Índice

1. Filtros

Sea I un conjunto no vacío.

Definición 1.1: Un filtro $\mathcal{F}$ sobre I es un conjunto no vacío de subconjuntos de I, con las siguiente propiedades:

(i) $\varnothing \notin \mathcal{F}$

(ii) $A \in \mathcal{F} \wedge B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

(iii) $A \in \mathcal{F} \wedge A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{F}$

La letra $\mathcal{F}$ denotará un filtro sobre I, a menos que se especifique otra cosa.

Definición 1.2 (Relación de orden)**:** Se dice que un filtro $\mathcal{F}_1$ *es más fino* que un filtro $\mathcal{F}_2$ cuando $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1$.

Definición 1.3: Sea $\mathscr{F}$ el conjunto de filtros sobre I. Un ultrafiltro, es un elemento maximal de $\mathscr{F}$. Por definición de la relación de orden, esto es, no está contenido propiamente en algún otro filtro de $\mathscr{F}$.

La letra $\mathscr{U}$ denotará un ultrafiltro sobre I, a menos que se especifique otra cosa.

Teorema 1.1 (caracterizaciones de los ultrafiltros)**:** Un filtro $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro sii

(i) $(\forall A \mid A \in I \,:\, A \in \mathscr{U} \not\equiv I - A \in \mathscr{U})$

(ii) Si una unión finita está en $\mathscr{U}$, entonces al menos uno de los conjuntos que compone dicha unión, también está en $\mathscr{U}$. Esto es, si para un $n \in \mathbb{N}$ hay una colección $\{A_0, \ldots, A_n\}$ tal que $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} A_k \in \mathscr{U}$, entonces, $(\exists k \mid k \leq n \,:\, A_k \in \mathscr{U})$

Demostración

(i) Sea $\mathscr{U}$ un filtro que cumple la propiedad a demostrar. Se va a suponer que $\mathscr{U}$ no es un ultrafiltro. Así, por definición, existe un filtro $\mathscr{U}_2$ más fino que $\mathscr{U}$.

$$\begin{aligned}
& \mathscr{U}_2 - \mathscr{U} \neq \varnothing \\
\equiv & \\
& (\exists A \mid: A \in \mathscr{U}_2 - \mathscr{U}) \\
\equiv & \quad \langle\ A \text{ no está en } \mathscr{U}, \text{ y } \mathscr{U} \text{ cumple la propiedad mencionada } \rangle \\
& (\exists A \mid A \in \mathscr{U}_2 - \mathscr{U} \,:\, I - A \in \mathscr{U})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \langle\, \mathscr{U} \subseteq \mathscr{U}_2 \,\rangle \\
& (\exists A \mid A \in \mathscr{U}_2 - \mathscr{U} \;:\; I - A \in \mathscr{U}_2\,) \\
\equiv & \\
& (\exists A \mid A \notin \mathscr{U} \;:\; I - A \in \mathscr{U}_2 \wedge A \in \mathscr{U}_2\,) \\
\Rightarrow \quad & \langle\, \text{Definición de filtro, intersección finita} \,\rangle \\
& (\exists A \mid A \notin \mathscr{U} \;:\; \varnothing \in \mathscr{U}_2\,)
\end{aligned}
$$

Esto último es una contradicción con otra de las propiedades en la definición de un filtro. En consecuencia, la suposición de que $\mathscr{U}$ no es ultrafiltro es incorrecta.

(ii) Esta caracterización se va a demostrar usando la anterior. Para mostrar su definición de caracterización, se mostrará la equivalencia que tiene con (i).

Para toda la primera demostación, se considerará un $n \in \mathbb{N}$ y una colección con el mismo nombre que la mencionada en la enunciación de la caracterización.

Por una parte, suponiendo que $\bigcup_{k=0}^{n} A_k \in \mathscr{U} \wedge (\forall k \mid k \leq n \;:\; A_k \notin \mathscr{U}\,)$. Por (i), se tiene entonces

$$\bigcap_{k=1}^{n} (I - A_k) \notin \mathscr{U} \wedge (\forall k \mid k \leq n \;:\; I - A_k \in \mathscr{U}\,)$$

Se puede ver que hay una contradicción, pues la intersección de todos los A_k debe pertenecer a $\mathscr{U}$, pues esta es una intersección finita. Así, (i) $\Rightarrow$ (ii).

Por otro lado. Sean $F \notin \mathscr{U}$, $A_1 = F$ y $A_2 = I - F$. Como $\bigcup_{k=1}^{2} A_i = I$, $I \in \mathscr{U}$, entonces al menos uno de los A_k debe estar en $\mathscr{U}$. por definición de filtro, se tiene que no pueden ser ambos al tiempo, y por (ii), tampoco puede ser que ninguno esté. Así, (ii) $\Rightarrow$ (i)

Nota: $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro sii, agregarle otro subconjunto implica que $\varnothing \in \mathscr{U}$

Definición 1.4: Un filtro $\mathcal{F}$ es llamado δ-incompleto cuando existe una colección $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en I, tal que para todo n, $F_n \in \mathcal{F}$ y $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \notin \mathcal{F}$. Un filtro $\mathcal{F}$ es llamado δ-completo cuando no es δ-incompleto.

Definición 1.5: Un filtro $\mathcal{F}$ es llamado libre cuando $\bigcap \mathcal{F} = \varnothing$

Teorema 1.2: (i) Un ultrafiltro $\mathscr{U}$ sobre I es δ-incompleto sii existe una partición contable de I (I_n) tal que, para todo n, $I_n \notin \mathscr{U}$

(ii) Todo ultrafiltro δ-incompleto es libre

Demostración

(i) Sea $\{F_n\}_{n\in\mathbb{J}}$ una colección de subconjuntos de I que cumpla en $\mathscr{U}$ la definición de δ-incompleto. Como $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro, se tiene entonces que, para todo $n \in \mathbb{J}$, $I - F_n \notin \mathscr{U}$. Por defínción de filtro, tampoco puede estar en $\mathscr{U}$ alguno de sus subconjuntos. Así mismo, como la colección de los F_n cumple la definición de δ-incompleto, se tiene que $\bigcup_{n\in\mathbb{J}}(I - F_n) \in \mathscr{U}$.

Sea B_n una colección de subconjuntos de I definida por $B_k = \bigcup_{n=1}^{k}(I - F_k)$ Sea I_n una colección de subconjuntos de I definida por

$$\left\{\begin{array}{c} I_0 = \bigcap_{k\in\mathbb{J}} F_k \\ \\ I_{n+1} = B_{n+1} - B_n \end{array}\right\}$$

Se va a mostrar que la colección $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una partición de I, de la cual, para todo n, $I_n \notin \mathscr{U}$

De entrada se tiene que $I_0 \notin \mathscr{U}$, por definición de δ-incompleto. Por otro lado, hace falta hallar de forma más explícita qué es I_n para un $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} I_1 &= I - F_1 \\ I_2 &= ((I - F_1) \cup (I - F_2)) - (I - F_1) \\ I_3 &= ((I - F_1) \cup (I - F_2) \cup (I - F_3)) - ((I - F_1) \cup (I - F_2)) \\ \vdots \quad &\vdots \end{aligned}$$

Se puede ver inmediatamente que $I_1 \notin \mathscr{U}$. También se tiene que, para un par de subconjuntos de I, A y B: $A - B = A \cup (I - B)$ y $I - (A \cup B) = (I - A) \cap (I - B)$. Una vez aclarado esto:

$$
\begin{aligned}
& I_{n+1} \\
= \\
& B_{n+1} - B_n \\
= \\
& \bigcup_{k=1}^{n+1} (I - F_k) - \bigcup_{k=1}^{n} (I - F_k) \\
= \\
& \left((I - F_{n+1}) \cup \bigcup_{k=1}^{n} (I - F_k) \right) \cap \left(I - \bigcup_{k=1}^{n} (I - F_k) \right) \\
= \\
& \left((I - F_{n+1}) \cap \left(I - \bigcup_{k=1}^{n} (I - F_k) \right) \right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n} (I - F_k) \cap \left(I - \bigcup_{k=1}^{n} (I - F_k) \right) \right) \\
= \\
& (I - F_{n+1}) \cap \bigcap_{k=1}^{n} F_k
\end{aligned}
$$

Se puede ver que, para todo $n \in \mathbb{J}$, $I_n \subseteq (I - F_n)$, lo que, por definición de filtro, y el hecho de que $I - F_n \notin \mathscr{U}$, implica que $I_n \notin \mathscr{U}$.

Por la definición de B_n, para todo $n \in \mathbb{J}$, $B_n \subseteq B_{n+1}$. Esto garantiza que para todo $n, m \in \mathbb{J} \wedge n \neq m$, $I_n \cup I_m = \varnothing$.

Falta resolver con I_0 y verificar que la unión de todos, en efecto, sea I. Esto se puede hacer en un mismo paso, calculando la unión de todos los I_n desde $n = 1$. Pero esta unión resulta ser la misma que la unión de todos los $I - F_n$. Así,

$$
\bigcup_{n \in \mathbb{J}} I_n = \bigcup_{n \in \mathbb{J}} (I - F_n)
$$

Con esta expresión, se puede ver que, I_0, es precisamente el complemento en I de esta unión. Con lo que se concluye que la colección $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una partición de I tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $I_n \notin \mathscr{U}$.

En el otro sentio, con ultrafiltro $\mathscr{U}$ sobre I y una partición contable de I, $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal como se define en el enunciado. Se tiene entonces que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $I - I_n \in \mathscr{U}$. Por lo que se define $F_n = I - I_n$.

solo hace falta ver que la intersección de todos los F_n no esté en $\mathscr{U}$.

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$$

$$=$$

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (I - I_n)$$

$$=$$

$$I - \bigcup n \in \mathbb{N} I_n$$

$$=$$

$$I - I$$

$$=$$

$$\varnothing$$

$$\notin$$

$$\mathscr{U}$$

Así, se concluye la demostración de esta caracterización de los ultrafiltros δ-incompletos.

(ii) Este segundo teorema, resulta ser consecuencia inmediata del anterior. Por esta razón, para un ultrafiltro δ-incompleto, se cuenta con una partición contrable $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que cumple la definición del enunciado.

Lo primero es explorar el significado de $\bigcap \mathscr{U} = \varnothing$

$$\bigcap \mathscr{U} = \varnothing$$

$$\equiv$$

$$\neg \bigcap \mathscr{U} \neq \varnothing$$

$$\equiv$$

$$\neg \left(\exists x \,\middle|\!:\, x \in \bigcap \mathscr{U}\right)$$

$$\equiv$$

$$\neg (\exists x \mid: (\forall F \mid F \in \mathscr{U} \;:\; x \in F))$$

$$\equiv$$

$$(\forall x \mid : (\exists F \mid F \in \mathscr{U} : x \notin F))$$

Ya con esta proposición, es más claro lo que hace falta demostrar. Por generalización:

$$\begin{aligned} & x \in I \\ \equiv & \\ & (\exists n \mid n \in \mathbb{N} : x \in I_n \land I_n \notin \mathscr{U}) \\ \equiv & \\ & (\exists n \mid n \in \mathbb{N} : x \notin I - I_n \land (I - I_n) \in \mathscr{U}) \end{aligned}$$

Así, queda demostrado el teorema (ii).

Junto con el lema de Zorn y la caracterización de los ultrafiltros δ-incompletos, se puede demostrar que en cualquier conjunto infinito, existen dichos ultrafiltros.

2. Súperestructura de $\mathbb{R}$

La idea en esta súperestructura, es poder agrupar todas las relaciones posibles entre número reales. Debido a la definición de las n-uplas de forma recursiva:

$$(a) = a$$

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

$$(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) = ((a_1, \ldots, a_n), a_{n+1})$$

y el hecho de que, $(a, b) \in A \times B \Rightarrow (a, b) \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(A \cup B))$, se puede lograr definir un conjunto el cual junte todas las n-uplas de números reales.

Se define entones la siguiente colección de conjuntos:

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbb{R}_0 &= \mathbb{R} \\ \mathbb{R}_{n+1} &= \mathscr{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} \mathbb{R}_k\right) \end{aligned} \right\}$$

Definición 2.1: La súperestructura, denotada por $\widehat{\mathbb{R}}$, se definirá como:

$$\widehat{\mathbb{R}} = \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{R}_n$$

Definición 2.2: Los elementos de $\widehat{\mathbb{R}}$ serán llamados *entidades*. De estas, los elementos de $\mathbb{R}$ serán llamados *individuos*.

Ahora, se mostrarán algunas propiedades de las entidades. Estas servirán mucho más adelante para demostrar algunos teoremas a cerca de la construcción de los número híperreales.

Lema 2.1:

(i) $(\forall n, k \mid n, k \in \mathbb{J} \land n \geq k : \mathbb{R}_k \subseteq \mathbb{R}_n)$

(ii) $\left(\forall n \;\middle|\; n \in \mathbb{J} : \bigcup_{k=0}^{n} \mathbb{R}_k = \mathbb{R}_n\right)$

(iii) $(\forall n, k \mid n, k \in \mathbb{N} \land k \leq n : R_k \in R_n)$

(iv) $(\forall n, x, y \mid n \in \mathbb{N} \land y \in \mathbb{R}_{n+1} \land x \in y : x \in \mathbb{R}_n)$

Demostración

(i) Sean $n, k \in \mathbb{J}$ tales que $n \geq k$. Se mostrará la contenencia De $\mathbb{R}_k$ en R_n tomando un elemento en $\mathbb{R}_k$ y viendo que esto implica que esté en $\mathbb{R}_n$.

$$\begin{aligned}
& x \in \mathbb{R}_k \\
\equiv \quad & \\
& x \in \mathscr{P}\left(\bigcup_{m=0}^{k-1} R_m\right) \\
\equiv \quad & \\
& x \subseteq \bigcup_{m=0}^{k-1} R_m \\
\Rightarrow \quad & \langle\, A \subseteq B \Rightarrow A \subseteq B \cup C \,\rangle \\
& x \subseteq \bigcup_{m=0}^{n} R_m \\
\equiv \quad & \\
& x \in \mathscr{P}(\bigcup_{m=0}^{n} R_m)
\end{aligned}$$

$$\equiv$$

$$x \in \mathbb{R}_n$$

hola

(ii) La demostración se hará por inducción: *Caso base:*

$$\bigcup_{k=0}^{1} \mathbb{R}_k = \mathbb{R}_0 \cup \mathbb{R}_1 = \mathbb{R}_1$$

Paso inductivo: Suponiendo que, para $n \in \mathbb{J}$, se tiene la propiedad.

$$\begin{aligned}
& \bigcup_{k=0}^{n} \mathbb{R}_k = \mathbb{R}_0 \cup \mathbb{R}_n \\
\Rightarrow \quad & \langle\ A = B \Rightarrow A \cup C = B \cup C\ \rangle \\
& \bigcup_{k=0}^{n+1} \mathbb{R}_k = \mathbb{R}_0 \cup \mathbb{R}_n \cup \mathbb{R}_{n+1} \\
\equiv \quad & \langle\ \text{Propiedad anterior, } A \subseteq B \equiv A \cup B = B\ \rangle \\
& \bigcup_{k=0}^{n+1} \mathbb{R}_k = \mathbb{R}_{n+1}
\end{aligned}$$

(iii) Para $n = 1$, k debe ser 0. En este caso, se cumple la propiedad. Para $n \geq 1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
& \mathbb{R}_k \in \mathbb{R}_{n+1} \\
\equiv \quad & \\
& \mathbb{R}_k \in \mathscr{P}\left(\bigcup_{m=0}^{n} \mathbb{R}_m\right) \\
\equiv \quad & \\
& \mathbb{R}_k \subseteq \bigcup_{m=0}^{n} \mathbb{R}_m \\
\equiv \quad & \langle\ \text{Propiedad (ii)}\ \rangle \\
& \mathbb{R}_k \subseteq \mathbb{R}_n
\end{aligned}$$

Esta última expresión, se puede ver por la propiedad (i), es cierta.

(iv) Sean $n \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{R}_{n+1}$, $x \in y$

$$
\begin{aligned}
& x \in y \wedge y \in \mathbb{R}_{n+1} \\
\equiv \quad & \langle \text{(ii)} \rangle \\
& x \in y \wedge y \subseteq \mathbb{R}_n \\
\Rightarrow \quad & \\
& x \in \mathbb{R}_n
\end{aligned}
$$

(v)