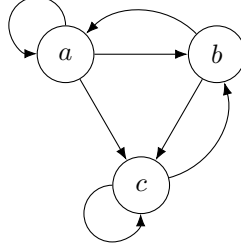


Задание 1

Вычислить значения HITS («hubs and authorities») для данного графа.



Рассмотрим матрицу смежности графа \mathbf{M} и транспонированную \mathbf{M}^T :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Шаг 0. Зададим начальные значения векторов «каталожности» («hubbiness») \mathbf{h} и «авторитетности» («authority») \mathbf{a} таким образом, чтобы $h_0(i) = a_0(i) = 1$ для любой вершины i .

Шаг 1. Вычислим новые значения \mathbf{h} и \mathbf{a} :

$$\begin{cases} h_k = \phi_k \mathbf{M} \mathbf{a}_{k-1} \\ a_k = \psi_k \mathbf{M}^T \mathbf{h}_{k-1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} h_k = \phi_k \psi_{k-1} \mathbf{M} \mathbf{M}^T \mathbf{h}_{k-2} \\ a_k = \phi_{k-1} \psi_k \mathbf{M}^T \mathbf{M} \mathbf{a}_{k-2} \end{cases}$$

где ϕ_k и ψ_k — такие числа, что для любого $k > 1$ верно $|\phi_k \mathbf{M} \mathbf{a}_{k-1}| = |\psi_k \mathbf{M}^T \mathbf{h}_{k-1}| = 1$.

Мы видим, что \mathbf{h} и \mathbf{a} — собственные векторы матриц $\mathbf{M} \mathbf{M}^T$ и $\mathbf{M}^T \mathbf{M}$ соответственно.

Шаг 2. Рассмотрим $\mathbf{M} \mathbf{M}^T$ и $\mathbf{M}^T \mathbf{M}$:

$$\mathbf{M} \mathbf{M}^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}^T \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Полученные матрицы симметричны и положительно определены, следовательно их собственные значения положительны. Значит векторы \mathbf{h} и \mathbf{a} сходятся к собственным векторам матриц $\mathbf{M} \mathbf{M}^T$ и $\mathbf{M}^T \mathbf{M}$, соответствующим их наибольшим собственным значениям.

Найдём эти собственные векторы:

$$|\mathbf{M} \mathbf{M}^T - \lambda \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2 - \lambda & 1 \\ 2 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$|\mathbf{M}^T \mathbf{M} - \mu \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 2 - \mu & 1 & 2 \\ 1 & 2 - \mu & 2 \\ 2 & 2 & 3 - \mu \end{vmatrix} = 0$$

Не трудно заметить, что решения обоих уравнений получатся одинаковые:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \mu_1 = 1 \\ \lambda_2 = \mu_2 = 3 - 2\sqrt{2} \\ \lambda_3 = \mu_3 = 3 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Шаг 3.1. Решим уравнение $(\mathbf{M} \mathbf{M}^T - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{h} = 0$, подставив $\lambda = \lambda_3 = 3 + 2\sqrt{2}$:

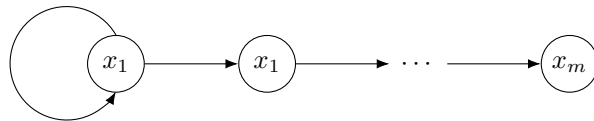
$$\begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 2 & 2 \\ 2 & -1 - 2\sqrt{2} & 1 \\ 2 & 1 & -1 - 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \mathbf{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{h} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Шаг 3.2. Решим уравнение $(\mathbf{M}^T \mathbf{M} - \mu \mathbf{E}) \mathbf{a} = 0$, подставив $\mu = \mu_3 = 3 + 2\sqrt{2}$:

$$\begin{pmatrix} -1 - 2\sqrt{2} & 1 & 2 \\ 1 & -1 - 2\sqrt{2} & 2 \\ 2 & 2 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

Задание 2

Вычислить значения HITS для данного графа с m вершинами.



Рассмотрим матрицу смежности графа \mathbf{M} ($m \times m$) и транспонированную \mathbf{M}^T :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теперь рассмотрим произведения $\mathbf{M}\mathbf{M}^T$ и $\mathbf{M}^T\mathbf{M}$:

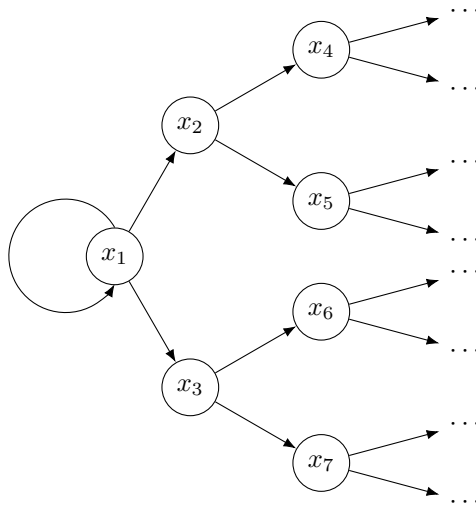
$$\mathbf{M}\mathbf{M}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}^T\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Пользуясь рассмотренным при решении предыдущего задания алгоритмом получаем ответ:

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Задание 3

Вычислить значения HITS для данного графа с n уровнями.



Рассмотрим матрицу смежности графа \mathbf{M} ($k \times k$, где $k = \sum_{i=1}^n 2^{i-1}$):

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j = 1, \text{ или } j = 2i, \text{ или } j = 2i + 1 \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Пользуясь нашим алгоритмом получаем ответ:

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$