David Gómez, Laura Rincón

DEMOSTRACIONES DE PRYE

Matemáticas

2024

Índice

1. Introducción

Por ahora, cualquier cosa

2. Probabilidad

Uno de los problemas no resueltos de esta primera parte del curso fue hallar la probabilidad de una unión finita de eventos.

Esta probabilidad, sin embargo, se puede hallar mediante una forma recursiva con la siguiente expresión

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P(A_{n+1}) + P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_{n+1} \cap A_i)\right)$$

Lo que se quiere es resolver esta función de recursión. Para esto, se evaluaran unos cuantos de sus resultados.

$$\begin{aligned}
& P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\
= & \\
& P(A_3) + P(A_1 \cup A_2) - P((A_3 \cap A_1) \cup (A_3 \cap A_2)) \\
= & \\
& P(A_3) + P(A_2) + P(A_1) - P(A_1 \cap A_2) \\
& \quad -[P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)] \\
= & \\
& P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) \\
& \quad -P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\
= & \\
& \sum_{i=1}^{3} P(A_i) - \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=i+1}^{3} P(A_i \cap A_j) + P\left(\bigcap_{i=1}^{3} A_i\right)
\end{aligned}$$

Análogamente para cuatro eventos, usando lo obtenido

$$
\begin{aligned}
& P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) \\
= & \\
& P(A_4) + P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) - P\left(\bigcup_{i=1}^{3} (A_4 \cap A_i)\right) \\
= & \\
& P(A_4) + \sum_{i=1}^{3} P(A_i) - \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=i+1}^{3} P(A_i \cap A_j) + P\left(\bigcap_{i=1}^{3} A_i\right) \\
& \quad - \left[\sum_{i=1}^{3} P(A_4 \cap A_i) - \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=i+1}^{3} P(A_4 \cap A_i \cap A_j) + P\left(\bigcap_{i=1}^{4} A_i\right)\right] \\
= & \\
& \sum_{i=1}^{4} P(A_i) - \sum_{i=1}^{3} \sum_{i=1}^{4} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=i+1}^{3} \sum_{k=j+1}^{4} P(A_1 \cap A_j \cap A_k) - P\left(\bigcap_{i=1}^{4} A_i\right)
\end{aligned}
$$

Por último, recordar que

$$\sum_{i=a}^{b} \sum_{j=i+1}^{b+1} f(i,j) = \sum_{a \leq i < j \leq b} f(i,j)$$

Teorema 1: Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos de un espacio muestral. Entonces,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{1 \leq i \leq n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^n P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

De otra forma, la probabilidad de una unión finita es la suma de la probabilidad de cada evento menos las posibles intersecciones dos a dos, sumando las probabilidades tres a tres...

Demostración: Siguiendo por inducción. Los caso base $n = 1$ y $n = 2$ caen en la definición recursiva y para $n = 3$ fue el desarrollo anterior. Para el paso inductivo, supóngase que la propiedad se mantiene hasta un valor n.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right)$$
$$=$$
$$P(A_{n+1}) + P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_{n+1} \cap A_i)\right)$$
$$=$$
$$P(A_{n+1}) + P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$
$$-\left[\sum_{1\leq i\leq n} (A_{n+1} \cap A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} (A_{n+1} \cap A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^n P\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right)\right]$$
$$=$$
$$\sum_{1\leq i\leq n+1} P(A_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n+1} P(A_i \cap A_j) +$$
$$\sum_{1\leq i<j<k\leq n+1} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right)$$

□

Definición 1: Sean A y B eventos de un espacio muestral. Se dice que A y B son independientes, cuando $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$.

Teorema 2: Sean A y B eventos independientes. Entonces

(i) A^c y B^c son independientes.

(ii) A^c y B son independientes.

Demostración: Supóngase A y B eventos independientes de un espacio muestral.

(i) Partiendo de que $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$.

$$P(A^c \cap B^c)$$
$$=$$
$$1 - P(A \cup B)$$
$$=$$
$$1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$$
$$=$$
$$1 - P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$
$$=$$
$$(1 - P(A))(1 - P(B))$$
$$=$$
$$P(A^c)\, P(B^c)$$

Así, los eventos A^c y B^c también son independientes.

(ii) Partiendo de que $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$

$$P(B)$$
$$=$$
$$P((B \cap A) \cup (B \cap A^c))$$
$$=$$
$$P(B \cap A) + P(B \cap A^c) - P(\varnothing)$$
$$=$$
$$P(B)\, P(A) + P(B \cap A^c)$$

Tomando la primera y última igualdad

$$P(B \cap A^c)$$
$$=$$
$$P(B) - P(B)P(A)$$
$$=$$
$$P(B)(1 - P(A))$$
$$=$$
$$P(B)\,P(A^c)$$

Así, los eventos A^c y B también son independientes.

$\square$

3. Distribuciones

En esta sección se repasarán las definiciones de algunas distribuciones de la probabilidad.

3.1. Distribuciones Discretas

3.1.1. Binomial

Supóngase se realiza un experimento el cual tiene como posible resultado a o b exclusivamente, y además, el resultado de realizar nuevamente el experimento es independiente al resultado anterior. Dado que a y b son los únicos resultados, para un único experimento, se debe tener que $P(a) = 1 - P(b)$. Sea $p = P(a)$. Supóngase que este experimento es realizado n veces. Se define una variable aleatoria X correspondiente a la cantidad de ocurrencias de a. Entonces

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Definición 2: Sea X una variable aleatoria discreta. X sigue una distribución binomial con parámetros n y p ($n \in \mathbb{Z}^+, p \in [0,1]$), denotada por $B(n,p)$, cuando su función de masa es

$$f(x) = P(X = x) = B(n,p)(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Teorema 3: Sea X una variable aleatoria la cual sigue una distribución binomial $B(n,p)$. Entonces

(i) $E(X) = np$

(ii) $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$

Demostración: Desarrollando ambos valores, y recordando el teorema del binomio. . .

(i)

$$E(X)$$
$$=$$
$$\sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$
$$=$$
$$np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(x-1)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= np \sum_{x=0}^{n-1} \binom{n-1}{x} p^x (1-p)^{n-1-x} = np\,(p+1-p)^{n-1} = np$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= E(X^2) - E^2(X) \\
&= \sum_{x=0}^{n} x^2 \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} - (np)^2 \\
&= np \left[\sum_{x=1}^{n} x \binom{n-1}{x-1} p^{x-1} (1-p)^{n-x} - np \right] \\
&= np \left[\sum_{x=0}^{n-1} (x+1) \binom{n-1}{x} p^x (1-p)^{n-1-x} - np \right] \\
&= np \left[\sum_{x=0}^{n-1} x \binom{n-1}{x} p^x (1-p)^{n-1-x} + \sum_{x=0}^{n-1} \binom{n-1}{x} p^x (1-p)^{n-1-x} - np \right] \\
&= np \left[p(n-1) \sum_{x=1}^{n-1} \binom{n-2}{x-1} p^{x-1} (1-p)^{n-1-x} + 1 - np \right] \\
&= np \left[p(n-1) \sum_{x=0}^{n-2} \binom{n-2}{x} p^x (1-p)^{n-2-x} + 1 - np \right] \\
&= np[p(n-1) + 1 - np] \\
&= np(1-p)
\end{aligned}$$

Este argumento es válido siempre que $n \geq 2$. Si $n < 2$, entonces $n = 1$ y

$$\mathrm{Var}(X) =$$

$$
\begin{aligned}
& E(X^2) - E^2(X) \\
= & \\
& \sum_{x=0}^{1} x^2 \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} - p^2 \\
= & \\
& p - p^2 \\
= & \\
& p\,(1-p)
\end{aligned}
$$

Así, el resultado se mantiene para todo $n \in \mathbb{Z}^+$

$\square$

3.1.2. Hipergeométrica

Supóngase se tienen dos tipos de objetos, a y b en un total de N objetos exclusivamente de estos dos tipos. Sea K el número de objetos de tipo a en el total de los N objetos, es decir hay $N - K$ objetos de tipo b. Supóngase que se toman ahora n objetos del total (N). Se define una variable aleatoria X correspondiente al número de objetos de tipo a en los n objetos tomados. Entonces

$$P(X = x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Definición 3: Sea X una variable aleatoria discreta. X sigue una distribución hipergeométrica con parámetros N, K, n ($N, K, n \in \mathbb{Z}^+, K \leq N, n \leq N$), cuando su función de masa es

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \qquad \text{máx}\{0, n + K - N\} \leq x \leq \text{mín}\{K, n\}$$

La razón de esta condición para x está en que tenga sentido para lo que se está representando. Por un lado, no tiene sentido pensar en la probabilidad de tomar más objetos de tipo a de los que hay en el total de la muestra o tomar más objetos de tipo a del total de estos. De la misma forma, no tiene sentido tomar una cantidad negativa de objetos tipo a, o tomar una cantidad de objetos tipo a de forma que haya una cantidad negativa de objetos tipo b para completar los n objetos. De forma más concreta, se pueden ver las condiciones de x dada la expresión de la función de masa presentada.

$$
\begin{aligned}
&0 \le x \le K \quad \wedge \quad 0 \le n - x \le N - K \\
\Leftrightarrow& \\
&0 \le x \le K \quad \wedge \quad n + K - N \le x \le n \\
\Leftrightarrow& \\
&\text{máx}\{0, n + K - N\} \le x \le \text{mín}\{K, n\}
\end{aligned}
$$