Análisis No Estandar

David Gómez

ESCUELA
COLOMBIANA
DE INGENIERÍA
JULIO GARAVITO

Matemáticas

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

17 de diciembre de 2023

Índice

1. Introduccion

En el análisis, el concepto de límite es uno de sus fundamentos, el cual se usa para definir todo tipo de operaciones o hallar resultados sobre algún objeto de la teoría, como puede ser una función. La definición usual de límite es la conocida "ε , δ". Sin embargo, en los inicios del cálculo, Leibniz intentó fundamentar otra definición, la cual consiste en usar *hiperreales*, que son una extensión de los reales con números infinitamente pequeños o infinitamente grandes. Dichos números debian comportarse, respectivamente, de la siguiente manera: un número infinitamente pequeño es menor que todo número real positivo pero mayor a 0, y un número infinitamente grande es mayor que todo número real. Leibniz sostenía que dichos números debían mantener las mismas propiedades que los números reales, en cierta manera.

El problema de esta definición, se encontró cuando se intentó fundamentar formalmente. Cosa que ni Leibniz, ni sus discípulos, lograron. Como se mencionó, esta definición recurre a una nueva especie de números, los cuales deben ser comparables y se deben poder operar con los reales. La idea, entonces, con esta nueva especie de números, es poder operar con estos, para posteriormente, tomar el resultado y recuperar la información que interesa, la que corresponde a un valor real estándar. Esta nueva especie de números resulta tener aplicaciones en más áreas que el cálculo de límites, sin embargo, no hacen parte del objetivo de este proyecto, el cual consta de presentar esta idea en relación al análisis estándar, específicamente, el análisis diferencial.

Los pasos para la construcción de estos números recurre a los filtros, objetos de la teoría de conjuntos sobre los que se hablará en el documento. Con estos, se puede lograr la construcción de esta nueva especie de números sobre los reales.

2. Filtros

Los filtros, como se mencionó, son objetos de la teoría de conjuntos, que, como su nombre indica, filtran de forma análoga a lo que puede hacer un colador. Para esta sección, se considerará I como un conjunto no vacío, esto último es necesario para la definición de filtro.

Definición 2.1: Un filtro $\mathcal{F}$ sobre I es un conjunto no vacío de subconjuntos de I el cual cumple las siguientes características:

(i) $\varnothing \notin \mathcal{F}$

(ii) $(\forall A, B \mid A, B \in \mathcal{F} : A \cap B \in \mathcal{F})$

(iii) $(\forall A, B \mid A \in \mathcal{F} \wedge A \subseteq B : B \in \mathcal{F})$

Para esta sección, la letra $\mathcal{F}$ denotará un filtro sobre I.

Por ejemplo, considere el conjunto $X = \{a, b, c\}$. Un filtro G sobre X puede ser

$$G = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Nótese que por la definición de filtro, el conjunto sobre el que este se define, siempre debe ser un elemento del filtro.

Definición 2.2: Sea $\mathcal{B}$ una colección no vacía de subconjuntos de I tal que

$$(\forall A, B \mid A, B \in \mathcal{B} : (\exists C \mid C \in \mathcal{B} : C \subseteq A \cap B))$$

Se dice entonces, que $\mathcal{B}$ es una base para algún filtro sobre I. Nótese que toda base genera un filtro, como puede ser

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq I \mid (\exists B \mid B \in \mathcal{B} : B \subseteq A)\}$$

Definición 2.3: Sea $\mathcal{S}$ una colección de subconjuntos de I tal que $\mathcal{S}$ cumpla la propiedad de las intersecciones finitas. Esto es, para toda colección finita de elementos de S, su intersección es distinta de $\varnothing$. Se dice entonces que $\mathcal{S}$ es una sub-base para algun filtro sobre I.

Así como un colador puede ser más fino que otro, en el sentido que deja pasar menos cosas, también se pueden comparar a los filtros definidos sobre un conjunto.

Definición 2.4 (Relación de orden)**:** Sea $\mathscr{F}$ el conjunto de filtros sobre I, la relación de contenencia ordena parcialmente a $\mathscr{F}$, y entre dos elementos se define de la siguiente manera:

Un filtro $\mathcal{F}_1$ es *más fino* que un filtro $\mathcal{F}_2$ cuando $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1$.

Como ejemplo, volvamos al conjunto X definido para el ejemplo anterior. Sean G_1, G_2 filtros sobre X, donde

$$G_1 = \{\{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}\ ,\ G_2 = \{\{a,b,c\}\}$$

Se puede ver que $G_2 \subseteq G_1$. Sin embargo, hay filtros que no se pueden comparar, incluso en conjuntos tan simples como podría ser X. Si consideramos ahora un nuevo filtro
$G_3 = \{\{b\}, \{b,a\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$, está claro que no se pueden comparar G_3 y G_1.

Definición 2.5: Sea $\mathscr{F}$ el conjunto de filtros definidos sobre I. Se define el concepto de ultrafiltro como un elemento maximal de $\mathscr{F}$ con la relación de orden definida anteriormente. Simbólicamente, un filtro $\mathscr{U}$ sobre I, es un ultrafiltro cuando

$$(\forall \mathcal{F} \,|\, \mathcal{F} \in \mathscr{F} \wedge \mathcal{F} \neq \mathscr{U}\ :\ \mathscr{U} \not\subset \mathcal{F})$$

Para esta sección, la letra $\mathscr{U}$ denotará un ultrafiltro sobre I.
Como ejemplo, se pueden tomar los filtros G_1 y G_3 de antes.

Teorema 2.1 (Caracterizaciones)**:** Sea $\mathscr{U}$ un ultrafiltro sobre I. $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro si y solo si:

(i) $(\forall A \mid A \subseteq I \,:\, A \in \mathscr{U} \not\equiv I - A \in \mathscr{U})$

(ii) Sean $n \in \mathbb{J}$, $\{A_k\}$ una colección de n subconjuntos de I tal que

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{U}$$

entonces

$$(\exists k \mid k \leq n \,:\, A_k \in \mathscr{U})$$

Demostración (i)***:*** Por un lado, se va a mostrar que si $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro, entonces se tiene la propiedad. Por contradicción, se va a suponer que $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro, y se tiene un subconjunto A de I, tal que $A \notin \mathscr{U} \wedge I - A \notin \mathscr{U}$. Una forma equivalente de escribir el punto (iii) de la definición de filtro es

$$(\forall A, B \mid A \subseteq B \,:\, B \notin \mathcal{F} \Rightarrow A \notin \mathcal{F})$$

Con esto se puede ver que ningún subconjunto, tanto de A como de $I - A$ es elemento de $\mathscr{U}$.

Sea $\mathscr{U}_2 = \{B \subseteq I \mid B \cup A \in \mathscr{U}\}$, se puede ver que $\mathscr{U} \subset \mathscr{U}_2$, en efecto

$$\begin{aligned} & B \in \mathscr{U} \\ \Rightarrow & \\ & B \cup A \in \mathscr{U} \\ \equiv & \\ & B \in \mathscr{U}_2 \end{aligned}$$

No son iguales, pues, por ejemplo, $I - A \cup A = I$, $I - A \in \mathscr{U}_2$.

Hace falta ver que $\mathscr{U}_2$ es un filtro.

(i) Por contradicción, es inmediato:

$$\begin{aligned} & \varnothing \in \mathscr{U}_2 \\ \equiv & \\ & A \in \mathscr{U} \end{aligned}$$

(ii) Sean $X, Y \in \mathscr{U}_2$

$$\begin{aligned} & X \cap Y \in \mathscr{U}_2 \\ \equiv & \\ & (X \cap Y) \cup A \in \mathscr{U} \\ \equiv & \\ & (X \cup A) \cap (Y \cup A) \in \mathscr{U} \end{aligned}$$

Como $X, Y \in \mathscr{U}_2$, se tiene que ambos términos de la intersección son elementos de $\mathscr{U}$. Como $\mathscr{U}$ es un filtro, por definición, esta intersección también es elemento de $\mathscr{U}$.

(iii) Sean $X \in \mathscr{U}_2$ y $Y \supseteq X$

$$\begin{aligned} & X \subseteq Y \\ \Rightarrow & \\ & X \cup A \subseteq Y \cup A \\ \Rightarrow & \quad \langle\, X \in \mathscr{U}_2 \text{ y } \mathscr{U} \text{ es un filtro} \,\rangle \\ & Y \cup A \in \mathscr{U} \\ \equiv & \\ & Y \in \mathscr{U}_2 \end{aligned}$$

Entonces, se tiene que $\mathscr{U} \subset \mathscr{U}_2$ y $\mathscr{U}_2$ es un filtro sobre I. Lo cual contradice la hipótesis de que $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro.

Por el otro lado, de igual forma por contradicción, se va a suponer que $\mathscr{U}$ es un filtro con la propiedad (i) y que $\mathscr{U}$ no es un ultrafiltro.

Como $\mathscr{U}$ no es un ultrafiltro, por el lema del ultrafiltro, existe un filtro $\mathscr{U}_2$ tal que $\mathscr{U} \subset \mathscr{U}_2$.

$$
\begin{aligned}
& \mathscr{U}_2 - \mathscr{U} \neq \varnothing \\
\equiv & \\
& (\exists A \,|\!: \; A \in \mathscr{U}_2 - \mathscr{U}) \\
\equiv & \quad \langle \; \mathscr{U} \text{ cumple (i) y } A \notin \mathscr{U} \; \rangle \\
& (\exists A \,|\, A \in \mathscr{U}_2 - \mathscr{U} \; : \; I - A \in \mathscr{U}) \\
\Rightarrow & \quad \langle \, \mathscr{U} \subset \mathscr{U}_2 \, \rangle \\
& (\exists A \,|\, A \in \mathscr{U}_2 - \mathscr{U} \; : \; I - A \in \mathscr{U}_2) \\
\equiv & \\
& (\exists A \,|\, A \notin \mathscr{U} \; : \; A \in \mathscr{U}_2 \wedge I - A \in \mathscr{U}_2) \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{ Definición de filtro } \rangle \\
& (\exists A \,|\, A \notin \mathscr{U} \; : \; \varnothing \in \mathscr{U}_2)
\end{aligned}
$$

Esto último contradice la definición de filtro, mostrando así que la suposición de que $\mathscr{U}$ no es un ultrafiltro, es incorrecta.

Demostración (ii)***:*** Como ya se demostró la equivalencia entre la definición de ultrafiltro y (i), se va a usar esta última.

Por un lado, se va a mostrar que (i) $\Rightarrow$ (ii). Sean $\mathscr{U}$ un ultrafiltro sobre I, $n \in \mathbb{N}$ y $\{A_k\}$ una colección de conjuntos de I tal que su unión esté en $\mathscr{U}$. Se va a mostrar que existe un elemento de esta colección que está en $\mathscr{U}$. Para esto, se va a suponer que no existe dicho elemento, es decir:

$$
\begin{aligned}
& \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{U} \wedge (\forall k \,|\, 1 \leq k \leq n \; : \; A_k \notin \mathscr{U}) \\
\equiv & \quad \langle \, \text{(i)} \, \rangle
\end{aligned}
$$

$$\bigcap_{k=0}^{n}(I-A_k)\notin \mathscr{U} \wedge (\forall k\,|\,1\leq k\leq n\,:\,I-A_k\in \mathscr{U})$$

Esta última expresión es contradictoria, pues por definición, las intersecciones finitas de elementos de filtros son elementos de los filtros (propiedad (ii) de la definición). Justamente se tiene que todos los elementos de una intersección finita son elementos de $\mathscr{U}$, y su intersección no es elemento del filtro, Así (i) $\Rightarrow$ (ii).

Por otro lado, se va a mostrar que (ii) $\Rightarrow$ (i). Sea $\mathscr{U}$ un ultrafiltro sobre I. Suponiendo que se cuenta con (ii). Sean $F\in\mathscr{U}$, $A_1=F$ y $A_2=I-F$. Como $\bigcup_{k=1}^{2}A_k=I$ y $I\in\mathscr{U}$, por (ii), al menos uno de los A_k debe pertenecer a $\mathscr{U}$. Por definición de filtro, no puede ser que ambos sean elementos de $\mathscr{U}$ y (ii) garantiza que no puede ser que ninguno sea elemento de $\mathscr{U}$. Es decir, $A_1\in\mathscr{U}\not\equiv A_2\in\mathscr{U}$, que reemplazando, es (i). Así (ii) $\Rightarrow$ (i).

Definición 2.6: Un filtro $\mathcal{F}$ es llamado δ-incompleto cuando existe una colección contable de subconjuntos de I, tal que todos sus elementos estén en $\mathscr{U}$ y su intersección no. Es decir, si existe $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que, para todo $n\in\mathbb{N}$, $F_n\in\mathscr{U}$ y $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}F_n\notin\mathscr{U}$. Un filtro es llamado δ-completo cuando no es δ-incompleto.

Teorema 2.2 (Caracterización)**:** Un ultrafiltro $\mathscr{U}$ es δ-incompleto si y solo si, existe $\{I_n\}$, una partición contable de I, tal que, para todo n, $I_n\notin\mathscr{U}$.

Demostración: Sean $\mathscr{U}$ un ultrafiltro δ-incompleto sobre I y $\{F_n\}_{n\in\mathbb{J}}$ una colección de subconjuntos de I, la cual cumple la definición de δ-incompleto en $\mathscr{U}$. Se tiene entonces que

$$
\begin{aligned}
&(\forall n\,|\,n\in\mathbb{J}\,:\,F_n\in\mathscr{U})\wedge\bigcap_{n\in\mathbb{J}}F_n\notin\mathscr{U}\\
\equiv\;&\langle\;\mathscr{U}\text{ es un ultrafiltro }\rangle\\
&(\forall n\,|\,n\in\mathbb{J}\,:\,I-F_n\notin\mathscr{U})\wedge\bigcup_{n\in\mathbb{J}}(I-F_n)\in\mathscr{U}
\end{aligned}
$$

Sea $\{B_n\}_{n\in\mathbb{J}}$ una colección de subconjuntos de I, definida por $B_n = \bigcup_{k=1}^{n}(I - F_k)$. Nótese que, los elementos de B_n están contenidos consecutivamente, esto es

$$(\forall n, m \,|\, n, m \in \mathbb{J} \wedge n \leq m \,:\, B_n \subseteq B_m)$$

Sea $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una colección de subconjuntos de I definida por

$$\begin{Bmatrix} I_0 = \bigcap_{k\in\mathbb{J}} F_k \\ I_{n+1} = B_{n+1} - B_n \end{Bmatrix}$$

Se va a mostrar que $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una partición de I tal que, para todo n, $I_n \notin \mathscr{U}$. Es evidente que $I_0 \notin \mathscr{U}$, pues se tiene en la definición de $\{F_n\}$.

$$I_{n+1}$$

$$=$$

$$B_{n+1} - B_n$$

$$=$$

$$\bigcup_{k=1}^{n+1}(I - F_k) - \bigcup_{k=1}^{n}(I - F_k)$$

$$=$$

$$\left((I - F_{n+1}) \cup \bigcup_{k=1}^{n}(I - F_k)\right) \cap \left(I - \bigcup_{k=1}^{n}(I - F_k)\right)$$

$$=$$

$$\left((I - F_{n+1}) \cap \left(I - \bigcup_{k=1}^{n}(I - F_k)\right)\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n}(I - F_k) \cap \left(I - \bigcup_{k=1}^{n}(I - F_k)\right)\right)$$

$$=$$

$$(I - F_{n+1}) \cap \bigcap_{k=1}^{n} F_k$$

Se puede ver que, para todo $n \in \mathbb{J}$, $I_n \subseteq I - F_n$. Por la definición de filtro, nuevamente el punto (iii), para todo $k \in \mathbb{J}$, nunguno de los subconjuntos de I_k es elemento de $\mathscr{U}$, así, para todo $n \in \mathbb{N}$, $I_n \notin \mathscr{U}$.

Por como se definió I_n para $n \in \mathbb{J}$, se puede ver que sus elementos son disjuntos. Asimismo, al ser estos subconjuntos de $I - F_n$ respectivamente, son disjuntos con I_0. Esto último se verá de forma más clara al corroborar que la unión de la colección sea efectivamente I.

$$\bigcup_{n \in \mathbf{J}} I_n$$
$$=$$
$$\bigcup_{n \in \mathbf{J}} B_n$$
$$=$$
$$\bigcup_{n \in \mathbf{J}} (I - F_n)$$

Para finalizar la demostración, se tomará el complemento de esta unión, la cual es disjunta con dicha unión y además, su unión es I.

$$I - \bigcup_{n \in \mathbf{J}} (I - F_n)$$
$$=$$
$$\bigcap_{n \in \mathbf{J}} F_n$$
$$=$$
$$I_0$$

Nótese que la existencia de un ultrafiltro δ-incompleto sobre un conjunto, requiere que dicho conjunto sea infinito.

Teorema 2.3: Sea I un conjunto infinito, entonces, existe un ultrafiltro δ-incompleto sobre I.

Demostración: Sea $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una partición contable de I. Defínanse A y $\mathcal{B}$ como:

$$A = \{I_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{S \subseteq I \mid S \text{ es finito}\}$$
$$\mathcal{B} = \{I - S \mid S \in A\}$$

Si $\mathcal{B}$ es una sub-base, entonces existe un filtro asociado $\mathcal{F}$, el cual debe estar contenido en un ultrafiltro $\mathcal{U}$ por el lema del ultrafiltro. por como se definió $\mathcal{B}$, se tendría que, para todo n, $I - I_n \in \mathcal{U}$.

La condición necesaria para que $\mathcal{B}$ sea una sub-base, es que cumpla la propiedad de las intersecciones finitas. Sean P_1, P_2 subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, y $\{H_n\}_{n\in P_2}$ una colección de subconjuntos finitos de I.

$$\bigcap_{n\in P}(I - I_n) \cap \bigcap_{n\in P_2}(I - H_n)$$
$$=$$
$$I - \left(\bigcup_{n\in P_1} I_n \cup \bigcup_{n\in P_2} H_n\right)$$

Nótese que, $\bigcup_{n\in I-P_1} I_n$ es un subconjunto infinito de I. También, se tiene que $\bigcup_{n\in P_2} H_n$ es un subconjunto finito de I. Con esto se demuestra que la intersección presentada es distinta de $\varnothing$. Con lo cual, $\mathcal{B}$ es una sub-base.

3. Superestructura $\widehat{\mathbb{R}}$

El objetivo de la superestructura es poder agrupar todas las relaciones definidas en un conjunto. En este caso $\mathbb{R}$. Debido a que las n-uplas se definen recursivamente de la siguiente manera:

$$(a) = a$$
$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$
$$(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) = ((a_1, \ldots, a_n), a_{n+1})$$

Se puede demostrar que $(a, b) \in A \times B \Rightarrow (a, b) \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(A \cup B))$. Debido a esto, es posible definir un conjunto el cual contenga todas las relaciones entre números reales. Se define la colección $\mathbb{R}_n$ de la siguiente manera:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \\ \mathbb{R}_{n+1} = \mathscr{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} \mathbb{R}_k\right) \end{array}\right\}$$

Se define entonces, la superestructura $\widehat{\mathbb{R}}$ por

$$\widehat{\mathbb{R}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n$$

Los elementos de $\widehat{\mathbb{R}}$ serán llamados *entidades* y los elementos de $\mathbb{R}$ serán llamados *individuos*.

Lema 3.1 (Propiedades de $\mathbb{R}_n$):

(i) $(\forall n, m \,|\, n, m \in \mathbb{N} \wedge n \leq m : \mathbb{R}_{n+1} \subseteq \mathbb{R}_{m+1})$

(ii) $\left(\forall n \middle| n \in \mathbb{N} : \bigcup_{k=0}^{n} \mathbb{R}_k = \mathbb{R}_0 \cup \mathbb{R}_n\right)$

(iii) $(\forall n, m \,|\, n, m \in \mathbb{N} \wedge n \leq m : R_n \in \mathbb{R}_{m+1})$

(iv) $(\forall n, x, y \,|\, n \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{R}_{n+1} \wedge x \in y \,:\, x \in \mathbb{R}_0 \cup \mathbb{R}_n)$

Demostración:

(i) Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n \leq m$.

$$
\begin{aligned}
& x \in \mathbb{R}_{n+1} \\
\equiv & \\
& x \subseteq \bigcup_{k=0}^{n} \mathbb{R}_k \\
\Rightarrow & \\
& x \subseteq \bigcup_{k=0}^{m} \mathbb{R}_k \\
\equiv & \\
& x \in \mathbb{R}_{m+1}
\end{aligned}
$$

(ii) Sea $n \in \mathbb{N}$, si $n = 0$ no hay algo que demostrar. Para $n \in \mathbb{J}$:

$$
\begin{aligned}
& x \in \bigcup_{k=0}^{n} \mathbb{R}_k \\
\equiv & \\
& x \in \mathbb{R}_0 \vee x \in \bigcup_{k=1}^{n} \mathbb{R}_k \\
\equiv & \quad \langle \text{ (i) } \rangle \\
& x \in \mathbb{R}_0 \vee x \in \mathbb{R}_n \\
\equiv & \\
& x \in \mathbb{R}_0 \cup \mathbb{R}_n
\end{aligned}
$$

(iii) Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n \leq m$.

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{R}_n \subseteq \bigcup_{k=0}^{m} \mathbb{R}_k \\
\equiv & \\
& \mathbb{R}_n \in \mathscr{P}\left(\bigcup_{k=0}^{m} \mathbb{R}_k\right)
\end{aligned}
$$

$$\equiv$$

$$\mathbb{R}_n \in \mathbb{R}_{m+1}$$

(iv) Sean $n \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{R}_{n+1}$ y $x \in y$.

$$x \in y \wedge y \in \mathbb{R}_{n+1}$$

$$\equiv \quad \langle \text{(i)} \rangle$$

$$x \in y \wedge y \subseteq \mathbb{R}_0 \cup \mathbb{R}_n$$

$$\Rightarrow$$

$$x \in \mathbb{R}_0 \cup \mathbb{R}_n$$

4. Ultrapotencia de $\widehat{\mathbb{R}}$

En esta sección se definirá una estructura la cual es una ultrapotencia de $\widehat{\mathbb{R}}$.

Sean I un conjunto infinito, $\mathscr{U}$ un ultrafiltro δ-incompleto sobre I, y $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una partición contable la cual cumple la definición de δ-incomleto en $\mathscr{U}$.

Considere ahora el conjunto ${}^{I}\widehat{\mathbb{R}}$, de las funciones de I en $\widehat{\mathbb{R}}$. Sea $a \in \widehat{\mathbb{R}}$, se define ${}^{*}a \in {}^{I}\widehat{\mathbb{R}}$ por ${}^{*}a(i) = a$. Esta función, definida para todas las entidades, es una forma de incorporar $\widehat{\mathbb{R}}$ en ${}^{I}\widehat{\mathbb{R}}$. Se puede definir una extensión de las relaciones '$=$' y '$\in$' basadas en $\mathscr{U}$

Definición 4.1: Sean $a, b \in {}^{I}\widehat{\mathbb{R}}$

(i) $a =_{\mathscr{U}} b \equiv \{i \,|\, a(i) = b(i)\} \in \mathscr{U}$

(ii) $a \in_{\mathscr{U}} b \equiv \{i \,|\, a(i) \in b(i)\} \in \mathscr{U}$

Sean $a, b \in {}^{I}\widehat{\mathbb{R}}$, estas relaciones se comportan de la misma forma que su versión usual, esto es:

- $a =_{\mathscr{U}} b \not\equiv a \neq_{\mathscr{U}} b$
- $a \in_{\mathscr{U}} b \not\equiv a \notin_{\mathscr{U}} b$

Demostración: Sean $a, b \in {}^{I}\widehat{\mathbb{R}}$. Nótese que $\{i \,|\, a(i) = b(i)\} \cup \{i \,|\, a(i) \neq b(i)\} = I$. Esto mismo sucede con '$\in$'.

$a =_{\mathscr{U}} b$	$a \in_{\mathscr{U}} b$
$\equiv$	$\equiv$
$\{i \,|\, a(i) = b(i)\} \in \mathscr{U}$	$\{i \,|\, a(i) \in b(i)\} \in \mathscr{U}$
$\not\equiv$ $\langle$ $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro $\rangle$	$\not\equiv$ $\langle$ $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro $\rangle$
$\{i \,|\, a(i) \neq b(i)\} \notin \mathscr{U}$	$\{i \,|\, a(i) \notin b(i)\} \notin \mathscr{U}$

Antes de continuar, se aclarará algo de la notación. Sean $a \in {}^{I}\widehat{\mathbb{R}}$, $(b_1, \ldots, b_m)$ una m-upla de elmentos de ${}^{I}\widehat{\mathbb{R}}$ y V un predicado en $\widehat{\mathbb{R}}$ con $c_1, \ldots, c_n$ constantes las cuales denotan elementos fijos de $\widehat{\mathbb{R}}$.

- $\{a\}(i) = \{a(i)\}$
- $(b_1, \ldots, b_m)(i) = (b_1(i), \ldots, b_m(i))$
- ${}^{*}V = V$ reemplazando cada c_i por ${}^{*}c_i$.

Sean $a, b \in {}^{I}\widehat{\mathbb{R}}$, otra propiedad que se tiene, en este caso para la igualdad bajo $\mathscr{U}$ es:

$$a =_{\mathscr{U}} b \equiv \left(\forall c \,\middle|\, c \in {}^{I}\widehat{\mathbb{R}} \,:\, a \in_{\mathscr{U}} c \equiv b \in_{\mathscr{U}} c\right)$$

Demostración: La demostración se hará por doble implicación. Suponiendo que $a =_{\mathscr{U}} b$. Sea $c \in {}^{I}\widehat{\mathbb{R}}$.

$a \in_{\mathscr{U}} c \wedge a =_{\mathscr{U}} b$	$b \in_{\mathscr{U}} c \wedge a =_{\mathscr{U}} b$
$\equiv$	$\equiv$
$\{i \mid a(i) \in c(i)\} \in \mathscr{U}$	$\{i \mid b(i) \in c(i)\} \in \mathscr{U}$
$\wedge$	$\wedge$
$\{i \mid a(i) = b(i)\} \in \mathscr{U}$	$\{i \mid a(i) = b(i)\} \in \mathscr{U}$
$\Rightarrow$ ⟨ Definición de filtro ⟩	$\Rightarrow$ ⟨ Definición de filtro ⟩
$\{i \mid a(i) \in c(i) \wedge a(i) = b(i)\} \in \mathscr{U}$	$\{i \mid b(i) \in c(i) \wedge a(i) = b(i)\} \in \mathscr{U}$
$\Rightarrow$ ⟨ Definición de filtro ⟩	$\Rightarrow$ ⟨ Definición de filtro ⟩
$\{i \mid b(i) \in c(i)\} \in \mathscr{U}$	$\{i \mid a(i) \in c(i)\} \in \mathscr{U}$
$\equiv$	$\equiv$
$b \in_{\mathscr{U}} c$	$a \in_{\mathscr{U}} c$

Por el otro lado:

$$\left(\forall c \middle| c \in {}^{I}\widehat{\mathbb{R}} \,:\, a \in_{\mathscr{U}} c \equiv b \in_{\mathscr{U}} c\right)$$
$$\Rightarrow$$
$$a \in_{\mathscr{U}} \{a\} \equiv b \in_{\mathscr{U}} \{a\}$$
$$\equiv$$
$$\{i \,|\, a(i) \in \{a\}(i)\} \in \mathscr{U} \equiv \{i \,|\, b(i) \in \{a\}(i)\} \in \mathscr{U}$$
$$\equiv$$
$$\{i \,|\, a(i) = a(i)\} \in \mathscr{U} \equiv \{i \,|\, b(i) = a(i)\} \in \mathscr{U}$$
$$\equiv$$
$$I \in \mathscr{U} \equiv b =_{\mathscr{U}} a$$
$$\equiv$$
$$b =_{\mathscr{U}} a$$

Nótese que con estas propiedades, y el hecho de que '$=_{\mathscr{U}}$' es una relación de equivalencia, se puede demostrar de la misma forma que es válida la ley del reemplazo en $\in_{\mathscr{U}}$. Esto es, en ${}^{I}\widehat{\mathbb{R}}$:

$$(\forall a, b, c, d \,|\, a \in_{\mathscr{U}} b \wedge a =_{\mathscr{U}} c \wedge b =_{\mathscr{U}} d \,:\, c \in_{\mathscr{U}} d)$$

Se puede demostrar que las relaciones '$=$' y '$\in$' se comportan de la misma manera que su correspondiente para los elementos sobre los que aplica, esto es, si tomamos elementos de $\widehat{\mathbb{R}}$, compararlos con '$=$' o '$\in$' resulta ser equivalente a comparar su versión $*$ con '$=_{\mathscr{U}}$' o '$\in_{\mathscr{U}}$' respectivamente, debido a esto se dejará la notación $\mathscr{U}$, y se usará solamente '$=$' y '$\in$'. Esto facilitará la continuidad en algunas demostraciones.

De la misma manera en que se demostró la ley del reemplazo para la extensión de '$\in$', sería posible ver que la validez de una proposición en $\widehat{\mathbb{R}}$, se mantiene en ${}^{I}\widehat{\mathbb{R}}$. Sin embargo, la demostración se hará de una forma más general, para evitar el proceso cada que sea necesario validar una proposición en ${}^{I}\widehat{\mathbb{R}}$. Para esto se considerará el lenguaje formal de la lógica de primer orden y los elementos de $\widehat{\mathbb{R}}$. Considerando que relaciones básicas en $\widehat{\mathbb{R}}$ son '$=$' y '$\in$', ya se cuenta con simbolos de relación correspondientes en ${}^{I}\widehat{\mathbb{R}}$. Por lo que se puede generar un lenguage formal con ${}^{I}\widehat{\mathbb{R}}$, cuyas proposiciones dependen de $\mathscr{U}$. Primero se mostrarán propiedades de la incorporación de $\widehat{\mathbb{R}}$ en ${}^{I}\widehat{\mathbb{R}}$.

Lema 4.1:

(i) ${}^{*}\varnothing = \varnothing$

(ii) $\left(\forall a, b \,\middle|\, a, b \in \widehat{\mathbb{R}} \,:\, a \subseteq b \Rightarrow {}^{*}a \subseteq {}^{*}b\right)$

(iii) $\left(\forall a, b \,\middle|\, a, b \in \widehat{\mathbb{R}} \,:\, a \in b \equiv {}^{*}a \in {}^{*}b\right)$

(iv) Sean $n \in \mathbb{J}$ y $\{a_k\}$ una colección de n elementos de $\widehat{\mathbb{R}}$. Entonces:

- ${}^{*}\left(\bigcup_{i=1}^{n} a_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} {}^{*}a_i$
- ${}^{*}\left(\bigcap_{i=1}^{n} a_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} {}^{*}a_i$
- ${}^{*}\{a_1, \ldots, a_n\} = \{{}^{*}a_1, \ldots, {}^{*}a_n\}$
- ${}^{*}(a_1, \ldots, a_n) = ({}^{*}a_1, \ldots, {}^{*}a_n)$
- ${}^{*}(a_1 \times \cdots \times a_n) = {}^{*}a_1 \times \cdots \times {}^{*}a_n$

(v) $\left(\forall a, b \,\middle|\, a, b \in \widehat{\mathbb{R}} \,:\, {}^{*}(a - b) = {}^{*}a - {}^{*}b\right)$

(vi) Sea $b \in \widehat{\mathbb{R}}$ una relación binaria.

- ${}^{*}(\text{dom } b) = \text{dom } {}^{*}b$
- ${}^{*}(\text{ran } b) = \text{ran } {}^{*}b$

Demostración:

(i)

$$
\begin{aligned}
& x \in {}^*\varnothing \\
\equiv \quad & \\
& \{i \,|\, x(i) \in \varnothing\} \in \mathscr{U} \\
\equiv \quad & \\
& \varnothing \in \mathscr{U} \\
\equiv \quad & \\
& x \in \varnothing
\end{aligned}
$$

(ii) Sean $a, b \in \widehat{\mathbb{R}}$ tales que $a \subseteq b$. Sea $x \in {}^I\widehat{\mathbb{R}}$

$$
\begin{aligned}
& x \in {}^*a \\
\equiv \quad & \\
& \{i \,|\, x(i) \in a\} \in \mathscr{U} \\
\Rightarrow \quad & \langle \text{ Definiciónd de filtro, } a \subseteq b \,\rangle \\
& \{i \,|\, x(i) \in b\} \in \mathscr{U} \\
\equiv \quad & \\
& x \in {}^*b
\end{aligned}
$$

(iii) Sean $a, b \in \widehat{\mathbb{R}}$

$$
\begin{aligned}
& {}^*a \in {}^*b \\
\equiv \quad & \\
& \{i \,|\, a \in b\} \in \mathscr{U}
\end{aligned}
$$

Por un lado, suponiendo que $a \in b$, se tendría que $I \in \mathscr{U}$, cosa que es verdadera. Por otro lado, suponiendo que ${}^*a \in {}^*b$, se tendría que, efectivamente $\{i \,|\, a \in b\} \in \mathscr{U}$, recordando que, para un $c \in \widehat{\mathbb{R}}$, se definió, que para todo $i \in I$, ${}^*c(i) = i$. La expresión que define ${}^*a \in {}^*b$, nuevamente conduce a $I \in \mathscr{U}$.

(iv) Sean $n \in \mathbb{J}$, $\{a_k\}$ una colección con n elementos de $\widehat{\mathbb{R}}$ y $x, (x_1, \ldots, x_n) \in {}^{I}\widehat{\mathbb{R}}$.

- Para la intersección

$$x \in \bigcap_{k=1}^{n} {}^*a_k$$

$$\equiv$$

$$(\forall k \,|\, 1 \leq k \leq n \,:\, x \in {}^*a_k)$$

$$\equiv$$

$$(\forall k \,|\, 1 \leq k \leq n \,:\, \{i \,|\, x(i) \in a_k\} \in \mathscr{U})$$

$$\Rightarrow \quad \langle \text{ Defnción de filtro (ii) } \rangle$$

$$\{i \,|\, (\forall k \,|\, 1 \leq k \leq n \,:\, x(i) \in a_k)\}$$

$$x \in {}^*\left(\bigcap_{k=1}^{n} a_k\right)$$

$$\equiv$$

$$\left\{i \,\middle|\, x(i) \in \bigcap_{k=1}^{n} a_k\right\} \in \mathscr{U}$$

$$\equiv$$

$$\{i \,|\, (\forall k \,|\, 1 \leq k \leq n \,:\, x(i) \in a_k)\} \in \mathscr{U}$$

$$\Rightarrow \quad \langle \text{ Definición de filtro (iii) } \rangle$$

$$(\forall k \,|\, 1 \leq k \leq n \,:\, \{i \,|\, x(i) \in a_k\} \in \mathscr{U})$$

- Para la unión.

  Primero se mostrará que $\bigcup_{k=1}^{n} {}^*a_k \subseteq {}^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} a_k\right)$

$$x \in \bigcup_{k=1}^{n} {}^*a_k$$

$$\equiv$$

$$(\exists k \,|\, 1 \leq k \leq 1 \,:\, x \in {}^*a_k)$$

$$\equiv$$

$$(\exists k \,|\, 1 \leq k \leq n \,:\, \{i \,|\, x(i) \in a_k\} \in \mathscr{U})$$

$$\Rightarrow \quad \langle \text{ Definición de filtro (iii) } \rangle$$

$$\{i \,|\, (\exists k \,|\, 1 \leq k \leq n \,:\, x(i) \in a_k) \in \mathscr{U}\}$$

$$\equiv$$

$$x \in {}^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} a_k\right)$$

Ahora se mostrará que ${}^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} a_k\right) - \bigcup_{k=1}^{n} {}^*a_k = \varnothing$

$$x \in {}^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} a_k\right) - \bigcup_{k=1}^{n} {}^*a_k$$

$\equiv$

$$\left\{ i \,\middle|\, x(i) \in \bigcup_{k=1}^{n} a_k \right\} \in \mathscr{U} \wedge \neg\left(\exists k \,|\, 1 \leq k \leq n \,:\, \{ i \,|\, x(i) \in a_k \} \in \mathscr{U}\right)$$

$\equiv$

$$\left\{ i \,\middle|\, x(i) \in \bigcup_{k=1}^{n} a_k \right\} \in \mathscr{U} \wedge \left(\forall k \,|\, 1 \leq k \leq n \,:\, \{ i \,|\, x(i) \in a_k \} \notin \mathscr{U}\right)$$

$\equiv \quad \langle\ \mathscr{U}$ es un ultrafiltro $\rangle$

$$\left\{ i \,\middle|\, x(i) \in \bigcup_{k=1}^{n} a_k \right\} \in \mathscr{U} \wedge \left(\forall k \,|\, 1 \leq k \leq n \,:\, \{ i \,|\, x(i) \notin a_k \} \in \mathscr{U}\right)$$

$\Rightarrow \quad \langle$ definición de filtro (ii) $\rangle$

$$\left\{ i \,\middle|\, x(i) \in \bigcup_{k=1}^{n} a_k \right\} \in \mathscr{U} \wedge \{ i \,|\, (\forall k \,|\, 1 \leq k \leq n \,:\, x(i) \notin a_k) \} \in \mathscr{U}$$

$\Rightarrow \quad \langle$ definición de filtro (ii) $\rangle$

$$\left\{ i \,\middle|\, x(i) \in \bigcup_{k=1}^{n} a_k \wedge (\forall k \,|\, 1 \leq k \leq n \,:\, x(i) \notin a_k) \right\} \in \mathscr{U}$$

$\equiv$

$$\varnothing \in \mathscr{U}$$

$\equiv$

$$x \in \varnothing$$

- Para la colección, el argumento se realiza de la misma forma que para la unión, lo único que cambia es '$\in$' por '$=$'.
- Para la n-upla, por cómo se define, se puede ver que es la unión de dos conjuntos, lo que significa, que es consecuencia del punto de la unión.
- Para el producto cartesiano.

Por un lado:

$$
\begin{aligned}
& (x_1, \dots, x_n) \in {}^*(a_1 \times \cdots \times a_n) \\
\equiv & \\
& \{i \mid (x_1(i), \dots, x_n(i)) \in a_1 \times \cdots \times a_n\} \in \mathscr{U} \\
\equiv & \\
& \{i \mid (\forall k \mid 1 \leq k \leq n \,:\, x_k(i) \in a_k)\} \in \mathscr{U} \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{ Definición de filtro (iii) } \rangle \\
& (\forall k \mid 1 \leq k \leq n \,:\, \{i \mid x_k(i) \in a_k\} \in \mathscr{U}) \\
\equiv & \\
& (x_1, \dots, x_n) \in {}^*a_1 \times \cdots \times {}^*a_n
\end{aligned}
$$

Por el otro:

$$
\begin{aligned}
& (x_1, \dots, x_n) \in {}^*a_1 \times \cdots \times {}^*a_n \\
\equiv & \\
& (\forall k \mid 1 \leq k \leq n \,:\, \{i \mid x_k(i) \in a_k\} \in \mathscr{U}) \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{ Definición de filtro (ii) } \rangle \\
& \{i \mid (\forall k \mid 1 \leq k \leq n \,:\, x_k(i) \in a_k)\} \in \mathscr{U} \\
\equiv & \\
& \{i \mid (x_1(i), \dots, x_n(i)) \in a_1 \times \cdots \times a_n\} \in \mathscr{U} \\
\equiv & \\
& (x_1, \dots, x_n) \in {}^*(a_1 \times \cdots \times a_n)
\end{aligned}
$$

(v) Por doble contenencia:

$x \in {}^*(a-b)$	$x \in {}^*a - {}^*b$
$\equiv$	$\equiv$
$\{i \,\vert\, x(i) \in a \wedge x(i) \notin b\} \in \mathscr{U}$	$\{i \,\vert\, x(i) \notin a\} \in \mathscr{U} \wedge \{i \,\vert\, x(i) \in b\} \notin \mathscr{U}$
$\Rightarrow$ ⟨ Definición de filtro (iii) ⟩	$\Rightarrow$ ⟨ $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro ⟩
$\{i \,\vert\, x(i) \in a\} \in \mathscr{U} \wedge \{i \,\vert\, x(i) \notin b\} \in \mathscr{U}$	$\{i \,\vert\, x(i) \in a\} \in \mathscr{U} \wedge \{i \,\vert\, x(i) \notin b\} \in \mathscr{U}$
$\equiv$ ⟨ $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro ⟩	$\Rightarrow$ ⟨ Definición de filtro (ii) ⟩
$\{i \,\vert\, x(i) \in a\} \in \mathscr{U} \wedge \{i \,\vert\, x(i) \in b\} \notin \mathscr{U}$	$\{i \,\vert\, x(i) \in a \wedge x(i) \notin b\} \in \mathscr{U}$
$\equiv$	$\equiv$
$x \in {}^*a - {}^*b$	$x \in {}^*(a-b)$

(vi)

- Se va a seguir la misma estrategia que se usó en (iv) para la unión. Se mostrará que dom ${}^*b \subseteq {}^*(\text{dom } b)$

$$x \in \text{dom } {}^*b$$

$$\equiv$$

$$(\exists y \,|\!:\; (x,y) \in \text{dom } {}^*b)$$

$$\equiv$$

$$(\exists y \,|\!:\; \{i \,|\, (x(i), y(i)) \in b\} \in \mathscr{U})$$

$$\Rightarrow \quad \langle \text{ Definición de filtro (iii) } \rangle$$

$$\{i \,|\, (\exists y \,|\!:\; (x(i), y(i)) \in b)\} \in \mathscr{U}$$

$$\equiv$$

$$x \in {}^*(\text{dom } b)$$

Ahora se mostrará que ${}^*(\text{dom } b) - \text{dom } {}^*b = \varnothing$

$$x \in {}^*(\text{dom } b) - \text{dom } {}^*b$$

$$\equiv$$

$$\{i \,|\, x(i) \in \text{dom } b\} \in \mathscr{U} \wedge \neg\,(\exists y \,|\!:\; \{i \,|\, (x(i), y(i)) \in b\} \in \mathscr{U})$$

$$\equiv$$

$$\{i \,|\, x(i) \in \text{dom } b\} \in \mathscr{U} \wedge (\forall y \,|\!:\; \{i \,|\, (x(i), y(i)) \in b\} \notin \mathscr{U})$$

$$\equiv \quad \langle\ \mathscr{U} \text{ es un ultrafiltro } \rangle$$

$$\{i \,|\, x(i) \in \text{dom } b\} \in \mathscr{U} \wedge (\forall y \,|\!:\; \{i \,|\, (x(i), y(i)) \notin b\} \in \mathscr{U})$$

$$\Rightarrow \quad \langle \text{ Definición de filtro (ii) } \rangle$$

$$\{i \,|\, x(i) \in \text{dom } b\} \in \mathscr{U} \wedge \{i \,|\, (\forall y \,|\!:\; (x(i), y(i)) \notin b)\} \in \mathscr{U}$$

$$\Rightarrow \quad \langle \text{ Definición de filtro (ii) } \rangle$$

$$\{i \,|\, x(i) \in \text{dom } b \wedge x(i) \notin \text{dom } b\} \in \mathscr{U}$$

$$\equiv$$

$$\varnothing \in \mathscr{U}$$

$$\equiv$$

$$x \in \varnothing$$

- Para el rango, el argumento es idéntico, cambia el orden de la pareja ordenada.

Ahora, se van a considerar los tipos de elementos que están en ${}^I\widehat{\mathbb{R}}$.

Definición 4.2: $a \in {}^{I}\widehat{\mathbb{R}}$ es llamada *entidad interna* cuando existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a \in {}^*\mathbb{R}_n$. a es llamada *estándar* cuando existe $b \in \widehat{\mathbb{R}}$ tal que, $a = {}^*b$. Simbólicamente:

a es un entidad interna	a es una entidad estándar
$\equiv$	$\equiv$
$(\exists n \,\vert\, n \in \mathbb{N} : a \in {}^*\mathbb{R}_n)$	$\left(\exists b \,\middle\vert\, b \in \widehat{\mathbb{R}} : a = {}^*b\right)$

El conjunto $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} {}^*\mathbb{R}_n$, es llamado la ultrapotencia de $\widehat{\mathbb{R}}$ con respecto a $\mathscr{U}$, y se denotará como ${}^*(\widehat{\mathbb{R}})$.

Por la definición de elemento interno y estándar, podría parecer que no existen entidades internas no-estándar. Sin embargo, son estas las que precisamente logran el objetivo de toda esta construcción.

Teorema 4.1: Existen entidades internas no-estándar.

Demostración: Sea $n \in \mathbb{N}$, considere $\mathbb{R}_n$. Nótese que, $\mathbb{R}_n$ es un conjunto infinito. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una colección de elementos de $\mathbb{R}_n$ tal que $(\forall n, m \,|\, n, m \in \mathbb{N} \wedge n \neq m : a_n \neq a_m)$. Sea a una función de I en $\mathbb{R}_n$ definida por:

$$a(i) = a_n \quad (i \in I_n)$$

recordando que $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la partición de I que se mencionó al principio de esta sección. Primero, se va a mostrar que a es una entidad interna. Específicamente, $a \in {}^*R_n$.

$$\begin{aligned} & a \in {}^*\mathbb{R}_n \\ \equiv\ & \\ & \{i \,|\, a(i) \in \mathbb{R}_n\} \in \mathscr{U} \end{aligned}$$

$$\equiv$$

$$I \in \mathscr{U}$$

por contradicción, supongase que existe $b \in \widehat{\mathbb{R}}$ tal que $a = {}^*b$.

$$a = {}^*b$$

$$\equiv$$

$$\{i \,|\, a(i) = b\}$$

$$\equiv \quad \langle\ b \text{ es constante } \rangle$$

$$(\exists n \,|\, n \in \mathbb{N} \,:\, I_n \in \mathscr{U})$$

Esto último, por la definición de $\{I_n\}$, es falso. Así, se tiene que a es una entidad interna no-estándar.

Teorema 4.2:

(i) Una entidad es interna si y solo si pertenece a alguna entidad estándar.

(ii) Los elementos de entidades internas son internos.

Demostración:

(i) La demostración se hará por doble implicación. Por un lado, sean $n \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}_{n+1}$ y $b = {}^*c$. Esto es, b es una entidad estándar, donde c cumple la definición de estándar en b.

$$a \in b$$

$$\equiv$$

$$a \in {}^*c$$

$$\equiv$$

$$
\begin{aligned}
& \{i \,|\, a(i) \in c\} \in \mathscr{U} \\
\Rightarrow \quad & \langle \text{ Propiedad de } \mathbb{R}_n \ \rangle \\
& \{i \,|\, a(i) \in \mathbb{R}_0 \cup \mathbb{R}_n\} \in \mathscr{U} \\
\equiv \quad & \langle \text{ Propiedad de } {}^* \ \rangle \\
& a \in {}^*\mathbb{R}_0 \cup {}^*\mathbb{R}_n \\
\Rightarrow & \\
& (\exists n \,|\, n \in \mathbb{N} \,:\, a \in {}^*\mathbb{R}_n)
\end{aligned}
$$

Por el otro lado, sean $n \in \mathbb{N}$ y $a \in {}^*\mathbb{R}_n$ una entidad interna. Se puede ver inmediatamente que a es elemento de una entidad estándar. En efecto, sean $c = \mathbb{R}_n$, $b = {}^*c$. Por el lema 3.1, se tiene que $c \in \mathbb{R}_{n+1}$, con lo que b resulta ser una entidad estándar.

(ii) Sean $n \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{R}_{n+1}$ y $a \in b$. Sea $B = \{i \,|\, b \in \mathbb{R}_{n+1}\}$. Por el lema 3.1, $B = \{i \,|\, b \subseteq \mathbb{R}_0 \cup \mathbb{R}_n\}$.

$$
\begin{aligned}
& a \in b \\
\Rightarrow & \\
& (\forall i \,|\, i \in B \,:\, a(i) \in \mathbb{R}_0 \cup \mathbb{R}_n) \\
\equiv & \\
& \{i \,|\, a(i) \in \mathbb{R}_0 \cup \mathbb{R}_n\} \in \mathscr{U} \\
\equiv \quad & \langle \text{ lema 4.1 } \rangle \\
& a \in {}^*R_0 \cup {}^*\mathbb{R}_n \\
\Rightarrow & \\
& (\exists n \,|\, n \in \mathbb{N} \,:\, a \in {}^*\mathbb{R}_n)
\end{aligned}
$$

Ahora, se va a explorar el comportamiento de las proposiciones al tomar su incorporación ‘(*)’.

Teorema 4.3: Sean $a \in \widehat{\mathbb{R}}$, $V(x_1, \ldots, x_m)$ un predicado sobre $x_1, \ldots, x_m$ en $\widehat{\mathbb{R}}$ y

$$A = \{(x_1, \ldots, x_m) \in a \,|\, V(x_1, \ldots, x_m)\}$$

Entonces $A \in \widehat{\mathbb{R}}$ y

$$^*A = \left\{(x_1, \ldots, x_m) \in {}^*a \,\middle|\, {}^*V(x_1, \ldots, x_p)\right\}$$

Demostración: Sea $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}_{n+1}$. Como $A \subseteq a$, y por definición $a \subseteq \mathbb{R}_0 \cup \mathbb{R}_n$, se tiene que $A \subseteq \mathbb{R}_0 \cup \mathbb{R}_n$, que equivale a $A \in \mathbb{R}_{n+1}$. Para el segundo, por doble contenencia:

$$(y_1, \ldots, y_m) \in {}^*A$$

$$\equiv$$

$$(y_1, \ldots, y_m) \in {}^*\{(x_1, \ldots, x_m) \in a \,|\, V(x_1, \ldots, x_m)\}$$

$$\equiv$$

$$\{i \,|\, (y_1(i), \ldots, y_m(i)) \in a \wedge V(y_1(i), \ldots, y_m(i))\} \in \mathscr{U}$$

$$\Rightarrow \quad \langle \text{ definición de filtro (iii) } \rangle$$

$$\{i \,|\, (y_1(i), \ldots, y_m(i)) \in a\} \in \mathscr{U} \wedge \{i \,|\, V(y_1(i), \ldots, y_m(i))\} \in \mathscr{U}$$

$$\equiv$$

$$(y_1, \ldots, y_m) \in {}^*a \wedge {}^*V(y_1, \ldots, y_m)$$

$$\equiv$$

$$(y_1, \ldots, y_m) \in \{(x_1, \ldots, x_m) \in {}^*a \,|\, {}^*V(x_1, \ldots, x_m)\}$$

Por el otro lado:

$$(y_1, \ldots, y_m) \in \{(x_1, \ldots, x_m) \in {}^*a \,|\, {}^*V(x_1, \ldots, x_m)\}$$

$$\equiv$$

$$(y_1, \ldots, y_m) \in {}^*a \wedge {}^*V(y_1, \ldots, y_m)$$

$$\equiv$$

$$\{i \mid (y_1(i), \ldots, y_m(i)) \in a\} \in \mathscr{U} \wedge \{i \mid V(y_1(i), \ldots, y_m(i))\} \in \mathscr{U}$$

$$\Rightarrow \quad \langle \text{ definición de filtro (ii) } \rangle$$

$$\{i \mid (y_1(i), \ldots, y_m(i)) \in a \wedge V(y_1(i), \ldots, y_m(i))\} \in \mathscr{U}$$

$$\equiv$$

$$(y_1, \ldots, y_m) \in {}^*\{(x_1, \ldots, x_m) \in a \mid V(x_1, \ldots, x_m)\}$$

$$\equiv$$

$$(y_1, \ldots, y_m) \in {}^*A$$

Ya establecida la equivalencia entre predicados del lenguaje formal en $\widehat{\mathbb{R}}$ y la incorporación en ${}^*(\widehat{\mathbb{R}})$, falta abordar las sentencias, las cuales son proposiciónes sin variables libres. En el siguiente teorema se establecerá la equivalencia entre sentencias de ambos lenguajes formales.

Teorema 4.4: Sea V una sentencia válida en $\widehat{\mathbb{R}}$. V es verdadera en $\widehat{\mathbb{R}}$ si y solo si, ${}^*V$ es verdadera en ${}^*(\widehat{\mathbb{R}})$.

Demostración: De igual forma que se abordó el problema de los predicados tratando con conjuntos, se puede abordar este problema. Para esto, hace falta entender a qué corresponde una sentencia de $\widehat{\mathbb{R}}$ si se piensa denotar en términos de un conjunto. Antes de empezar a trabajar con cuantificadores, se considerará una sentencia sin cuantificadores.

Sea V es una sentencia sin cuantificadores y atómica. Sean $a_1, \ldots, a_m$ las constantes de V. Entonces V es de la forma $(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in a_n$ o cualquier otra combinación. Entonces:

$${}^*(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in {}^*a_n$$

$$\equiv$$

$$\{i \,|\, (a_1, \ldots, a_{n-1}) \in a_n\} \in \mathscr{U}$$

Está claro que se tiene la equivalencia en este caso. Si V es una sentencia sin cuantificadores, pero no es atómica, es una sentencia compuesta de varias sentencias atómicas unidas por conectores lógicos, en este caso, el conjunto que debe pertenecer a $\mathscr{U}$ cuando V tiene conectores lógicos se puede descomponer en uniones, intersecciones o complementos, con lo que, para sentencias sin cuantificadores, queda demostrado.

Para una sentencia con cuantificadores. Sea $W(x_1, \ldots, x_{n+1})$ un predicado sin cuantificadores sobre $x_1, \ldots, x_{n+1}$. Sean $q_1, \ldots, q_{n+1}$ cuantificadores y V una sentencia de la forma

$$V = (q_{n+1}x_{n+1} \,|: \, (q_n x_n \,|: \, \ldots (q_1 x_1 \,|: \, W(x_1, \ldots, x_{n+1})) \ldots))$$

Suponiendo que q_{n+1} es un cuantificador existencial, V se puede escribir en términos de un conjunto específico. Sea b el dominio de q_{n+1} y defínase A como:

$$A = \{x \,|\, x \in b \wedge (q_n x_n \,|: \, \ldots (q_1 x_1 \,|: \, W(x_1, \ldots, x_n, x)) \ldots)\}$$

La sentencia V se puede expresar en términos de A de la siguiente forma:

$$A \neq \varnothing$$

Debido a que la definición de A es un predicado sobre x, por el teorema anterior se tiene que:

$${}^*A = \{x \,|\, x \in {}^*b \wedge (q_n x_n \,|: \, \ldots (q_1 x_1 \,|: \, {}^*W(x_1, \ldots, x_n, x)) \ldots)\}$$

Debido a que $A \neq \varnothing \equiv {}^*A \neq {}^*\varnothing$ y que $\varnothing = {}^*\varnothing$. Para el caso del cuantificador universal, se niega la proposición, obteniendo así un cuantificador existencial. De la misma forma que para sentencias atómicas, V es una sentencia con conectores, estos se pueden traducir en el conjunto definido a uniones, complementos o intersecciones.

Teorema 4.5: Sean V un predicado con variables libre $x_1, \ldots, x_m$ y $a \in {}^*(\widehat{\mathbb{R}})$. Entonces, el conjunto A definido por $A = \{(x_1, \ldots, x_n) \,|\, (x_1, \ldots, x_n) \in a \wedge V\}$ es interno.

Demostración: Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $a \in \mathbb{R}_{n+1}$. Se puede ver que A es subconjunto de a. Por definición $a \subseteq \mathbb{R}_0 \cup \mathbb{R}_n$, lo que implica que $A \in \mathbb{R}_0 \cup \mathbb{R}_n$, que a su vez implica que

$$(\exists n \,|\, n \in \mathbb{N} \,:\, A \in \mathbb{R}_n)$$

Se presentarán dos teoremas que se cumplen en $\mathbb{R}$, los cuales muestran como ejemplo la interpretación correcta del teorema 4.3. En estos ejemplos, las sentencias tienen cuantificadores sobre **subconjuntos** de $\mathbb{R}$. Para poder aplicar el teorema de forma correcta, hace falta modificar la expresión para que esté escrita con las relaciones básicas '$\in$' o '$=$'. La razón de esto, es que cualquier predicado o sentencia cuantificada sobre subconjuntos de $\mathbb{R}$, no tiene sentido realmente al considerar el teorema 4.3, pues este hace referencia a las relaciones básicas. En el caso de los subconjuntos, la forma de interpretarlo es que se toman subconjuntos S de $\mathbb{R}$, por lo que la versión estrella tomará subconjuntos ${}^*S$ de ${}^*\mathbb{R}$. Más adelante se presentarán ejemplos los cuales no pueden aplicarse en estas sentencias.

(i) Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene un primer elemento: La sentencia se escribe de forma equivalente como "Todo elemento de $\mathscr{P}(\mathbb{N}) - \varnothing$ tiene un primer elemento". Al hacer uso del teorema, lo que se obtiene es:

Todo elemento de ${}^*(\mathscr{P}(\mathbb{N}) - \varnothing)$ tiene un primer elemento. Nótese que esto se puede transformar a la siguiente sentencia:

Todo subconjunto interno no vacío de ${}^*N$ tiene un primer elemento.

(ii) Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ acotado superiormente tiene una mínima cota superior. De igual

forma, al usar el teorema, la sentencia correspondiente sería:

Todo subconjunto interno de $\mathbb{R}$ acotado superiormente tiene una mínima cota superior.

5. El sistema numérico no estándar ${}^*\mathbb{R}$

Por el teorema 4.3, las mismas propiedades que aplican en $\mathbb{R}$, aplican en ${}^*\mathbb{R}$ hasta donde apliquen en ambos simultaneamente. Para simplificar la notación, se mantendrá el mismo símbolo para denotar operaciones usuales en $\mathbb{R}$ y en ${}^*\mathbb{R}$. Por ejemplo, en ${}^*\mathbb{R}$, $a + b = c$ es equivalente a $\{i \,|\, a(i) + b(i) = c(i)\} \in \mathscr{U}$. De la misma manera para la resta, multiplicación. De igual forma, en ${}^*\mathbb{R}$, $a \leq b$ es equivalente a $\{i \,|\, a(i) \leq b(i)\} \in \mathscr{U}$. Un ejemplo de la aplicación del teorema 4.3 es la siguiente sentencia.

$$(\forall x, y \,|\, x, y \in \mathbb{R} \,:\, x < y \;\vee\; x > y \;\vee\; x = y)$$

Dado que esta sentencia es verdadera en $\mathbb{R}$, se tiene entonces que la sentencia

$$(\forall x, y \,|\, x, y \in {}^*\mathbb{R} \,:\, x < y \;\vee\; x > y \;\vee\; x = y)$$

es verdadera en ${}^*\mathbb{R}$.

Nótese que de la misma manera, es inmediato que el elemento neutro del producto en ${}^*\mathbb{R}$ es ^{*1}. Por conveniencia, se omitirá la notación (*) para elementos de ${}^*R$ y por lo mencionado antes, se tomará $\mathbb{R} \subset {}^*R$.

Aclarando más acerca de algunas funciones comunes en $\mathbb{R}$, el valor absoluto, definido por:

$$|r| = \left\{ \begin{array}{cc} r & (r > 0) \\ 0 & (r = 0) \\ -r & (r < 0) \end{array} \right\}$$

es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^{\geq 0}$. Debido a la incorporación del sistema formal de $\mathbb{R}$ en ${}^*\mathbb{R}$, se tiene una función correspondiente en ${}^*\mathbb{R}$, la cual iría de ${}^*\mathbb{R}$ a ${}^*\mathbb{R}^{\geq 0}$. Por el teorema 4.3, esta función cumple que:

$$^*|r| = \begin{cases} r & (r > 0) \\ 0 & (r = 0) \\ -r & (r < 0) \end{cases}$$

por supuesto, para $r \in {}^*\mathbb{R}$. Debido a esto, se denotará el valor absoluto en ${}^*\mathbb{R}$ de la forma usual. Por la misma razón, se denotará de manera usual las funciones mín y máx.

Sea $S \subseteq \mathbb{R}$, al pasar a ${}^*\mathbb{R}$, ${}^*S$ corresponde a un subconjunto de ${}^*\mathbb{R}$, el cual mantienen las mismas propiedades que S hasta donde tenga sentido en ambos simultaneamente. Así como se definió la superestructura $\widehat{\mathbb{R}}$, se puede definir una para S, $\widehat{S}$, y, de igual forma, se puede definir una ultrapotencia de $\widehat{S}$ denotada por ${}^*(\widehat{S})$. De igual forma, por lo mencionado anteriormente, se tomará $S \subseteq {}^*S$. Nótese, que al dejar la notación (*), por el lema 4.1, se tiene que $S = {}^*S$ si y solo si S es finito.

Un resultado del álgebra nos dice que todo cuerpo arquimediano es isomorfo con un subcuerpo de $\mathbb{R}$. Debido a la existencia de los infinitesimales en ${}^*R$, se tiene que ${}^*\mathbb{R}$ no es arquimediano. Sin embargo, ${}^*R$ cumple las mismas propiedades que $\mathbb{R}$, lo que parecería ser una contradicción. La razón de esto, es que la propiedad arquimediana es relativa a un conjunto, en el caso de $\mathbb{R}$, es con $\mathbb{N}$. explícitamente, la propiedad es la siguiente:

$$(\forall x, y \,|\, x, y \in \mathbb{R} \wedge 0 < x \leq y \,:\, (\exists n \,|\, n \in \mathbb{N} \,:\, y \leq n\,x))$$

Al hacer uso del teorema 4.3, se tiene que

$$(\forall x, y \,|\, x, y \in {}^*\mathbb{R} \wedge 0 < x \leq y \,:\, (\exists n \,|\, n \in {}^*\mathbb{N} \,:\, y \leq n\,x))$$

lo que significa, que ${}^*\mathbb{R}$ es arquimediano con respecto a ${}^*N$.

Recordando el teorema 4.1, este nos dice que existen entidades internas no-estándar. Lo que nos conduce a el siguiente teorema:

Teorema 5.1:

(i) Existe $\omega \in {}^*\mathbb{N}$ tal que, para todo $r \in \mathbb{R}$, $\omega > |r|$.

(ii) Existe $\varepsilon \in {}^*\mathbb{R}$ tal que, $0 < \varepsilon$ y para todo $r \in \mathbb{R}$, $\varepsilon < |r|$.

Demostración:

Por la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$ con respecto a $\mathbb{N}$, solo hace falta demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\omega > n$. Defínase la función ω de I en $\mathbb{N}$ por:

$$\omega(i) = n \quad (i \in I_n)$$

Defínase para todo número natural el conjunto $A_n = \{i \,|\, \omega(i) \leq k\}$. Nótese que, para todo n, $A_n \notin \mathscr{U}$. En efecto, sea $k \in \mathbb{N}$

$$A_k$$
$$=$$
$$\{i \,|\, \omega(i) \leq k\}$$
$$=$$
$$\bigcup_{i=0}^{k} I_i$$

Como $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro, si $\bigcup_{i=0}^{k} I_i \in \mathscr{U}$, por las caracterizaciones de los ultrafiltros, al menos uno de los elementos de la unión debe estar en $\mathscr{U}$, lo que resultaría en que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $I_n \in \mathscr{U}$. Esto es una contradicción por la definición de $\mathscr{U}$ y $\{I_n\}$. Así,

$$(\forall n \,|\, n \in \mathbb{N} : \{i \,|\, \omega(i) \leq n\} \notin \mathscr{U})$$

$$\equiv \quad \langle\ \mathscr{U} \text{ es un ultrafiltro } \rangle$$

$$(\forall n \,|\, n \in \mathbb{N} : \{i \,|\, \omega(i) > n\} \in \mathscr{U})$$

$$\equiv$$

$$(\forall n \,|\, n \in \mathbb{N} : \omega > n)$$

Por la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$ con respecto a $\mathbb{N}$, solo hace falta demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon < \dfrac{1}{n+1}$. Defínase la función ε de I en $\mathbb{R}$ por:

$$\varepsilon(i) = \frac{1}{n+1} \quad (i \in I_n)$$

De la misma manera, se define para todo número natural el conjunto $B_n = \left\{ i \,\middle|\, \varepsilon(i) \geq \dfrac{1}{k+1} \right\}$. Sea $k \in \mathbb{N}$

$$B_k = \left\{ i \,\middle|\, \varepsilon(i) \geq \frac{1}{k+1} \right\} = \bigcup_{i=0}^{k} I_i$$

Nuevamente se repite el argumento y se concluye que:

$$\left(\forall n \,\middle|\, n \in \mathbb{N} : \varepsilon < \frac{1}{n+1} \right)$$

Definición 5.1: Un número $a \in {}^*\mathbb{R}$ es llamado *finito* cuando existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $|a| < r$. un número no finito es llamado *infinto.*

Un número $a \in {}^*\mathbb{R}$ es llamado *infinitesimal* cuando, para todo $r \in \mathbb{R}^+$, $|a| < r$.

El conjunto de todos los números finitos se denotará como M_0 y el conjunto de todos los infinitesimales como M_1.

Nótese que $\mathbb{R} \subseteq M_0$, $M_1 \subseteq M_0$ y $\mathbb{R} \cap M_1 = \{0\}$, esto es, 0 es el único infinitesimal estándar. Se puede ver que el recíproco de un número infinito es infinitesimal, y el recíproco de un número infinitesimal distinto de 0, es infinito.

Teorema 5.2: Sea $n \in {}^*\mathbb{N}$, n es finito si y solo si n es un número natural estándar. Esto es, ${}^*\mathbb{N} \cap M_0 = \mathbb{N}$.

Demostración: La demostración se hará por doble implicación. Por un lado, si $n \in \mathbb{N}$, se puede considerar $n + 1$. Este número cumple la definición de que n es finito. Por el otro lado, si $n \in {}^*\mathbb{N}$ es finito, entonces, existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $n < r$. En $\mathbb{R}$, se cumple que $n < r$ es equivalente a que $n \in \{m \in \mathbb{N} \,|\, m < r\}$, el cual es un conjunto no vacío para todo $r > 0$. Debido a esto, la propiedad se cumple en ${}^*\mathbb{R}$ por el teorema 4.3.

Considerando M_0. Este es un subanillo de ${}^*R$, en efecto, es cerrado bajo la suma y el producto. Asímismo, M_1 es un subanillo de M_0. La razón es la misma, sin embargo puede no parecer tan intuitivo. Considere un par de funciones de I en ${}^*R$ las cuales definen un par de números infinitesimales, la suma y el producto de estas resulta en un infinitesimal, cosa que se puede corroborar fácilmente realizando un proceso como el que se usó para mostrar que existen los infinitesimales.

Lema 5.1: M_1 es un ideal maximal de M_0.

Demostración: Lo primero es mostrar que M_1 es un ideal de M_0. En efecto, sean $h \in M_1$ y $a \in M_0$. Por definición de infinitesimal:

$$\left(\forall r \,\middle|\, r \in \mathbb{R}^+ \,:\, |h| < r\right)$$

$$\equiv$$

$$\left(\forall r \,\middle|\, r \in \mathbb{R}^+ \,:\, |a\,h| < |a|\,r\right)$$

$$\Rightarrow \quad \langle\ |a|\,r \in \mathbb{R}^+\ \rangle$$

$$\left(\forall r' \,\middle|\, r' \in \mathbb{R}^+ \,:\, |a\,h| < r'\right)$$

$$\equiv$$

$$a\,h \in M_1$$

Sea $a \in M_0 - M_1$, por definición, se tiene que:

$$\begin{aligned}
&\left(\exists r_1, r_2 \,\middle|\, r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+ \,:\, r_1 < |a| < r_2\right)\\
\equiv&\\
&\left(\exists r_1, r_2 \,\middle|\, r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+ \,:\, \frac{1}{r_1} > \frac{1}{|a|} > \frac{1}{r_2}\right)\\
\equiv&\\
&\frac{1}{a} \in M_0 - M_1
\end{aligned}$$

Sea X un ideal de M_0 tal que $M_1 \subset X$. entonces existe un $b \in M_0 - M_1$ tal que $b \in X$. Sin embargo, como se mostró, $\frac{1}{b} \in M_0$, con lo que, por definición de ideal, $b\frac{1}{b} = 1 \in X$, lo que a su vez implica que $X = M_0$. Así, queda demostrado que M_1 es un ideal maximal de M_0.

Defínase la relación de equivalencia $=_1$ en $^*\mathbb{R}$ por: $a =_1 b \equiv a - b \in M_1$. Considere entonces el anillo cociente M_0/M_1.

Teorema 5.3: El anillo cociente M_0/M_1 is isomorfo al cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales estándar.

Demostración: Por un lado, a cada real se le puede asignar una clase de equivalencia. En efecto, en cada clase de equivalencia no pueden haber dos números reales estándar distintos. Sean r_1, r_2 dos números reales usuales en la misma clase de equivalencia.

$$\begin{aligned}
&r_1 - r_2 \in M_1 \wedge |r_1 - r_2| \neq 0\\
\Rightarrow&\\
&|r_1 - r_2| < |r_1 - r_2|
\end{aligned}$$

Esto último es una contradicción, claramente. Por otro lado, para todo $a \in M_0$, existe un único número real r tal que $a - r =_1 0$. En efecto, sea $a \in M_0$, defínanse $D = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq a\}$ y $D' = \mathbb{R} - D$. La pareja (D, D') define una cortadura de Dedekin en $\mathbb{R}$. Sea $r \in \mathbb{R}$ tal que r define la misma cortadura, se puede ver que esto implica que $a =_1 r$, pues de lo contrario a o r estaría en alguno de los conjuntos que definen la cortadura. Así, M_0/M_1 es isomorfo con $\mathbb{R}$.

De lo descrito anteriormente, se puede entonces tratar con los elementos de M_0/M_1 como si fueran los mismos elementos de $\mathbb{R}$.

Definición 5.2: El homomorfismo de M_0 a $\mathbb{R}$ con kernel M_1 será llamado *homomorfismo de parte estándar* y se denotará por st.

A continuación se mostrarán algunas propiedades de este homomorfismo.

Lema 5.2 (Propiedades)**:** Para todo $a, b \in M_0$

(i) $\mathrm{st}(a+b) = \mathrm{st}(a) + \mathrm{st}(b)$

(ii) $\mathrm{st}(a\,b) = \mathrm{st}(a)\ \mathrm{st}(b)$

(iii) $a \leq b \Rightarrow \mathrm{st}(a) \leq \mathrm{st}(b)$

(iv) $\mathrm{st}(|a|) = |\mathrm{st}(a)\,|$

(v) $\mathrm{st}(\max\{a,b\}) = \max\{\mathrm{st}(a)\,, \mathrm{st}(b)\}$

(vi) $\mathrm{st}(\min\{a,b\}) = \min\{\mathrm{st}(a)\,, \mathrm{st}(b)\}$

(vii) $a \in M_1 \equiv \mathrm{st}(a) = 0$

(viii) $a \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathrm{st}(a) = a$

(ix) $\mathrm{st}(a) \geq 0 \Rightarrow |a| =_1 \mathrm{st}(a)$

(x) $a =_1 b \equiv \mathrm{st}(a) = \mathrm{st}(b)$

Se puede ver esto debido a cómo se definió el homomorfismo, y el hecho de que en cada clase de equivalencia de M_0/M_1, hay exáctamente un número real estándar.

Definición 5.3: Las clases de equivalencia de M_0 respecto a M_1 serán llamadas *mónadas* de los números estándar que las determinan, y serán denotadas, para un $r \in \mathbb{R}$, como $\mu(r)$. Por ejemplo, $\mu(0) = M_1$.

Una breve introducción al sistema numérico no estándar:

Siguiendo el hecho de que los números complejos son construidos usando parejas ordenadas, partiendo de la misma idea, se construye la superestructura $\widehat{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}$ definida por $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. De la misma forma se llega al conjunto $^*\left(\widehat{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}\right)$. La diferencia en este caso, es la estructura algebráica a considerar.

Se toma entonces $^*\mathbb{C} = {}^*\mathbb{R} \times {}^*\mathbb{R}$, el cual hereda las propiedades de $\mathbb{C}$. En $^*\mathbb{C}$, se puede definir el concepto de *finito* e *infinitesimal* de la siguiente manera:

Definición 5.4: Un número $z \in {}^*\mathbb{C}$ es llamado *finito* cuado existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|z\| < r$. Un número no finito es llamado *infinito*.

Un número $z \in {}^*\mathbb{C}$ es llamado *infinitesimal* cuando, para todo $r \in \mathbb{R}^+$, $\|z\| < r$.

Nótese que, bajo estas definiciones, es fácil ver que un número complejo $z = a + b\,i$ es infinitesimal si y solo si a, b son infinitesimales.

6. Sucesiones

Una sucesión en $\mathbb{R}$ es una función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$. Debido a esto, es un subconjunto de $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$, con lo que es una entidad de $\widehat{\mathbb{R}}$. Una sucesión $\{s_n\}$ en $\mathbb{R}$ se extiende a $\{{}^*s_n\}$ como una función de ${}^*\mathbb{N}$ en ${}^*\mathbb{R}$. Esto último se debe al teorema 4.3 y al lema 4.1. Nótese que, para todo $n \in \mathbb{N}$, ${}^*s_n = s_n$, nuevamente por el lema 4.1, ya que ${}^*(\text{ran } s_n) = \text{ran } {}^*s_n$. Debido a esto, se dejará la notación (*) para hacer referencia a individuos.

Teorema 6.1: Sea $\{s_n\}$ una sucesión en $\mathbb{R}$. $\{s_n\}$ ese acotada si y solo si, para todo número natural infinito $\omega \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$, ${}^*s_\omega$ es finito.

Demostración: Por un lado

$$
\begin{aligned}
& (\forall n \,|\, n \in {}^*\mathbb{N} \,:\, (\exists a \,|\, a \in M_0 \,:\, |{}^*s_n| \leq a)) \\
\Rightarrow \quad & \langle \text{ Aplicando st() } \rangle \\
& (\forall n \,|\, n \in \mathbb{N} \,:\, (\exists a \,|\, a \in M_0 \,:\, |s_n| \leq \text{st}(a))) \\
\equiv \quad & \\
& \{s\} \text{ es acotada en } \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Por el otro, si $\{s_n\}$ es acotada en $\mathbb{R}$, el rango de s tiene una mínima cota superior y una máxima cota inferior. Por el teorema 4.3, esto se traduce a que el rango de $\{{}^*s_n\}$ sea acotado en ${}^*\mathbb{R}$, con lo que, para todo $n \in {}^*\mathbb{N}$, ${}^*s_n$ es finito.

Recordando la definición usual para decir que una sucesión $\{s_n\}$ converge a s en $\mathbb{R}$:

$$(\forall \varepsilon \,|\, \varepsilon > 0 \,:\, (\exists N \,|\, N \in \mathbb{N} \,:\, (\forall n \,|\, n \in \mathbb{N} \wedge n \geq N \,:\, |s_n - s| < \varepsilon)))$$

Su análogo en el análisis no estándar es:

Teorema 6.2: Sean $\{s_n\}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ y $s \in \mathbb{R}$. entonces $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ si y solo si, para todo $\omega \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$, $s_\omega =_1 s$.

Demostración: Por un lado, sea $\varepsilon > 0$

$$(\exists N \,|\, N \in \mathbb{N} : (\forall n \,|\, n \in \mathbb{N} \wedge n \geq N : |s_n - s| < \varepsilon))$$
$$\equiv$$
$$(\exists N \,|\, N \in {}^*\mathbb{N} : (\forall n \,|\, n \in {}^*\mathbb{N} \wedge n \geq N : |{}^*s_n - s| < \varepsilon))$$
$$\equiv \quad \langle \text{ Definición de infinitesimal } \rangle$$
$$(\exists N \,|\, N \in {}^*\mathbb{N} : (\forall n \,|\, n \in {}^*\mathbb{N} \wedge n \geq N : {}^*s_n =_1 s))$$
$$\Rightarrow$$
$$(\forall \omega \,|\, \omega \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N} : {}^*s_\omega =_1 s)$$

Por el otro lado:

$$(\forall n \,|\, n \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N} : {}^*s_n =_1 s)$$
$$\Rightarrow$$
$$(\exists N \,|\, N \in {}^*\mathbb{N} : (\forall n \,|\, n \in {}^*\mathbb{N} \wedge n \geq N : {}^*s_n =_1 s))$$
$$\equiv$$
$$(\forall \varepsilon \,|\, \varepsilon > 0 : (\exists N \,|\, N \in {}^*N : (\forall n \,|\, n \in {}^*\mathbb{N} \wedge n \geq N : |{}^*s_n - s| < \varepsilon)))$$
$$\equiv$$
$$(\forall \varepsilon \,|\, \varepsilon > 0 : (\exists N \,|\, N \in \mathbb{N} : (\forall n \,|\, n \in \mathbb{N} \wedge n \leq N : |s_n - s| < \varepsilon)))$$

El teorema se puede reescribir de forma equivalente, usando el homomorfismo de parte estándar:

$$(\forall \omega \,|\, \omega \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N} : {}^*s_\omega =_1 s)$$
$$\equiv$$
$$(\forall \omega \,|\, \omega \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N} : \mathrm{st}({}^*s_\omega) = s)$$

Por ejemplo, la sucesión $\{\sqrt[n]{n}\}_{n\in\mathbf{J}}$. Para ver que esta sucesión converge a 1, se considera $s_n = \sqrt[n]{n} - 1$.

$$
\begin{aligned}
& s_n = \sqrt[n]{n} - 1 \\
\equiv & \\
& n = (s_n + 1)^n \\
\equiv & \\
& n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s_n^k \\
\Rightarrow & \\
& n \geq \binom{n}{2} s_n^2 \\
\equiv & \\
& n \geq \frac{n!}{(n-2)!\,2!} s_n^2 \\
\equiv & \\
& 1 \geq \frac{n-1}{2} s_n^2 \\
\equiv & \\
& \sqrt{\frac{2}{n-1}} \geq s_n
\end{aligned}
$$

Se tiene entonces, que para todo $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq s_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$. De igual forma, para todo $n \in {}^*\mathbb{N}$, $0 \leq {}^*s_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$. Lo que implica, que para todo $\omega \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
& 0 \leq {}^*s_\omega \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{ Los recíprocos de infinitos son infinitesimales, aplicando st() } \rangle \\
& 0 \leq \mathrm{st}({}^*s_\omega) \leq 0 \\
\equiv & \\
& \mathrm{st}({}^*s_\omega) = 0
\end{aligned}
$$

Teorema 6.3 (Sucesiones de Cauchy)**:** Sea $\{s_n\}$ una sucesión. $\{s_n\}$ es una sucesión de Cauchy, si y solo si, para todo $\omega, \gamma \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$, ${}^*s_\omega =_1 {}^*s_\gamma$

La demostración de este teorema es exáctamente igual que el teorema anterior.

Por lo mencionado al principio de esta sección, pareciera que el uso de esta teoría para sucesiones en espacios métricos arbitrarios no tendría sentido, pues la sucesión podría no hacer parte de $\widehat{\mathbb{R}}$. Sin embargo, solo hace falta ver que todas las definiciones y teoremas que estudian el comportamiento de las sucesiones en otros espacios métricos, reducen el problema a nuevas sucesiones las cuales efectivamente, son sucesiones reales. Por ejemplo, sea $\{p_n\}$ una sucesión en un espacio métrico X el cual tiene como distancia la función $d_X : (X \times X) \to \mathbb{R}^{\geq 0}$. Se dice que $\{p_n\}$ converge a $p \in X$ cuando

$$(\forall \varepsilon \,|\, \varepsilon > 0 \,:\, (\exists N \,|\, N \in \mathbb{N} \,:\, (\forall n \,|\, n \geq N \,:\, d_X(p_n, p) < \varepsilon)))$$

Defínase la sucesión $\{q_n\}$ de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$ por:

$$q_n = d_X(p_n, p)$$

La convergencia de $\{p_n\}$ se puede escribir en términos de la convergencia de $\{q_n\}$ a 0 de la siguiente manera:

$$(\forall \varepsilon \,|\, \varepsilon > 0 \,:\, (\exists N \,|\, N \in \mathbb{N} \,:\, (\forall n \,|\, n \geq N \,:\, |q_n - 0| < \varepsilon)))$$

Como la sucesión $\{q_n\}$ es real, aplican los teoremas anteriores, con lo que, la convergencia de $\{p_n\}$ se puede expresar en el análisis no estándar como:

$$(\forall \omega \,|\, \omega \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N} \,:\, d_X(p_\omega, p) =_1 0)$$

De la misma forma, la sucesión $\{p_n\}$, es de Cauchy cuando

$$(\forall \varepsilon \,|\, \varepsilon > 0 \,:\, (\exists N \,|\, N \in \mathbb{N} \,:\, (\forall n, m \,|\, n, m \geq N \,:\, d_X(p_n, p_m) < \varepsilon)))$$

En este caso, para pasar a una sucesión real, no se tiene como tal una sucesión, pues su dominio no sería $\mathbb{N}$, sino $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Esto, sin embargo, no complica el problema. Defínase $\{s_{n,m}\}$ por

$$s_{n,m} = d_X(p_n, p_m)$$

La proposición se puede reescribir como

$$(\forall \varepsilon \,|\, \varepsilon > 0 \,:\, (\exists N \,|\, N \in \mathbb{N} \,:\, (\forall n, m \,|\, n, m \geq N \,:\, s_{n,m} < \varepsilon)))$$

De la misma forma que se realizó en la demostración de los teoremas para sucesiones reales, se puede obtener un equivalente en el análisis no estándar:

$$(\forall \omega, \gamma \,|\, \omega, \gamma \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N} \,:\, d_X(p_\omega, p_\gamma) =_1 0)$$

7. Continuidad y Diferenciabilidad

Una función de variable real y valor real, es un subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, por lo que, es una entidad de $\widehat{\mathbb{R}}$. De igual forma, una función f se extiende a ${}^*f$ la cual, por el teorema 4.3 y el lema 4.1 es un subconjunto de ${}^*\mathbb{R} \times {}^*\mathbb{R}$. De la misma forma, si $A = \operatorname{dom} f$, para todo $x \in A$, $f(a) = {}^*f(a)$. Cabe resaltar, que las propiedades de f se mantienen en ${}^*\mathbb{R}$ mientras estas se puedan expresar en ambos lenguajes.

La definición de $\lim_{x\to c} f(x) = a$ en el análisis estándar es

$$(\forall \varepsilon \,|\, \varepsilon > 0 \,:\, (\exists \delta \,|\, \delta > 0 \,:\, (\forall x \,|\, x \in \mathbb{R} \wedge 0 < |x - c| < \delta \,:\, |f(x) - a| < \varepsilon)))$$

De la misma forma que se hizo con las sucesiones, se obtiene una definición análoga para el análisis no estándar:

$$(\forall x \,|\, x \in \mu(c) - \{c\} \,:\, {}^*f(x) =_1 a)$$

Definiendo la suma de conjuntos como: $A + B = \{a + b \,|\, a \in A \wedge b \in B\}$, se tiene que, para todo $r \in \mathbb{R}$, $\mu(r) = M_1 + \{r\}$. Usando esto, se puede reescribir la definición de límite de la siguiente forma

$$(\forall x \,|\, x \in M_1 - \{0\} \,:\, {}^*f(c + x) =_1 a)$$

Nótese que para la continuidad de f en c, se tiene respectivamente la siguiente definición:

$$(\forall x \,|\, x \in M_1 \,:\, {}^*f(c + x) =_1 f(c))$$

La derivada, en su definición, tiene dos "versiones", las cuales son completamente equivalentes. La derivada de f en x existe si y solo si los siguientes límites existen (basta con uno, pues son el mismo límite):

(i) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

(ii) $\lim_{t \to x} \dfrac{f(t) - f(x)}{t - x}$

Por simplicidad se considerará el resultado de estos límites como L. En el análisis no estándar, análogamente, la derivada de f en x existe si y solo si, para todo $h \in M_1 - \{0\}$:

$$\frac{{}^*f(x+h) - f(x)}{h} =_1 L$$

De igual forma, se puede definir $f'(x)$ como la parte estándar del cociente que define el límite:

$$f'(x) = \mathrm{st}\left(\frac{{}^*f(x+h) - f(x)}{h}\right)$$

Como ejemplo, se motrará el uso de estas definiciones para demostrar que la diferenciabilidad en un punto implica continuidad en ese punto. Sean $x \in \mathbb{R}$, f una función derivable en x y $h \in M_1 - \{0\}$.

$$\begin{aligned} &{}^*f(x+h) - f(x) \\ =_1 \; &\frac{{}^*f(x+h) - f(x)}{h}\, h \\ =_1 \; &f'(x)\, h \\ =_1 \; &0 \end{aligned}$$

Nótese que la demostración se puede replicar en el análisis estándar, ya que la relación '$=_1$' es análoga a decir que algo tiende a un resultado bajo cierta condición, esta condición vienen a ser los hiperreales que están operando.