# 7. Численное решение задач для краевых ОДУ. Сведение к задачам Коши.

$\dfrac{du_k(x)}{dx} = f_k(x, u_1, u_2, .., u_p), 1 \leq k \leq p$ - система ОДУ

Задача в отыскании частного решения системы на отрезке $[a, b]$. Дополнительные условия налагаются более чем в одной точке отрезка.

**Пример:** Задача нахождения статического прогиба нагруженной струны с закрепленными концами

$u''(x) = -f(x), a \leq x \leq b, u(a) = u(b) = 0$

f - внешняя изгибающая нагрузка на единицу длины струны, деленная на упругость струны.

Другая задача статический прогиб упругого бруска...

**Метод стрельбы (баллистический)**

Метод заключается в сведении краевой задачи к некоторой задаче Коши.

Рассмотрим его на примере задачи для системы двух уравнений первого порядка с краевыми условиями достаточно общего вида.

$$u'(x) = f(x, u, v), v'(x) = g(x, u, v), a \leq x \leq b$$

$$\phi(u(a), v(a)) = 0, \psi(u(b), v(b)) = 0$$

Выберем произвольное $u(a) = \eta$, найдем $v(a) = \zeta$ из первого краевого условия.

Возьмем эти значения и проинтегрируем эту задачу Коши любым численным методом, например Рунге-Кутта. При этом получим решение, зависящее от $\eta$ как от параметра. (По факту это будет просто численное решение, но мы можем сказать, что оно как бы параметризовано конкретным $\eta$)

Заметим, что наше решение не удовлетворяет правому граничному условию $\psi$.

То есть наша задача - численно решить уравнение $\psi(\eta) = 0$, но заметим, что вычисление $\psi$ достаточно трудоемко - для этого нужно численно решать задачу Коши для исходной системы. (Функцию $\psi$, нужно переписать как зависящую от аргумента $\eta$)

Для этого можно применять метод дихотомии (найти точки, где функция имеет разные знаки и делать этот отрезок пополам)

А можно применять метод секущих - $\eta_{s+1} = \eta_s - \dfrac{(\eta_s - \eta_{s-1})\psi(\eta_s)}{\psi(\eta_s) - \psi(\eta_{s-1})}$

Этот метод сходится быстрее, чем метод дихотомии, но все равно требует итеративного поиска $\eta$

**Линейная задача.**

Можно упростить решение для частного случая: пусть система и краевые условия линейны.

$$u' = \alpha_1(x)u + \beta_1(x)v + \gamma_1(x)$$

$$v' = \alpha_2(x)u + \beta_2(x)v + \gamma_2(x)$$

$$p_1 u(a) + q_1 v(a) = r_1, p_2 u(b) + q_2 v(b) = r_2$$

$u(a) = \eta, v(a) = \dfrac{r_1 - p_1\eta}{q_1}$

Таким образом решение задачи Коши будет линейно от $\eta$, а значит и $\psi(\eta)$ будет линейно зависеть от $\eta$, поэтому найденное по формуле секущих $\eta_2$ - точный корень уравнения, то есть всего достаточно решить три задачи Коши.

Можно еще несколько упростить вычисления для линейных систем, воспользуясь фактом, что общее решение неоднородной системы равно сумме частного решения неоднородной и общего одно родной. Найдем частное решение и обозначим его за $u_0(x), v_0(x)$

Затем рассмотрим соответствующую однородную задачу Коши:

$$u' = \alpha_1(x)u + \beta_1(x)v$$

$$v' = \alpha_2(x)u + \beta_2(x)v$$

$$u(a) = \eta = 1, v(a) = \frac{-p_1}{q_1}$$

Вычислим ее решение и обозначим за $u_1, v_1$, тогда общее решение неоднородной задачи Коши, удовлетворяющей левому условию - это $u(x) = u_0 + cu_1(x), v(x) = v_0 + cv_1(x)$ (**почему так можно делать я не очень понимаю, но думаю, можно принять это на веру**). Теперь осталось подставить параметр c, удовлетворяющий правому краевому условию:

$$c = -\frac{p_2 u_0(b) + q_2 v_0(b) - r_2}{p_2 u_1(b) + q_2 v_1(b)}$$