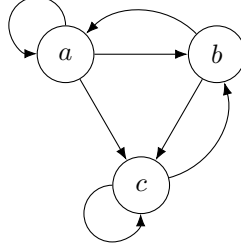


## Задание 1

Вычислить значения HITS («hubs and authorities») для данного графа.



Рассмотрим матрицу смежности графа  $\mathbf{M}$  и транспонированную  $\mathbf{M}^T$ :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Шаг 0.** Зададим начальные значения векторов «каталожности» («hubbiness»)  $\mathbf{h}$  и «авторитетности» («authority»)  $\mathbf{a}$  таким образом, чтобы  $h_0(i) = a_0(i) = 1$  для любой вершины  $i$ .

**Шаг 1.** Вычислим новые значения  $\mathbf{h}$  и  $\mathbf{a}$ :

$$\begin{cases} h_k = \phi_k \mathbf{M} \mathbf{a}_{k-1} \\ a_k = \psi_k \mathbf{M}^T \mathbf{h}_{k-1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} h_k = \phi_k \psi_{k-1} \mathbf{M} \mathbf{M}^T \mathbf{h}_{k-2} \\ a_k = \phi_{k-1} \psi_k \mathbf{M}^T \mathbf{M} \mathbf{a}_{k-2} \end{cases}$$

где  $\phi_k$  и  $\psi_k$  — такие числа, что для любого  $k > 1$  верно  $|\phi_k \mathbf{M} \mathbf{a}_{k-1}| = |\psi_k \mathbf{M}^T \mathbf{h}_{k-1}| = 1$ .

Мы видим, что  $\mathbf{h}$  и  $\mathbf{a}$  — собственные векторы матриц  $\mathbf{M} \mathbf{M}^T$  и  $\mathbf{M}^T \mathbf{M}$  соответственно.

**Шаг 2.** Рассмотрим  $\mathbf{M} \mathbf{M}^T$  и  $\mathbf{M}^T \mathbf{M}$ :

$$\mathbf{M} \mathbf{M}^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}^T \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Полученные матрицы симметричны и положительно определены, следовательно их собственные значения положительны. Значит векторы  $\mathbf{h}$  и  $\mathbf{a}$  сходятся к собственным векторам матриц  $\mathbf{M} \mathbf{M}^T$  и  $\mathbf{M}^T \mathbf{M}$ , соответствующим их наибольшим собственным значениям.

Найдём эти собственные векторы:

$$|\mathbf{M} \mathbf{M}^T - \lambda \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2 - \lambda & 1 \\ 2 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$|\mathbf{M}^T \mathbf{M} - \mu \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} 2 - \mu & 1 & 2 \\ 1 & 2 - \mu & 2 \\ 2 & 2 & 3 - \mu \end{vmatrix} = 0$$

Не трудно заметить, что решения обоих уравнений получатся одинаковые:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \mu_1 = 1 \\ \lambda_2 = \mu_2 = 3 - 2\sqrt{2} \\ \lambda_3 = \mu_3 = 3 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

**Шаг 3.1.** Решим уравнение  $(\mathbf{M} \mathbf{M}^T - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{h} = 0$ , подставив  $\lambda = \lambda_3 = 3 + 2\sqrt{2}$ :

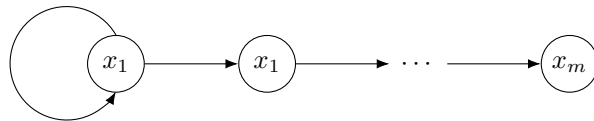
$$\begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 2 & 2 \\ 2 & -1 - 2\sqrt{2} & 1 \\ 2 & 1 & -1 - 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \mathbf{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{h} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

**Шаг 3.2.** Решим уравнение  $(\mathbf{M}^T \mathbf{M} - \mu \mathbf{E}) \mathbf{a} = 0$ , подставив  $\mu = \mu_3 = 3 + 2\sqrt{2}$ :

$$\begin{pmatrix} -1 - 2\sqrt{2} & 1 & 2 \\ 1 & -1 - 2\sqrt{2} & 2 \\ 2 & 2 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

## Задание 2

Вычислить значения HITS для данного графа с  $m$  вершинами.



Рассмотрим матрицу смежности графа  $\mathbf{M}$  ( $m \times m$ ) и транспонированную  $\mathbf{M}^T$ :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теперь рассмотрим произведения  $\mathbf{M}\mathbf{M}^T$  и  $\mathbf{M}^T\mathbf{M}$ :

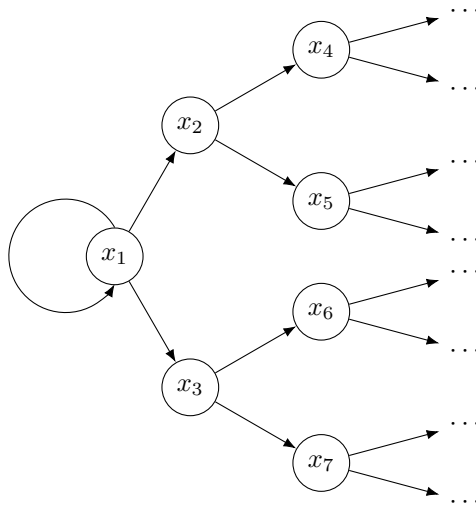
$$\mathbf{M}\mathbf{M}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}^T\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Пользуясь рассмотренным при решении предыдущего задания алгоритмом получаем ответ:

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

### Задание 3

Вычислить значения HITS для данного графа с  $n$  уровнями.



Рассмотрим матрицу смежности графа  $\mathbf{M}$  ( $k \times k$ , где  $k = 2^n - 1$ ):

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j = 1, \text{ или } j = 2i, \text{ или } j = 2i + 1 \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Пользуясь нашим алгоритмом получаем ответ:

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$