Análisis No Estandar

David Gómez

ESCUELA
COLOMBIANA
DE INGENIERÍA
JULIO GARAVITO

Física de Calor y Ondas

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

5 de diciembre de 2023

Índice

1. Introduccion

Cuando Newton y Leibniz trabajaron en la fundamentación del cálculo, una de sus diferencias fue la definición de límite. Mientras Newton lo definió de la forma en la que se ha enseñado principalmente, la definición ε y δ. Leibniz, lo definia de una forma que incluso parece una versión más amigable que la de Newton. Leibniz consideraba números infinitamente pequeños, de tal forma que fueran menores que cualquier número positivo pero mayores a 0. Junto con números infinitamente grandes, mayores que cualquier número positivo.

El problema de esta definición, se encontró cuando se intentó fundamentar formalmente. Cosa que Leibniz ni sus discípulos lograron demostrar. La definición de Newton recurre a los mismos números reales ya usados. La definición de Leibniz, recurre a una nueva especie de números, los cuales deben ser comparables y se deben poder operar con los reales. La idea entonces con esta nueva especie de números, es poder operar con estos, para posteriormente tomar el resultado y recuperar la información que interesa, la que corresponde a un valor real estándar. Esta nueva especie de números resulta tener aplicaciones en más áreas que el cálculo de límites, sin embargo, no hacen parte del objetivo de este proyecto, el cual consta de presentar esta idea en relación al análisis estándar, específicamente, el análisis diferencial.

Los pasos para la construcción de estos números, recurre a los filtros, un objeto de la teoría de conjuntos sobre el que se hablará en el documento. Con estos, se puede lograr la construcción de esta nueva especie de números sobre los reales.

2. Filtros

Los filtros son, como se mencionó, objetos de la teoría de conjuntos. Como su nombre indica, son objetos que filtran, de forma análoga a lo que puede hacer un colador. Para esta sección, se considerará I como un conjunto no vacío, esto último es necesario para la definición de filtro.

Definición 2.1: Un filtro $\mathcal{F}$ sobre I, es un conjunto no vacío de subconjuntos de I. $\mathcal{F}$ cumple las siguientes características:

(i) $\varnothing \notin \mathcal{F}$

(ii) $(\forall A, B \mid A, B \in \mathcal{F} \,:\, A \cap B \in \mathcal{F})$

(iii) $(\forall A, B \mid A \in \mathcal{F} \wedge A \subseteq B \,:\, B \in \mathcal{F})$

Para esta sección, la letra $\mathcal{F}$ denotará un filtro sobre I

Por ejemplo, considere el conjunto $X = \{a, b, c\}$. Un filtro G sobre X puede ser

$$G = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Nótese que por la definición de filtro, el conjunto sobre el que este se define, siempre debe ser un elemento del filtro.

Así como un colador puede ser más fino que otro, en el sentido que deja pasar menos cosas, también se pueden comparar a los filtros definidos sobre un conjunto.

Definición 2.2 (Relación de orden)**:** Un filtro $\mathcal{F}_1$ es más fino que un filtro $\mathcal{F}_2$ cuando $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1$

Volvamos al conjunto X definido para el ejemplo anterior. Sean G_1, G_2 filtros sobre X, y

$$G_1 = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}\ ,\ G_2 = \{\{a, b, c\}\}$$

Se puede ver que $G_2 \subseteq G_1$.

Se puede ver que hay filtros que no se pueden comparar, incluso en conjuntos tan simples como X. Si consideramos ahora un nuevo filtro
$G_3 = \{\{b\}, \{b, a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$, está claro que no se pueden comparar G_3 y G_1.

Definición 2.3: Sea $\mathscr{F}$ el conjunto de filtros definidos sobre I. Se define el concepto de ultrafiltro como un elemento maximal de $\mathscr{F}$ con la relación de orden definida anteriormente. Simbólicamente, un filtro $\mathscr{U}$ sobre I, es un ultrafiltro cuando

$$(\forall \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \in \mathscr{F} \; : \; \mathscr{U} \not\subset \mathcal{F})$$

Para esta sección, la letra $\mathscr{U}$ denotará un ultrafiltro sobre I.

Teorema 2.1 (Caracterizaciones)**:** Sea $\mathscr{U}$ un ultrafiltro sobre I. $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro si y solo si:

(i) $(\forall A \mid A \subseteq I \; : \; A \in \mathscr{U} \not\equiv I - A \in \mathscr{U})$

(ii) Sean $n \in \mathbb{N}$, $\{A_k\}$ una colección de n subconjuntos de I tal que

$$\bigcup_{k=0}^{n} A_k \in \mathscr{U}$$

entonces

$$(\exists k \mid k \leq n \; : \; A_k \in \mathscr{U})$$

Demostración (i)*:* Por un lado, se va a mostrar que si $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro, entonces se tiene la propiedad. Por contradicción, se va a suponer que $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro, y se tiene un subconjunto A de I, tal que $A \notin \mathscr{U} \wedge I - A \notin \mathscr{U}$. Una forma equivalente de escribir el punto (ii) de la definición de filtro es

$$(\forall A, B \mid A \subseteq B \; : \; B \notin \mathcal{F} \Rightarrow A \notin \mathcal{F})$$

Con esto se puede ver que ningún subconjunto, tanto de A como de $I - A$ es elemento de $\mathscr{U}$.

Sea $\mathscr{U}_2 = \{B \subseteq I \mid B \cup A \in \mathscr{U}\}$, se puede ver que $\mathscr{U} \subset \mathscr{U}_2$, en efecto

$$\begin{aligned} & B \in \mathscr{U} \\ \Rightarrow \; & \\ & B \cup A \in \mathscr{U} \\ \equiv \; & \\ & B \in \mathscr{U}_2 \end{aligned}$$

No son iguales, pues, por ejemplo, $I - A \cup A = I$, $I - A \in \mathscr{U}_2$.

Hace falta ver que $\mathscr{U}_2$ es un filtro.

(i) Por contradicción, es inmediato:

$$
\begin{aligned}
& \varnothing \in \mathscr{U}_2 \\
\equiv & \\
& A \in \mathscr{U}
\end{aligned}
$$

(ii) Sean $X, Y \in \mathscr{U}_2$

$$
\begin{aligned}
& X \cap Y \in \mathscr{U}_2 \\
\equiv & \\
& (X \cap Y) \cup A \in \mathscr{U} \\
\equiv & \\
& (X \cup A) \cap (Y \cup A) \in \mathscr{U}
\end{aligned}
$$

Como $X, Y \in \mathscr{U}_2$, se tiene que ambos términos de la intersección son elementos de $\mathscr{U}$. Como $\mathscr{U}$ es un filtro, por definición, esta intersección también es elemento de $\mathscr{U}$.

(iii) Sean $X \in \mathscr{U}_2$ y $Y \supseteq X$

$$
\begin{aligned}
& X \subseteq Y \\
\Rightarrow & \\
& X \cup A \subseteq Y \cup A \\
\Rightarrow & \quad \langle\ X \in \mathscr{U}_2 \text{ y } \mathscr{U} \text{ es un filtro } \rangle \\
& Y \cup A \in \mathscr{U} \\
\equiv & \\
& Y \in \mathscr{U}_2
\end{aligned}
$$

Entonces, se tiene que $\mathscr{U} \subset \mathscr{U}_2$ y $\mathscr{U}_2$ es un filtro sobre I. Lo cual contradice la hipótesis de que $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro.

Por el otro lado, de igual forma por contradicción. Se va a suponer que $\mathscr{U}$ es un filtro con la propiedad (i) y que $\mathscr{U}$ no es un ultrafiltro.

Como $\mathscr{U}$ no es un ultrafiltro, existe un filtro $\mathscr{U}_2$ tal que $\mathscr{U} \subset \mathscr{U}_2$.

$$
\begin{aligned}
& \mathscr{U}_2 - \mathscr{U} \neq \varnothing \\
\equiv & \\
& (\exists A \mid:\ A \in \mathscr{U}_2 - \mathscr{U}\ )
\end{aligned}
$$

$$\equiv \quad \langle \ \mathscr{U} \text{ cumple (i) y } A \notin \mathscr{U} \ \rangle$$

$$(\exists A \mid A \in \mathscr{U}_2 - \mathscr{U} \ : \ I - A \in \mathscr{U}\,)$$

$$\Rightarrow \quad \langle \ \mathscr{U} \subset \mathscr{U}_2 \ \rangle$$

$$(\exists A \mid A \in \mathscr{U}_2 - \mathscr{U} \ : \ I - A \in \mathscr{U}_2\,)$$

$$\equiv$$

$$(\exists A \mid A \notin \mathscr{U} \ : \ A \in \mathscr{U}_2 \wedge I - A \in \mathscr{U}_2\,)$$

$$\Rightarrow \quad \langle \text{ Definición de filtro } \rangle$$

$$(\exists A \mid A \notin \mathscr{U} \ : \ \varnothing \in \mathscr{U}_2\,)$$

Esto último contradice la definición de filtro, mostrando así que la suposición de que $\mathscr{U}$ no es un ultrafiltro, es incorrecta.

Demostración (ii)*:*