Student: Maksim Kryuchkov
Группа: AU 202
Дата: 1 июня 2018 г.

HW04

Problem 1

Разложить в ряд Лорана:

a) $\dfrac{1}{(z+1)(z-2)}, a = 0, D : 1 < |z| < 2$

b) $\dfrac{z^3}{(z+1)(z-2)}, a = -1, D : 0 < |z+1| < 3$

c) $\dfrac{1}{(z^2-1)(z^2+4)}, a = 0, D : 2 < |z|$

d) $\dfrac{z+i}{z^2}, a = i, -i \in D$

Solution

a)

$\dfrac{1}{(z+1)(z-2)} = \dfrac{A}{z+1} + \dfrac{B}{z-2} = \dfrac{Az-2A+Bz+B}{(z+1)(z-2)}$

$A + B = 0, B - 2A = 1 \Rightarrow A = \dfrac{-1}{3} = -B$

Мы рассматриваем функцию в кольце $D : 1 < |x| < 2$

Значит, у разложения $\dfrac{A}{z+1}$ в ряд Лорана будет главная часть, а у $\dfrac{B}{z-2}$ правильная

$\dfrac{1}{z+1} = \dfrac{1}{z}\dfrac{1}{1+\frac{1}{z}} = \sum\limits_{-\infty}^{0}(-1)^i z^{i-1}$

$\dfrac{1}{(z+1)(z-2)} = \dfrac{1}{3(z-2)} - \dfrac{1}{3(z+1)} = \dfrac{1}{3}\sum\limits_{-\infty}^{-1}(-1)^{i+1}z^i + \dfrac{1}{6}\sum\limits_{0}^{\infty}\dfrac{1}{2}^i z^i$

b)

$\dfrac{z^3}{(z+1)(z-2)} = \dfrac{z^3-z^2-2z+z^2+2z}{(z+1)(z-2)} = z + \dfrac{z^2-z-2+3z+2}{(z+1)(z-2)} = z+1+\dfrac{3z+2}{(z+1)(z-2)} = z+1+\dfrac{A}{z+1}+\dfrac{B}{z-2}$

$A + B = 3, B - 2A = 2$

$B + 2B - 6 = 2 \Rightarrow B = \dfrac{8}{3}, A = \dfrac{1}{3}$

$\dfrac{B}{z-2} = \dfrac{B}{(z+1)-3}$, значит, будет правильная часть

$\dfrac{B}{(z+1)-3} = \sum\limits_{0}^{\infty} -B(\dfrac{1}{3})^i(z+1)^i$

Итого, $\dfrac{z^3}{(z+1)(z-2)} = \dfrac{1}{3(z+1)} + (z+1) + \sum\limits_{0}^{\infty} -\dfrac{8}{3}(\dfrac{1}{3})^i(z+1)^i$

c)

$\dfrac{1}{(z^2-1)(z^2+4)} = \dfrac{A}{1-z} + \dfrac{B}{1+z} + \dfrac{C}{2i-z} + \dfrac{D}{z+2i}$

В понятно, что раскладывая каждую из дробей в ряд Лорана получаем только главную часть, так как в данном кольце $\frac{|z|}{2} > 1$

$\frac{A}{1-z} + \frac{B}{1+z} + \frac{C}{2i-z} + \frac{D}{z+2i} = \sum_{-\infty}^{0} Az^{i-1} + \sum_{-\infty}^{0} B(-1)^i z^{i-1} + \sum_{-\infty}^{0} -C(2i)^{-k} z^{k-1} + \sum_{-\infty}^{0} D(-2i)^{-k} z^{k-1} = \sum_{-\infty}^{0} (A + B(-1)^k - C(2i)^{-k} + D(-2i)^{-k}) z^{k-1}$

Осталось найти коэффициенты

$\frac{1}{(z^2-1)(z^2+4)} = \frac{1}{5(-z^2-4)} - \frac{1}{5(1-z^2)}$

$\frac{1}{1-z^2} = \frac{1}{2(1-z)} + \frac{1}{2(1+z)}$

$\frac{1}{-z^2-4} = \frac{-i}{4(2i-z)} + \frac{-i}{4(2i+z)}$

$\frac{1}{(z^2-1)(z^2+4)} = \frac{\frac{-i}{20}}{1-z} + \frac{\frac{-i}{20}}{1+z} + \frac{-\frac{1}{10}}{2i-z} + \frac{-\frac{1}{10}}{z+2i}$

Итого ответ:

$\sum_{-\infty}^{0} (\frac{-i}{20} - \frac{i}{20}(-1)^k + \frac{1}{10}(2i)^{-k} - \frac{1}{10}(-2i)^{-k}) z^{k-1}$

d)

Рассмотрим кольцо вокруг $i : |z-i| > 1$, тогда $-i$ туда войдет

$\frac{z+i}{z^2} = \frac{1}{z+i-i} + \frac{i}{z^2} = \frac{1}{z-i}\frac{1}{1+\frac{i}{z-i}} + (\frac{1}{z-i}\frac{i}{1+\frac{i}{z-i}})^2$

$|\frac{i}{z-i}| < 1$, значит все сходится, отлично.

$\frac{1}{1+\frac{i}{z-i}} = \sum_{-\infty}^{0} (-i)^{-k}(z-i)^k$

Подставлять не будем, там ответ слишком громоздкий

Problem 2

Вычислить интегралы

a) $\int_{\partial D} \frac{1}{1+z^4} dz, D : |z-1| < 1$

b) $\int_{\partial D} \frac{\sin z}{(z+1)^3} dz, x^{2/3} + y^{2/3} < 2^{2/3}$

c) $\int_{\partial D} \frac{ze^{\frac{1}{3z}}}{z+3} dz, D : |z| > 4$

e) $\int_{\partial D} \sin \frac{z}{z+1} dz, D : |z| > 2$

Solution

a)

Полюсы первого порядка в корнях четвертой степени из -1. Таких 4 штуки: $e^{\frac{\pi}{4}i}, e^{\frac{3\pi}{4}i}, e^{\frac{5\pi}{4}i}, e^{\frac{7\pi}{4}i}$

В D из них попадают только двое: $e^{\frac{\pi}{4}i}, e^{\frac{7\pi}{4}i}$

$res_{e^{\frac{\pi}{4}i}} = \frac{1}{(e^{\frac{\pi}{4}i} - e^{\frac{3\pi}{4}i})(e^{\frac{\pi}{4}i} - e^{\frac{5\pi}{4}i})(e^{\frac{\pi}{4}i} - e^{\frac{7\pi}{4}i})} = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)\sqrt{2}i}$

$res_{e^{\frac{7\pi}{4}i}} = \frac{1}{(e^{\frac{7\pi}{4}i} - e^{\frac{3\pi}{4}i})(e^{\frac{7\pi}{4}i} - e^{\frac{5\pi}{4}i})(e^{\frac{7\pi}{4}i} - e^{\frac{\pi}{4}i})}$

$\int_{\partial D}\frac{1}{1+z^4}dz = 2\pi i(\frac{1}{(e^{\frac{\pi}{4}i}-e^{\frac{3\pi}{4}i})(e^{\frac{\pi}{4}i}-e^{\frac{5\pi}{4}i})(e^{\frac{\pi}{4}i}-e^{\frac{7\pi}{4}i})}+\frac{1}{(e^{\frac{7\pi}{4}i}-e^{\frac{3\pi}{4}i})(e^{\frac{7\pi}{4}i}-e^{\frac{5\pi}{4}i})(e^{\frac{7\pi}{4}i}-e^{\frac{\pi}{4}i})})$

b)

$res_{-1}\frac{\sin z}{(1+z)^3} = \frac{1}{2}\sin z^{(2)}|_{-1} = \cos 1/2$

Это единственный полюс функции в области

$\int_{\partial D}\frac{\sin z}{(z+1)^3}dz = 2\pi i\frac{\cos 1}{2} = (\cos 1)\pi i$

c)

Понятно, что вычет стоит считать только в бесконечности

$res_\infty f = -res_0\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z})$

$\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z}) = \frac{e^{\frac{z}{3}}}{z^3(3+\frac{1}{z}} = \frac{e^{\frac{z}{3}}}{z^2(3z+1)}$

$res_0 = \frac{e^{\frac{z}{3}}}{(3z+1)}'|_0 = \frac{\frac{1}{3}e^{\frac{z}{3}}(3z+1)-3e^{\frac{z}{3}}}{(3z+1)^2}|_0 = \frac{1}{3}-3$

Значит, ответ: $2\pi i(3-\frac{1}{3})$

e)

Опять считаем вычет в бесконечности по формуле из пункта c)

$\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z}) = \frac{1}{z^2}\sin\frac{1}{z+1}$

$res_0 = \sin\frac{1}{z+1}'|_0 = -\frac{1}{(z+1)^2}\cos\frac{1}{z+1}|_0 = -\cos 1$

Значит, ответ $2\pi i\cos 1$

Problem 3

Вычислить интегралы:

b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+4ix-5)^2}$

c) $\int\limits_0^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}, a>0$

Solution

b)

$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+4ix-5)^2} = \int\limits_0^{\infty}\frac{x^2}{(x+1+2i)^2(x+2i-1)^2}$

Возьмем привычный контур - полуокружность радиуса R, тогда интеграл по контуру будет равен $I = 0$

Дело в том, что особенных точек внутри этой полуокружности просто нет. Оба полюса функции находятся во внешности: $1-2i, -1-2i$

$I = \int\limits_{C_R} f + \int\limits_{-R}^{R} f$

$\int\limits_{C_R} f = O(1/R) \to 0$

$\int\limits_{-R}^{R} f$ стремится к тому, что нам надо посчитать.

Таким образом $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+4ix-5)^2} = 0$, просто устремили R к бесконечности.

c)
$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2}$
Опять-таки посмотрим на интеграл по полуокружности
$I = 2\pi i res_{ai}$, так как a > 0, то найдется радиус, больший a, когда эта точка войдет во внутренность.
$I = \int\limits_{C_R} f + \int\limits_{R}^{R} f$
Но давайте пока в качестве f возьмем e^{iz}
Получается, что по лемме Жордана $\int\limits_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2}$ стремится к 0 при $R \to \infty$
Значит, $2\pi i res_{ai} = \int\limits_{-\infty}^{infty} f$
$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos z}{z^2 + a^2} + i \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin z}{z^2 + a^2}$
Второй интеграл, там где синус, просто равен 0, так как функция нечетная.
$res_{ai} = \frac{e^{-a}}{2ai}$
Значит, $\int\limits_{-\infty}^{infty} \frac{\cos z}{z^2 + a^2} = \frac{2\pi e^{-a}}{2a} = \frac{\pi e^{-a}}{a}$
Раз наша подинтегральная функция четна, получаем: $\int\limits_{0}^{infty} \frac{\cos z}{z^2 + a^2} = \frac{\pi e^{-a}}{2a}$