Sumatorios

Hecho por

DAVID GÓMEZ, LAURA RINCÓN

Estudiante de Matemáticas

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

Colombia

26 de marzo de 2023

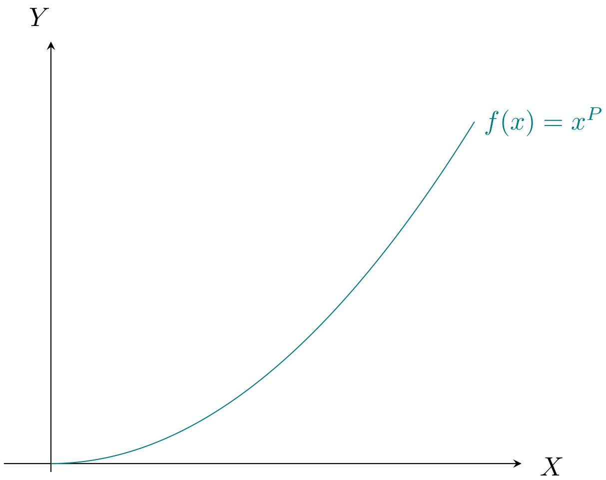
Índice

Introducción

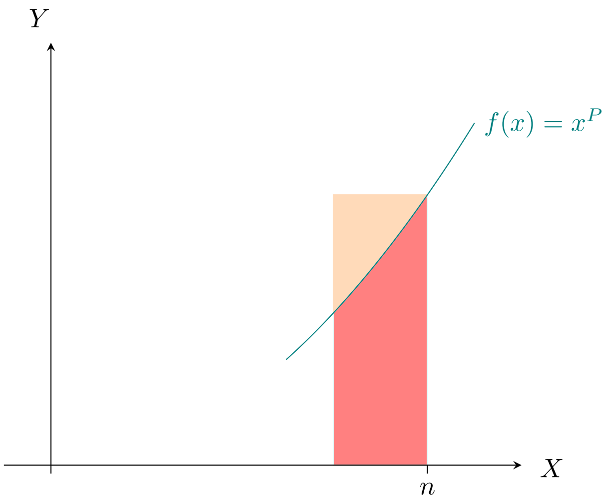
La mayoría conocerá la fórmula para desarrollar la suma de n naturales y algunos la de los cuadrados de n naturales. Sin embargo, hallar la fórmula para sumar cada número natural con una potencia arbitraria no es sencillo, y si bien ya se ha hallado una fórmula recursiva resolviendo este problema, en este documento se abordará la situación desde otra perspectiva.

Nuestro acercamiento

Sea P un número natural arbitrario, considere la función sobre $\mathbb{R}^+$, $f(x) = x^P$, la cual tiene una forma similar a la siguiente, cuando $P > 1$



Sea n un número natural, se puede pensar de la suma $\sum_{k=1}^{n} k^P$ como una aproximación a $\int_0^n x^P dx$
Tomemos la última parte de esta aproximación:



Considerando el restante del área del rectángulo (A) con respecto al área bajo la curva como $R(n)$ se tiene la siguiente igualdad.

$$A = R(n) + \int_{n-1}^{n} x^P dx$$

Si se piensa en la suma, en este caso, A representa el sumatorio desde $n-1$ hasta n, por lo que al definir R en función de cada natural hasta n se puede descomponer la suma en otra suma.

Primer resultado

Obtención

(i) Sabemos que al tomar naturales para generar los rectángulos, su base es de magnitud 1, y si altura está definida por el valor de la función en el mayor de los naturales de la base. De esta forma, tenemos que:

$$R(n) = A - \int_{n-1}^{n} x^P dx$$

$$\equiv \quad \langle \text{ Desarrollo del área } A \text{ y la integral } \rangle$$

$$R(n) = n^P - \frac{1}{P+1}\left[n^{P+1} - (n-1)^{P+1}\right]$$

$$\equiv$$

$$R(n) = \frac{1}{P+1}\left[(P+1)n^P - n^{P+1} + (n-1)^{P+1}\right]$$

(ii) Se sabe que hasta $x = n$ hay n rectángulos, por lo que el sumatorio se puede expresar mediante la suma de todos los restantes y la integral:

$$\sum_{k=1}^{n} k^P = \int_0^n x^P dx + \sum_{k=1}^{n} R(k)$$

$$\equiv$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^P = n^{P+1} + \frac{1}{P+1}\sum_{k=1}^{n}(P+1)k^P - k^{P+1} + (k-1)^{P+1}$$