

Extrapolación de secuencias finitas

David Gómez, Laura Rincón, Daniel Pérez

Escuela Colombiana de Ingeniería
Matemáticas

30 de Mayo del 2023

Ejemplo

Extrapolación
de secuencias
finitas

David G.
Laura R.
Daniel P.

Algor.
recursivo

Algor. no
recursivo

Extensión

$$S = \langle 7, 0, 15 \rangle$$

$a(n)$ es una función tal que:

$$a(0) = 7 ; a(1) = 0 ; a(2) = 15$$

- $a_0(n) = 7$

Ejemplo

Extrapolación
de secuencias
finitas

David G.
Laura R.
Daniel P.

Algor.
recursivo

Algor. no
recursivo

Extensión

$$S = \langle 7, 0, 15 \rangle$$

$a(n)$ es una función tal que:

$$a(0) = 7 ; a(1) = 0 ; a(2) = 15$$

$$\begin{aligned} \bullet a_0(n) &= 7 \\ \bullet a_1(n) &= y_1 \cdot n + a_0(n) \end{aligned} \quad \begin{aligned} &0 = y_1(1) + 7 \\ &\equiv \\ &y_1 = -7 \end{aligned}$$

Ejemplo

Extrapolación
de secuencias
finitas

David G.
Laura R.
Daniel P.

Algor.
recursivo

Algor. no
recursivo

Extensión

$$S = \langle 7, 0, 15 \rangle$$

$a(n)$ es una función tal que:

$$a(0) = 7 ; a(1) = 0 ; a(2) = 15$$

$$\begin{aligned} \bullet a_0(n) &= 7 & 15 &= y_2 \cdot 2(2-1) + a_1(2) \\ \bullet a_1(n) &= -7n + 7 & \equiv \\ \bullet a_2(n) &= y_2 \cdot n(n-1) + a_1(n) & y_2 &= 11 \end{aligned}$$

Ejemplo

Extrapolación
de secuencias
finitas

David G.
Laura R.
Daniel P.

Algor.
recursivo

Algor. no
recursivo

Extensión

$$S = \langle 7, 0, 15 \rangle$$

$a(n)$ es una función tal que:

$$a(0) = 7 ; a(1) = 0 ; a(2) = 15$$

- $a_0(n) = 7$
- $a_1(n) = -7n + 7$
- $a_2(n) = 11n(n-1) - 7n + 7$

Si S es arbitraria

Extrapolación
de secuencias
finitas

David G.
Laura R.
Daniel P.

Algor.
recursivo

Algor. no
recursivo

Extensión

$$S = \langle x_0, x_1, \dots, x_m \rangle$$

$$a_0(n) = x_0$$

$$a_1(n) = (x_1 - x_0)n + x_0$$

$$a_2(n) = \frac{1}{2}(x_2 - 2x_1 + x_0)n(n-1) + (x_1 - x_0)n + x_0$$

Si S es arbitraria

Extrapolación
de secuencias
finitas

David G.
Laura R.
Daniel P.

Algor.
recursivo

Algor. no
recursivo

Extensión

$$S = \langle x_0, x_1, \dots, x_m \rangle$$

$$a_0(n) = x_0$$

$$a_1(n) = (x_1 - x_0)n + x_0$$

$$a_2(n) = \frac{1}{2}(x_2 - 2x_1 + x_0)n(n-1) + (x_1 - x_0)n + x_0$$

Si S es arbitraria

Extrapolación
de secuencias
finitas

David G.
Laura R.
Daniel P.

Algor.
recursivo

Algor. no
recursivo

Extensión

$$S = \langle x_0, x_1, \dots, x_m \rangle$$

$$a_0(n) = x_0$$

$$a_1(n) = (x_1 - x_0)n + x_0$$

$$a_2(n) = \frac{1}{2}(x_2 - 2x_1 + x_0)n(n-1) + (x_1 - x_0)n + x_0$$

Fórmula recursiva

Extrapolación
de secuencias
finitas

David G.
Laura R.
Daniel P.

Algor.
recursivo

Algor. no
recursivo

Extensión

Si $S = \langle x_0, \dots, x_m \rangle$, $0 \leq k < m$

$$a_0(n) = x_0$$

$$a_{k+1}(n) = \frac{1}{(k+1)!} [x_{k+1} - a_k(k+1)] \prod_{c=0}^k (n - c) + a_k(n)$$

$$= \binom{n}{k+1} [x_{k+1} - a_k(k+1)] + a_k(n)$$

¿Qué hay que solucionar?

Extrapolación
de secuencias
finitas

David G.
Laura R.
Daniel P.

Algor.
recursivo

Algor. no
recursivo

Extensión

Forma general del algoritmo

$$a_k(n) = \sum_{i=0}^k y_i \prod_{c=0}^{i-1} (n - c)$$

$$y_{b+1} = \frac{1}{(b+1)!} [x_{b+1} - a_b(b+1)]$$

Valor a generalizar

$$x_{b+1} - a_b(b+1)$$

¿Qué hay que solucionar?

Extrapolación
de secuencias
finitas

David G.
Laura R.
Daniel P.

Algor.
recursivo

Algor. no
recursivo

Extensión

Forma general del algoritmo

$$a_k(n) = \sum_{i=0}^k y_i \prod_{c=0}^{i-1} (n - c)$$

$$y_{b+1} = \frac{1}{(b+1)!} [x_{b+1} - a_b(b+1)]$$

Valor a generalizar

$$x_{b+1} - a_b(b+1)$$

¿Qué hay que solucionar?

Extrapolación
de secuencias
finitas

David G.
Laura R.
Daniel P.

Algor.
recursivo

Algor. no
recursivo

Extensión

Forma general del algoritmo

$$a_k(n) = \sum_{i=0}^k y_i \prod_{c=0}^{i-1} (n - c)$$

$$y_{b+1} = \frac{1}{(b+1)!} [x_{b+1} - a_b(b+1)]$$

Valor a generalizar

$$x_{b+1} - a_b(b+1)$$

Ejemplos hasta $k = 6$

Extrapolación
de secuencias
finitas

David G.
Laura R.
Daniel P.

Algor.
recursivo

Algor. no
recursivo

Extensión

$$k = 0 \quad \text{---} \circ \text{---} \rightarrow x_0$$

$$k = 1 \quad \text{---} \circ \text{---} \rightarrow -x_0 + x_1$$

$$k = 2 \quad \text{---} \circ \text{---} \rightarrow x_0 - 2x_1 + x_2$$

$$k = 3 \quad \text{---} \circ \text{---} \rightarrow -x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3$$

$$k = 4 \quad \text{---} \circ \text{---} \rightarrow x_0 - 4x_1 + 6x_2 - 4x_3 + x_4$$

$$k = 5 \quad \text{---} \circ \text{---} \rightarrow -x_0 + 5x_1 - 10x_2 + 10x_3 - 5x_4 + x_5$$

$$k = 6 \quad \text{---} \circ \text{---} \rightarrow x_0 - 6x_1 + 15x_2 - 20x_3 + 15x_4 - 6x_5 + x_6$$

Ejemplos hasta $k = 6$

Extrapolación
de secuencias
finitas

David G.
Laura R.
Daniel P.

Algor.
recursivo

Algor. no
recursivo

Extensión

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	1	0	0	0	0	0	0
1	-1	1	0	0	0	0	0
2	1	-2	1	0	0	0	0
3	-1	3	-3	1	0	0	0
4	1	-4	6	-4	1	0	0
5	-1	5	-10	10	-5	1	0
6	1	-6	15	-20	15	-6	1

Conjetura

Extrapolación
de secuencias
finitas

David G.
Laura R.
Daniel P.

Algor.
recursivo

Algor. no
recursivo

Extensión

$$\phi_j(i) = \frac{(-1)^{i+j}}{j!} \prod_{c=0}^{j-1} (i - c)$$



x_i en la iteración $k = j$

Conjetura

Extrapolación
de secuencias
finitas

David G.
Laura R.
Daniel P.

Algor.
recursivo

Algor. no
recursivo

Extensión

Expresiones con binomios

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0(n) = x_0 \\ a_{k+1}(n) = \binom{n}{k+1} (x_{k+1} - a_k(k+1)) + a_k(k+1) \end{array} \right\}$$

Expresiones con binomios

$$\begin{aligned}a_k(n) &= \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \left(x_0 \binom{i}{0} (-1)^i + \cdots x_k \binom{i}{k} (-1)^{i+k} \right) \\&= \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (-1)^{i+j} x_j\end{aligned}$$

Extrapolación deseada

Extrapolación
de secuencias
finitas

David G.
Laura R.
Daniel P.

Algor.
recursivo

Algor. no
recursivo

Extensión

Siendo f un conjunto de puntos finito para una extrapolación

$$f : \Lambda \rightarrow \Upsilon$$

$$|f| = k, k \in \mathbb{N}$$

Extrapolación deseada

Extrapolación
de secuencias
finitas

David G.
Laura R.
Daniel P.

Algor.
recursivo

Algor. no
recursivo

Extensión

Siendo f un conjunto de puntos finito para una extrapolación
Se definen sucesiones para las primeras y segundas coordenadas

$$S_{\Lambda} , S_{\Upsilon}$$

Ejemplo rápido

Extrapolación
de secuencias
finitas

David G.
Laura R.
Daniel P.

Algor.
recursivo

Algor. no
recursivo

Extensión

$$f = \{(0,1; 34); (2; -10); (12; 34)\}$$



$$S_L = \langle 0,1; 2; 12 \rangle$$

$$S_R = \langle 34; -10; 34 \rangle$$

Función general de las sucesiones

Extrapolación
de secuencias
finitas

David G.
Laura R.
Daniel P.

Algor.
recursivo

Algor. no
recursivo

Extensión

Definición de $S_{\Lambda}(n)$ y $S_{\Upsilon}(n)$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{\Lambda}(0) = \min(\Lambda) \\ S_{\Lambda}(n+1) = \min \left(\Lambda - \bigcup_{i=0}^n \{S_{\Lambda}(i)\} \right) \end{array} \right\}$$

$$S_{\Upsilon}(n) = f(S_{\Lambda}(n))$$

Función general de las sucesiones

Extrapolación
de secuencias
finitas

David G.
Laura R.
Daniel P.

Algor.
recursivo

Algor. no
recursivo

Extensión

Definición de $S_{\Lambda}(n)$ y $S_{\Upsilon}(n)$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{\Lambda}(0) = \min(\Lambda) \\ S_{\Lambda}(n+1) = \min \left(\Lambda - \bigcup_{i=0}^n \{S_{\Lambda}(i)\} \right) \end{array} \right\}$$

$$S_{\Upsilon}(n) = f(S_{\Lambda}(n))$$

Extrapolación para cualquier función finita

Extrapolación
de secuencias
finitas

David G.
Laura R.
Daniel P.

Algor.
recursivo

Algor. no
recursivo

Extensión

Composición para obtener la extrapolación deseada

$$x \in \text{dom}(f)$$

$$f^*(x) = S_{\gamma} (S_{\lambda}^{-1}(x))$$