$\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n^2+9)^2} = -\pi \sum res_{a_i} \frac{\cot \pi z}{(z^2+9)^2}$, где a_i - полюсы $f(z) = \frac{1}{(z^2+9)^2}$

У нее два полюса второго порядка: $3i, -3i$

Вычет в полюсе второго порядка равен

$res_a = (f(z)(z-a)^2)'|_a$

$$g(z) = \frac{\cot \pi z (z-3i)^2}{(z^2+9)^2}' = \frac{-\pi \frac{(z+3i)^2}{\sin^2 \pi z} - 2(z+3i)\cot \pi z}{(z+3i)^4}$$

$$h(z) = \frac{\cot \pi z (z+3i)^2}{(z^2+9)^2}' = \frac{-\pi \frac{(z-3i)^2}{\sin^2 \pi z} - 2(z-3i)\cot \pi z}{(z-3i)^4}$$

$$res_{3i} = g(3i) = \frac{\frac{36\pi}{\sin^2 3\pi i} - 12i \cot 3\pi i}{36^2} = \frac{\frac{36\pi}{\sin^2 3\pi i} - 12i \cot 3\pi i}{36^2}$$

$$res_{-3i} = h(-3i) = \frac{\frac{36\pi}{\sin^2 -3\pi i} + 12i \cot -3\pi i}{36^2}$$

$\sin^2 3\pi i = \sin^2 -3\pi i$

$\cot 3\pi i = -\cot -3\pi i$

Значит, $res_{3i} = res_{-3i} = \frac{\frac{36\pi}{\sin^2 3\pi i} - 12i \cot 3\pi i}{36^2}$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n^2+9)^2} = -\pi \sum res_{a_i} \frac{\cot \pi z}{(z^2+9)^2} = -2\pi \frac{\frac{36\pi}{\sin^2 3\pi i} - 12i \cot 3\pi i}{36^2}$$

Значит, $\sum\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{(n^2+9)^2} = \frac{1}{2} \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n^2+9)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{81} = -\pi \frac{\frac{36\pi}{\sin^2 3\pi i} - 12i \cot 3\pi i}{36^2} - \frac{1}{162}$

$\sin 3\pi i = \frac{i}{2}(e^{3\pi} - e^{-3\pi}) \approx 6195i$

$\cot 3\pi i = --i \frac{e^{3\pi} + e^{-3\pi}}{e^{3\pi} - e^{-3\pi}} \approx -i$

$\sin^2 3\pi i \approx 38378025$

Таким образом,

$$-\pi \frac{\frac{36\pi}{\sin^2 3\pi i} - 12i \cot 3\pi i}{36^2} - \frac{1}{162} \approx 0.0229$$