Análisis no estándar

David Gómez

Escuela Colombiana de Ingeniería
Matemáticas

18 de Diciembre del 2023

Definición

Sea $I \neq \varnothing$. Un filtro $\mathcal{F}$ sobre I es un conjunto de subconjuntos de I con las siguientes características:

1. $\varnothing \notin \mathcal{F}$
2. $A \subseteq B \Rightarrow (A \in \mathcal{F} \Rightarrow B \in \mathcal{F})$
3. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

$$I = \{a, b, c\}$$

$$\mathcal{F} = \{\{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$

Definición

Sea $I \neq \varnothing$. Un filtro $\mathcal{F}$ sobre I es un conjunto de subconjuntos de I con las siguientes características:

1. $\varnothing \notin \mathcal{F}$
2. $A \subseteq B \Rightarrow (A \in \mathcal{F} \Rightarrow B \in \mathcal{F})$
3. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

$$I = \{a, b, c\}$$
$$\mathcal{F} = \{\{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$

Relación de orden

Sea $\mathscr{F}$ el conjunto de filtros sobre I. $\mathcal{F}_1$ es *más fino* que $\mathcal{F}_2$ cuando $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1$. un filtro $\mathscr{U}$ es llamado ultrafiltro si es un elemento maximal.

$$(\forall \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \in \mathscr{F} - \{\mathscr{U}\} : \mathscr{U} \not\subset \mathcal{F})$$

$$\begin{aligned} I &= \{a, b, c\} \\ \mathcal{F}_1 &= \{\{a, b\}, \{a, b, c\}\} \\ \mathcal{F}_2 &= \{\{b, c\}, \{a, b, c\}\} \\ \mathscr{U}_1 &= \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\} \\ \mathscr{U}_2 &= \{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\} \end{aligned}$$

Relación de orden

Sea $\mathscr{F}$ el conjunto de filtros sobre I. $\mathcal{F}_1$ es *más fino* que $\mathcal{F}_2$ cuando $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1$. un filtro $\mathscr{U}$ es llamado ultrafiltro si es un elemento maximal.

$$(\forall \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \in \mathscr{F} - \{\mathscr{U}\} : \mathscr{U} \not\subset \mathcal{F})$$

$$\begin{aligned} I &= \{a, b, c\} \\ \mathcal{F}_1 &= \{\{a, b\}, \{a, b, c\}\} \\ \mathcal{F}_2 &= \{\{b, c\}, \{a, b, c\}\} \\ \mathscr{U}_1 &= \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\} \\ \mathscr{U}_2 &= \{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\} \end{aligned}$$

Caracterizaciones

Un filtro $\mathscr{U}$ sobre I es un ultrafiltro si y solo si:

1. $(\forall A \mid A \subseteq I : A \in \mathscr{U} \not\equiv I - A \in \mathscr{U})$
2. Si una unión finita es elemento de $\mathscr{U}$, entonces al menos un elemento de la unión es elemento de $\mathscr{U}$:
   $\bigcup_{k=0}^{n} F_n \in \mathscr{U} \Rightarrow F_k \in \mathscr{U}$ para algún k.

$$I = \{a, b, c\}$$
$$\mathcal{F} = \{\{a, b\}, \{a, b, c\}\}$$
$$\mathscr{U} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Caracterizaciones

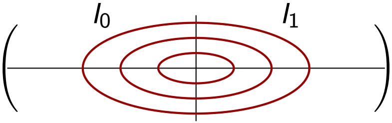
Un filtro $\mathscr{U}$ sobre I es un ultrafiltro si y solo si:

1. $(\forall A \mid A \subseteq I : A \in \mathscr{U} \not\equiv I - A \in \mathscr{U})$
2. Si una unión finita es elemento de $\mathscr{U}$, entonces al menos un elemento de la unión es elemento de $\mathscr{U}$:
   $\bigcup_{k=0}^{n} F_n \in \mathscr{U} \Rightarrow F_k \in \mathscr{U}$ para algún k.

$$
\begin{aligned}
I &= \{a, b, c\} \\
\mathcal{F} &= \{\{a, b\}, \{a, b, c\}\} \\
\mathscr{U} &= \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}
\end{aligned}
$$

Ulfrafiltros δ-incompletos

Sea I un conjunto infinito. $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro δ-incompleto cuando existe $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, una partición contable de I, tal que para todo n, $I_n \notin \mathscr{U}$.



n-uplas

$$
\begin{aligned}
(a) &= a \\
(a, b) &= \{\{a\}, \{a, b\}\} \\
(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) &= ((a_1, \ldots, a_n), a_{n+1})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A \times B &\subseteq \mathscr{P}(\mathscr{P}(A \cup B)) \\
A \times B \times C &\subseteq \mathscr{P}(\mathscr{P}((A \times B) \cup C)) \\
&\subseteq \mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(A \cup B)) \cup C)) \\
\vdots \qquad & \vdots
\end{aligned}
$$

Superestructura de $\mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbb{R}_0 &= \mathbb{R} \\ \mathbb{R}_{n+1} &= \mathscr{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} \mathbb{R}_k \right) \end{aligned} \right\}$$

$$\widehat{\mathbb{R}} = \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{R}_n$$

Construcción de la ultrapotencia

Sea I un conjunto infinito, $\mathscr{U}$ un ultrafiltro sobre I, y $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una partición contable de I la cual cumple la definición de δ-incompleto en $\mathscr{U}$.

$$^{I}\widehat{\mathbb{R}} = \left\{ f \,\middle|\, \operatorname{dom} f = I \wedge \operatorname{ran} f \subseteq \widehat{\mathbb{R}} \right\}$$

Extensión de la igualdad y la pertenencia

Sean $a, b \in {}^{I}\widehat{\mathbb{R}}$

$a =_{\mathscr{U}} b$	$a \in_{\mathscr{U}} b$
$\equiv$	$\equiv$
$\{i \mid a(i) = b(i)\} \in \mathscr{U}$	$\{i \mid a(i) \in b(i)\} \in \mathscr{U}$

$$\left(\forall a, b \,\middle|\, a, b \in {}^{I}\widehat{\mathbb{R}} : a =_{\mathscr{U}} b \vee a \neq_{\mathscr{U}} b\right)$$

Extensión de la igualdad y la pertenencia

Sean $a, b \in {}^{I}\widehat{\mathbb{R}}$

$a =_{\mathscr{U}} b$	$a \in_{\mathscr{U}} b$
$\equiv$	$\equiv$
$\{i \mid a(i) = b(i)\} \in \mathscr{U}$	$\{i \mid a(i) \in b(i)\} \in \mathscr{U}$

Se define, para todo $a \in \widehat{\mathbb{R}}$, la incorporación a ${}^{I}\widehat{\mathbb{R}}$ por la función constante ${}^{*}a(i) = a$ para todo $i \in I$.

Entidades internas y estándar

Sea $a \in {}^{I}\widehat{\mathbb{R}}$, a es llamada *entidad interna* cuando existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a \in {}^{*}\mathbb{R}_n$. a es llamada *estándar* cuando existe $b \in \widehat{\mathbb{R}}$ tal que, $a = {}^{*}b$. El conjunto $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} {}^{*}\mathbb{R}_n$, es llamado la ultrapotencia de $\widehat{\mathbb{R}}$ con respecto a $\mathscr{U}$, y se denotará como ${}^{*}(\widehat{\mathbb{R}})$.
Existen entidades internas no-estándar.

Demostración

Considerando algún $\mathbb{R}_n$, y una colección $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_n$ tal que, si $m \neq n$ entonces $a_m \neq a_n$. Se define entonces $a \in {}^I\widehat{\mathbb{R}}$ por $a(i) = a_n \quad (i \in I_n)$.

$a \in {}^*\mathbb{R}_n$	$a = {}^*b$
$\equiv$	$\equiv$
$\{i \mid a(i) \in \mathbb{R}_n\} \in \mathscr{U}$	$\{i \mid a(i) = b\} \in \mathscr{U}$
$\equiv$	$\equiv$
$I \in \mathscr{U}$	$(\exists n \mid n \in \mathbb{N} : I_n \in \mathscr{U})$

Extensión de otras relaciones y operaciones

Sean $a, b, c \in {}^{I}\widehat{\mathbb{R}}$

$$a + b = c \equiv \{i \mid a(i) + b(i) = c(i)\} \in \mathscr{U}$$
$$a \leq b \equiv \{i \mid a(i) \leq b(i)\} \in \mathscr{U}$$
$$|| : {}^{*}R \to {}^{*}(R^{+})$$

Ejemplo de un número no estádar

Defínase $\omega \in {}^*\mathbb{N}$ por

$$\omega(i) = n \quad (i \in I_n)$$

Sea $k \in \mathbb{N}$

$$\omega \leq k$$
$$\equiv$$
$$\{i \mid \omega(i) \leq k\} \in \mathscr{U}$$
$$\equiv$$
$$\bigcup_{i=0}^{k} I_i \in \mathscr{U}$$

Números finitos e infinitesimales

Un número $a \in {}^*\mathbb{R}$ es llamado *finito* cuando existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $|a| < r$. un número no finito es llamado *infinito*. Un número $a \in {}^*\mathbb{R}$ es llamado *infinitesimal* cuando, para todo $r \in \mathbb{R}^+$, $|a| < r$.

$$M_0 = \{a \in {}^*\mathbb{R} \mid a \text{ es finito}\}$$
$$M_1 = \{a \in {}^*\mathbb{R} \mid a \text{ es infinitesimal}\}$$

Isomorfismo con $\mathbb{R}$

1. M_0 es un subanillo de ${}^*\mathbb{R}$.
2. M_1 es un subanillo de M_0.
3. M_1 es un ideal maximal de M_0.

- Con la relación $=_1$ en ${}^*R$, definida por $a =_1 b \equiv a - b \in M_1$, se define el anillo cociente M_0/M_1.
- M_0/M_1 es isomorfo a $\mathbb{R}$.
- El homomorfismo de M_0 a $\mathbb{R}$ con kernel M_1 se denotará como $\mathrm{st}()$
- Las clases de equivalencia de M_0 con respecto a M_1 se denotarán como $\mu()$. Por ejemplo $\mu(0) = M_1$.

Isomorfismo con $\mathbb{R}$

1. M_0 es un subanillo de ${}^*\mathbb{R}$.
2. M_1 es un subanillo de M_0.
3. M_1 es un ideal maximal de M_0.

- El homomorfismo de M_0 a $\mathbb{R}$ con kernel M_1 se denotará como $\mathrm{st}()$
- Las clases de equivalencia de M_0 con respecto a M_1 se denotarán como $\mu()$. Por ejemplo $\mu(0) = M_1$.

Sistema numérico no estándar ${}^*\mathbb{C}$

- Superestructura $\widehat{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}$.
- Ultrapotencia ${}^*\left(\widehat{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}\right)$.
- ${}^*\mathbb{C} = {}^*\mathbb{R} \times {}^*\mathbb{R}$.

Sistema numérico no estándar $^*\mathbb{C}$

Un número $z \in {}^*\mathbb{C}$ es llamado *finito* cuado existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|z\| < r$. Un número no finito es llamado *infinito*.
Un número $z \in {}^*\mathbb{C}$ es llamado *infinitesimal* cuando, para todo $r \in \mathbb{R}^+$, $\|z\| < r$.
$z = a + b\,i$ es infinitesimal si y solo si a, b son infinitesimales.