac{K(K-1)}{\binom{N}{n}} \sum_{x=0}^{n-2} \binom{K-2}{x}\binom{N-K}{n-x-2} + \frac{n\,K}{N} - \frac{n^2\,K^2}{N^2}$$

$$=$$

$$\frac{K(K-1)}{\binom{N}{n}} \binom{N-2}{n-2} + \frac{n\,K}{N} - \frac{n^2\,K^2}{N^2}$$

$$=$$

$$\frac{K(K-1)n(n-1)}{N(N-1)} + \frac{n\,K}{N} - \frac{n^2\,K^2}{N^2}$$

$$=$$

$$\frac{n\,K(N-K)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

□

5.1.3. Uniforme Discreta

Algunas distribuciones surgen por la función de masa que las define, más que por la similitud con un evento real, esto debido a resultados conocidos sobre los enteros en este caso.

Definición 5: Sea X una variable aleatoria discreta. X sigue una distribución uniforme discreta, de parámetros $n, m \in \mathbb{Z}$ $(n < m)$, denotada por $U_d(n, m)$, cuando su función de masa es

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{m-n+1} \qquad (n \leq x \leq m)$$

Teorema 10: Sea $X \sim U(n,m)$. Entonces,

(i) Para todo $x \in \mathbb{Z}$, $0 \leq P(X=x) \leq 1$.

(ii) $\sum_{x \in \mathbb{Z}} P(X=x) = 1$.

(iii) $\mathrm{E}[X] = \frac{n+m}{2}$

(iv) $\mathrm{Var}[X] = \frac{(m-n+1)^2 - 1}{12}$

Demostración:

(i) Se sigue inmediatamente de la definición.

(ii)

$$\sum_{x=n}^{m} \frac{1}{n+m+1} = \frac{n+m-1}{n+m-1} = 1$$

(iii)

$$\mathrm{E}[X]$$

$$= \sum_{x=n}^{m} \frac{x}{m-n+1}$$

$$= \frac{1}{m-n+1} \sum_{x=1}^{m-n+1} (x+n-1)$$

$$= \frac{1}{m-n+1} \left[\frac{(m-n+1)(m-n+2)}{2} + n(m-n+1) - (m-n+1) \right]$$

$$= \frac{m-n+2+2n-2}{2}$$

$$= \frac{m+n}{2}$$

(iv) Tomando $N = m-n+1$.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Var}[X] \\
=\ & \\
&\mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}^2[X] \\
=\ & \\
&\sum_{x=n}^{m} \frac{x^2}{m-n+1} - \left(\frac{n+m}{2}\right)^2 \\
=\ & \\
&\frac{1}{N} \sum_{x=1}^{m-n+1} (x+n-1)^2 - \left(\frac{n+m}{2}\right)^2 \\
=\ & \\
&\frac{1}{N} \left[\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + 2(n-1)\frac{N(N+1)}{2} + N(n-1)^2 \right] - \left(\frac{n+m}{2}\right)^2 \\
=\ & \\
&(N+1)\frac{2N+1+6n-6}{6} + (n-1)^2 - \left(\frac{n+m}{2}\right)^2 \\
=\ & \\
&(N+1)\frac{2N+6n-5}{6} + \left(n-1-\frac{n+m}{2}\right)\left(n-1+\frac{n+m}{2}\right) \\
=\ & \\
&(N+1)\frac{2N+6n-5}{6} + \left(\frac{n-m-2}{2}\right)\left(\frac{3n+m-2}{2}\right) \\
=\ & \\
&(N+1)\frac{2N+6n-5}{6} + \left(\frac{m-n+2}{2}\right)\left(\frac{2-3n-m}{2}\right) \\
=\ & \\
&(N+1)\frac{2(2N+6n-5)+3(2-3n+m)}{12} \\
=\ & \\
&(N+1)\frac{4N-3n-3m-4}{12} \\
=\ & \\
&(N+1)\frac{4m-4n+4-3n-3m-4}{12} \\
=\ & \\
&\frac{N^2-1}{12}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{(m-n+1)^2-1}{12}$$

$\square$

5.1.4. Poisson

Recordando que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, y que esta es una función creciente cuyo valor es estrictamente positivo, se genera una función la cual cumple la definición de función de masa, obteniendo la siguiente distribución.

Definición 6: Sea X una variable aleatoria discreta. X sigue una distribución de Poisson con parámetro $\lambda \in \mathbb{R}^+$, denotada por $\text{Pois}(\lambda)$, cuando su función de masa es

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad (x \in \mathbb{N})$$

Teorema 11: Sea $X \sim \text{Pois}(\lambda)$. Entonces,

(i) Para todo $x \in \mathbb{Z}$, $0 \leq P(X = x) \leq 1$.

(ii) $\sum_{x \in \mathbb{Z}} P(X = x) = 1$.

(iii) $\text{E}[X] = \lambda$.

(iv) $\text{Var}[X] = \lambda$.

Demostración:

(i) Sea $x \in \mathbb{N}$. Entonces

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

Como los términos involucrados son no negativos, se concluye que $P(X = x) \geq 0$. Para la otra parte de la desigualdad, dado que, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$e^\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$$

y la serie presentada es de términos no negativos para $\lambda \in \mathbb{R}^+$, se sigue que, para todo $x \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\lambda^x}{x!} \leq e^{\lambda}$$

Así, para todo $x \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq P(X = x) \leq 1$$

(ii)

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$
$$=$$
$$e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$$
$$=$$
$$e^{-\lambda} e^{\lambda}$$
$$=$$
$$1$$

(iii)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$
$$=$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{(x-1)!}$$
$$=$$
$$\lambda e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$$
$$=$$
$$\lambda$$

(iv)

$$\sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} - \lambda^2$$
$$=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{(x-1)!} - \lambda^2$$

$$=$$

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} - \lambda^2$$

$$=$$

$$\lambda^2 + \lambda - \lambda^2$$

$$=$$

$$\lambda$$

Para finalizar, se mostrará la validez de los procedimientos usados para estos cálculos. Se afirma que la serie $\sum_x \left| x^t \frac{\lambda^x}{x!} \right|$ converge para todo $t \in \mathbb{R}$. Por el criterio de la razón, cuando $x \to \infty$,

$$\left| (x+1)^t \frac{\lambda^{x+1} e^{\lambda}}{(x+1)!} \frac{x!}{x^t \lambda^x} \right| = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^t \frac{\lambda}{x+1} \to 0 < 1$$

La convergencia absoluta de la serie permite el reordenamiento de la misma y la separación en sumas. $\square$

5.2. Distribuciones Continuas

Las distribuciones continuas son aquellas cuyas funciones de densidad tienen dominio en un conjunto denso en si mismo, el cual en esta sección se asumirá como $\mathbb{R}$. De no ser especificado el valor de una función de densidad en algún subconjunto de $\mathbb{R}$, este se asumirá como 0.

5.2.1. Distribución Normal

Definición 7: Sea X una variable aleatoria continua. X tiene distribución normal de parámetros $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$ cuando su función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/\left(2\sigma^2\right)} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Esto se denotará como $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Teorema 12: Sean $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ y f la función de masa de X. Entonces,

(i) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 1$.

(iii) $\mathrm{E}[X] = \mu$.

(iv) $\mathrm{Var}[X] = \sigma^2$.

Para las integrales involucradas en los resultados del teorema es conveniente tener el siguiente resultado anterior a proceder con el teorema.

$$I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

$$I^2$$

$$=$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)$$

$$=$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\mathrm{d}y\right)$$

$$=$$

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$$=$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$$=$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2 - \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \leq 0\}} e^{-(x^2+y^2)} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

La validez de este último paso se justifica demostrando que la integral de esta función sobre el conjunto $\left\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \leq 0\right\}$ es nula. Esto se hará en dos momentos.

Inicialmente, se mostrará que la integral sobre el conjunto $\{(0,0)\}$ es nula. Para $n \in \mathbb{Z}^+$, se define la sucesión $K_n = [-1/n, 1/n]$. Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, K_n es compacto y $K_{n+1} \subseteq K_n$, luego $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{Z}^+} K_n \neq \varnothing$ y diam $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{Z}^+} K_n = 0$. Dado que, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, se tiene que $0 \in K_n$, entonces, $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{Z}^+} K_n = 0$.

Como el máximo de $\left|e^{-(x^2+y^2)}\right|$ es 1, y la longitud del contorno $K_n \times K_n$ es $4/n$, entonces,

$$\left| \int\limits_{K_n \times K_n} e^{-(x^2+y^2)} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \right| \leq \frac{4}{n}$$

Con esto se obtiene entonces que

$$\int_{\{(0,0)\}} e^{-(x^2+y^2)} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 0$$

Con esto, la integral sobre $\{(x,0) \,|\, x \leq 0\}$ coincide con la interal sobre $\{(x,0) \,|\, x < 0\} = \mathbb{R}^- \times \{0\}$. Para $n \in \mathbb{Z}^+$, se define la sucesión

$$S_n = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x < 0 \wedge \arctan\left|\frac{y}{x}\right| \leq \frac{1}{n} \right\} \cup \{0,0\}$$

Por definición, se obtiene que

$$(x,y) \in S_n$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(x,y) = (0,0) \vee \left(\forall n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}^+ \,:\, x < 0 \wedge \arctan\left|\frac{y}{x}\right| \leq \frac{1}{n} \right)$$

De esta última proposición, se obtiene que

$$\big(R^- \times \{0\}\big) \cup \{0,0\} \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{Z}^+} S_n$$

Ashora, supóngase que existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $(x, y) \in \bigcap_{n\in\mathbb{Z}^+} S_n - \big(\big(R^- \times \{0\}\big) \cup \{0,0\}\big)$. Es decir,

$$\left(\forall n \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}^+ \,:\, x < 0 \wedge \arctan\left|\frac{y}{x}\right| \leq \frac{1}{n}\right) \wedge y \neq 0$$

Lo cual es contradictorio, pues de ser el caso $a = \arctan\left|\frac{y}{x}\right| > 0$, pero existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $a > \frac{1}{N}$. Así, se concluye la igualdad

$$\bigcap_{n\in\mathbb{Z}^+} S_n = \big(R^- \times \{0\}\big) \cup \{(0,0)\}$$

Ahora, para mostrar que la integral sobre este conjunto es nula, se integrará sobre S_n. S_n, por el resultado previo, puede ser integrado sin tomar en cuenta $\{(0,0)\}$. De esta forma, una parametrización de $S_n - \{(0,0)\}$ es

$$\overrightarrow{t(r,\theta)} = \langle r\cos(\theta), r\sin(\theta)\rangle \qquad (r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times [\pi - {}^1/_n, \pi + {}^1/_n]$$

acomodando $\vec{t}$ para $\mathbb{R}^3$, el elemento de área es

$$\begin{aligned}
&\left|\vec{t_r} \times \vec{t_\theta}\right| \\
=& \\
&|\langle\cos(\theta), \sin(\theta), 0\rangle \times \langle -r\sin(\theta), r\cos(\theta), 0\rangle| \\
=& \\
&\left|\langle 0, 0, r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta)\rangle\right| \\
=& \\
&r
\end{aligned}$$

Por el resutlado anterior a cerca de la integral sobre $\{(0,0)\}$, se puede extender el dominio de vvt de forma que se pierda la biyección únicamente en $\{(0,0)\}$. Así, tomando $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, la integral sobre S_n resulta igual a

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \int_{\pi-{}^1/_n}^{\pi+{}^1/_n} re^{-r^2}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \\
=&
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{n}\int_0^\infty 2re^{-r^2}\mathrm{d}r$$
$$= \left\langle \text{Tomando } u = r^2 \right\rangle$$
$$\frac{1}{n}$$

Así,

$$\int_{\{(x,0)\in\mathbb{R}^2 \mid x\leq 0\}} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty}\int_{S_n} e^{-\left(x^2+y^2\right)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

Procediendo ahora sí con la integral sobre $\mathbb{R}^2 - \left\{(x,0)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x\leq 0\right\}$, se utilizará la misma parametrización que se mostró para el último resultado, únicamente cambiando su dominio por

$$(r,\theta)\in\mathbb{R}^+\times(-\pi,\pi)$$

Por el resutlado anterior, se puede extender el dominio a $\left(R^+\cup\{0\}\right)\times[-\pi,\pi]$. Así, I^2 resulta igual a

$$\int_0^\infty\int_{-\pi}^{\pi} re^{-r^2}\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$$
$$=$$
$$2\pi\int_0^\infty re^{-r^2}\mathrm{d}r$$
$$= \left\langle \text{Tomando } u = r^2 \right\rangle$$
$$\pi\int_0^\infty e^{-u}\mathrm{d}u$$
$$=$$
$$\pi$$

Con lo que, $I = \sqrt{\pi}$.

Continuando con la demostración del teorema

Demostración: Para las integrales implicadas en este resultado, se utilizará eventualmente el siguiente cambio de variable

$$t = \frac{x-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}}$$

Cuando $x\to\pm\infty$, $t\to\pm\infty$.

(i) Dado que todos los términos de la función de densidad son no negativos, se cumple.

(ii)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/\left(2\sigma^2\right)} \mathrm{d}x$$

$= \quad \langle$Haciendo uso del cambio de variable presentado$\rangle$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t$$

$=$

$$1$$

(iii)

$$\mathrm{E}[X]$$

$=$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} x\, e^{-(x-\mu)^2/\left(2\sigma^2\right)} \mathrm{d}x$$

$= \quad \langle$Haciendo uso del cambio de variable presentado$\rangle$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{\pi\sigma^2} t + \mu) e^{-t^2} \mathrm{d}t$$

$=$

$$\sqrt{\frac{2\sigma^2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2} \mathrm{d}t + \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t$$

$=$

$$\sqrt{\frac{2\sigma^2}{\pi}} \left(\lim_{R_1 \to \infty} \int_{-R_1}^{0} t e^{-t^2} \mathrm{d}t + \lim_{R_2 \to \infty} \int_{0}^{R_2} t e^{-t^2} \mathrm{d}t \right) + \mu$$

Para proceder con ambas integrales, se realiza el cambio de variable $u = x^2$, cuando $x = 0$, $u = 0$, cuando $x = \pm R_{1,2}$, $u = R_{1,2}^2$. Así

$$\sqrt{\frac{2\sigma^2}{\pi}} \left(\lim_{R_1 \to \infty} \int_{-R_1}^{0} t e^{-t^2} \mathrm{d}t + \lim_{R_2 \to \infty} \int_{0}^{R_2} t e^{-t^2} \mathrm{d}t \right) + \mu$$

$=$

$$\sqrt{\frac{2\sigma^2}{\pi}} \left(\lim_{R_1 \to \infty} - \int_{0}^{R_1} e^{-u} \mathrm{d}u + \lim_{R_2 \to \infty} \int_{0}^{R_2} e^{-u} \mathrm{d}u \right) + \mu$$

$=$

$$\sqrt{\frac{2\sigma^2}{\pi}} \left(\lim_{R_1 \to \infty} -1 + e^{-R_1} + \lim_{R_2 \to \infty} -e^{-R_2} + 1 \right) + \mu$$

$=$

μ

(iv)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}[X] \\
=\;& \\
&\mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X] \\
=\;& \\
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} x^2 e^{-(x-\mu)^2/\left(2\sigma^2\right)} \mathrm{d}x - \mu^2 \\
=\;& \langle \text{Haciendo uso del cambio de variable presentado} \rangle \\
&\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2\sigma^2}t + \mu)^2 e^{-t^2} \mathrm{d}t - \mu^2 \\
=\;& \\
&\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(2\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2} \mathrm{d}t + 2\sqrt{2\sigma^2}\mu \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2} \mathrm{d}t + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t \right) - \mu^2 \\
=\;& \\
&\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2} \mathrm{d}t \\
=\;& \\
&\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \left(\lim_{R_1 \to \infty} \int_{-R_1}^{0} t^2 e^{-t^2} \mathrm{d}t + \lim_{R_2 \to \infty} \int_{0}^{R_2} t^2 e^{-t^2} \mathrm{d}t \right)
\end{aligned}$$

Nótese que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{-t^2} = -2te^{-t^2}$, con lo que resulta conveniente hacer integración por partes tomando una de las funciones como t y la otra como te^{-t^2}. Así,

$$\begin{aligned}
&\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \left(\lim_{R_1 \to \infty} \int_{-R_1}^{0} t^2 e^{-t^2} \mathrm{d}t + \lim_{R_2 \to \infty} \int_{0}^{R_2} t^2 e^{-t^2} \mathrm{d}t \right) \\
=\;& \\
&\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \left(\lim_{R_1 \to \infty} R_1 \frac{e^{-R_1^2}}{2} + \frac{1}{2} \int_{-R_1}^{0} e^{-t^2} \mathrm{d}t + \lim_{R_2 \to \infty} -R_2 \frac{e^{-R_2^2}}{2} + \frac{1}{2} \int_{0}^{R_2} e^{-t^2} \mathrm{d}t \right) \\
=\;& \\
&\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$=$$

$$\sigma^2$$

□

5.2.2. Chi-cuadrada

Definición 8: Sea X una variable aleatoria continua, X tiene una distribución χ^2 con parámetro $v \in \mathbb{R}^+$ si su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{2^{v/2}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} x^{(v/2)-1} e^{-x/2} \qquad (x \geq 0)$$

Esto se denotará como $X \sim \chi^2(v)$.

Teorema 13: Sean $X \sim \chi^2(v)$ y f su función de densidad. Entonces:

(i) para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$

(ii) $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x = 1$

(iii) $\mathrm{E}[X] = v$

(iv) $\mathrm{Var}[X] = 2v$

Demostración:

(i) Dado que todos los factores del término que componen a f son no negativos, $f(x) \geq 0$ para todo $x \geq 0$.

(ii) Para demostrar esto, basta con demostrar que

$$\int_0^\infty x^{(v/2)-1} e^{-x/2}\mathrm{d}x = 2^{v/2}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)$$

El procedimiento inicia con el cambio de variable $u = \dfrac{x}{2}$. Si $x = 0$, $u = 0$ y si $x \to \infty$, $u \to \infty$. De la misma manera $\mathrm{d}u = \dfrac{1}{2}\mathrm{d}x$, por lo tanto $\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}u$, así:

$$\int_0^\infty x^{(v/2)-1} e^{-x/2}\mathrm{d}x$$

$$=$$

$$\int_0^\infty (2u)^{(v/2)-1} e^{-u} 2\mathrm{d}u$$

$$=$$

$$2^{v/2} \int_0^\infty u^{(v/2)-1} e^{-u} \mathrm{d}u$$

Recordando que la definición de la función Γ es

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t$$

Por lo que se obtiene:

$$\int_0^\infty x^{(v/2)-1} e^{-x/2} \mathrm{d}x = 2^{v/2} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)$$

Que es lo que se quería demostrar.

(iii) Para empezar la demostración, se hará la misma sustitución del item pasado.

$$\mathrm{E}[X]$$

$$=$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

$$=$$

$$\frac{1}{2^{v/2}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \int_0^\infty x^{v/2} e^{-x/2} \mathrm{d}x$$

$$= \quad \langle \text{Cambio de variable} \rangle$$

$$\frac{1}{2^{v/2}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \int_0^\infty (2u)^{v/2} e^{-u} 2\mathrm{d}u$$

$$=$$

$$\frac{2}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \int_0^\infty u^{v/2} e^{-u} \mathrm{d}u$$

$$= \quad \langle \text{Definición de } \Gamma \rangle$$

$$\frac{2}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{v}{2} + 1\right)$$

Por propiedad de la función Γ, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, la igualdad se transforma a lo siguiente:

$$\mathrm{E}[X] = \left(\frac{2}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\right)\left(\frac{v}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\mathrm{E}[X] = v$$

Lo que demuestra la propiedad

(iv) Nuevamente se utiliza el mismo cambio de variable para esta demostración.

$$\mathrm{Var}[X]$$

$$=$$

$$\mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}^2[X]$$

$$=$$

$$\frac{1}{2^{v/2}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\int_0^\infty x^2 x^{(v/2)-1}e^{-x/2}\mathrm{d}x - v^2$$

$$=$$

$$\frac{1}{2^{v/2}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\int_0^\infty x^{(v/2)+1}e^{-x/2}\mathrm{d}x - v^2$$

$$= \quad \langle\text{Cambio de variable}\rangle$$

$$\frac{1}{2^{v/2}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\int_0^\infty (2u)^{(v/2)+1}e^{-u}2\mathrm{d}u - v^2$$

$$=$$

$$\frac{1}{2^{v/2}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}2^{(v/2)+2}\int_0^\infty u^{(v/2)+1}e^{-u}\mathrm{d}u - v^2$$

$$= \quad \langle\text{Definición de }\Gamma\rangle$$

$$\frac{4}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{v}{2}+2\right) - v^2$$

$$= \quad \langle\text{propiedades de }\Gamma\rangle$$

$$\frac{4}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\left(\left(\frac{v}{2}+1\right)\left(\frac{v}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\right) - v^2$$

$$=$$

$$4\left(\frac{v+2}{2}\right)\left(\frac{v}{2}\right)-v^2$$

$$=$$

$$(v+2)(v)-v^2$$

$$=$$

$$v^2+2v-v^2$$

$$=$$

$$2v$$

Así, se obtiene que $\mathrm{Var}[X]=2v$, lo que concluye la demostración.

□

5.2.3. Distribucion F

Definición 9: Sean F una variable aleatoria continua. F tiene una distribución $\mathbf{f}$ de parámetros $u,v\in\mathbb{R}^+$, cuando su función de densidad es

$$f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{u+v}{2}\right)\left(\frac{u}{v}\right)^{u/2}}{\Gamma\left(\frac{u}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\frac{x^{(u/2)-1}}{\left(1+\frac{u}{v}x\right)^{(u+v)/2}}=\frac{\left(\frac{u}{v}\right)^{u/2}}{B\left(\frac{u}{2},\frac{v}{2}\right)}\frac{x^{(u/2)-1}}{\left(1+\frac{u}{v}x\right)^{(u+v)/2}}\qquad(x\in\mathbb{R}^+)$$

Esto se denotará como $F\sim\mathbf{f}(u,v)$.

Teorema 14: Sean $F\sim\mathbf{f}(u,v)$ y f su función de densidad. Entonces,

(i) Para todo $x\in\mathbb{R}$, $f(x)\geq 0$.

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x=1$.

(iii) $\mathrm{E}[F]=\dfrac{v}{v-2}\qquad(v>2)$

(iv) $\mathrm{Var}[F]=\dfrac{2v^2(u+v-2)}{u(v-2)^2(v-4)}\qquad(v>4)$

Demostración:

(i) Todos los términos de la expresión que define f son no negativos para $x \in \mathbb{R}^+$, con lo que se concluye $f(x) \geq 0$.

(ii) Basta mostrar la siguiente igualdad

$$\int_0^\infty \frac{x^{(u/2)-1}}{\left(1+\frac{u}{v}x\right)^{(u+v)/2}}\mathrm{d}x = \left(\frac{u}{v}\right)^{-u/2} B\left(\frac{u}{2},\frac{v}{2}\right)$$

Recordando que

$$B\left(\frac{u}{2},\frac{v}{2}\right) = \int_0^1 t^{(u/2)-1}(1-t)^{(v/2)-1}\mathrm{d}t$$

El procedimiento inicia con el siguiente cambio de variable:

$$\tan^2(\theta) = \frac{u}{v}x$$

Cuando $x = 0$, $\theta = 0$ y cuando $x \to \infty$, $\theta \to \pi/2$. Recordando que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\tan^2(\theta) = 2\tan(\theta)\sec^2(\theta)$, se obtienen las siguientes igualdades

$$\int_0^\infty \frac{x^{(u/2)-1}}{\left(1+\frac{u}{v}x\right)^{(u+v)/2}}\mathrm{d}x$$
$$=$$
$$2\frac{v}{u}\int_0^{\pi/2} \frac{\left(\frac{v}{u}\right)^{(u/2)-1}\tan^{u-2}(\theta)}{(1+\tan^2(\theta))^{(u+v)/2}}\tan(\theta)\sec^2(\theta)\mathrm{d}\theta$$
$$=$$
$$2\left(\frac{v}{u}\right)^{u/2}\int_0^{\pi/2} \frac{\tan^{u-1}(\theta)\sec^2(\theta)}{\sec^{u+v}(\theta)}\mathrm{d}\theta$$
$$=$$
$$2\left(\frac{v}{u}\right)^{u/2}\int_0^{\pi/2} \sin^{u-1}(\theta)\cos^{v-2}\cos(\theta)\mathrm{d}\theta$$

Para continuar, se realiza el cambio de variable

$$\tilde{n} = \sin(\theta)$$

Cuando $\theta = 0$, $\tilde{n} = 0$ y cuando $\theta = \pi/2$, $\tilde{n} = 1$. Por otra parte, dado que $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, entonces $\cos(\theta) = (1-\tilde{n}^2)^{1/2}$. Recordando que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sin(\theta) = \cos(\theta)$, se obtiene la siguiente igualdad

$$2\left(\frac{v}{u}\right)^{u/2}\int_0^{\pi/2}\sin^{u-1}(\theta)\cos^{v-2}\cos(\theta)\mathrm{d}\theta$$
$$=$$
$$2\left(\frac{v}{u}\right)^{u/2}\int_0^{1}\tilde{n}^{u-2}(1-\tilde{n}^2)^{(v/2)-1}\tilde{n}\,\mathrm{d}\tilde{n}$$

Por último, ser realiza el cambio de variable

$$t=\tilde{n}^2$$

Los límites de integración se mantienen. Recordando que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tilde{n}}\tilde{n}^2=2\tilde{n}$, se obtienen las siguientes igualdades

$$2\left(\frac{v}{u}\right)^{u/2}\int_0^{1}\tilde{n}^{u-2}(1-\tilde{n}^2)^{(v/2)-1}\tilde{n}\,\mathrm{d}\tilde{n}$$
$$=$$
$$2\left(\frac{v}{u}\right)^{u/2}\int_0^{1}\frac{1}{2}t^{(u/2)-1}(1-t)^{(v/2)-1}\mathrm{d}t$$
$$=$$
$$\left(\frac{v}{u}\right)^{u/2}B\left(\frac{u}{2},\frac{v}{2}\right)$$
$$=$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)^{-u/2}B\left(\frac{u}{2},\frac{v}{2}\right)$$

(iii) Denotando:

$$A=\frac{\left(\frac{u}{v}\right)^{u/2}}{B\left(\frac{u}{2},\frac{v}{2}\right)}$$

Que es el término constante de f. Manteniendo el cambio de variable se obtiene las siguientes igualdades:

$$\mathrm{E}[F]$$
$$=$$
$$A\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x$$
$$=$$
$$A\int_0^{\infty}x\frac{x^{(u/2)-1}}{\left(1+\frac{u}{v}x\right)^{(u+v)/2}}\mathrm{d}x$$
$$=$$
$$A\int_0^{\infty}\frac{x^{u/2}}{\left(1+\frac{u}{v}x\right)^{(u+v)/2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle \text{Cambio de variable} \rangle \\
&\quad A \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{v}{u}\tan^2(\theta)\right)}{(1+\tan^2(\theta))^{(u+v)/2}} \frac{2v}{u} \tan(\theta)\sec^2(\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \\
&\quad 2\left(\frac{v}{u}\right)^{(u/2)+1} A \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^{u+1}\theta}{(\sec^2(\theta))^{(u+1)/2}} \sec^2(\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \\
&\quad \left(\frac{v}{u}\right)^{(u/2)+1} A \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^{u+1}(\theta)\sec^{2-u-v}(\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \\
&\quad \left(\frac{v}{u}\right)^{(u/2)+1} A \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{u+1}(\theta)\cos^{v-3}(\theta)\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

Haciendo la sustitución presentada anteriormente $t = \sin(\theta)$, se continua como sigue:

$$2A\left(\frac{v}{u}\right)^{(u/2)+1} \int_0^1 t^{u+1}(1-t^2)^{\frac{(v-4)}{2}}\mathrm{d}t$$

Ahora, con la sustitución $w = t^2$. Cuando $t = 0$, $w = 0$, cuando $t = 1$, $w = 1$. Además, $\mathrm{d}w = 2t\mathrm{d}t$. Luego, la integral se transforma en:

$$\begin{aligned}
&A\left(\frac{v}{u}\right)^{(u/2)+1} \int_0^1 w^{u/2}(1-w)^{(v/2)-2}\mathrm{d}w \\
&= \langle \text{Definición de } B \rangle \\
&\quad A\left(\frac{v}{u}\right)^{(u/2)+1} B\left(\frac{u}{2}+1, \frac{v}{2}-1\right)
\end{aligned}$$

Recordando que $B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, y expandiendo A se obtiene la expresión:

$$\begin{aligned}
&\frac{\left(\frac{u}{v}\right)^{u/2}}{B\left(\frac{u}{2},\frac{v}{2}\right)} \left(\frac{v}{u}\right)^{(u/2)+1} \frac{\Gamma\left(\frac{u}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{v}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{u+v}{2}\right)} \\
&= \\
&\quad \left(\frac{v}{u}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{u+v}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{u}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{u}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{v}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{u+v}{2}\right)} \\
&= \\
&\quad \left(\frac{v}{u}\right) \frac{\frac{u}{2}\Gamma\left(\frac{u}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{u}{2}\right)\left(\frac{v}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{v}{2}-1\right)} \\
&=
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{v}{u}\right)\left(\frac{u}{2}\right)\frac{1}{\left(\frac{v}{2}-1\right)}$$

$$=$$

$$\left(\frac{v}{2}\right)\left(\frac{2}{v-2}\right)$$

$$=$$

$$\frac{v}{v-2}$$

Así, $\mathrm{E}[F] = \dfrac{v}{v-2}$.

(iv) Para demostrar la varianza, el procedimiento es casi identico al anterior. Se denota A de la misma manera, y se empieza con la sustituión $\dfrac{u}{v}x = \tan^2\theta$.

$$\mathrm{Var}[F]$$

$$=$$

$$\mathrm{E}[F^2] - \mathrm{E}^2[F]$$

$$=$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x - \left(\frac{v}{v-2}\right)^2$$

$$=$$

$$A\int_0^{\infty} x^2 \frac{x^{(u/2)-1}}{\left(1+\frac{u}{v}x\right)^{(u+v)/2}}\mathrm{d}x - \left(\frac{v}{v-2}\right)^2$$

$$=$$

$$A\int_0^{\infty} \frac{x^{(u/2)+1}}{\left(1+\frac{u}{v}x\right)^{(u+v)/2}}\mathrm{d}x - \left(\frac{v}{v-2}\right)^2$$

$$= \left\langle \text{Haciendo el cambio de variable } \frac{u}{v}x = \tan^2(\theta) \right\rangle$$

$$A\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{v}{u}\right)^{(u/2)+1}\left(\tan^2(\theta)\right)^{(u/2)+1}}{\left(1+\tan^2(\theta)\right)^{(u+v)/2}}\frac{2v}{u}\tan(\theta)\sec^2(\theta)\mathrm{d}\theta - \left(\frac{v}{v-2}\right)^2$$

$$=$$

$$2A\left(\frac{v}{u}\right)^{(u/2)+2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^{u+3}(\theta)}{\sec^{u+v-2}(\theta)}\mathrm{d}\theta - \left(\frac{v}{v-2}\right)^2$$

$$=$$

$$2A\left(\frac{v}{u}\right)^{(u/2)+2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{u+3}(\theta)\cos^{v-5}(\theta)\mathrm{d}\theta - \left(\frac{v}{v-2}\right)^2$$

$$= \langle \text{Tomando la sustitución } t = \sin(\theta) \rangle$$

$$
\begin{aligned}
& 2A\left(\frac{v}{u}\right)^{(u/2)+2}\int_0^1 t^{u+3}(1-t^2)^{(v-6)/2}\mathrm{d}t-\left(\frac{v}{v-2}\right)^2 \\
= \quad & \left\langle \text{Por la sustitución } w=t^2 \right\rangle \\
& A\left(\frac{v}{u}\right)^{(u/2)+2}\int_0^1 w^{(u/2)+1}(1-w)^{(v/2)-3}\mathrm{d}w-\left(\frac{v}{v-2}\right)^2 \\
= \quad & \langle \text{Definición de } B \text{ y expansión de } A \rangle \\
& \left(\frac{v}{u}\right)^{(u/2)+2}\left(\frac{u}{v}\right)^{u/2}\frac{\Gamma\left(\frac{u+v}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{u}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{u}{2}+2\right)\Gamma\left(\frac{v}{2}-2\right)}{\Gamma\left(\frac{u+v}{2}\right)}-\left(\frac{v}{v-2}\right)^2 \\
= \quad & \langle \text{Propiedades de } \Gamma \rangle \\
& \left(\frac{v}{u}\right)^2\frac{\left(\frac{u}{2}+1\right)\left(\frac{u}{2}\right)\Gamma\left(\frac{u}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v}{2}-2\right)}{\Gamma\left(\frac{u}{2}\right)\left(\frac{v}{2}-1\right)\left(\frac{v}{2}-2\right)\Gamma\left(\frac{v}{2}-2\right)}-\left(\frac{v}{v-2}\right)^2 \\
= \quad & \\
& \left(\frac{v}{u}\right)^2\left(\frac{u}{2}\right)\left(\frac{u+2}{2}\right)\left(\frac{2}{v-2}\right)\left(\frac{2}{v-4}\right)-\left(\frac{v}{v-2}\right)^2 \\
= \quad & \\
& \frac{v^2(u)(u+2)}{u^2(v-2)(v-4)}-\left(\frac{v}{v-2}\right)^2 \\
= \quad & \\
& \frac{v^2(u+2)}{u(v-2)(v-4)}-\left(\frac{v}{v-2}\right)^2 \\
= \quad & \\
& \frac{v^2(u+2)(v-2)-v^2u(v-4)}{u(v-2)^2(v-4)} \\
= \quad & \\
& \frac{v^2[(u+2)(v-2)-u(v-4)]}{u(v-2)^2(v-4)} \\
= \quad & \\
& \frac{v^2[uv-2u+2v-4-uv+4u]}{u(v-2)^2(v-4)} \\
= \quad & \\
& \frac{v^2[2u+2v-4]}{u(v-2)^2(v-4)} \\
= \quad & \\
& \frac{2v^2[u+v-2]}{u(v-2)^2(v-4)}
\end{aligned}
$$

Así $\mathrm{Var}[F]=\dfrac{2v^2(u+v-2)}{u(v-2)^2(v-4)}$, y se concluye la demotración

$\square$

5.2.4. Distribución Gamma

Definición 10: Sea X una variable aleatoria continua. X tiene distribución Gamma de parámetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, cuando su función de densidad es

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \qquad (x \in \mathbb{R}^+)$$

Teorema 15: Sean X una variable aleatoria continua con distribución Gamma de parámetros α, β y f su función de densidad. Entonces,

(i) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 1$.

(iii) $\mathrm{E}[X] = \dfrac{\alpha}{\beta}$

(iv) $\mathrm{Var}[X] = \dfrac{\alpha}{\beta^2}$

Demostración: Para las integrales implicadas en este resultado, se utilizará eventualmente el siguiente cambio de variable

$$t = \beta x$$

Cuando $x = 0$, $t = 0$ y cuando $x \to \infty$, $t \to \infty$.

(i) Todos los términos en la definición de f son no negativos, con lo que $f(x) \geq 0$.

(ii)

$$\int_0^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}\mathrm{d}x$$

$= \quad \langle$Haciendo uso del cambio de variable presentado$\rangle$

$$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\beta} \int_0^\infty \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-t}\mathrm{d}t$$

$=$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t}\mathrm{d}t$$

$=$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha)$$

$=$

$$1$$

(iii)

$$\mathrm{E}[X]$$

$=$

$$\int_0^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^\alpha e^{-\beta x} \mathrm{d}x$$

$=$ ⟨Haciendo uso del cambio de variable presentado⟩

$$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\beta} \int_0^\infty \left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha e^{-t} \mathrm{d}t$$

$=$

$$\frac{1}{\beta\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} \mathrm{d}t$$

$=$

$$\frac{1}{\beta\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha+1)$$

$=$

$$\frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{\beta\Gamma(\alpha)}$$

$=$

$$\frac{\alpha}{\beta}$$

(iv)

$$\mathrm{Var}[X]$$

$=$

$$\mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}^2[X]$$

$=$

$$\int_0^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha+1} e^{-\beta x} \mathrm{d}x - \frac{\alpha^2}{\beta^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle\text{Haciendo uso del cambio de variable presentado}\rangle \\
&\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\beta}\int_0^\infty \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha+1} e^{-t}\mathrm{d}t - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \\
&= \\
&\frac{1}{\beta^2\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha+1}e^{-t}\mathrm{d}t - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \\
&= \\
&\frac{1}{\beta^2\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha+2) - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \\
&= \\
&\frac{\alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)}{\beta^2\Gamma(\alpha)} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \\
&= \\
&\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \\
&= \\
&\frac{\alpha}{\beta^2}
\end{aligned}
$$

□

5.2.5. Distribución Weibull

Definición 11: Sea X una variable aleatoria continua. X tiene distribución Weibull de parámetros $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}^+$ cuando su función de densidad es

$$f(x) = \lambda^\alpha \alpha x^{\alpha-1} e^{-(\lambda x)^\alpha} \qquad (x > 0)$$

Teorema 16: Sean X una variable aleatoria continua con distribución Weibull de parámetros $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}^+$ y f su función de densidad. Entonces,

(i) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 1$.

(iii) $\mathrm{E}[X] = \dfrac{1}{\lambda\alpha}\Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$.

(iv) $\mathrm{Var}[X] = \dfrac{1}{\lambda^2\alpha}\left(2\Gamma\left(\dfrac{2}{\alpha}\right) + \dfrac{1}{\alpha}\Gamma^2\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)\right)$.

Demostración:

(i) Dado que los términos en la definición de f son no negativos, se concluye que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.

(ii)

$$\int_0^\infty \lambda^\alpha \alpha x^{\alpha-1} e^{-(\lambda x)^\alpha} \mathrm{d}x$$

$$= \quad \langle \text{Tomando } t = (\lambda x)^\alpha \rangle$$

$$\int_0^\infty e^{-t} \mathrm{d}t$$

$$=$$

$$1$$

(iii)

$$\mathrm{E}[X]$$

$$=$$

$$\int_0^\infty \lambda^\alpha \alpha x^\alpha e^{-(\lambda x)^\alpha} \mathrm{d}x$$

$$= \quad \left\langle \text{Tomando } t = (\lambda x)^\alpha,\ x = \frac{t^{1/\alpha}}{\lambda} \right\rangle$$

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^\infty t^{1/\alpha} e^{-t} \mathrm{d}t$$

$$=$$

$$\frac{1}{\lambda} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)$$

$$=$$

$$\frac{1}{\lambda\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

(iv)

$$\mathrm{Var}[X]$$

$$=$$

$$\mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}^2[X]$$

$$=$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty \lambda^\alpha \alpha x^{\alpha+1} e^{-(\lambda x)^\alpha} \mathrm{d}x - \frac{1}{\lambda^2\alpha^2}\Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}\right) \\
=& \left\langle \text{Tomando } t = (\lambda x)^\alpha,\ x = \frac{t^{1/\alpha}}{\lambda} \right\rangle \\
&\int_0^\infty \frac{t^{2/\alpha}}{\lambda^2} e^{-t} \mathrm{d}t - \frac{1}{\lambda^2\alpha^2}\Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}\right) \\
=& \\
&\frac{1}{\lambda^2}\left(\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha^2}\Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right) \\
=& \\
&\frac{1}{\lambda^2\alpha}\left(2\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha}\Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)
\end{aligned}
$$

□

5.3. Teoremas de Aproximación

Algunas de las funciones de distribución presentadas pueden involucrar cálculos de alta complejidad para computar. Esto motivó la búsqueda de aproximación entre funciones para los casos en los que posiblemente sea más complejo usar una función que otra. En esta sección, se presentarán algunos de los teoremas a cerca de la aproximación de la probabilidad de una distribución mediante otra.

5.3.1. Hipergeométrica a Binomial

Se puede ver una similitud entre la distribución binomial y la distribución hipergeométrica, pues si en esta última, manteniendo un tamaño de muestra (n) fijo, a medida que aumentan el total de objetos (N y K) bajo ciertas condiciones, los eventos que esta distribución describe tienen a ser independientes. Esto lleva al siguiente teorema de aproximación.

Teorema 17: Sea X una variable aleatoria con distribución hipergeométrica de parámetros N, K, n. Si para $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \mathbb{R}^+$, $n > 1$, $x > 0$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\frac{x-1}{K} &< \varepsilon_1 \\
\frac{n-x-1}{N-K} &< \varepsilon_2 \\
\frac{n-1}{N-n+1} &< \varepsilon_3
\end{aligned}
$$

entonces,

$$\left|\frac{Hg(N,K,n)(x)}{B\left(n,\dfrac{K}{N}\right)(x)}-1\right|<(\varepsilon+1)^{2n}-1$$

Nótese que la expresión en valor absoluto corresponde al error entre la función de masa de una distribución hipergeométrica y una binomial con ciertos parámetros.

Antes de comenzar con la demostración de este teorema, se presenta el siguiente lema, el cual será de utilidad para obtener el resultado presentado.

Lema: Sean $r \in \mathbb{Z}^+$, $\{S_{k,n}\}_1^r$ una colección de r sucesiones en función de n las cuales convergen a 1 y $\{\varepsilon_k\}_1^r$ una colección de r reales positivos. Si para un $N \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$1 \le k \le r \quad \wedge \quad n \ge N \quad \Rightarrow \quad |S_{k,n}-1| \le \varepsilon_k$$

entonces,

$$n \ge N \Rightarrow \left|\prod_{k=1}^{r} S_{k,n}-1\right| < \prod_{k=1}^{r}(\varepsilon_k+1)-1$$

Demostración: Supóngase la existencia de este N. Tomando una colección con $r+1$ sucesiones con una colección respectiva de cotas $\{\varepsilon_k\}_1^{r+1}$ para la diferencia de cada una con 1, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
&\left|\prod_{k=1}^{r+1} S_{k,n}-1\right| \\
=\;&\left|S_{r+1,n}\prod_{k=1}^{r} S_{k,n}-1\right| \\
=\;&\left|(S_{r+1,n}-1)\left(\prod_{k=1}^{r} S_{k,n}-1\right)+(S_{r+1,n}-1)+\left(\prod_{k=1}^{r} S_{k,n}-1\right)\right| \\
\le\;&\left|(S_{r+1,n}-1)\left(\prod_{k=1}^{r} S_{k,n}-1\right)\right|+|(S_{r+1,n}-1)|+\left|\left(\prod_{k=1}^{r} S_{k,n}-1\right)\right| \\
<\;&\left|\prod_{k=1}^{r} S_{k,n}-1\right|(\varepsilon_{r+1}+1)+\varepsilon_{r+1}
\end{aligned}$$

Se define entonces la siguiente función recursiva

$$f(1) = \varepsilon_1$$
$$f(n+1) = f(n)(\varepsilon_{n+1} + 1) + \varepsilon_{n+1}$$

Por el procedimiento anterior, es fácil ver que esta función cumple acotar la diferencia del producto de n sucesiones y 1 con las condiciones del enunciado. Se afirma que

$$f(n) = \prod_{k=1}^{n} (\varepsilon_k + 1) - 1$$

Caso base: $n = 1$, efectivamente $f(1) = \varepsilon_1$. Para $n = 2$, por definición

$$f(2) = \varepsilon_1(\varepsilon_2 + 1) + \varepsilon_2 = (\varepsilon_1 + 1)(\varepsilon_2 + 1) - 1$$

Paso inductivo: supóngase que, para algún $n \geq 2$,

$$f(n) = \prod_{k=1}^{n} (\varepsilon_k + 1) - 1$$

Entonces,

$$f(n+1)$$
$$=$$
$$f(n)(\varepsilon_{n+1} + 1) + \varepsilon_{n+1}$$
$$=$$
$$\left(\prod_{k=1}^{n} (\varepsilon_k + 1) - 1\right)(\varepsilon_{n+1} + 1) + \varepsilon_{n+1}$$
$$=$$
$$\prod_{k=1}^{n+1} (\varepsilon_k + 1) - \varepsilon_{n+1} - 1 + \varepsilon_{n+1}$$
$$=$$
$$\prod_{k=1}^{n+1} (\varepsilon_k + 1) - 1$$

Con lo que

$$n \geq N \Rightarrow \left| \prod_{k=1}^{r} S_{k,n} - 1 \right| < \prod_{k=1}^{r} (\varepsilon_k + 1) - 1$$

□

Siguiendo ahora con el teorema...

Demostración: Inicialmente, se expresará la función de masa de X en otros términos

$$\frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$=$$

$$\frac{K!}{(K-x)!\,x!} \frac{(N-K)!}{(N-K-n+x)!\,(n-x)!} \frac{(N-n)!\,n!}{N!}$$

$$=$$

$$\binom{n}{x} \frac{\prod_{i=1}^{K} i}{\prod_{i=1}^{K-x} i} \frac{\prod_{j=1}^{N-K} j}{\prod_{j=1}^{N-K-n+x} j} \frac{\prod_{s=1}^{N-n} s}{\prod_{s=1}^{N} s}$$

$$=$$

$$\binom{n}{x} \prod_{i=K-x+1}^{K} i \prod_{j=N-K-n+x+1}^{N-K} j \frac{1}{\prod_{s=N-n+1}^{N} s}$$

$$=$$

$$\binom{n}{x} \prod_{i=0}^{x-1} (K-i) \prod_{j=0}^{n-x-1} (N-K-j) \frac{1}{\prod_{s=0}^{n-1} (N-s)}$$

$$=$$

$$\binom{n}{x} \left(\frac{K}{N}\right)^x \left(\frac{N-K}{N}\right)^{n-x} \frac{\prod_{i=0}^{x-1} (K-i)}{K^x} \frac{\prod_{j=0}^{n-x-1} (N-K-j)}{(N-K)^{n-x}} \frac{N^n}{\prod_{s=0}^{n-1} (N-s)}$$

$$=$$

$$B\left(n, \frac{K}{N}\right)(x) \prod_{i=0}^{x-1} \left(1 - \frac{i}{K}\right) \prod_{j=0}^{n-x-1} \left(1 - \frac{j}{N-K}\right) \prod_{s=0}^{n-1} \left(1 + \frac{s}{N-s}\right)$$

En este proceso no se toma en cuenta el caso en el que $x = 0$ o $x = n$. Estos casos se resolverán posterior a tratar con la última expresión.

Tomando en cuenta este resultado,

$$\left| \frac{Hg(N,K,n)(x)}{B\left(n,\frac{K}{N}\right)(x)} - 1 \right|$$

$$=$$

$$\left| \prod_{i=0}^{x-1}\left(1-\frac{i}{K}\right)\prod_{j=0}^{n-x-1}\left(1-\frac{j}{N-K}\right)\prod_{s=0}^{n-1}\left(1+\frac{s}{N-s}\right)-1 \right|$$

Nótese que cada término en cada productorio tiende a 1 cuando $K, N, N-K$ tienden a infinito. Con esto basta para demostrar la convergencia, debido a que estas condiciones de tendencia para N, K y $N-K$ se deben a que $\frac{K}{N}$ debe ser un número entre 0 y 1.

En los productorios, se ven involucradas sucesiones las cuales convergen a 0 y además, son sencillas de acotar. Entonces, como

$$\left|1-\frac{i}{K}-1\right| = \frac{i}{K} \leq \frac{x-1}{K}$$

$$\left|1-\frac{j}{N-K}-1\right| = \frac{j}{N-K} \leq \frac{n-x-1}{N-K}$$

$$\left|1+\frac{s}{N-s}-1\right| = \frac{s}{N-s} \leq \frac{n-1}{N-n+1}$$

Dado que las expresiones a la derecha de cada desigualdad representan sucesiones decrecientes en función de N, K y $N-K$ respectivamente, se tiene que, si para valores de estas variables, se toman $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{K} &< \varepsilon_1 \\ \frac{n-x-1}{N-K} &< \varepsilon_2 \\ \frac{n-1}{N-n+1} &< \varepsilon_3 \end{aligned}$$

Entonces, por el lema,

$$\left|\prod_{i=0}^{x-1}\left(1-\frac{i}{K}\right)-1\right|<(\varepsilon_1+1)^x-1$$

$$\left|\prod_{j=0}^{n-x-1}\left(1-\frac{j}{N-K}\right)-1\right|<(\varepsilon_2+1)^{n-x}-1$$

$$\left|\prod_{s=0}^{n-1}\left(1+\frac{s}{N-s}\right)-1\right|<(\varepsilon_3+1)^n-1$$

Denotando cada uno de estos productos como P_1, P_2 y P_3 respectivamente, aplicando nuevamente el lema, se obtiene que

$$|P_1\,P_2\,P_3-1|<(\varepsilon_1+1)^x(\varepsilon_2+1)^{n-x}(\varepsilon_3+1)^n-1$$

Recordando que todo lo anterior se hizo bajo la suposición de que $x>0$ y $x\neq n$. Para $x=0$

$$\left|\frac{Hg(N,K,n)(0)}{B\left(n,\dfrac{K}{N}\right)(0)}-1\right|$$

$$=$$

$$\left|\frac{\dbinom{N-K}{n}}{\dbinom{N}{n}}\left(\frac{N-K}{N}\right)^{-n}-1\right|$$

$$=$$

$$\left|\prod_{j=0}^{n-1}\left(1-\frac{j}{N-K}\right)\prod_{s=0}^{n-1}\left(1+\frac{s}{N-s}\right)-1\right|$$

$<$ ⟨Aplicando el lema únicamente para las suceciones en estos productorios⟩

$$(\varepsilon_2+1)^n(\varepsilon_3+1)^n-1$$

Para $x=n$

$$\left|\frac{Hg(N,K,n)(n)}{B\left(n,\dfrac{K}{N}\right)(n)}-1\right|$$

$$=$$

$$\left|\frac{\binom{K}{n}}{\binom{N}{n}}\left(\frac{K}{N}\right)^{-n} - 1\right|$$

$$=$$

$$\left|\prod_{i=0}^{n-1}\left(1-\frac{i}{K}\right)\prod_{s=0}^{n-1}\left(1+\frac{s}{N-s}\right) - 1\right|$$

$<$ ⟨Aplicando el lema únicamente para las sucesiones en estos productos⟩

$$(\varepsilon_1 + 1)^n(\varepsilon_3 + 1)^n - 1$$

Para $n = 1$ o $n = 0$, el error es nulo. □

5.3.2. Teorema Central del Límite

Es de interés conocer la distribución de una variable aleatoria la cual se puede escribir como combinación de varias variables aleatorias. Estas combinaciones son llamadas *estadísticos*. Un ejemplo puede ser simplemente la suma o producto de dos variables aleatorias. Uno de los más simples pero a su vez el que llevó a uno de los resultados más importantes es el de la media.

Teorema 18: Sean $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ una colección de variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas, μ su media y σ^2 su varianza. Sean $\{S_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+} = \left\{\sum_{i=1}^{n} X_i\right\}$ y $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+} = \left\{\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right\}$. Entonces

$$Y_n \to N(0,1)$$

Demostración: Sin pérdida de generalidad, supóngase que $\mu = 0$. Sea ϕ la función característica de los elementos en $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$. Entonces,

$$\phi_{Y_n}(t)$$

$$=$$

$$\mathrm{E}\left[\exp\left(it\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]$$

$$=$$

$$\mathrm{E}\left[\prod_{k=1}^{n}\exp\left(\frac{itX_k}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]$$

$=$ ⟨Dado que las variables X_k son independientes⟩

$$\prod_{k=1}^{n} \mathrm{E}\left[\exp\left(\frac{itX_k}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]$$

$$=$$

$$\prod_{k=1}^{n} \phi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

$$=$$

$$\left[\phi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n$$

Recordando las propiedades de ϕ y cómo se calcula el valor esperado y varianza, se pueden obtener los primeros términos de su expansión en serie de Mclaurin.

$$\phi(t) = 1 + 0 + i^2\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \dots$$

$\square$