Probability Theory

Вероятностная модель эксперимента со случайными исходами. Операции над событиями и операции на множествами. Примеры (1)

Конечное число исходов: $\Omega = \{w_1, ..., w_n\}$ - пространство элементарных событий. w_i - элементарное событие
Событие - подмножество пространства элементарных событий

Конечное вероятностное пространство. Свойства вероятности. Классическое определение вероятности (2)

$|\Omega| = N$
$p_i \geq 0, \sum p_i = 1$
$P(A) = \sum\limits_{w_i \in A} p_i$ - **A probability**
Свойства.....
Классическое определение вероятности
$p_1 = .. = p_i = ... = p_N$
$P(A) = \dfrac{|A|}{N}$

Условная вероятность. Мотивировка, определение и свойства (3)

$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Свойства:
Все тривиальные

Формула полной вероятности. Формула и теорема Байеса. Примеры (4)

Формула полной вероятности
A_i - дизъюнктное объединение дает все пространство.
$P(B) = \sum P(B|A_i)P(A_i)$
Тривиально
Формула Байеса
$P(A) > 0, P(B) > 0 \Rightarrow P(A|B) = \dfrac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$
Теорема Байеса
$\Sigma = \bigsqcup A_i, P(B) > 0$
$P(A_k|B) = \dfrac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum P(B|A_i)P(A_i)}$

Независимые события. Мотивировка и определение. Попарная независимость и независимость в совокупности (5)

A, B независимы $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$
Что равносильно тому что $P(A|B) = P(A)$
События независимы в совокупности $\Leftrightarrow \forall 1 \leq i_1 < i_2 < .. < i_k \leq n P(\bigcap A_i) = \prod P(A_i)$
Попарная независимость слабее независимости в совокупности
TODO: Пример
Независимость при фиксированном k слабее независимости в совокупности
TODO: Пример

Схема Бернулли. Полиномиальная схема (6)

n независимых подбрасываний несбалансированной монеты
$w = (x_1, ..x_n), x_i \in \{1, 0\}$
$\Sigma = \{w\}$
$P(w) = p^{\sum x_i}(1-p)^{n-\sum x_i}$
Корректность.
$\sum P(w) = \sum P(A_k) = \sum \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (1+1-p)^n$
$B_k = \{w | x_k = 1\}$ независимы.
Набор вероятностей $\{P(A_1), ..., P(A_n)\}$
Полиномиальная схема
Модель: не монетка, а игральная кость с неравномерными гранями. n независимых подбрасываний
Ну все то же самое, что и со схемой Бернулли.

Теорема Эрдеша (7)

Теорема Рамсея
$\forall k, m \exists n(k, m)$, такое что для любого графа на n вершинах существует либо клика на k вершинах, либо пустой подграф на вершинах.
$R(k, m)$ - наименьшее такое n.
Теорема Эрдеша:
$R(k, k) > 2^{k/2}$
Берем набор из k вершин, вероятность того, что он полный или пустой равна $2^{1-\binom{k}{2}}$. Вероятность, что хоть какой то набор таков меньше суммы по всем наборам. Т.е. если $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$, то существует граф, для которого нет такого графа.
В частности это верно для $n = 2^{k/2}$

Теоремы Пуассона и Прохорова (8)

Теорема Пуассона
$np_n \to \lambda > 0$
$P(S_n = k) \to \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$
Теорема Прохорова
$\sum\limits_{k=0}^{\infty} |P(S_n = k) - \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}| \leq \dfrac{\min\{2, \lambda\}}{n} 2\lambda$

Локальная теорема Муавра-Лапласа (9)

$x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}, T$ - фиксированное число
Если $n \to \infty$, k меняется таким образом, что $|x| \leq T \Rightarrow P(S_n = k) \sim \dfrac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-x^2/2}$ равномерно по x.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа, оценка на скорость сходимости. Задача о театре (10)

Вероятностное пространство. Условная вероятность. Независимые события (11)

Колмогоровское определение вероятности
Σ - пространство элементарных событий
F - множество случайных событий 2^{Σ}
P - мера на F, такая что $P(\Sigma) = 1$
Последовательность независимых событий - если взять любой конечный набор, он будет независим.

Лемма Бореля-Кантелли. Закон нуля и единицы (12)

$A_1, A_2, .., $ - события. B - событие "наступило бесконечное число событий из $A_1, ..$"
1. Если $\sum P(A_i)$ конечна, то $P(B) = 0$
$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Отсюда очевидно первый пункт
Второй. TODO
Следствие: закон 0 и 1: если A_i независимы в совокупности, то либо $P(B) = 0$, либо $P(B) = 1$

Случайная величина. Распределение с.в. Свойства функций распределения (13)

С.в - функция из сигмы в R.
$F_\xi(x) = P(\xi \le x)$
Свойства
1. $0 \le F_\xi \le 1$
2. F_ξ не убывает.
3. предел на минус беск. равен 0, предел на + беск равен 1
4. Непрерывность справа
5. $F_{\xi+c}(x) = F_\xi(x - c)$
6. $F_{c\xi}(x) = F_\xi(\frac{x}{c})$

Дискретное, непрерывное и абсолютно непрерывное распределения. Свойства (14)

Дискретная с.в. $\xi : \Sigma \to \{y_1, y_2, ..\}$ - не более, чем счетно
Тогда функция распределения устроена ступеньками. Распределение полностью определяется величинами $P(\xi = y_k)$
Непрерывная с.в.
$\forall x \in \mathbb{R} P_\xi(\{x\}) = 0$, что равносильно непрерывности слева ф. р.
Абсолютно непрерывное распределение
Если существует $p_\xi(t) : R \to R$ (плотность) - измеримая функция, т.ч. $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt$
Свойства
1. $P_\xi(A) = \int\limits_A p(t)$, так как это равенство верно на лучах на минус беск., то верно и на полуинтервалах, тогда по единственности продолжения меры на полуинтервалах верно и на всех Борелевских мн-вах.
2. Плотность больше/равна нулю почти везде (так как плотность измеримая ф-ция)
3. Интеграл плотности по R равен 1.
4. Плотность равна производной ф.р. почти везде

Примеры вероятностных распределений (15)

1. Биномиальные распределения: $\xi \sim Binom(n, p) \Leftrightarrow P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
2. Распределение Пуассона: $P(\xi = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$
3. Геометрическое распределение: $P(\xi = k) = p(1-p)^{k-1}$
4. Дискретное равномерное распределение: $\{y_1, ..., y_n\}$
$P(\xi = y_k) = \frac{1}{n}$
5. Непрерывное равномерное распрделение $p_\xi(t) = \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(t)$
6. Нормальное распределение: $p_\xi(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(t-a)^2/2\sigma^2}$
6'. Стандартное нормальное распределение: $p_\xi(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$
7. Экспоненциальное распределение: $p_\xi(t) = \lambda e^{-\lambda t} 1_{[0,+\infty)}(t)$

Совместные распределения. Совместное распределение независимых с.в. (16)

$\xi : \Sigma \to R^n$

$P_{\xi_1}(B) = P_\xi(B \times R^{n-1})$

То есть совместная мера определяет все одномерные меры, но не наоборот (например, подбрасывания монетки могут быть зависимыми или нет).

Случайные величины независимы, если $\forall A_1, ..., A_n \in R$ **события** $\xi_1 \in A_1, .., \xi_2 \in A_2, ..$ **независимы**

Теорема: $\xi_1, .., \xi_n$ независимы $\Leftrightarrow P_\xi = \bigotimes P_{\xi_i}$ - произведение мер.

Совместная функция распределения (тривиально)

Совместная плотность распределения: ф.р. - это инетграл по n-мерной мере Лебега

Следствие с.в. независимы $\Leftrightarrow F_\xi(x_1, .., x_n) = F_{\xi_1}(x_1)...F_{\xi_n}(x_n)$

Вправо: пользуемся теоремой

Влево: функция распределения однозначно определяет меру на ячейках, значит у нее единственное продолжение, и это равенство верно для P_ξ, дальше теорема.

Следствие: $\xi_1, ..., \xi_n$ - абсолютно непрерывные с.в., тогда ξ_i независимы $\Leftrightarrow p_\xi(t_1, .., t_n) = p_{\xi_1}(t_1)...p_{\xi_n}(t_n)$.

По абсолютной непрерывности TODO

Свертки мер. Свертки мер, имеющих плотность (17)

TODO

Распределение суммы независимых случайных величин. Примеры (18)

ξ, η - независимые случайные величины $\Rightarrow P_{\xi+\eta} = P_\xi * P_\eta$

$\xi + \eta \in A \Leftrightarrow (\xi, \eta) \in B \subset R^2$

$P_{\xi+\eta}(A) = P_{(\xi,\eta)}(B) = \int_{R^2} 1_B(x, y) dP_{\xi,\eta}(x, y) = \int_{R^2} 1_A(x + y) dP_{\xi,\eta}(x, y) = \int_{R^2} 1_A(x + y) dP_\xi(x) dP_\eta(y)$, последнее равенство по теореме Фубини

Мат ожидание. Свойства (19)

$E_\xi = \int_\Sigma \xi(w) dP(w)$.

Свойства

1. $E\xi < +\infty \Leftrightarrow E_{|\xi|} < +\infty$
2. Линейность (линейность интеграла по мере)
3. $P(\xi \geq 0) = 1 \Rightarrow E_\xi \geq 0$
4. $P(\xi \geq \eta) = 1 \Rightarrow E_\xi \geq E_\eta$
5. $E = \int_R x dP(x)$ - из пункта 6.
6. $E_{f(\xi_1,..,\xi_n)} = \int_{R^n} f(x_1, .., x_n) dP_{\xi_1,...,\xi_n}(x_1, .., x_n)$

Шаг 1: $f = 1_A \Rightarrow E_{1_A} = \int_\Sigma 1_A dP(w) = P_{\xi_1,..,\xi_n}(A) = \int_{R^n} 1_A dP_{\xi_1,..,\xi_n}(x_1, .., x_n)$

Шаг 2: Для простых функций все верно по линейности

(16)

(16)

(16)

(16)

(16)

(16)

(16)

(16)

(16)

(16)