Funciones lógicas

Hecho por

DAVID GÓMEZ, DANIEL PÉREZ, LAURA RINCÓN, JUANITA RUBIANO

Estudiante de Matemáticas

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

Colombia

6 de abril de 2023

Índice

Introducción

Tras definir los axiomas en la lógica matemática, y tener reglas de inferencia, se procede a desarrollar teoremas con estas herramientas. Sin embargo, en algunos casos, el proceso lleva a ser bastante tedioso, y muchas veces no se sabe por donde ir para demostrar una proposición. En este documento se presentará una nueva idea para poder manejar proposiciones lógicas de la mano de la aritmética de los naturales.

Funciones booleanas

Las funciones booleanas son una forma de entender los conectores lógicos, y los valores que toman. La idea en este documento es poder salir del lenguaje de la lógica, y poder manejar dichas funciones como si se tratara de números, de forma que llegar a un resultado sea muy lineal.

Las definiciones de estas funciones, como se expresa en el libro *Lógica para Informática y Matemáticas* [1]

Funciones booleanas

Se toma $\mathbb{B} = \{\mathtt{T}, \mathtt{F}\}$ el conjunto de valores de verdad, donde $\mathtt{T}$ corresponde a *verdadero* y $\mathtt{F}$ corresponde a *falso*.

Y ya que los conectivos lógicos se interpretan dependiendo de el valor que tomen las variables sobre las que se opera, es posible definir funciones para cada conectivo de la siguiente manera:

$$H_{true}() = \mathtt{T}$$

$$H_{false}() = \mathtt{F}$$

$$\begin{Bmatrix} H_{\neg}(\mathtt{F}) = \mathtt{T} \\ H_{\neg}(\mathtt{T}) = \mathtt{F} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} H_{\equiv}(\mathtt{F},\mathtt{F}) = H_{\equiv}(\mathtt{T},\mathtt{T}) = \mathtt{T} \\ H_{\equiv}(\mathtt{F},\mathtt{T}) = H_{\equiv}(\mathtt{T},\mathtt{F}) = \mathtt{F} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} H_{\vee}(\mathtt{F},\mathtt{F}) = \mathtt{F} \\ H_{\vee}(\mathtt{T},\mathtt{F}) = H_{\vee}(\mathtt{T},\mathtt{F}) = H_{\vee}(\mathtt{T},\mathtt{T}) = \mathtt{T} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} H_{\wedge}(\mathtt{F},\mathtt{F}) = H_{\wedge}(\mathtt{F},\mathtt{T}) = H_{\wedge}(\mathtt{T},\mathtt{F}) = \mathtt{F} \\ H_{\wedge}(\mathtt{T},\mathtt{T}) = \mathtt{T} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} H_{\Rightarrow}(\mathtt{F},\mathtt{F}) = H_{\Rightarrow}(\mathtt{F},\mathtt{T}) = H_{\Rightarrow}(\mathtt{T},\mathtt{T}) = \mathtt{T} \\ H_{\Rightarrow}(\mathtt{T},\mathtt{F}) = \mathtt{F} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} H_{\Leftarrow}(\mathtt{F},\mathtt{F}) = H_{\Leftarrow}(\mathtt{T},\mathtt{F}) = H_{\Leftarrow}(\mathtt{T},\mathtt{T}) = \mathtt{T} \\ H_{\Leftarrow}(\mathtt{F},\mathtt{T}) = \mathtt{F} \end{Bmatrix}$$

Nuestras funciones

Como se mencionó, se quiere dar una extensión de la lógica que permita el uso de operaciones aritméticas en la misma.

De forma análoga a las funciones booleanas, se toma un conjunto sobre el que se emplean estas funciones: $\mathbb{V} = \{0, 1\}$, en donde 0 corresponde al valor *falso* y 1 al de *verdadero*

A partir de esto hacemos la siguiente analogía para entender las funciones que debemos encontrar:

Conectores lógicos a funciones

$$
\begin{array}{ccc}
\mathit{true} & \looparrowright & 1 \\
\mathit{false} & \looparrowright & 0 \\
\neg p & \looparrowright & N(p) \\
p \Rightarrow q & \looparrowright & I(p,q) \\
p \Leftarrow q & \looparrowright & C(p,q) \\
p \wedge q & \looparrowright & \&(p,q) \\
p \vee q & \looparrowright & O(p,q) \\
p \equiv q & \looparrowright & E(p,q) \\
p \not\equiv q & \looparrowright & D(p,q)
\end{array}
$$

Y, evidentemente:

$$
\begin{gathered}
N : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V} \\
I : \mathbb{V}^2 \longrightarrow \mathbb{V} \\
C : \mathbb{V}^2 \longrightarrow \mathbb{V} \\
\& : \mathbb{V}^2 \longrightarrow \mathbb{V} \\
O : \mathbb{V}^2 \longrightarrow \mathbb{V} \\
E : \mathbb{V}^2 \longrightarrow \mathbb{V} \\
D : \mathbb{V}^2 \longrightarrow \mathbb{V}
\end{gathered}
$$

Ahora, falta definir cada una de estas funciones. La forma en la que se definen, aprovechando que $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{N}$, será obteniendo sucesiones a partir de tomar una de las variables como constante en ambos valores posibles. Dado que los posibles valores son únicamente dos, se puede asumir dichas sucesiones como aritméticas, lo que hace la obtención de su descripción bastante sencilla.

Cabe aclarar, que el resultado previo a obtener la descripción aritmética de cada función está dado por el comportamiento de la función booleana correspondiente. Como ejemplo, la negación:

$$H_{\neg}(\mathtt{T}) = \mathtt{F} \looparrowright N(1) = 0$$

Obtención de las funciones

(i) $N(p)$

Esta función, se comporta de la siguiente manera:

$$\left\{\begin{matrix} N(0) = 1 \\ N(1) = 0 \end{matrix}\right\} \equiv N(p) = 1 - p$$

(ii) $I(p, q)$

De igual manera:

$$\left\{\begin{matrix} I(0, q) = 1 \\ I(1, q) = q \end{matrix}\right\} \equiv I(p, q) = (q - 1)p + 1$$

Procediendo de igual manera con las demás funciones...

(iii) $C(p, q)$

$$\left\{\begin{matrix} C(0, q) = N(q) = 1 - q \\ C(1, q) = 1 \end{matrix}\right\} \equiv C(p, q) = pq + 1 - q$$

(iv) $\&(p, q)$

$$\left\{\begin{matrix} \&(0, q) = 0 \\ \&(1, q) = q \end{matrix}\right\} \equiv \&(p, q) = pq$$

(v) $O(p,q)$

$$\begin{Bmatrix} O(0,q) = q \\ O(1,q) = 1 \end{Bmatrix}$$
$$\equiv$$
$$O(p,q) = (1-q)p + q$$

(vi) $E(p,q)$

$$\begin{Bmatrix} E(0,q) = N(q) = 1-q \\ E(1,q) = q \end{Bmatrix}$$
$$\equiv$$
$$E(p,q) = (2q-1)p + 1 - q$$
$$\equiv$$
$$E(p,q) = pq + (1-p)(1-q)$$

(vii) $D(p,q)$

$$\begin{Bmatrix} D(0,q) = q \\ D(1,q) = N(q) = 1-q \end{Bmatrix}$$
$$\equiv$$
$$D(p,q) = (1-2q)p + q$$
$$\equiv$$
$$D(p,q) = p(1-q) + q(1-p)$$

Por otra parte, están los cuantificadores, que se pueden expresar en términos de dos conectores: el cuantificador universal, es una forma de expresar una conjunción de varios términos; y el cuantificador existencial, es una forma de expresar una disyunción de varios términos.

(viii) $(\forall x \mid r(x) : p(x))$

Al ser una conjunción de muchos términos, usando la función para la conjunción, se puede ver que se puede expresar como un productorio. Adoptaremos la siguiente notación:

$$(\forall x \mid r(x) : p(x)) \looparrowright \prod_{x \mid r(x)} p(x)$$

(ix) $(\exists x \mid r(x) : p(x))$

Debido a la definición de la conjunción como función, tomamos la siguiente equivalencia, y se define el cuantificador existencial como el universal.

$$(\exists x \mid r(x) : p(x)) \equiv \neg(\forall x \mid r(x) : \neg p(x)) \looparrowright 1 - \prod_{x \mid r(x)} (1 - p(x))$$

La propiedad, la cual llamaremos "Propiedad fundamental", más importante a tener en cuenta es la siguiente:

$$p \in \mathbb{V} \Rightarrow p^n = p$$

Esto debido a que los valores de dicho conjunto, al elevarse a cualquier potencia no cambian su resultado. Y por otro lado, este resultado se obtiene de la propiedad del conector $\wedge$: idempotencia.

Un ejemplo del uso de estas funciones sería evaluar la siguiente proposición:

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
& \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q \\
\looparrowright \quad & \langle \text{ definición de funciones } \rangle \\
& E(N(\&(p,q)), O(N(p), N(q))) \\
= \quad & \\
& E(1 - \&(p,q), (1 - N(q))N(p) + N(q)) \\
= \quad & \\
& E(1 - pq), (1 - (1 - q))(1 - p) + 1 - q \\
= \quad & \\
& E(1 - pq, 1 - pq) \\
= \quad & \\
& (1 - pq)(1 - pq) + (pq)(pq) \\
= \quad & \langle \text{ propiedad fundamental } \rangle \\
& 1 - pq - pq + pq + pq \\
= \quad & \\
& 1
\end{aligned}
$$

Teoremas

El desarrollo para la distribución de la negación en la conjunción se ve bastante saturado, en comparación al uso de las herramientas de la lógica 'normal'. Sin embargo, con el uso de algunos teoremas, se puede facilitar bastante la forma de demostrar usando estas funciones lógicas.

Teorema: Igualdad

Dadas proposiciones ϕ_1 'y' ϕ_2, las cuales se pueden representar como funciones lógicas (compuestas o simples) h_0 'y' h_1 , respectivamente y $\phi_1 \equiv \phi_2$. $E(h_0, h_1) = 1$ si y solo si $h_0 = h_1$

Demostración

(i) Suponiendo que $h_0 = h_1$

$$E(h_0, h_1)$$
$$=$$
$$h_0h_1 + (1 - h_0)(1 - h_1)$$
$$= \quad \langle \; h_0 = h_1, \text{ propiedad fundamental } \rangle$$
$$h_0 + 1 - h_0$$
$$=$$
$$1$$

(ii) Suponiendo que $E(h_0, h_1) = 1$

$$E(h_0, h_1) = 1$$
$$\equiv$$
$$h_0h_1 + (1 - h_0)(1 - h_1) = 1$$
$$\equiv$$
$$h_0h_1 + 1 - h_1 - h_0 + h_0h_1 = 1$$
$$\equiv$$
$$2h_0h_1 = h_0 + h_1$$
$$\equiv \quad \langle \text{ Separando por casos (los posibles valores en } \mathbb{V}) \rangle$$
$$\left\{ \begin{matrix} h_0 = 0 \Rightarrow 0 = h_1 \\ h_0 = 1 \Rightarrow h_1 = 1 \end{matrix} \right\}$$

Teorema: implicación

Dadas dos proposiciones ϕ_1 'y' ϕ_2, las cuales se pueden representar como funciones lógicas (compuestas o simples) h_0 'y' h_1 , respectivamente y $\phi_1 \Rightarrow \phi_2$. $h_0 h_1 = h_0$ si y solo si $I(h_0, h_1) = 1$

Demostración

(i) Suponiendo $h_0 h_1 = h_0$

$$
\begin{aligned}
& I(h_0, h_1) \\
= & \\
& (h_1 - 1)h_0 + 1 \\
= & \\
& h_0 h_1 - h_0 + 1 \\
= & \quad \langle \text{ Suposición } \rangle \\
& h_0 - h_0 + 1 \\
= & \\
& 1
\end{aligned}
$$

(ii) Suponiendo $I(h_0, h_1) = 1$

$$
\begin{aligned}
& I(h_0, h_1) = 1 \\
\equiv & \\
& (h_1 - 1)h_0 + 1 = 1 \\
\equiv & \\
& h_0 h_1 - h_0 + 1 = 1 \\
\equiv & \\
& h_0 h_1 = h_0
\end{aligned}
$$

Referencias

[1] Camilo Rocha. *Lógica para Informática y Matemáticas*. 7.ª ed. 6 de ago. de 2022.