0.1. № 1. Билинейные, полуторалинейные и квадратичные формы. Примеры. Матрица квадратичной формы. Ядро и ранг билинейной формы

Определение билинейной формы(частный случай полилинейной): V - векторное пространство над полем K.

1. $\alpha(x_1 + x_2, y) = \alpha(x_1, y) + \alpha(x_2, y)$ 2. $\alpha(x, y_1 + y_2) = \alpha(x, y_1) + \alpha(x, y_2)$
Линейность по каждому аргументу(домножение на константу) Определение сопряжения:
$i^2 = id, \overline{\lambda} = i(\lambda)$ Примеры билинейной формы:
$\alpha(f, g) = \int\limits_a^b fg$ непрерывных функций
Скалярное произведение.. Матрицу $(\alpha(e_i, e_j)$ будем называть матрицей формы α в базисе e
Утверждение: $\alpha(x, y) = x^T Ay$
для полуторалинейной формы: $\alpha(x, y) = \overline{(}x)^T Ay$
Утверждение: V - конечномерное векторное пространство. Тогда $A_f = \overline{C}^T A_e C$, в данном случае форма полуторалинейна(общий случай)

0.2. № 2. Ортогональное дополнение пространства

$\alpha(x, y) = \alpha(y, x)$ - симметрическая форма $\alpha(x, y) = -\alpha(y, x)$ - антисимметрическая форма
Ортогональное дополнение - это множество всех векторов ортогональных данному простанству, то есть ортогональных каждому из векторов пространства
Ортогональные вектора: для которых $\alpha(x, y) = 0$ Свойства:
1. $U^{\perp}$ - подпространство V 0 есть, линейная комбинация есть в силу того, что форма линейна
2. $V^{\perp} = Ker\alpha$ 3. $v \in V^{\perp} \Leftrightarrow v \perp e_i$
Утверждение: $\dim Ker(\alpha) = \dim V - \dim A$, A - матрица в каком-то базисе
Док-во: Надо показать, что $v \in Ker(A) \Leftrightarrow v \in Ker(\alpha)$
Следствия: 1. Ранг матрицы формы α не зависит от выбора базиса. 2. Невырожденность равносильна тому, что $Ker(\alpha) = \{0\}$
Лемма: Если α невырождена, то $\dim U^{\perp} = \dim V - \dim U$, $U^{\perp\perp} = U$
Берем первые m строк матрицы, показываем, что ядро этой матрицы в точности ортогонально U(размерность U равна m, и первые m ешек - это его базисные вектора) при этом ранг этой матрицы равен m, чтд.
Доказываем, что $U^{\perp\perp} = U$. Их равзмерности равны по первому пункту. Ну а дальше понятно, что $U \subset U^{\perp\perp}$

0.3. № 3. Ортогональный базис. Ортогонализация Грама-Шмидта

Лемма. Пусть V - конечномерное векторное пространство над полем K. Дело в том, что $U \cap U^{\perp} = Ker_{\alpha|U}$
У симметричной формы матрица равна транспонированной Форма однозначно задается значениями на сопадающих векторах
Определения: ортогональный базис: разные вектора ортогональны. ортонормированный: разные ортогональны, $\alpha(e_i, e_i) = 1$
Утверждение: у любого пространства есть ортогональный базис Док-во по индукции, возьмем вектор, на котором форма не нулится, выберем n-1-базис в его ортогональном дополнении
Ортогонализация Грама-Шмидта: Теорема: e - базис V, $V_k = \langle e_1, \ldots, e_k \rangle$, альфа - симметричная форма
$\delta_0 = 1, \delta A_k = \det A_k$ - матрицы, суженной на оболочку первых k векторов. Тогда если дельты не равны 0, то существует единственный ортогональный базис f : $f_k = e_k + u, u \in V_{k-1}$ По индукции: первый выбрали однозначно, если $f_{n+1} = e_{n+1} + \sum \lambda_i f_i$, отсюда из ортогональности всех f получим, что $\lambda_i = \frac{\alpha(e_{n+1}, f_i}{\alpha(f_i, f_i)}$ Поймем, что $\det C = 1$, где $C^T A_e C = A_f$, просто в явном виде напишем эту матрицу, благо мы ее знаем из выражения f через e Отсюда тривиально получается все, что надо

0.4. № 4. Квадратичные формы. Поляризация. Нормальный вид. Положительно определенные квадратичные формы

Функция: $q : V \to K$, $q(v) = \alpha(v, v)$ - квадратичная форма, α - симметричная билинейная форма
$q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$ $q(x_1, \ldots, x_n) = \sum \alpha_{ij} x_i x_j$
Лемма: Если K = C, то $q(x) = \sum x_i^2$ в некотором базисе Если K = R, то $q(x) = \sum x_i^2 - sum x_j^2$ в некотором базисе
Док-во: мы уже знаем, что матрица приводится к диагональному виду.
Положительно определена значит - строго больше 0 Отрицательно определена - значит строго меньше 0. Нормальный вид - это диагональный нормированный(коэфф = 1) вид

0.5. № 5 Вещественные квадратичные формы. Сигнатура. Закон инерции. Теорема Якоби. Критерий Сильвестра

Теорема: $q(x) = \sum\limits^k x_i^2 - \sum\limits^l x_j^2$
При этом k - максимальная размерность подпространства, на котором форма положительно определена. Изначально обозначим эту размерность за m.
Очевидно, что $m \geq k$, так как на первых k векторах она положительно определена. При этом его пересечение с оболочкой последних l векторов тривиально.
Сигнатура: такая пара k, l. Она не зависит от базиса
Теорема Якоби. Пусть δ_i - угловые миноры матрицы формы q. Если все они не равны нулю, то l - число перемен знака в последовательности дельт. Тупо ортогонализация Грама-Шмидта и предыдущее замечание

0.6. № 7. Кососимметрические билинейные формы. Симплектический базис

Кососимметрическая == антисимметрическая Симплектический базис: $\alpha(e_{2k-1}, e_{2k} = 1$, для остальных эта штука равна 0. Базис называется симплектическим, если существует $m < \lfloor n \rfloor$, такое что это верно для любого k от 1 до m
Теорема: у любой кососимметрической формы есть симплектический базис:
Доказываем по индукции. Если форма равна 0, то все ок, берем m = 0. Если же нет, то существуют два базисных вектора, возьмем их. $V = \langle e_i, e_j \rangle \oplus (\langle e_i, e_j \rangle)^{\perp}$ Здесь важно, что форма кососимметрическая, иначе ортогональность не определена. Ранг кососимметрической билинейной формы четен

0.7. № 8. Евклидовы пространства. Матрица Грама. Длина вектора. Угол между векторами. Неравенство между КВШ

Определение: конечномерное пространство с билинейной формой - евклидово, если ассоциированная с этой формой квадратичная является положительно определенной Тогда будем называть α скалярным произведением
Свойства. $\overline{A}^T = A$ $\langle x, x \rangle \in R$
Определение: пространство V над $\mathbb{C}$ - эрмитово, если для любого ненулевого вектора форма строго положительны $\alpha(x, x) > 0$ альфа - эрмитово скалярное произведение
Примеры. Стандартное скалярное произведение, интеграл произведения на отрезке
Определение: Матрица грама системы векторов: $(\langle v_i, v_j \rangle)$
Лемма:
V - эвклидово пространство, взяли набор из k векторов. Тогда $\det G(v_1, \ldots, v_k) \geq 0$, при этом 0 достигается только когда они линейно зависимы
Пусть линейно-независимы. Тогда рассмотрим их как кусок базиса, G здесь квадратичная форма, в этом базисе она положительно определена, значит по критерию Сильвестра все норм, и det > 0
Пусть линейно-зависимы.
Рассмотрим линейную комбинацию которая нулится. И рассмотрим аналогичную линейную комбинацию столбцов. Она тоже равна 0.
(рассматриваем конкретную строку)
Длина вектора - $||v|| = \sqrt{\langle v, v, \rangle}$
Лемма: неравенство Коши-Буняковского- Шварца.
рассмотрим, матрицу $G(x, y)$, а мы знаем, что ее определитель больше/равен 0. Вообще хотим доказать, что $\langle x, y \rangle \leq ||x|| * ||y||$
Теорема: длина - это норма.
Напомним: неотрицательность, умножение на константу, полуаддитивность: $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$, для этого рассмотрим $\langle x + y, x + y \rangle$
Угол между векторами: $\cos\phi = \frac{\langle x, y \rangle}{||x|| * ||y||}$

0.8. № 9. Евклидовы пространства. Ортогонализация Грама-Шмидта. Классификация. Ортогональные матрицы евклидовых пространств

Утверждение: ненулевые, попарно ортогональные вектора линейно независимы.
От противного: $\sum \lambda_i e_i = 0$, $\langle e_i, 0 \rangle = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$
Процесс Грама-Шмидта: $f_1 = e_1$, $f_{k+1} = e_{k+1} + \sum \frac{\langle e_{k+1}, f_i \langle}{\langle f_i, f_i \rangle} f_i$
Понятно, что $\langle f_i, f_j \rangle = 0$
Короче, если e_i зависим от предыдущих, то $f_i = 0$, иначе не равен 0 и ортогонален. Можно использовать утверждение выше.
Ортогональные матрицы.
В Евклидовом пространстве легко перейти от ортогонального базиса к ортонормированному: $C^T C = E$

0.9. № 10. Ортогональная проекция. Расстояние от вектора до плоскости

Утверждение: скалярное произведение на подпространстве положительно определено и невырождена.
$V = U \oplus U^{\perp}$ разложим вектор. Часть из U будем называть орт проекцией.
$pr_U x = \sum \langle x, e_i \rangle e_i$
$\rho(X, Y) = \inf \rho(x, y)$
Утверждение: $\rho(x, U) = ||ort_U x||$
Док-во:
$x = u_1 + u_2$, $||x - u|| = ||u_2 + (u_1 - u)|| = \sqrt{||u_2||^2 + ||u_1 - u||^2} \geq ||u||$, который достигается.
Следствие: $e_1, \ldots, e_k$ - ортонормированный базис.
Тогда $\rho(v, U)^2 = \frac{\det G(\ldots, v)}{\det G(e_1, \ldots, e_k)}$
Пользуемся ортогонализацией Грама-Шмидта

0.10. № 11. Объем параллелепипеда в Евклидовом Пространстве

$P(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ - параллелепипед, натянутый на вектора, его объем определим индуктивно

$\rho(a_n, \langle a_1, a_2, ..a_{n-1}) * V_{n-1}$

Утверждение: $Vol(P) = \sqrt{\det G(a_1, \ldots, a_n)}$

Также, пусть e - ортонормированный базис, то если $(a_i) = (e_i)A \Rightarrow Vol(P) = \det A$

Теорема: все Евклидовы пространства изоморфны R^n

0.11. № 12. Эрмитовы пространства. Унитарные матрицы

Эрмитово пространство: пространство над $\mathbb{C}$, на котором задана полуторалинейная форма, такая, что $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

Матрицы перехода между ортонормированными базисами эрмитова пространства называются унитарными

C - унитарна $\Leftrightarrow \overline{C}^T = E$

Лемма: любой набор векторов задает матрицу грама, определитель которой вещественный и больше/равен 0, причем это равносильно линейной зависимости.

Док-во: $\det G = \overline{C}^T = |\det C|^2$, перешли в ортонормированный базис

Лемма про гомоморфизм.

0.12. № 13. Овеществление и комплексификация

V - пространство над $\mathbb{C}$, тогда овеществлением называется $V_{\mathbb{R}}$ над $\mathbb{R}$ Утверждение: $\dim V_R = 2 \dim V$ Просто показываем, что если v_i - базис V над C, то v_j, iv_j - базис V над R

Комплексификация:

Пусть V - конечномерное пространство над V. Тогда введем над пространством $V \oplus V$ умножение на комплексный аргумент: $(a + bi)(u, v) = (au - bv, av + bu)$. Такое пространство называется $V^{\mathbb{C}}$ Свойства: 1. $v \to (v, 0)$ - вложение. $V \hookrightarrow V^{\mathbb{C}}$

2. Если a - гомоморфизм пространств U и V, то $a^{\mathbb{C}}(v + iu) = a(v) + ia(u)$

Замечание: 1. $\dim_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V$ 2. Матрица $A^{\mathbb{C}} : U^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ совпадает с матрицей из U в V. 1: Надо показать, что если e_i - базис V, то $(e_i, 0)$ - базис $V^{\mathbb{C}}$

0.13. № 14. Изометрии в Евклидовых и Эрмитовых пространствах

Далее V - эрмитово или евклидово пространство. Определение: множество автоморфизмов V : $\{a \in Aut(V), \langle a(v), a(u)\rangle = \langle v, u\rangle\}$ называется группой изометрий

Следующее равносильно: 1. a - изометрия 2. $\forall v \in V : ||a(v)|| = ||v||$ 3. Для всякого базиса e выполняется: $\overline{A}^T GA = G$, A - матрица автоморфизма a в базисе e, G - матрица Грама. 4. a переводит некоторый ортонормированный базис в ортонормированный

$1 \Rightarrow 2$ Очевидно $2 \Rightarrow 1$ скалярное произведение однозначно задается нормой $1 \Rightarrow 3$ нетрудно понять, что матрица грама при переходе от одного базиса к другому (образу этого базиса a(e)), не меняется $3 \Rightarrow 4$ Матрица Грама как была единичной, так и осталась $4 \Rightarrow 1$ Если на базисе скалярное произведение сохранилось, то и вообще оно сохранилось

Определение: $a \in Aut(V), ||a(v)|| = ||v||$, тогда если пространство евклидово, то оператор называется ортогональным, если оно эрмитово, то унитарным

0.14. № 15. Существование одномерного или двумерного инвариантного подпространства для оператора в вещественном пространстве

Утверждение: V - конечномерное пространство над R, $\dim V > 1$, $a \in End(V)$ Тогда в V существует одномерное или двумерное подпространство U, инвариантное относительно a.

Док-во: Рассмотрим характеристический многочлен χ_a 1. Если у него есть вещественный корен, то вот вам и инвариантная прямая 2. Если же нет, то:

0.15. № 16. Теорема об ортогональных и унитарных операторах

Утверждение: если V - одномерное пространство над $\mathbb{R}$, тогда группа ортогональных операторов состоит из двух элементов $id, -id$

Утверждение: если V - двумерное пространство над $\mathbb{R}$, то всякий ортогональный оператор имеет вид $(\cos\phi, -\sin\phi, \sin\phi, \cos, \phi)$

В ортонормированном базисе $A^T A = E$, значит, определитель A равен ± 1

Дальше составляем систему уравнений, которая следует отсюда $A^T A = E$, $\det A = 1$

Потом понимаем, что если поменять строки местами, то определитель будет -1 (точнее надо в обратную сторону)

Теорема

1) V - эрмитово, a - эндоморфизм. Тогда следующее равносильно:

1. a - унитарный оператор

2. $Spec(a) \in \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, и существует базис, в котором матрица диагональна

2) V - евклидово, a - эндоморфизм. Тогда следующее равносильно:

1. a - ортогональный

2. существует ортонормированный базис, в котором матрица имеет блочно-диагональный вид, причем каждый блок - это $A(\phi_i)$

3) собственные вектора соответствующие разным собственным числам ортогональны

Док-во: 1) стрелка влево, говорим, что $\overline{A}^T A = E$, потому что все числа в спектре на диагонали, збс

стрелка вправо: хоти разложить в прямую сумму инвариантных, для этого по индукции отщепляем собственный вектор с собственным числом, и говорим, что $\langle v\rangle^{\perp}$ инвариантно

2) то же самое почти 3) берем $\alpha(v) = \mu v$, $\alpha(u) = \nu u$

Записываем тождество, понимаем, что при разных ν, μ произведение $\overline{\mu}\nu$ не может быть равно 1

0.16. № 17. Сопряженные операторы

Определение. Операторы называются сопряженными, если $\forall v, u : \langle a^*(v), u\rangle = \langle v, a(u)\rangle$

Свойство: $A^* = G^{-1}\overline{A}^T G$ Следует из того, что $\overline{A^*}^T G = GA$

Он существует и единственный

Утверждение. $r : V \to V^* : v \to \langle v, \cdot\rangle$

Это изоморфизм. Надо показать инъективностью

Замечания: 1. введем скалярное произведение в двойственном пространстве: это просто произведение соответствующих векторов 2. Образ базиса - базис 3. Если V - эрмитово, $r(zv) = \overline{z}r(v)$ 4. $a : V \to V$, $a' : V^* \to V^*$ $a^* = r^{-1}a'r$

0.17. № 18 Самомопряженные операторы

В терминах матриц: $A = G^{-1}\overline{A}^T G \Rightarrow \overline{A}^T = A$ в ортонормированном базисе Теорема: V - эвклидово или эрмитово пространство, a - эндоморфизм.

Тогда 1. a - самосопряжен $\Leftrightarrow Spec(a) \subset R$, $\exists e$ - ортнормированный, т.ч. матрица A в нем диагональна

2. Собстенные вектора, соответствующие различным собственным числам, ортогональны.

1. Влево: заметим, что $\overline{A}^T = A$

Вправо: Покажем, что все собственные числа действительны. Для эрмитового пространства надо показать, что $\overline{\lambda} = \lambda$

Для Евклидового рассмотрим его комплексификацию, наш оператор тоже комплексифицируется и останется самосопряженным.

Итого мы вновь получили эрмитово пространство Покажем, что ортонормированный базис, в котором наща матрица диагональна Опять по индукции, берем собственный вектор: $V \langle v\rangle \oplus (\langle v\rangle)^{\perp}$ Показываем инвариантность орт дополнения к v

2. Да было же уже такое

Следствие: $A \in R^{n\times n} \vee A \in C^{n\times n}$, $\overline{A}^T = A$, то есть это матрица самосопряженного оператора в ортонормированном базисе.

1. Тогда все корни хар. многочлена вещественны

2. Существует ортогональная или унитарная матрица: $C^{-1}AC = \overline{C}^T AC$ - диагональная матрица

C - матрица перехода в базис, в котором как раз наша матрица диагональна Лемма: $\Sigma = \sum a_{ij}x_i x_j + \sum b_i x_i + c = 0$ Если малая форма невырождена, то сигму можно привести к диагональному виду Иначе она представима в виде: $\sum\limits_{i\in I} x_i^2 + \sum\limits_{i\notin I} d_i x_i + c = 0$

0.18. № 19 Нормальные операторы

Определение: такие, что $a^* \circ a = a \circ a^*$

Живем в евклидовом или эрмитовом

Свойства, (стандартные примеры нормальных операторов):

1. $(a + b)^* = a^* + b^*$ 2. $a^{**} = a$ 3. $(a^{-1})^* = (a^*)^{-1}$ 4. $(ab)^* = b^* a^*$

Теорема: V - эрмитово пространство 1) Оператор нормальный $\Leftrightarrow$ $\exists$ ортонормированный базис, в котором матрица диагональна, при этом все элементы определены однозначно 2) Оператор самосопряженный $\Leftrightarrow$ элементы диагонали вещественные числа 3) Оператор кососимметрический $\Leftrightarrow$ элементы диагонали $\subset Ri$ 4) Оператор унитарный $\Leftrightarrow$ элементы диагонали комплексны, их модуль равен 1.

Влево: $\overline{A}^T = A^* \Rightarrow A^T = A \Rightarrow A^* = \overline{A}$, так как $\overline{A}A = A\overline{A}$, получаем, что хотели (они коммутируют)

0.19. № 20 Полярное разложение

Пусть V - эрмитово, a - эндоморфизм, тогда

Лемма: $a^* a$ - самосопряжен, $(a^* a)^* = a^*(a^*)^*$, $\lambda||v||^2 = \langle a^* av, v\rangle$..

Собственные числа неотр.

Следствие: значит существует базис e в котором $a^* a$ диагонален и числа на диаг. положительны

Утверждение: $\sqrt{A}$ - автоморфизм, если $A = a^* a$, то корень - самосопряженный (все корни извлекаются в неотр. дейст числа)

Лемма: Пусть V над C, $ab = ba$, тогда у них есть оющий собственный вектор. Выберем собственное число a $\lambda \in Spec(a)$, покажем, что $abv = \lambda bv$, то есть это подпространство($V_{\lambda}^{(a)}$) инвариантно относительно b, выберем там собственный вектор для него.

Следствие: существует базис, в котором a_e, b_e - диагональны Док-во: индукция. $(\langle v\rangle)^{\perp}$ инвариантно относительно a, b так как нормальные.

Теорема: V - эрмитово, $a \in Aut(V)$, тогда существует и единственное разложение $a = u_1 s_1 = s_2 u_2$, s-ки самосопр., u-шки унитарные. Нужно, чтобы спектр операторов был положителен.