Student: Maksim Kryuchkov
Группа: AU 202
Дата: 7 июня 2018 г.

Additional homework

Исправлено: № 3, № 4.

Problem 1

Solution

Если L - полный язык для PH, то $L \in \Sigma_i^p$ для некоторого i.
Возьмем язык $L' \in PH$, он сводится к L, значит, $L' \in \Sigma_i^p$
Пояснение
Что значит сводится? Есть полиномиальное сведение $x- > p(x)$
То есть для L' верно
$x \in L' \Leftrightarrow \exists x_1 \forall x_2 ... x_i : M'(p(x), x_1, ..., x_i) = 1$

Problem 2

Solution

$BP \cdot NP = \{L : L \leqslant_R 3SAT\}$
Во-первых, $3SAT \in NP \Rightarrow x \in 3SAT \Leftrightarrow \exists u : M_{3SAT}(x, u) = 1$
Во-вторых, $BPP \in \Sigma_2^p$, то есть для языка $B \in BPP$ верно $x \in B \Leftrightarrow \exists u \forall v M_B(x, u, v) = 1$
Мы рассматриваем множеств языков, сводимых к 3-САТУ некоторым алгоритмом B из BPP.
M_B преобразует вход для 3-САТА и запускает его.
Таким образом $L \in BP \cdot NP \Rightarrow \exists u \forall v \exists u' M_{3SAT}(x, u, v, u') = 1$, то есть $L \in \Sigma_3^p$, то есть $BP \cdot NP \subset \Sigma_3^p$

Problem 4

Solution

Пусть L разрешим, тогда существует машина M, которая его решает.
Попробуем решить HALT.
Заведем машину Тьюринга A.
Пусть $A_{x\ i}(t) = 0$, если M_i на входе x работает более, чем за время t.

Иначе заставим A работать $100|t|^2 + 201$ шагов

Таким образом вот алгоритм решения HALT.

Принимаем на вход (i, x), i - номер машины, x - вход.

Запускаем $M(A_{x\ i})$. Если $A_{x\ i}$ останавливается до $100n^2 + 200$ шагов на всех входах, значит M_i не останавливается на иксе никогда. Если все же существует t, такое, что M_i останавливается за время t, то мы об этом узнаем, потому что найдется вход $A_{x\ i}$, на котором она будет работать долго.

Получается, мы решили HALT, противоречие

Problem 5

Solution

Докажем по индукции, что $(\Sigma_i^p)^A = P^A$

База ясна: $(\Sigma_0^p)^A = P^A = (\Pi_0^p)^A$

Пусть $(\Sigma_i^p)^A = P^A = (\Pi_i^p)^A$ по предположению индукции

Докажем, что $(\Sigma_{i+1}^p)^A = P^A$

$L \in \Sigma_{i+1}^p \Leftrightarrow$

$x \in L \Leftrightarrow \exists u \in P(x) : M(x, u) = 1$, где $M \in \Pi_i^p$

Значит,

$L \in (\Sigma_{i+1}^p)^A \Leftrightarrow$

$x \in L \Leftrightarrow \exists u \in P^A(x) : M(x, u) = 1$, где $M \in (\Pi_i^p)^A = P^A$, то есть $(\Sigma_{i+1}^p)^A = (NP)^A = P^A$

$PH = \bigcup \Sigma_i^p \Rightarrow PH^A = P^A$