Метод Фон Неймана для исследования устойчивости схемы

Максим Крючков, M3439

27 января 2020 г.

$$\frac{\delta T}{\delta t} + u\frac{\delta T}{\delta x} - X\frac{\delta^2 T}{\delta x^2} = 0$$

Построим схему:

$\dfrac{T_k^{n+1} - T_k^n}{\Delta t} + u\dfrac{T_k^n - T_{k-1}^n}{\Delta x} - \chi\dfrac{T_{k-1}^n - 2T_k^n + T_{k+1}^n}{\Delta x^2} = 0$

Обозначим $s = \dfrac{u\Delta t}{\Delta x}, r = \dfrac{\chi\Delta t}{\Delta x^2}$ и домножим на Δt

$T_k^{n+1} - T_k^n + s(T_k^n - T_{k-1}^n) - r(T_{k-1}^n - 2T_k^n + T_{k+1}^n) = 0$

$\lambda^{n+1}e^{i\alpha k} - \lambda^n e^{i\alpha k} + s(\lambda^n e^{i\alpha k} - \lambda^n e^{i\alpha(k-1)}) - r(\lambda^n e^{i\alpha(k-1)} - 2\lambda^n e^{i\alpha k} + \lambda^n e^{i\alpha(k+1)}) = 0$

Поделим на $\lambda^n e^{i\alpha(k-1)}$

$\lambda e^{i\alpha} - e^{i\alpha} + s(e^{i\alpha} - 1) - r(1 - 2e^{i\alpha} + e^{2i\alpha}) = 0$

$\lambda = 1 - s + \dfrac{s}{e^{i\alpha}} + \dfrac{r}{e^{i\alpha}} - 2r + re^{i\alpha}$

$\lambda = 1 - s + s(\cos\alpha - i\sin\alpha) + r(\cos\alpha - i\sin\alpha) - 2r + r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

$\lambda = 1 - s + s(\cos\alpha - i\sin\alpha) + r(\cos\alpha - i\sin\alpha) - 2r + r(\cos\alpha + i\sin\alpha$

Наша задача - решить неравенство $|\lambda| < 1$
$|\lambda|^2 = 1 + s^2 + 4r^2 + (s^2 + 4sr + 4r^2)\cos^2\alpha + (s + 2r)(2 - 2s)\cos\alpha + s^2\sin^2\alpha < 1$

Опуская выкладки, получаем:

$(s + 2r - 1)(s + 2r)\sin^2\alpha/2 < r(r + s)\sin^2\alpha$