David Gómez

ÁLGEBRA LINEAL

Matemáticas

2024

Índice

1. Espacios Vectoriales

Los espacios vectoriales necesitan un campo C y un conjunto V, junto con una operación $\oplus : (V \times V) \to V$, y una operación $\otimes : (C \times V) \to V$. Los elementos de V son llamados *vectores*.

Para que estos conjuntos junto con dichas operaciones se puedan llamar un espacio vectorial, se deben cumplir las siguientes propiedades:

Sean $+$ y $\cdot$ las operaciones binarias del campo C con el comportamiento análogo a la suma y producto en $\mathbb{R}$.

- Conmutatividad de $\oplus$:

$$(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \,|\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \;:\; \mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{v} \oplus \mathbf{u})$$

- Asociatividad de $\oplus$:

$$(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \,|\, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \;:\; (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w} = \mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}))$$

- Elemento neutro de $\oplus$:

$$(\exists \mathbf{0} \,|\, \mathbf{0} \in V \;:\; (\forall \mathbf{u} \,|\, \mathbf{u} \in V \;:\; \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}))$$

- Elemento inverso para $\oplus$:

$$(\forall \mathbf{u} \,|\, \mathbf{u} \in V \;:\; (\exists \mathbf{v} \,|\, \mathbf{v} \in V \;:\; \mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{0}))$$

- Asociatividad de $\cdot$ en interacción con $\otimes$:

$$(\forall a, b, \mathbf{u} \,|\, a, b \in C \wedge \mathbf{u} \in V \;:\; a \cdot (b \otimes \mathbf{u}) = (a \cdot b) \otimes \mathbf{u})$$

- Distributiva de $\otimes$ sobre $+$:

$$(\forall a, b, \mathbf{u} \,|\, a, b \in C \wedge \mathbf{u} \in V \;:\; (a + b) \otimes \mathbf{u} = (a \otimes \mathbf{u}) \oplus (b \otimes \mathbf{u}))$$

- Distributiva de $\cdot$ sobre $\oplus$:

$$(\forall a, \mathbf{u}, \mathbf{v} \,|\, a \in C \wedge \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \;:\; a \otimes (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = a \otimes \mathbf{u} \oplus a \otimes \mathbf{v})$$

- Existencia de un elemento neutro para $\otimes$

$$(\exists a \,|\, a \in C \;:\; (\forall \mathbf{u} \,|\, \mathbf{u} \in V \;:\; a \otimes \mathbf{u} = \mathbf{u}))$$

Nótese la similitud entre $\oplus$ con $+$, y $\otimes$ con $\cdot$. Debido a esto, y el hecho de que siempre se hará la distinción de los vectores a los elementos del campo, se acostumbra a denotar con el mismo símbolo las operaciones similares. Es decir, se denota $\oplus$ como $+$ y $\otimes$ como $\cdot$ (o demás conveniencias del uso de estas operaciones).

1.1. Transformaciones lineales

Las transformaciones lineales son funciones de un espacio vectorial a otro. La única condición entre estos es que compartan el mismo campo.

Sean V, W conjuntos los cuales forman un espacio vectorial con el campo C. Sea $T : V \to W$. T es llamada transformación lineal cuando:

- Conserva la adición

$$(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \,|\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \;:\; T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}))$$

- Conserva el producto

$$(\forall a, \mathbf{u} \,|\, a \in C \wedge \mathbf{u} \in V \;:\; T(a\,\mathbf{u}) = a\,T(\mathbf{u}))$$

1.2. $\mathbb{R}^n$ como espacio vectorial junto a $\mathbb{R}$

Los espacios vectoriales comunes consisten en algún $\mathbb{R}^n$ junto con $\mathbb{R}$. Realmente no hay diferencia en mencionar un vector de $\mathbb{R}^n$ haciendo referencia al espacio vectorial, o a una n-upla con elementos de $\mathbb{R}$. Sin embargo, ayuda al contexto saber si se va a tratar $\mathbb{R}^n$ como espacio vectorial. La distinción se hará de la siguiente manera, $\langle\rangle$ serán los delimitadores de un vector, y $()$ los delimitadores de una n-upla.

La suma entre vectores y el producto de escalares por vectores se denota de la misma forma que la suma y producto usuales. Estos se definen de la siguiente manera:

Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, con componentes $u_1, u_2, \ldots, u_n$ y $v_1, v_2, \ldots, v_n$ respectivamente, y $x \in \mathbb{R}$.

$$\langle u_1, u_2, \ldots, u_n \rangle + \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle = \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n \rangle$$

$$x \, \langle u_1, u_2, \ldots, u_n \rangle = \langle x\, u_1, x\, u_2, \ldots, x\, u_n \rangle$$