Análisis No Estandar

David Gómez

ESCUELA
COLOMBIANA
DE INGENIERÍA
JULIO GARAVITO

Física de Calor y Ondas

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

9 de diciembre de 2023

Índice

1. Introduccion

Cuando Newton y Leibniz trabajaron en la fundamentación del cálculo, una de sus diferencias fue la definición de límite. Mientras Newton lo definió de la forma en la que se ha enseñado principalmente, la definición ε y δ. Leibniz, lo definia de una forma que incluso parece una versión más amigable que la de Newton. Leibniz consideraba números infinitamente pequeños, de tal forma que fueran menores que cualquier número positivo pero mayores a 0. Junto con números infinitamente grandes, mayores que cualquier número positivo.

El problema de esta definición, se encontró cuando se intentó fundamentar formalmente. Cosa que Leibniz ni sus discípulos lograron demostrar. La definición de Newton recurre a los mismos números reales ya usados. La definición de Leibniz, recurre a una nueva especie de números, los cuales deben ser comparables y se deben poder operar con los reales. La idea entonces con esta nueva especie de números, es poder operar con estos, para posteriormente tomar el resultado y recuperar la información que interesa, la que corresponde a un valor real estándar. Esta nueva especie de números resulta tener aplicaciones en más áreas que el cálculo de límites, sin embargo, no hacen parte del objetivo de este proyecto, el cual consta de presentar esta idea en relación al análisis estándar, específicamente, el análisis diferencial.

Los pasos para la construcción de estos números, recurre a los filtros, un objeto de la teoría de conjuntos sobre el que se hablará en el documento. Con estos, se puede lograr la construcción de esta nueva especie de números sobre los reales.

2. Filtros

Los filtros son, como se mencionó, son objetos de la teoría de conjuntos. Como su nombre indica, son objetos que filtran, de forma análoga a lo que puede hacer un colador. Para esta sección, se considerará I como un conjunto no vacío, esto último es necesario para la definición de filtro.

Definición 2.1: Un filtro $\mathcal{F}$ sobre I, es un conjunto no vacío de subconjuntos de I. $\mathcal{F}$ cumple las siguientes características:

(i) $\varnothing \notin \mathcal{F}$

(ii) $(\forall A, B \mid A, B \in \mathcal{F} \, : \, A \cap B \in \mathcal{F})$

(iii) $(\forall A, B \mid A \in \mathcal{F} \wedge A \subseteq B \, : \, B \in \mathcal{F})$

Para esta sección, la letra $\mathcal{F}$ denotará un filtro sobre I

Por ejemplo, considere el conjunto $X = \{a, b, c\}$. Un filtro G sobre X puede ser

$$G = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Nótese que por la definición de filtro, el conjunto sobre el que este se define, siempre debe ser un elemento del filtro.

Definición 2.2: Sea $\mathcal{S}$, una colección de subconjuntos de I tales que, $\mathcal{S}$ cumpla la propiedad de las intersecciones finitas. Esto es, para toda colección finita de elementos de S, su intersección sea distinta de $\varnothing$. Se dice entonces que $\mathcal{S}$ es una sub-base para algun filtro sobre I.

Definición 2.3: Sea $\mathcal{B}$ una colección no vacía de subconjuntos de I tales que,

$$(\forall A, B \mid A, B \in \mathcal{B} \, : \, (\exists C \mid C \in \mathcal{B} \, : \, C \subseteq A \cap B))$$

Se dice entonces, que $\mathcal{B}$ es una base para algún filtro sobre I. Nótese que toda base genera un filtro, como puede ser

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq I \mid (\exists B \mid B \in \mathcal{B} \,:\, B \subseteq A)\}$$

Así como un colador puede ser más fino que otro, en el sentido que deja pasar menos cosas, también se pueden comparar a los filtros definidos sobre un conjunto.

Definición 2.4 (Relación de orden)**:** Sea $\mathscr{F}$ el conjunto de filtros sobre I, la relación de contenencia ordena parcialmente a $\mathscr{F}$, y entre dos elementos de define de la siguiente manera:

Un filtro $\mathcal{F}_1$ es *más fino* que un filtro $\mathcal{F}_2$ cuando $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1$.

Como ejemplo, volvamos al conjunto X definido para el ejemplo anterior. Sean G_1, G_2 filtros sobre X, donde

$$G_1 = \{\{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\} \ , \ G_2 = \{\{a,b,c\}\}$$

Se puede ver que $G_2 \subseteq G_1$. Sin embargo, hay filtros que no se pueden comparar, incluso en conjuntos tan simples como podría ser X. Si consideramos ahora un nuevo filtro
$G_3 = \{\{b\}, \{b,a\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$, está claro que no se pueden comparar G_3 y G_1.

Definición 2.5: Sea $\mathscr{F}$ el conjunto de filtros definidos sobre I. Se define el concepto de ultrafiltro como un elemento maximal de $\mathscr{F}$ con la relación de orden definida anteriormente. Simbólicamente, un filtro $\mathscr{U}$ sobre I, es un ultrafiltro cuando

$$(\forall \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \in \mathscr{F} \wedge \mathcal{F} \neq \mathscr{U} \,:\, \mathscr{U} \not\subset \mathcal{F})$$

Para esta sección, la letra $\mathscr{U}$ denotará un ultrafiltro sobre I.
Como ejemplo, se pueden tomar los filtros G_1 y G_3 de antes.

Teorema 2.1 (Caracterizaciones)**:** Sea $\mathscr{U}$ un ultrafiltro sobre I. $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro si y solo si:

(i) $(\forall A \mid A \subseteq I \,:\, A \in \mathscr{U} \not\equiv I - A \in \mathscr{U})$

(ii) Sean $n \in \mathbb{J}$, $\{A_k\}$ una colección de n subconjuntos de I tal que

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{U}$$

entonces

$$(\exists k \mid k \leq n \,:\, A_k \in \mathscr{U})$$

Demostración (i)***:*** Por un lado, se va a mostrar que si $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro, entonces se tiene la propiedad. Por contradicción, se va a suponer que $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro, y se tiene un subconjunto A de I, tal que $A \notin \mathscr{U} \wedge I - A \notin \mathscr{U}$. Una forma equivalente de escribir el punto (iii) de la definición de filtro es

$$(\forall A, B \mid A \subseteq B \,:\, B \notin \mathcal{F} \Rightarrow A \notin \mathcal{F})$$

Con esto se puede ver que ningún subconjunto, tanto de A como de $I - A$ es elemento de $\mathscr{U}$.

Sea $\mathscr{U}_2 = \{B \subseteq I \mid B \cup A \in \mathscr{U}\}$, se puede ver que $\mathscr{U} \subset \mathscr{U}_2$, en efecto

$$\begin{aligned} & B \in \mathscr{U} \\ \Rightarrow & \\ & B \cup A \in \mathscr{U} \\ \equiv & \\ & B \in \mathscr{U}_2 \end{aligned}$$

No son iguales, pues, por ejemplo, $I - A \cup A = I$, $I - A \in \mathscr{U}_2$.

Hace falta ver que $\mathscr{U}_2$ es un filtro.

(i) Por contradicción, es inmediato:

$$\begin{aligned} & \varnothing \in \mathscr{U}_2 \\ \equiv & \\ & A \in \mathscr{U} \end{aligned}$$

(ii) Sean $X, Y \in \mathscr{U}_2$

$$\begin{aligned} & X \cap Y \in \mathscr{U}_2 \\ \equiv & \\ & (X \cap Y) \cup A \in \mathscr{U} \\ \equiv & \\ & (X \cup A) \cap (Y \cup A) \in \mathscr{U} \end{aligned}$$

Como $X, Y \in \mathscr{U}_2$, se tiene que ambos términos de la intersección son elementos de $\mathscr{U}$. Como $\mathscr{U}$ es un filtro, por definición, esta intersección también es elemento de $\mathscr{U}$.

(iii) Sean $X \in \mathscr{U}_2$ y $Y \supseteq X$

$$\begin{aligned} & X \subseteq Y \\ \Rightarrow & \\ & X \cup A \subseteq Y \cup A \\ \Rightarrow & \quad \langle\ X \in \mathscr{U}_2 \text{ y } \mathscr{U} \text{ es un filtro } \rangle \\ & Y \cup A \in \mathscr{U} \\ \equiv & \\ & Y \in \mathscr{U}_2 \end{aligned}$$

Entonces, se tiene que $\mathscr{U} \subset \mathscr{U}_2$ y $\mathscr{U}_2$ es un filtro sobre I. Lo cual contradice la hipótesis de que $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro.

Por el otro lado, de igual forma por contradicción. Se va a suponer que $\mathscr{U}$ es un filtro con la propiedad (i) y que $\mathscr{U}$ no es un ultrafiltro.

Como $\mathscr{U}$ no es un ultrafiltro, existe un filtro $\mathscr{U}_2$ tal que $\mathscr{U} \subset \mathscr{U}_2$.

$$
\begin{aligned}
& \mathscr{U}_2 - \mathscr{U} \neq \varnothing \\
\equiv & \\
& (\exists A \,|: \; A \in \mathscr{U}_2 - \mathscr{U}) \\
\equiv & \quad \langle \; \mathscr{U} \text{ cumple (i) y } A \notin \mathscr{U} \; \rangle \\
& (\exists A \,|\, A \in \mathscr{U}_2 - \mathscr{U} \; : \; I - A \in \mathscr{U}) \\
\Rightarrow & \quad \langle \, \mathscr{U} \subset \mathscr{U}_2 \, \rangle \\
& (\exists A \,|\, A \in \mathscr{U}_2 - \mathscr{U} \; : \; I - A \in \mathscr{U}_2) \\
\equiv & \\
& (\exists A \,|\, A \notin \mathscr{U} \; : \; A \in \mathscr{U}_2 \wedge I - A \in \mathscr{U}_2) \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{ Definición de filtro } \rangle \\
& (\exists A \,|\, A \notin \mathscr{U} \; : \; \varnothing \in \mathscr{U}_2)
\end{aligned}
$$

Esto último contradice la definición de filtro, mostrando así que la suposición de que $\mathscr{U}$ no es un ultrafiltro, es incorrecta.

Demostración (ii)***:*** Como ya se demostró la equivalencia entre la definición de ultrafiltro y (i), se va a usar esta última.

Por un lado, se va a mostrar que (i) $\Rightarrow$ (ii). Sean $\mathscr{U}$ un ultrafiltro sobre I, $n \in \mathbb{N}$, $\{A_k\}$ una colección de conjuntos de I como se definió en el enunciado. Se va a mostrar que existe un elemento de esta colección que es elento de $\mathscr{U}$. Para esto, se va a suponer que no existe dicho elemento, es decir:

$$
\begin{aligned}
& \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{U} \wedge (\forall k \,|\, 1 \leq k \leq n \; : \; A_k \notin \mathscr{U}) \\
\equiv & \quad \langle \, \text{(i)} \, \rangle
\end{aligned}
$$

$$\bigcap_{k=0}^{n}(I - A_k) \notin \mathscr{U} \wedge (\forall k \,|\, 1 \leq k \leq n \,:\, I - A_k \in \mathscr{U})$$

Esta última expresión es contradictoria, pues por definición, las intersecciones finitas de elementos de filtros son elementos de los filtros (propiedad (ii) de la definición). Justamente se tiene que todos los elementos de una intersección finita son elementos de $\mathscr{U}$, y su intersección no es elemento del filtro, Así (i) $\Rightarrow$ (ii).

Por otro lado, se va a mostrar que (ii) $\Rightarrow$ (i). Sea $\mathscr{U}$ un ultrafiltro sobre I. Suponiendo que se cuenta con (ii). Sean $F \in \mathscr{U}$, $A_1 = F$ y $A_2 = I - F$. Como $\bigcup_{k=1}^{2} A_k = I$ y $I \in \mathscr{U}$, por (ii), al menos uno de los A_k debe pertenecer a $\mathscr{U}$. Por definición de filtro, no puede ser que ambos sean elementos de $\mathscr{U}$ y (ii) garantiza que no puede ser que ninguno sea elemento de $\mathscr{U}$. Es decir, $A_1 \in \mathscr{U} \not\equiv A_2 \in \mathscr{U}$, que reemplazando es (i). Así (ii) $\Rightarrow$ (i).

Definición 2.6: Un filtro $\mathcal{F}$ es llamado δ-incompleto cuando existe una colección contable de subconjuntos de I, tal que todos sus elementos estén en $\mathscr{U}$ y su intersección no. Es decir, si existe $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $F_n \in \mathscr{U}$ y $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \notin \mathscr{U}$. Un filtro es llamado δ-completo cuando no es δ-incompleto.

Definición 2.7: Un filtro $\mathcal{F}$ es llamado *libre* cuando $\bigcap \mathcal{F} = \varnothing$.

Teorema 2.2 (Caracterización)**:** Un ultrafiltro $\mathscr{U}$ es δ-incompleto si y solo si, existe $\{I_n\}$, una partición contable de I, tal que, para todo n, $I_n \notin \mathscr{U}$.

Demostración: Sean $\mathscr{U}$ un ultrafiltro δ-incompleto sobre I y $\{F_n\}_{n\in\mathbb{J}}$ una colección de subconjuntos de I, la cual cumple la definición de δ-incompleto en $\mathscr{U}$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} &(\forall n \,|\, n \in \mathbb{J} \,:\, F_n \in \mathscr{U}) \wedge \bigcap_{n\in\mathbb{J}} F_n \notin \mathscr{U} \\ \equiv\ & \langle\ \mathscr{U} \text{ es un ultrafiltro}\ \rangle \end{aligned}$$

$$(\forall n \,|\, n \in \mathbb{J} \,:\, I - F_n \notin \mathscr{U}) \wedge \bigcup_{n \in \mathbb{J}} (I - F_n) \in \mathscr{U}$$

Sea $\{B_n\}_{n \in \mathbb{J}}$ una colección de subconjuntos de I, definida por $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} (I - F_k)$. Nótese que, los elementos de B_n están contenidos consecutivamente, esto es

$$(\forall n, m \,|\, n, m \in \mathbb{J} \wedge n \leq m \,:\, B_n \subseteq B_m)$$

Sea $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una colección de subconjuntos de I definida por

$$\left\{ \begin{array}{c} I_0 = \bigcap_{k \in \mathbb{J}} F_k \\ I_{n+1} = B_{n+1} - B_n \end{array} \right\}$$

Se va a mostrar que $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una partición de I tal que, para todo n, $I_n \notin \mathscr{U}$. Es evidente que $I_0 \notin \mathscr{U}$, pues se tiene en la definición de $\{F_n\}$.

$$I_{n+1}$$

$$=$$

$$B_{n+1} - B_n$$

$$=$$

$$\bigcup_{k=1}^{n+1} (I - F_k) - \bigcup_{k=1}^{n} (I - F_k)$$

$$=$$

$$\left((I - F_{n+1}) \cup \bigcup_{k=1}^{n} (I - F_k) \right) \cap \left(I - \bigcup_{k=1}^{n} (I - F_k) \right)$$

$$=$$

$$\left((I - F_{n+1}) \cap \left(I - \bigcup_{k=1}^{n} (I - F_k) \right) \right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n} (I - F_k) \cap \left(I - \bigcup_{k=1}^{n} (I - F_k) \right) \right)$$

$$=$$

$$(I - F_{n+1}) \cap \bigcap_{k=1}^{n} F_k$$

Se puede ver que, para todo $n \in \mathbb{J}$, $I_n \subseteq I - F_n$. Por la definición de filtro, nuevamente el punto (iii), para todo $k \in \mathbb{J}$, nunguno de los subconjuntos de I_k es elemento de $\mathscr{U}$, así, para todo $n \in \mathbb{N}$, $I_n \notin \mathscr{U}$.

Por como se definió I_n para $n \in \mathbb{J}$, se puede ver que sus elementos son disjuntos. Asimismo, al ser estos subconjuntos de F_n respectivamente, lo que los hace disjuntos con I_0. Esto último se verá de forma más clara al corroborar que la unión de la colección sea efectivamente I.

$$\bigcup_{n \in \mathbf{J}} I_n = \bigcup_{n \in \mathbf{J}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbf{J}} (I - F_n)$$

Para finalizar la demostración, se tomará el complemento de esta unión, la cual, al unirla con lo obtenido, se obtiene I, y más importante, es disjunta con lo obtenido.

$$I - \bigcup_{n \in \mathbf{J}} (I - F_n) = \bigcap_{n \in \mathbf{J}} F_n = I_0$$

Teorema 2.3: Todo ultrafiltro δ-incompleto es libre, con $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una partición que cumple la definición de δ-incompleto en $\mathscr{U}$.

Demostración: Sea $\mathscr{U}$ un ultrafiltro δ-incompleto sobre I. Lo primero es explorar precisamente qué hace falta demostrar, es decir, expandir el significado de *libre*.

$$
\begin{aligned}
& \bigcap \mathscr{U} = \varnothing \\
\equiv & \\
& \neg \bigcap \mathscr{U} \neq \varnothing \\
\equiv & \\
& \neg \left(\exists x \middle|: x \in \bigcap \mathscr{U}\right) \\
\equiv & \\
& \neg \left(\exists x \,|: \left(\forall F \,|\, F \in \mathscr{U} \;:\; x \in F\right)\right) \\
\equiv & \\
& \left(\forall x \,|: \left(\exists F \,|\, F \in \mathscr{U} \;:\; x \notin F\right)\right)
\end{aligned}
$$

Tomando un elemento arbitrario de I:

$$
\begin{aligned}
& x \in I \\
\equiv & \\
& (\exists n \,|\, n \in \mathbb{N} \;:\; x \in I_n) \\
\equiv & \\
& (\exists n \,|\, n \in \mathbb{N} \;:\; x \notin I - I_n)
\end{aligned}
$$

Nótese que la existencia de un ultrafiltro δ-incompleto sobre un conjunto, requiere que dicho conjunto sea infinito.

Teorema 2.4: Sea I un conjunto infinito, entonces, existe un ultrafiltro δ-incompleto sobre I.

Demostración: Sea $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una partición contable de I. Defínanse A y $\mathcal{B}$ como:

$$A = \{I_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{S \subseteq I \,|\, S \text{ es finito}\}$$
$$\mathcal{B} = \{I - S \,|\, S \in A\}$$

Si $\mathcal{B}$ es una sub-base, entonces existe un filtro asociado $\mathcal{F}$, el cual debe estar contenido en un ultrafiltro $\mathcal{U}$ por el lema del ultrafiltro. por como se definió $\mathcal{B}$, se tendría que, para todo n, $I - I_n \in \mathcal{U}$.

La condición necesaria para que $\mathcal{B}$ sea una sub-base, es que cumpla la propiedad de las intersecciones finitas. Sean P_1, P_2 subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, y $H_{n n\in P_2}$ una colección de subconjuntos finitos de I.

$$\bigcap_{n\in P}(I - I_n) \cap \bigcap_{n\in P_2}(I - H_n)$$
$$=$$
$$I - \left(\bigcup_{n\in P_1} I_n \cup \bigcup_{n\in P_2} H_n\right)$$

Nótese que, $\bigcup\limits_{n\in I-P_1} I_n$ es un subconjunto infinito de I. También, se tiene que $\bigcup\limits_{n\in P_2}$ es un subconjunto finito de I. Con esto se demuestra que la intersección presentada es distinta de $\varnothing$. Con lo cual, $\mathcal{B}$ es una sub-base.

3. Superestructura $\widehat{\mathbb{R}}$

El objetivo de la superestructura es poder agrupar todas las relaciones definidas en un conjunto. En este caso $\mathbb{R}$. Debido a que las n-uplas se definen recursivamente de la siguiente manera:

$$(a) = a$$
$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$
$$(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) = ((a_1, \ldots, a_n), a_{n+1})$$

Se puede demostrar que $(a, b) \in A \times B \Rightarrow (a, b) \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(A \cup B))$. Debido a esto, es posible definir un conjunto el cual contenga todas las relaciones entre números reales. Se define la colección $\mathbb{R}_n$ de la siguiente manera:

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \\ \mathbb{R}_{n+1} = \mathscr{P}(\mathbb{R}_n) \end{array} \right\}$$

Se define entonces, la superestructura $\widehat{\mathbb{R}}$ por

$$\widehat{\mathbb{R}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n$$

Los elementos de $\widehat{\mathbb{R}}$ serán llamados *entidades* y los elementos de $\mathbb{R}$ serán llamados *individuos.*

Lema 3.1:

(i) $(\forall n, m \,|\, n, m \in \mathbb{N} \wedge n \leq m \;:\; R_n \in \mathbb{R}_{m+1})$

(ii) $(\forall n, x, y \,|\, n \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{R}_{n+1} \wedge x \in y \;:\; x \in \mathbb{R}_n)$

Demostración:

(i) **Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n \leq m$.**

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{R}_n \subseteq \mathbb{R}_m \\
\equiv & \\
& \mathbb{R}_n \in \mathscr{P}(\mathbb{R}_m) \\
\equiv & \\
& \mathbb{R}_n \in \mathbb{R}_{m+1}
\end{aligned}
$$

(ii) **Sean $n \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{R}_{n+1}$ y $x \in y$.**

$$
\begin{aligned}
& x \in y \wedge y \in \mathbb{R}_{n+1} \\
\equiv & \\
& x \in y \wedge y \subseteq \mathbb{R}_n \\
\Rightarrow & \\
& x \in \mathbb{R}_n
\end{aligned}
$$

4. Ultraproducto de $\widehat{\mathbb{R}}$

Sean I un conjunto infinito, $\mathscr{U}$ un ultrafiltro δ-incompleto sobre I, y $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una partición contable la cual cumple la definición de δ-incomleto en $\mathscr{U}$.

Considere ahora el conjunto ${}^I\widehat{\mathbb{R}}$, de las funciones de I en $\widehat{\mathbb{R}}$. Sea $a \in \widehat{\mathbb{R}}$, se define ${}^*a \in {}^I\widehat{\mathbb{R}}$ por ${}^*a(i) = a$. Esta función, definida para todas las entidades, es una forma de incorporar $\widehat{\mathbb{R}}$ en ${}^I\widehat{\mathbb{R}}$. Se puede definir una extensión de las relaciones '=' y '$\in$' basadas en $\mathscr{U}$

Definición 4.1: Sean $a, b \in {}^I\widehat{\mathbb{R}}$

(i) $a =_{\mathscr{U}} b \equiv \{i \,|\, a(i) = b(i)\} \in \mathscr{U}$

(ii) $a \in_{\mathscr{U}} b \equiv \{i \,|\, a(i) \in b(i)\} \in \mathscr{U}$

Sean $a, b \in {}^I\widehat{\mathbb{R}}$, estas relaciones se comportan de la misma forma que su versión usual, esto es:

- $a =_{\mathscr{U}} b \not\equiv a \neq_{\mathscr{U}} b$
- $a \in_{\mathscr{U}} b \not\equiv a \notin_{\mathscr{U}} b$

Demostración: Sean $a, b \in {}^I\widehat{\mathbb{R}}$. Nótese que $\{i \,|\, a(i) = b(i)\} \cup \{i \,|\, a(i) \neq b(i)\} = I$. Esto mismo sucede con '$\in$'.

$a =_{\mathscr{U}} b$	$a \in_{\mathscr{U}} b$
$\equiv$	$\equiv$
$\{i \,|\, a(i) = b(i)\} \in \mathscr{U}$	$\{i \,|\, a(i) \in b(i)\} \in \mathscr{U}$
$\not\equiv$ $\langle$ $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro $\rangle$	$\not\equiv$ $\langle$ $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro $\rangle$
$\{i \,|\, a(i) \neq b(i)\} \notin \mathscr{U}$	$\{i \,|\, a(i) \notin b(i)\} \notin \mathscr{U}$

Antes de continuar, se presenta la siguiente convención de notación:

Definición 4.2: Sean $a \in {}^{I}\widehat{\mathbb{R}}$ y V un predicado en $\widehat{\mathbb{R}}$ con $a_1, \ldots, a_n$ constantes, dichas constantes denotan elementos fijos de $\widehat{\mathbb{R}}$.

- $\{a\}(i) = \{a(i)\}$
- ${}^{*}V = V$ reemplazando cada a_i por ${}^{*}a_i$.

Sean $a, b \in {}^{I}\widehat{\mathbb{R}}$, otra propiedad que se tiene, en este caso para la igualdad bajo $\mathscr{U}$ es:

$$a =_{\mathscr{U}} b \equiv \left(\forall c \middle| c \in {}^{I}\widehat{\mathbb{R}} : a \in_{\mathscr{U}} c \equiv b \in_{\mathscr{U}} c\right)$$

Demostración: La demostración se hará por doble implicación. Suponiendo que $a =_{\mathscr{U}} b$. Sea $c \in {}^{I}\widehat{\mathbb{R}}$.

$$\begin{aligned}
& a \in_{\mathscr{U}} c \wedge a =_{\mathscr{U}} b \\
\equiv & \\
& \{i \,|\, a(i) \in c(i)\} \in \mathscr{U} \\
& \wedge \\
& \{i \,|\, a(i) = b(i)\} \in \mathscr{U} \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{ Definición de filtro } \rangle \\
& \{i \,|\, a(i) \in c(i) \wedge a(i) = b(i)\} \in \mathscr{U} \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{ Definición de filtro } \rangle \\
& \{i \,|\, b(i) \in c(i)\} \in \mathscr{U} \\
\equiv & \\
& b \in_{\mathscr{U}} c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& b \in_{\mathscr{U}} c \wedge a =_{\mathscr{U}} b \\
\equiv & \\
& \{i \,|\, b(i) \in c(i)\} \in \mathscr{U} \\
& \wedge \\
& \{i \,|\, a(i) = b(i)\} \in \mathscr{U} \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{ Definición de filtro } \rangle \\
& \{i \,|\, b(i) \in c(i) \wedge a(i) = b(i)\} \in \mathscr{U} \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{ Definición de filtro } \rangle \\
& \{i \,|\, a(i) \in c(i)\} \in \mathscr{U} \\
\equiv & \\
& a \in_{\mathscr{U}} c
\end{aligned}$$

Por el otro lado:

$$\left(\forall c \middle| c \in {}^{I}\widehat{\mathbb{R}} : a \in_{\mathscr{U}} c \equiv b \in_{\mathscr{U}} c\right)$$
$$\Rightarrow$$
$$a \in_{\mathscr{U}} \{a\} \equiv b \in_{\mathscr{U}} \{a\}$$
$$\equiv$$
$$\{i \,|\, a(i) \in \{a\}(i)\} \in \mathscr{U} \equiv \{i \,|\, b(i) \in \{a\}(i)\} \in \mathscr{U}$$
$$\equiv$$
$$\{i \,|\, a(i) = a(i)\} \in \mathscr{U} \equiv \{i \,|\, b(i) = a(i)\} \in \mathscr{U}$$
$$\equiv$$
$$I \in \mathscr{U} \equiv b =_{\mathscr{U}} a$$
$$\equiv$$
$$b =_{\mathscr{U}} a$$

Nótese que con estas propiedades, y el hecho de que '$=_{\mathscr{U}}$' es una relación de equivalencia, se puede demostrar de la misma forma que es válida la ley del reemplazo en $\in_{\mathscr{U}}$. Esto es, en ${}^{I}\widehat{\mathbb{R}}$:

$$(\forall a, b, c, d \,|\, a \in_{\mathscr{U}} b \wedge a =_{\mathscr{U}} c \wedge b =_{\mathscr{U}} d : c \in_{\mathscr{U}} d)$$

Se puede demostrar que las relaciones '$=$' y '$\in$' se comportan de la misma manera que su correspondiente para los elementos sobre los que aplica, esto es, si tomamos elementos de $\widehat{\mathbb{R}}$, compararlos con '$=$' o '$\in$' resulta ser equivalente a comparar su versión $*$ con '$=_{\mathscr{U}}$' o '$\in_{\mathscr{U}}$' respectivamente, debido a esto se dejará la notación $\mathscr{U}$, y se usará '$=$' y '$\in$' respectivamente. Esto facilitará la continuidad en algunas demostraciones. De esta misma manera, sería posible ver que la validez de una proposición en $\widehat{\mathbb{R}}$, se mantiene en ${}^{I}\widehat{\mathbb{R}}$. Sin embargo, la demostración se hará de una forma más general, para evitar el proceso cada que sea necesario validar una proposición en ${}^{I}\widehat{\mathbb{R}}$. Para esto se considerará el lenguaje formal de la lógica de primer orden y los elementos de $\widehat{\mathbb{R}}$. Considerando que relaciones básicas en $\widehat{\mathbb{R}}$ son '$=$' y '$\in$', ya se cuenta con simbolos de relación correspondientes en ${}^{I}\widehat{\mathbb{R}}$. Por lo que se puede generar un lenguage formal con ${}^{I}\widehat{\mathbb{R}}$, cuyas proposiciones dependen de $\mathscr{U}$. Primero se mostrarán propiedades de la incorporación de $\widehat{\mathbb{R}}$ en ${}^{I}\widehat{\mathbb{R}}$.

Lema 4.1:

(i) ${}^*\varnothing = \varnothing$

(ii) $\left(\forall a, b \,\middle|\, a, b \in \widehat{\mathbb{R}} : a \subseteq b \Rightarrow {}^*a \subseteq {}^*b\right)$

(iii) $\left(\forall a, b \,\middle|\, a, b \in \widehat{\mathbb{R}} : a \in b \equiv {}^*a \in {}^*b\right)$

(iv) Sean $n \in \mathbb{J}$ y $\{a_k\}$ una colección de n elementos de $\widehat{\mathbb{R}}$. Entonces:

- ${}^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} a_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} {}^*a_i$
- ${}^*\left(\bigcap_{i=1}^{n} a_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} {}^*a_i$
- ${}^*\{a_1, \ldots, a_n\} = \{{}^*a_1, \ldots, {}^*a_n\}$
- ${}^*(a_1, \ldots, a_n) = ({}^*a_1, \ldots, {}^*a_n)$
- ${}^*(a_1 \times \cdots \times a_n) = {}^*a_1 \times \cdots \times {}^*a_n$

(v) $\left(\forall a, b \,\middle|\, a, b \in \widehat{\mathbb{R}} : {}^*(a - b) = {}^*a - {}^*b\right)$

(vi) Sea $b \in \widehat{\mathbb{R}}$ una relación binaria.

- ${}^*(\text{dom } b) = \text{dom } {}^*b$
- ${}^*(\text{ran } b) = \text{ran } {}^*b$

Demostración:

(i)

$$
\begin{aligned}
& x \in {}^{*}\varnothing \\
\equiv & \\
& \{i \mid x(i) \in \varnothing\} \in \mathscr{U} \\
\equiv & \\
& \varnothing \in \mathscr{U} \\
\equiv & \\
& x \in \varnothing
\end{aligned}
$$

(ii) Sean $a, b \in \widehat{\mathbb{R}}$ tales que $a \subseteq b$. Sea $x \in {}^{I}\widehat{\mathbb{R}}$

$$
\begin{aligned}
& x \in {}^{*}a \\
\equiv & \\
& \{i \mid x(i) \in a\} \in \mathscr{U} \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{ Definiciónd de filtro, } a \subseteq b \ \rangle \\
& \{i \mid x(i) \in b\} \in \mathscr{U} \\
\equiv & \\
& x \in {}^{*}b
\end{aligned}
$$

(iii) Sean $a, b \in \widehat{\mathbb{R}}$

$$
\begin{aligned}
& {}^{*}a \in {}^{*}b \\
\equiv & \\
& \{i \mid a \in b\} \in \mathscr{U}
\end{aligned}
$$

Por un lado, suponiendo que $a \in b$, se tendría que $I \in \mathscr{U}$, cosa que es verdadera. Por otro lado, suponiendo que ${}^{*}a \in {}^{*}b$, se tendría que, efectivamente $\{i \mid a \in b\} \in \mathscr{U}$, recordando que, para un $c \in \widehat{\mathbb{R}}$, se definió, que para todo $i \in I$, ${}^{*}c(i) = i$. La expresión que define ${}^{*}a \in {}^{*}b$, nuevamente conduce a $I \in \mathscr{U}$.

(iv) Sean $n \in \mathbb{J}$, $\{a_k\}$ una colección con n elementos de $\widehat{\mathbb{R}}$ y $x, (x_1, \ldots, x_n) \in {}^I\widehat{\mathbb{R}}$.

- **Para la intersección**

$$x \in \bigcap_{k=1}^{n} {}^*a_k$$

$$\equiv$$

$$(\forall k \,|\, 1 \leq k \leq n \,:\, x \in {}^*a_k)$$

$$\equiv$$

$$(\forall k \,|\, 1 \leq k \leq n \,:\, \{i \,|\, x(i) \in a_k\} \in \mathscr{U})$$

$$\Rightarrow \quad \langle \text{ Definción de filtro } \rangle$$

$$\{i \,|\, (\forall k \,|\, 1 \leq k \leq n \,:\, x(i) \in a_k)\}$$

$$x \in {}^*\left(\bigcap_{k=1}^{n} a_k\right)$$

$$\equiv$$

$$\left\{i \,\middle|\, x(i) \in \bigcap_{k=1}^{n} a_k\right\} \in \mathscr{U}$$

$$\equiv$$

$$\{i \,|\, (\forall k \,|\, 1 \leq k \leq n \,:\, x(i) \in a_k)\} \in \mathscr{U}$$

$$\Rightarrow \quad \langle \text{ Definición de filtro } \rangle$$

$$(\forall k \,|\, 1 \leq k \leq n \,:\, \{i \,|\, x(i) \in a_k\} \in \mathscr{U})$$

- **Para la unión.**

Primero se mostrará que $\bigcup_{k=1}^{n} {}^*a_k \subseteq {}^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} a_k\right)$

$$x \in \bigcup_{k=1}^{n} {}^*a_k$$

$$\equiv$$

$$(\exists k \,|\, 1 \leq k \leq 1 \,:\, x \in {}^*a_k)$$

$$\equiv$$

$$(\exists k \,|\, 1 \leq k \leq n \,:\, \{i \,|\, x(i) \in a_k\} \in \mathscr{U})$$

$$\Rightarrow \quad \langle \text{ Definición de filtro } \rangle$$

$$\{i \,|\, (\exists k \,|\, 1 \leq k \leq n \,:\, x(i) \in a_k) \in \mathscr{U}\}$$

$$\equiv$$

$$x \in {}^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} a_k\right)$$

Ahora se mostrará que ${}^{*}\left(\bigcup_{k=1}^{n} a_k\right) - \bigcup_{k=1}^{n} {}^{*}a_k = \varnothing$

$$x \in {}^{*}\left(\bigcup_{k=1}^{n} a_k\right) - \bigcup_{k=1}^{n} {}^{*}a_k$$

$\equiv$

$$\left\{i \,\middle|\, x(i) \in \bigcup_{k=1}^{n} a_k\right\} \in \mathscr{U} \land \neg\left(\exists k \,|\, 1 \leq k \leq n \,:\, \{i \,|\, x(i) \in a_k\} \in \mathscr{U}\right)$$

$\equiv$

$$\left\{i \,\middle|\, x(i) \in \bigcup_{k=1}^{n} a_k\right\} \in \mathscr{U} \land \left(\forall k \,|\, 1 \leq k \leq n \,:\, \{i \,|\, x(i) \in a_k\} \notin \mathscr{U}\right)$$

$\equiv$ $\langle$ $\mathscr{U}$ es un ultrafiltro $\rangle$

$$\left\{i \,\middle|\, x(i) \in \bigcup_{k=1}^{n} a_k\right\} \in \mathscr{U} \land \left(\forall k \,|\, 1 \leq k \leq n \,:\, \{i \,|\, x(i) \notin a_k\} \in \mathscr{U}\right)$$

$\Rightarrow$ $\langle$ definición de filtro $\rangle$

$$\left\{i \,\middle|\, x(i) \in \bigcup_{k=1}^{n} a_k\right\} \in \mathscr{U} \land \{i \,|\, (\forall k \,|\, 1 \leq k \leq n \,:\, x(i) \notin a_k)\} \in \mathscr{U}$$

$\Rightarrow$ $\langle$ definición de filtro $\rangle$

$$\left\{i \,\middle|\, x(i) \in \bigcup_{k=1}^{n} a_k \land (\forall k \,|\, 1 \leq k \leq n \,:\, x(i) \notin a_k)\right\} \in \mathscr{U}$$

$\equiv$

$$\varnothing \in \mathscr{U}$$

$\equiv$

$$x \in \varnothing$$

- Para la colección, el argumento se realiza de la misma forma que para la unión, lo único que cambia es '$\in$' por '$=$'.
- Para la n-upla, por cómo se define, se puede ver que es la unión de dos conjuntos, lo que significa, que es consecuencia del punto de la unión.
- Para el producto cartesiano.

Por un lado:

$$(x_1, \dots, x_n) \in {}^*(a_1 \times \cdots \times a_n)$$

$\equiv$

$$\{i \,|\, (x_1(i), \dots, x_n(i)) \in a_1 \times \cdots \times a_n\} \in \mathscr{U}$$

$\equiv$

$$\{i \,|\, (\forall k \,|\, 1 \leq k \leq n \,:\, x_k(i) \in a_k)\} \in \mathscr{U}$$

$\Rightarrow$ $\langle$ Definición de filtro (iii) $\rangle$

$$(\forall k \,|\, 1 \leq k \leq n \,:\, \{i \,|\, x_k(i) \in a_k\} \in \mathscr{U})$$

$\equiv$

$$(x_1, \dots, x_n) \in {}^*a_1 \times \cdots \times {}^*a_n$$

Por el otro:

$$(x_1, \dots, x_n) \in {}^*a_1 \times \cdots \times {}^*a_n$$

$\equiv$

$$(\forall k \,|\, 1 \leq k \leq n \,:\, \{i \,|\, x_k(i) \in a_k\} \in \mathscr{U})$$

$\Rightarrow$ $\langle$ Definición de filtro (ii) $\rangle$

$$\{i \,|\, (\forall k \,|\, 1 \leq k \leq n \,:\, x_k(i) \in a_k)\} \in \mathscr{U}$$

$\equiv$

$$\{i \,|\, (x_1(i), \dots, x_n(i)) \in a_1 \times \cdots \times a_n\} \in \mathscr{U}$$

$\equiv$

$$(x_1, \dots, x_n) \in {}^*(a_1 \times \cdots \times a_n)$$

(v) Por doble contenencia:

$$
\begin{array}{ll}
& x \in {}^*(a-b) \\
\equiv & \\
& \{i \mid x(i) \in a \land x(i) \notin b\} \in \mathscr{U} \\
\Rightarrow & \langle \text{ Definición de filtro } \rangle \\
& \{i \mid x(i) \in a\} \in \mathscr{U} \land \{i \mid x(i) \notin b\} \in \mathscr{U} \\
\equiv & \langle\ \mathscr{U} \text{ es un ultrafiltro } \rangle \\
& \{i \mid x(i) \in a\} \in \mathscr{U} \land \{i \mid x(i) \in b\} \notin \mathscr{U} \\
\equiv & \\
& x \in {}^*a - {}^*b
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
& x \in {}^*a - {}^*b \\
\equiv & \\
& \{i \mid x(i) \notin a\} \in \mathscr{U} \land \{i \mid x(i) \in b\} \notin \mathscr{U} \\
\Rightarrow & \langle\ \mathscr{U} \text{ es un ultrafiltro } \rangle \\
& \{i \mid x(i) \in a\} \in \mathscr{U} \land \{i \mid x(i) \notin b\} \in \mathscr{U} \\
\Rightarrow & \langle \text{ Definición de filtro } \rangle \\
& \{i \mid x(i) \in a \land x(i) \notin b\} \in \mathscr{U} \\
\equiv & \\
& x \in {}^*(a-b)
\end{array}
$$

(vi)

- Se va a seguir la misma estrategia que se usó en (iv) para la unión. Se mostrará que dom ${}^*b \subseteq {}^*(\text{dom } b)$

$$
\begin{array}{ll}
& x \in \text{dom } {}^*b \\
\equiv & \\
& (\exists y \mid :\ (x,y) \in \text{dom } {}^*b) \\
\equiv & \\
& (\exists y \mid :\ \{i \mid (x(i), y(i)) \in b\} \in \mathscr{U}) \\
\Rightarrow & \langle \text{ Definición de filtro (iii) } \rangle \\
& \{i \mid (\exists y \mid :\ (x(i), y(i)) \in b)\} \in \mathscr{U} \\
\equiv & \\
& x \in {}^*(\text{dom } b)
\end{array}
$$

Ahora se mostrará que ${}^{*}(\text{dom } b) - \text{dom } {}^{*}b = \varnothing$

$$
\begin{aligned}
& x \in {}^{*}(\text{dom } b) - \text{dom } {}^{*}b \\
\equiv & \\
& \{i \,|\, x(i) \in \text{dom } b\} \in \mathscr{U} \wedge \neg\, (\exists y \,|\colon\ \{i \,|\, (x(i), y(i)) \in b\} \in \mathscr{U}\,) \\
\equiv & \\
& \{i \,|\, x(i) \in \text{dom } b\} \in \mathscr{U} \wedge (\forall y \,|\colon\ \{i \,|\, (x(i), y(i)) \in b\} \notin \mathscr{U}\,) \\
\equiv & \quad \langle\ \mathscr{U} \text{ es un ultrafiltro } \rangle \\
& \{i \,|\, x(i) \in \text{dom } b\} \in \mathscr{U} \wedge (\forall y \,|\colon\ \{i \,|\, (x(i), y(i)) \notin b\} \in \mathscr{U}\,) \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{ Definición de filtro (ii) } \rangle \\
& \{i \,|\, x(i) \in \text{dom } b\} \in \mathscr{U} \wedge \{i \,|\, (\forall y \,|\colon\ (x(i), y(i)) \notin b)\} \in \mathscr{U} \\
\Rightarrow & \quad \langle \text{ Definición de filtro (ii) } \rangle \\
& \{i \,|\, x(i) \in \text{dom } b \wedge x(i) \notin \text{dom } b\} \in \mathscr{U} \\
\equiv & \\
& \varnothing \in \mathscr{U} \\
\equiv & \\
& x \in \varnothing
\end{aligned}
$$

- Para el rango, la misma estrategia se puede usar.