0.1. Тензора

№ 1 Тензорное произведение. Разложимые тензора

Линейное пространство всех полилинейных функций $V_1 \times .... \times V_n \to U$ - полилинейное пространство $Hom(V_1, ..., V_n, U)$.
M - множество всех функций, $\{\sum a_{v_1,..,v_n}(v_1, ..v_2) : a_{v_1,...,v_n} \in K\}$
Важно, что в K.
$M_0 = \langle (v_1, .., v_k' + v_k'', v_n) - (v_1, .., v_k', v_n) - (v_1, .., v_k'', v_n), \alpha(v_1, .., v_n) - (v_1, .., \alpha v_k, v_n)\rangle$
Тензорное произведение $V_1 \otimes V_2, ..., \otimes V_n - M \setminus M_0$
Разложимый тензор - класс эквивалентности функции $(v_1, ..., v_n)$ Разложимые тензоры порождают все тензорное произведение - лемма (потому что это классы эквивалентности порождающих элементов) Если одно из пространств тривиально, то их тензорное произведение тоже (нолик как коэффициент)

№ 2. Связь между полилинейными отображениями и линейными отображнениями тензорного произведения пространств

$t : V_1 \times ... \times V_n \to \bigotimes V_i$
$(v_1, v_2, ..., v_n) \to v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_n$
1) t - полилинейно 2) t - универсально, то есть $\forall s \in Hom(V_1, ..., V_n, U) \exists! f \in Hom(\bigotimes V_i, U) : s = f \circ t$
Доказательство: 1) Полилинейность очевидна 2) $f_1 \circ t = f_2 \circ t$
$f_1(v_1 \otimes v_2 ... \otimes v_n) = f_2(v_1 \otimes v_2 ... \otimes v_n)$
$(v_1 \otimes v_2 ... \otimes v_n)$ - образуют все пространство, значит, $f_1 = f_2$
Существование: $g : M \to U$ $g(v_1, v_2, .., v_n) = s(v_1, v_2, ..., v_n)$ Сузим эту фигню, получим f Теперь осталось показать, что для двух элементов из одного класса эквивалентности g равно.
Но это очевидно в силу полилинейности, отсюда вывод, что можно определять гомоморфизм только на разложимых тензорах, а дальше он естественным образом продлится
Следствия: Существуют канонические изоморфизмы векторных пространств:
1. $Hom(V_1, ..., V_n, U) \cong Hom(V_1 \otimes V_2 ... \otimes V_n, U)$ Изоморфизм очевиден: любому элементу s сопоставим f по универсальному свойству 2. $Hom(V_1, ..., V_n, K) \cong (V_1 \otimes V_2 ... \otimes V_n)^*$ Первый пункт 3. $\dim(V_1 \otimes V_2 ... \otimes V_n) = \dim V_1 \dim V_2 ... \dim V_n$ Размерность тензорного произведения = двойственного = произведению 4. $e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, ..., e_n^{(i)}$ - базис V_i Тогда $e_{j_1}^{(1)}, e_{j_2}^{(2)}, ..., e_{j_n}^{(n)}$ Покажем, что система образующих
Так как любой разложимый тензор представим в данном базисе

№ 3. Расширение скаляров. Комплексификация пространства

Комплексификация пространства
V - векторное пространство над R, тогда можно задать изоморфизм $C \otimes V \to V^C$ $1 \otimes e \to e$ $i \otimes e \to ie$
Расширение скаляров L, K - поля, $K \subset L$ V - пространство над K, тогда $L \otimes V$ - векторное пространство над L Продолжим эту структуру, но над L Тогда $\alpha \in L, \alpha(\beta \otimes v) = (\alpha\beta) \otimes v$ для базисных векторов $\beta \in L, v \in V$

№ 4. Тензорное произведение пространств. Канонические изоморфизмы

Лемма о существовании канонических изоморфизмов 1.$V_1 \otimes V_2 \cong V_2 \otimes V_1$ $v_1 \otimes v_2 \to v_2 \otimes v_1$
2.$(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \cong V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$ $v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 \to v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3)$
3. $V_1^* \otimes ... \otimes V_n^* \cong (V_1 \otimes ... \otimes V_n)^*$ Изоморфизм $V_1^* \otimes ... \otimes V_n^* \leftrightarrow Hom(V_1, ..., V_n, K)$
$f_1 \otimes f_2 ... \otimes f_n \to ((v_1 \times ... \times v_n) \to f_1(v_1)...f_n(v_n))$
4. $U^* \otimes V \cong Hom(U, V)$ $f \otimes v \to (u \to f(u)v)$

№ 5. Тензорная алгебра векторного пространства

$T_p^q(V)$ - тензорное произведение p штук V^* и q штук V
$V^{\otimes p}$ - тензорная степень V.
Произведение тензоров $(f \otimes g)(v_1, ..., v_p, v_1', ..., v_{p'}', f_1, ..., f_q, f_1', ..f_{q'}')$ - берем первые p векторов и q функций и применяем к ним f, ко всему остальному g и перемножаем.
Коммутативности нет, понятно почему. Есть такие свойства:
$a, b \in K, f_1, f_2 \in T_p^q(V), g \in T_{p'}^{q'}(V)$
1. $(af_1 + bf_2) \otimes g = af_1 \otimes g + bf_2 \otimes g$ 2. $f \otimes (ag_1 + bg_2) = af \otimes g_1 + bf \otimes g_2$ 3. $(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$
Тензорная алгебра: $T(V) = \bigoplus_{p,q} T_p^q(V)$, на ней определено умножение. Аналогичная конструкция: многочлены.

№ 6. Изменение координат тензора при замене базиса

Есть обычное представление $T = \sum T_{...}^{...} e^{i_1} \otimes e^{i_2} ... \otimes e_{j_1} \otimes ... \otimes e_{j_q}$, $T_{...}^{...}$ - это невъебический коэффициент.
1. e, f - базисы V, $f = eA$, $A = C_f^e$ 2. e^*, f^* - двойственные базисы V^*, матрица перехода равна $B = (A^T)^{-1}$

№ 7. Симметрические тензоры. Симметрическая алгебра векторного пространства

V - конечномерно, K - нулевой характеристики S_q действует на $T_0^q(V)$
f_σ - такая функция, что $f(v_1 \otimes v_2, ... \otimes v_n) = v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} .... \otimes v_{\sigma(n)}$
$S^q(V) = \{T \in T_0^q(V) | f_\sigma T = T \forall \sigma \in S_q$ $S = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} f_\sigma$
Утверждения: 1. $S^2 = S$ 2. $T_1 = f_\sigma T_2$, тогда $S(T_1) = S(T_2)$ 3. $Im(S) = S^q(V)$
Лемма: Пусть e - базис V, тогда 1. $\{S(e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_q}\}$ - базис $S^q(V)$ 2. $S^q(V) \cong \{f \in K[x_1, ..., x_n] | \deg f = q\}$ 3. $\dim S^q(V) = \binom{n+q-1}{q}$ $S(V) = \bigoplus S^q(V)$ - симметричная алгебра.
Введем умножение: $T_1 \in S^q(V)$, $T_2 \in S^p(V)$
$T_1 T_2 = S(T_1 \otimes T_2)$
Утверждение: 1. $S(V)$ - коммутативная ассоциативная алгебра
2. $(e_1^{k_1} ... e_n^{k_n})(e_1^{l_1} .... e_n^{l_n}) = e_1^{k_1 + l_1} ... e_n^{k_n + l_n}$

№ 8. Внешняя алгебра или алгебра Грассмана

Пространство антисимметричных тензоров: $\Lambda^q(V) = \{T \in T_0^q(V) | f_\sigma(T) = sign_\sigma T\}$ Оператор альтернирования: $A = \frac{1}{q!} \sum \sigma in S_q sign_\sigma f_\sigma$ Утверждения: 1. $T_1 = f_\sigma T_2 \Rightarrow AT_1 = sign_\sigma AT_1$ 2. $A^2 = A$
3. $ImA = \Lambda^q(V)$ Утверждение: $e_{i_1} \wedge e_{i_2} .... \wedge e_{i_n} = 0 \Rightarrow i_l = i_s$
Утверждение: 1. $q \le n \Rightarrow e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_q}$ - базис $\Lambda^q(V)$, $1 \le i_1 \le ... \le i_q \le n$
2. $q > n \Rightarrow \Lambda^q(V) = 0$
3. $\dim \Lambda^q(V) = \binom{n}{q}$
Следствие: $\dim \bigoplus_{q=0}^{n} \Lambda^q(V) = 2^n$ $T_1 \in \Lambda^p(V)$, $T_2 \in \Lambda^q(V)$ $T_1 \wedge T_2 = A(T_1 \otimes T_2)$ - внешнее произведение

№ 9. Вещественная структура на комплексном пространстве

V - векторное пространство над C. Оператор комплексно антилинеен, если $\sigma(zv) = \overline{z}\sigma(v) \forall z \in C$ Утверждение: σ комплексно антилинеен: $V_R \to V_R, \sigma^2 = id$
$V = \mathbb{C} \otimes_R W$, $W = Ker(\sigma - id)$

№ 10. Тело кватернионов

Есть четырехмерное пространство $V = C^{2\times2}$ Комплексно антилинейный оператор σ: $\sigma : A \to \overline{Adj(A)}^T$
$(a, b, c, d) \to (\overline{d}, -\overline{c}, -\overline{b}, \overline{a})$
Утверждение: 1. $\sigma(AB) = \sigma(A)\sigma(B), \forall A, B$ - матрицы 2. $\sigma(zA) = \overline{z}\sigma(A)$ 3. $\sigma^2 = id$
Утверждение: $V_R = \ker(\sigma^2 - id) = \ker(\sigma - id) \oplus \ker(\sigma + id)$
Тогда базис пространства: $1 = (1, 0, 0, 1)$, $i = (i, 0, 0, -i)$, $j = (0, 1, -1, 0)$, $k = (0, i, i, 0)$
$\ker(\sigma - id)$ - тело кватернионов
1. $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ 2. $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$ Утверждение: $R \to H$, переходит в коэффициент при 1.
I - подпространство чисто мнимых кватернионов $I = \{A \in C^{2\times2} | \overline{A}^T = -A, tr(A) = 0\}$ Сопряжение: минусики перед мнимыми частями. Введем скалярное произведение $\langle u, v\rangle = Re(u * \overline{v})$ И норму:
$||u||^2 = Re(u * \overline{u})$ Лемма. 1. Для любого ненулевого u - кватерниона существует обратный элемент $u^{-1} = \frac{\overline{u}}{||u||^2}$
2. Если $u, v \in I$, то $Im(uv) = u \times v$, где $\times$ - векторное произведение

0.2. Теория Галуа

№ 11. Конечные и алгебраические расширения полей. Башня расширений

Поле $L \supset K$ называется расширением K. Степень расширения - размерность L как векторного пространства над K: $[L : K]$
Алгебраический элемент: $\alpha \in L : \exists 0 \neq f \in K[x] : f(\alpha) = 0$
Лемма: 1. Любое конечное расширение алгебраическое 2. $M \subset K \subset L \Rightarrow [L : M] = [L : K] * [K : M]$ 1. Так как $\alpha^0, \alpha, \ldots, \alpha^n$ линейно зависимы. 2. $[K : M] = n, [L : K] = m$
u - базис K над M, v - базис L над K Тогда $u_i v_j$ - базис L над M.
Система образующих очевидно, линейная независимость тоже. Минимальный многочлен: такой $f \in K[x]$ со старшим коэффициентом 1, что идеал I_α многочленов, равных нулю в α, равен $f(x)K[x]$
Минимальный многочлен существует для любого алгебраического элемента: пользуемся тем, что $K[x]$ - кольцо главных идеалов, и что он не пуст. Плюс домножаем на элементы из K, чтобы получить единицу
Свойства: минимальный многочлен неприводим, I_α максимален
Док-во: Ну понятно, если он приводим, то не может образовывать весь идеал. Любой простой идеал максимален. Простой идеал - такой, что факторколько по нему - область целостности. Максимальный идеал - не содержится ни в каком другом.

№ 12. Строение расширения $K(\alpha)/K$

$K(\alpha)$ - поле, являющееся пересечением всех таких M, что $\alpha \in m, K \subset M \subset L$ $K[\alpha]$ - множество значений всех многочленов из $K[x]$ в точке α $K[\alpha]$ - кольцо. $K[\alpha] \subset K(\alpha)$, так как любое поле содержащее α, K содержит и все значения многочленов Утверждение: 1. $K \subset L, \alpha \in L$, тогда если α алгебраическое, то $K(\alpha) = K[x]/f_\alpha$ 2. Если же оно трансцендентное, то $K(\alpha) \cong K(x) = Quot(K[x])$
Есть гомоморфизм колец $K[x] \to K[\alpha], g(x) \to g(a)$
$K[\alpha] \cong K[x]/I_a$ по теореме о гомоморфизме
1. α - алгебраический, тогда $K[x]/I_\alpha$ - поле, которое содержит α, K 2. α - трансцендентный, тогда изоморфны не только $K[x]$ и $K[\alpha]$, но и $Quot(K[x]) \cong Quot(K[\alpha])$, тогда показываем включения $Quot(K[\alpha])$ и $K(\alpha)$ в обе стороны

№ 13. Присоединение корня неприводимого многочлена

Если два расширения изоморфны, и изоморфизм тождественен на K, то она называются эквивалентными. Утверждение: Если K - поле, $f(x) \in K[x]$ - неприводим, тогда существует единственное с точностью до эквивалентности расширение вида $K(\alpha) : f(\alpha) = 0$
Док-во $I = fK[x], M = K[x]/I$, получается такое вложение $K \to M, a \to a + (f)$ В качестве α возьмем $\overline{x}$ - класс многочлена $x : x + qf$ Теперь альфа алгебраический, значит, можно сказать, что расширение $K(\alpha) \cong K[x]/f$, значит, они все будут эквивалентны

№ 14. Конечные расширения полей. Поле разложения многочлена

$K(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ - минимальное поле, содержащее K и набор ашек. Лемма: 1. Оно существует и единственно с точностью до эквивалентности 2. $K(a_1, \ldots, a_n) = K(a_1)(a_2)\ldots(a_n)$
1. Без док-ва 2. Докажем по индукции, переход очевиден из определений
Следствие: не имеет значения в каком порядке добавлять элементы
Лемма: 1. Конечные расширения и только они получаются присоединением конечного числа алгебраических элементов.
В одну сторону потому что каждое из расширений в цепочке конечно, в другую надо сделать индукцию по степени расширения, пока она не 1 находим элемент, присоединяем к текущему полю
2. a, b - алгебраические над K, тогда $a \pm b, a/b, ab$ - тоже алгебраические
$K(\alpha, \beta)$ - конечное расширения, и вся эта хрень в нем содержится(значит, они алгебраические)
3. Если $M \subset K, K \subset L$, то $M \subset L$ - алгебраическое расширение Расммотрим $\alpha \in L$, и покажем, что он алгебраический над M. Для этого, так как он алгебраический над K, можно представить $a_0 + \ldots + a_n\alpha^n = 0$, коэффициенты из K. Эти коэффициенты из линейной комбинации алгебраически над M, значит, сначала присоединим их, а тогда расширение $[M(a_1, \ldots, a_n, \alpha) : M]$ - конечное, а значит, α алгебраический над M.
Поле разложения многочлена - поле, полученное присоединением всех его корней.

№ 15. Алгебраическое замыкание поля

Поле K алгебраически замкнуто, если любой многочлен над K имеет корень.
Теорема. Для всякого K существует алгебраическое расширение $\overline{K}$, алгебраически замкнутое.
Док-во: 1. Построим расширение $L_1, K \subset L_1$, в котором любой неконстантный многочлен $f \in K[x]$ имеет корень в L_1.
Введем бесконечный набор переменных, каждая соответствует многочлену $x_f \leftrightarrow f \in K[x]$
$I = \langle f(x_f) | f \in K[x] \rangle$, он не совпадает со всем кольцом, потому что пусть содержится 1, тогда рассмотрим $K \subset F$ - получено присоединением всех корней многочленов f.
Равенство должно было остаться, но подставим теперь эти корни и отсосем.
Рассмотрим максимальный идеал $R \neq M \supset I$. $L_1 = R/M$ Есть естественные отображения $K \to R, R \to L_1$
Надо показать, что композиция этих отображений инъективна. Но тогда разность двух элементов из K лежит в M, а значит, там лежит 1, противоречие. Осталось понять, что любой неконстантный многочлен имеет корень в L_1.
2. Теперь построим бесконечное кол-во $K \subset L_1 \subset L_2 \subset \ldots$, возьмем в качестве L объединение их всех. При этом получается, что L алгебраически замкнуто.
3. Теперь построим $\overline{K}$ $K \subseteq M \subset L$. Требуемое расширение - объединение всех таких M, что M - алгебраическое расширение K. Покажем, что эта хрень алгебраически замкнута. Всякий многочлен $f \in \overline{K}[x]$ имеет корень в L, тогда этот корень алгебраический над $\overline{K}$, а значит $\overline{K}(\alpha)$ лежит в объединении.

№ 16. Продолжение изоморфизмов. Сопряженные элементы

σ - гомоморфизм полей $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in K[x]$ $f^\sigma(x) = \sigma(a_0) + \ldots + \sigma(a_n)x^n \in L[x]$
Пусть $K \subset L, K' \subset L'$ Тогда если есть гомоморфизм $\phi : K \to K'$
То $\phi' : L \to L'$ - продолжение ϕ, если на K они совпадают
Утверждение: $\phi : K \to K'$ - изоморфизм.
f неприводим, $f(a) = 0, f^\phi(a') = 0$ 1. Тогда ϕ продолжается до изоморфизма $\phi' : K(\alpha) \to K'(\alpha')$ При этом $\phi'(\alpha) = \alpha'$ Всякий элемент представим в виде $\sum\limits_{0}^{\deg f - 1} a_i\alpha^i$
Переведем его так $\sum\limits_{0}^{\deg f - 1} a_i\alpha^i \to \sum\limits_{0}^{\deg f - 1} \phi(a_i)\alpha'^i$
2. Тогда ϕ продолжается до изоморфизма полей разложения многочленов f и f^σ Последовательно. Возьмем корень f - α. Тогда $\phi(\alpha)$ - корень f^ϕ Короче поля изоморфны на каждом шаге.
Сопряженные элементы L - расширение K Тогда группу автоморфизмов L, тождественных на K обозначим $Aut_K L$
Сопряженные элементы - такие $\alpha, \beta \in \overline{K}$, что $\alpha = \sigma\beta$, где сигма - это автоморфизм $\overline{K}$ Свойства: 1. Если α и β сопряжены, то $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\beta) = 0$ Тогда $f(\alpha) = f^\sigma(\alpha) = f^\sigma(\sigma\beta) = 0$, первый переход следует из того, что сигма тождественна на K, последний из предыдущей леммы.
2. Любые два корня неприводимого многочлена сопряжены. Напрямую следует из предыдущего всего. Следствие: множество сопряженных с α элементов совпадает с множеством корней f_α

№ 17. Кратные корни многочлена f - многочлен над K. Рассматриваем корни f в алгебраическом замыкании Тогда 1. У f есть кратный корень $\Leftrightarrow$ f и f' имеют общий корень 2. f неприводим, deg $f > 1$, тогда f имеет кратные корни тогда и только тогда, когда $f' = 0$
Лемма: f неприводим, deg $f > 1$ Тогда 1. Если $Char(K) = 0$, тогда f не имеет кратных корней 2. Если $Char(K) = p > 0$, то f имеет кратные корни тогда и только тогда, когда $f(x) = g(x^p)$
1. Пусть есть, но тогда f константа, противоречие 2. Влево получается, что производная равна 0 Вправо берем производную, смотрим на коэффициенты кратные и некратные p.
$f(x) = g(x^{p^c})$, и g не имеет кратных корней

№ 18. Редуцированная степень многочлена

Тогда назовем deg g редуцированной степенью f.
Утверждение $f = f_\alpha$ раскладывается на линейные множители в поле L. $\sigma : K \to L$
Тогда существует ровно m продолжений σ до вложения $\overline{\sigma} : K(\alpha) \to L$ Где m совпадает с редуцированной степенью f, если поле характеристики не 0, а если 0, то просто со степенью f.
Док-во: Каждое продолжение гомоморфизма переводит α в сопряженный элемент, чем полностью и определяется. Тогда, если кратных корней нет(Char = 0), то все ясно, иначе, опять-таки переходим к $g(x^{p^c})$, в котором нет кратных корней $f(x) = \prod x^{p^c} - \beta_i$, пусть α_i - корень f. Ну а дальше понимаем, что $x^{p^c} - \beta_i = (x - \alpha_i)^{p^c}$

№ 19. Сепарабельная степень расширения

L - конечное расширение. M алгебраически замкнуто Тогда если $\sigma : K \to M$ - вложение, то количество продолжений σ до вложения $L \to M$ назовем сепарабельной степенью
Утверждение: Пусть $K \subset L \subset M$ Тогда 1. $[M : K]_s = [M : L]_s[L : K]_s$ 2. $[L : K]_s \leq [L : K]$ Док-во 1. Сначала каким-то количеством способов продолжаем L, потом M.
2. По очереди рассматриваем присоединенные элементы, получается проивзедение степеней. В одном случае сепарабельных, в другом - расширения, но степень расширения - это deg f, а сепарабельная - это редуцированная степень минимального многочлена

№ 20. Конечные поля. Гомоморфизм Фробениуса Утверждение. F - конечное поле, тогда $|F| = p^k$, p - простое, $p = Char(F)$, $a^{Char-1} = 1, a \in F^*$ Лемма. Корни многочлена $f(x) = x^{p^n} - x$ образуют поле. α, β - корни, тогда $\alpha^{p^n} = \alpha \ldots a^{p^n} + b^{p^n} = (a + b)^{p^n} = (a + b)$

С минусом все норм. $a^{p^n - 2} = a^{-1}$

Лемма. Конечные поля одинакового порядка изоморфны Любой элемент поля K удовлетворяет $x^{p^k} - x = 0$ Короче, все элементы K являются корнями f. Короче будем расширять F_p до K добавляя корни f, и в итоге все элементы будут корнями Значит, K изоморфно полю разложения f, а все поля разложения над одним полем изоморфны
Утверждение 1. $\forall p \in P, \forall n \in N \exists$ поле из p^n элементов 2. $\forall m$ существует одно с точностью до эквивалентности расширение поля F_q степени m.

1. Рассмотрим поле разложения $x^{p^n} - x$, корни образуют поле, все они различны, так как кратные корни могут быть только у многочлена вида $g(x^p)$ 2. $[K : F_q] = m$, а конечные поля одинакового порядка изоморфны.
Автоморфизм $\phi : F_q \to F_q, x \to x^p$ - это эндоморфизм Фробениуса Утверждение 1. ϕ - автоморфизм F_q 2. Aut $F_q = \langle \phi \rangle$, |Aut F_q| = n. То есть эта группа циклическая.