Подготовка к коллоквиуму по теории типов

Максим Крючков, M3339

12 ноября 2018 г.

4. Y-комбинатор. Парадокс Карри

Комбинатор
Lambda-выражение, не имеющее свободных переменных
Y-combinator
$Y = \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$
Теорема. $Yf = f(Yf)$
Следствием является **теорема о неподвижной точке**: Любой терм имеет неподвижну точку, то есть $p : fp = p$
Рекурсия
Пишем вспомогательный терм fact'
Тогла $fact = Y\ fact'$
Парадокс Карри
Ебемся в ухо

5. Просто типизированное лямбда исчисление. Исчисление по Черчу и Карри. Изоморфизм Карри-Ховарда

Set P of the ***simple types*** is the set of the strings defined by Grammar
$\Pi = U|(\Pi \to \Pi)$, U - variables
Context is the set of pairs in the form
$\{x_1 : \tau_1, ..., x_n : \tau_n\}$, x - variable, τ - type.
Define typability relation
We say that M is typable if there is such context Γ and type σ, that $\Gamma \vdash M : \sigma$

Calculus a la Church
Λ_σ is a set of all σ typable terms.
V_σ is a set of all variables that are claimed to have type σ
$x \in V_\sigma \Rightarrow x \in \Lambda_\sigma$

$$x \in V_\sigma \Rightarrow x \in \Lambda_\sigma$$
$$M \in \Lambda_{\sigma\to\tau}, N \in \Lambda_\sigma \Rightarrow MN \in \Lambda_\tau з$$
$$M \in \Lambda_\tau, x \in \Lambda_\sigma \Rightarrow \lambda x^\sigma.M \in \Lambda_{\sigma\to\tau}$$

Теорема
Уникальность типов в исчислении по Черчу
$1.\Gamma \vdash M : \theta, \Gamma \vdash M : \tau \Rightarrow \theta = \tau$
$2.\Gamma \vdash M : \theta, \Gamma \vdash N : \tau, M =_\beta N \Rightarrow \theta = \tau$

Curry-Howard isomorphism
Такой вот изоморфизм.

7. Нетипизируемость Y - комбинатора. Слабая и сильная нормализации

Weak normalization

$\Gamma \vdash^* M : \sigma \Rightarrow \exists M_1 \to_\beta M_2 \to_\beta \ldots \to_\beta M_n \in NF$

Все термы типизированы по Черчу. Все типы - конечные деревья, где ветвление это стрелочка. Тогда $h(M)$ - высота дерева.

$m(M) = (h(M), n)$, n - количество редексов высоты h(M)

Алгоритм. Берем самый правый редекс высоты h(M) и его редуцируем. Факт в том, что количество редексов высоты h(M) уменьшилось, следовательно n–.