1.5 Rozhodovací úlohy

1.5.1 Teorie složitosti pracuje zejména s tzv *rozhodovacími* úlohami. Rozhodovací úlohy jsou takové úlohy, jejichž „řešením“ je buď odpověď „ANO“ nebo odpověď „NE“.

1.5.2 Příklad. *SAT – splňování Booleovských formulí*: Je dána výroková formule φ v CNF. Rozhodněte, zda je φ splnitelná.

Na danou formuli φ je tedy odpověď (tj. řešení) buď „ANO“ nebo „NE“. Všimněte si, že v tomto případě se neptáme po ohodnocení, ve kterém je formule pravdivá – zajímá nás pouze fakt, zda je splnitelná.

1.5.3 Řada praktických úloh není podobného druhu jako uvedený příklad. Často se jedná o tzv. optimalizační úlohy, tj. úlohy, kde mezi přípustnými řešeními hledáme přípustné řešení v jistém smyslu optimální. Obvykle to bývá tak, že je dána účelová funkce, která každému přípustnému řešení přiřadí číselnou hodnotu, a úkolem je najít přípustné řešení, pro které je hodnota účelové funkce optimální, tj. buď největší nebo naopak nejmenší. V dalším textu se s řadou těchto úloh setkáme. Takovými úlohami jsou například úlohy zmíněné v minulé přednášce === nalezení minimální kostry v ohodnoceném neorientovaném grafu i nalezení nejkratších cest v daném ohodnoceném orientovaném grafu.

Nyní uvedeme jeden příklad.

1.5.4 Problém obchodního cestujícího – TSP. Jsou dána města 1,2, $\dots, n$. Pro každou dvojici měst i, j je navíc dáno kladné číslo $d(i, j)$ (tak zvaná vzdálenost měst i, j). *Trasa* je dána permutací π množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ do sebe. Cena trasy odpovídající permutaci π je

$$\sum_{i=1}^{n-1} d(\pi(i), \pi(i+1)) + d(\pi(n), \pi(1)).$$

Neformálně, trasa je pořadí měst, ve kterém má obchodní cestující města projít, a to tak, aby každé město navštívil přesně jednou a vrátil se do toho města, ze kterého vyšel. Cena trasy je pak součtem všech vzdáleností, které při své cestě urazil.

1.5.5 Rozhodovací verze.

- Minimální kostra: Je dán neorientovaný graf $G = (V, E)$, ohodnocení $c\colon E \to \mathbb{N}$ a dále číslo K. Existuje minimální kostra, jejíž cena je nejvýše K?

- Je dána matice délek $\mathbf{A} = (a(i, j))$, výchozí vrchol r, cílový vrchol c a číslo K. Existuje cesta z vrcholu r do vrcholu c délky nejvýše K?

- Kromě čísel $d(i, j)$ z 1.5.4 je dáno číslo K. Existuje trasa π ceny nejvýše K?

1.5.6 Vyhodnocovací verze.

- Minimální kostra: Je dán neorientovaný graf $G = (V, E)$ a $c: E \to \mathbb{N}$. Najděte cenu minální kostry ohodnoceného grafu.
- Je dána matice délek $\mathbf{A} = (a(i,j))$, výchozí vrchol r a cílový vrchol c. Najděte délku nejkratší cesty z vrcholu r do vrcholu c.
- Jsou dána čísla $d(i,j)$ a 1.5.4. Najděte cenu optimální trasy, tj. trasy s nejmenší možnou cenou.

1.5.7 Optimalizační verze.

- Minimální kostra: Je dán neorientovaný graf $G = (V, E)$ a $c: E \to \mathbb{N}$. Najděte minimální kostru ohodnoceného grafu.
- Je dána matice délek $\mathbf{A} = (a(i,j))$, výchozí vrchol r, cílový vrchol c. Najděte nejkratší cestu z vrcholu r do vrcholu c.
- Jsou dána čísla $d(i,j)$ a 1.5.4. Najděte optimální trasu, tj. trasu s nejmenší možnou cenou.

1.5.8 Dá se dokázat, že když je kterákoli verze dané úlohy polynomiálně řešitelná, jsou polynomiálně řešitelné všechny tři verze.

1.6 Turingův stroj

1.6.1 Turingův stroj si můžeme představit takto: skládá se

- z řídící jednotky, která se může nacházet v jednom z konečně mnoha stavů,
- potenciálně nekonečné pásky (nekonečné na obě strany) rozdělené na jednotlivá pole a
- hlavy, která umožňuje číst obsah polí a přepisovat obsah polí pásky.

Na základě symbolu X, který čte hlava na pásce, a na základě stavu q, ve kterém se nachází řídící jednotka, se řídící jednotka Turingova stroje přesune do stavu p, hlava přepíše obsah čteného pole na Y a přesune se buď doprava nebo doleva (tato akce je popsána tzv. přechodovou funkcí).

1.6.2 Formální definice. Turingův stroj je sedmice $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$, kde

- Q je konečná množina stavů,
- Σ je konečná množina vstupních symbolů,
- Γ je konečná množina páskových symbolů, přitom $\Sigma \subset \Gamma$,
- B je prázdný symbol (též nazývaný *blank*), jedná se o páskový symbol, který není vstupním symbolem, (tj. $B \in \Gamma \setminus \Sigma$),
- δ je přechodová funkce, tj. parciální zobrazení z množiny $(Q \setminus F) \times \Gamma$ do množiny $Q \times \Gamma \times \{L, R\}$, (zde L znamená pohyb hlavy o jedno pole doleva, R znamená pohyb hlavy o jedno pole doprava),
- $q_0 \in Q$ je počáteční stav a
- $F \subseteq Q$ je množina koncových stavů.

1.6.3 Situace TM. *Situace Turingova stroje* (též konfigurace TM, angličtině nazývaná instantaneous description (ID)), plně popisuje obsah pásky, pozice hlavy na pásce a stav, ve kterém se nachází řídící jednotka. Jestliže na pásce jsou v k polích symboly $X_1\, X_2\, \ldots\, X_k$, všechna pole s větším i menším číslem již obsahují pouze B, řídící jednotka je ve stavu q a hlava čte symbol X_i, tak danou situaci zapisujeme

$$X_1\, X_2\, \ldots\, X_{i-1}\, q\, X_i\, X_{i+1}\, \ldots\, X_k.$$

1.6.4 Počáteční situace. Na začátku práce se Turingův stroj nachází v počátečním stavu q_0, na pásce má na n polích vstupní slovo $a_1\, a_2\, \ldots\, a_n$ ($a_i \in \Sigma$), ostatní pole obsahují blank B a hlava čte pole pásky se symbolem a_1. Tedy formálně počáteční situaci zapisujeme $q_0\, a_1\, \ldots\, a_n$.

1.6.5 Krok Turingova stroje. Předpokládejme, že se Turingův stroj nachází v situaci $X_1\, X_2\, \ldots\, X_{i-1}\, q\, X_i\, \ldots\, X_k$. Pak na základě přechodové funkce TM v jednom kroku přejde do následující situace a to takto:

Jestliže $\delta(q, X_i) = (p, Y, R)$, TM se přesune do stavu p, na pásku místo symbolu X_i napíše symbol Y a hlavu posune o jedno pole doprava. Formálně to zapisujeme takto

$$X_1\, X_2\, \ldots\, X_{i-1}\, q\, X_i\, \ldots\, X_k \vdash X_1\, X_2\, \ldots\, X_{i-1}\, Y\, p\, X_{i+1}\, \ldots\, X_k. \tag{1.5}$$

Jestliže $\delta(q, X_i) = (p, Y, L)$, TM se přesune do stavu p, na pásku místo symbolu X_i napíše symbol Y a hlavu posune o jedno pole doleva. Formálně to zapisujeme takto

$$X_1\, X_2\, \ldots\, X_{i-1}\, q\, X_i\, \ldots\, X_k \vdash X_1\, \ldots\, X_{i-2}\, p\, X_{i-1}\, Y\, X_{i+1}\, \ldots\, X_k. \tag{1.6}$$

Jestliže v případě 1.6 je $i = 1$, pak $q\, X_1\, \ldots\, X_k \vdash p\, B\, Y\, \ldots\, X_k$.

Jestliže $\delta(q, X_i)$ není definováno, TM se zastaví.

1.6.6 Výpočet Turingova stroje nad slovem $w = a_1 a_2 \ldots a_k$, je posloupnost jeho kroků, která začíná v počáteční situaci $q_0\, a_1\, \ldots\, a_k$. Formálně se jedná o reflexivní s tranzitivní uzávěr $\vdash^\star$ relace $\vdash$ z 1.6.5 (na množině všech situací daného Turingova stroje).

Jestliže během výpočtu Turingova stroje nad slovem w se Turingův stroj dostane do jednoho z koncových stavů $q' \in F$, říkáme, že se TM *úspěšně zastavil.* Obsah pásky při úspěšném zastavení je *výstupem* TM, nad vstupem $w = a_1\, a_2 \ldots a_n$.

1.6.7 Definice —funkce realizovaná TM. Je dáno zobrazení $f\colon \Sigma^\star \to \Sigma^\star$. Řekneme, že TM M *realizuje* zobrazení f, jestliže pro každé $w \in \Sigma^\star$, pro které je $f(w)$ definováno, se M úspěšně zastaví s výstupem $f(w)$, pro w, pro něž $f(w)$ není definováno se M zastaví neúspěšně.

1.6.8 Časová složitost Turingova stroje je parciální zobrazení $T(n)$ z množiny všech přirozených čísel do sebe definované:

Jestliže pro nějaký vstup délky n se Turingův stroj nezastaví, $T(n)$ není definováno. V opačném případě je $T(n)$ rovno maximálnímu počtu kroků, po nichž dojde k zastavení Turingova stroje, kde maximum se bere přes všechny vstupy délky n.

1.6.9 Paměťová složitost Turingova stroje je parciální zobrazení $S(n)$ z množiny všech přirozených čísel do sebe definované:

Jestliže pro nějaký vstup délky n Turingův stroj použije nekonečnou část pásky (pak se nemůže v konečném čase zastavit), $S(n)$ není definováno. V opačném případě je $S(n)$ rovno největšímu rozdílu pořadových čísel polí, které byly během výpočtu použity, kde maximum se bere přes všechny vstupy délky n.

1.6.10 Jazyk přijímaný Turingovým strojem. Turingův stroj se používá také jako akceptor. V tomto případě záleží pouze na tom, zda se Turingův stroj zastaví úspěšně, nebo neúspěšně, nebo nezastaví vůbec.

1.6.11 Definice. Vstupní slovo $w \in \Sigma^\star$ je *přijato* Turingovým strojem M právě tehdy, když se Turingův stroj na slově w uspěšně zastaví. Množinu slov $w \in \Sigma^\star$, které Turingův stroj přijímá, se nazývá *jazyk příjímaný* M a značíme ho $L(M)$.

Turingův stroj *rozhoduje* jazyk L, jestliže tento jazyk přijímá a navíc se na každém vstupu zastaví.

1.6.12 Poznámky.

- Každý jazyk, který je rozhodován Turingovým strojem, je také tímto Turingovým strojem přijímán. Naopak to ale neplatí. Uvidíme, že existují jazyky, které jsou přijímány nějakým Turingovým strojem, ale neexistuje Turingův stroj, který by je rozhodl.
- Základní model Turingova stroje, tak jak jsme ho uvedli v minulých odstavcích, není jediným modelem. Jiná varianta Turingva stroje pracuje s nekonečnou páskou s pevným levým okrajem. U tohoto modelu se TM neúspěšně zastaví i v případě, že hlava čte nejvíc levé pole pásky a přechodová funkce nařizuje pohyb hlavy doleva. Počáteční situace TM s pevným levým krajem má vždy vstupní slovo napsané na začátku pásky.

  Další varianty umožňují hlavě Turingova stroje aby se nepohnula. To znamená, že přechodová funkce δ je parciální zobrazení z $(Q \setminus F) \times \Gamma$ do $Q \times \Gamma \times \{R, L, S\}$, kde symbol S znamená, že hlava čte stejné pole.

  Všechny tyto modely jsou ekvivalentní v tom smyslu, že pro každý Turingův stroj M_1 jednoho typu existuje Turingův stroj M_2 jiného typu tak, že oba stroje realizují stejné zobrazení / přijímají nebo rozhodují stejný jazyk.

1.6.13 Turingův stroj s k páskami. Turingův stroj s k páskami se skládá z řídící jednotky, která se nachází v jednom z konečně mnoha stavů $q \in Q$, množiny vstupních symbolů Σ, množiny páskových symbolů Γ, přechodové funkce δ, počátečního stavu q_0, páskového symbolu B a množiny koncových stavů F. Dále je dáno k pásek a k hlav; i-tá hlava vždy čte jedno pole i-té pásky. Přechodová funkce δ je parciální zobrazení, které reaguje na stav, ve kterém se Turingův stroj nachází a na k-tici páskových symbolů, kterou jednotlivé hlavy snímají. (Formálně je δ parciální zobrazení, $\delta\colon (Q \setminus F) \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{L, R\}^k$).

Na začátku:

- Vstupní slovo je na první pásce; kromě vstupního slova obsahují všechna pole pásky blank B.
- Všechny ostatní pásky mají ve všech polích blank B.
- Řídící jednotka je v počátečním stavu q_0.
- První hlava čte první symbol vstupního slova.

1.6.14 Krok Turingova stroje s k páskami je určen přechodovou funkcí. Jestliže přechodová funkce je definována, pak (na základě přechodové funkce):

- Řídící jednotka se přesune do nového stavu.
- Každá hlava přepíše obsah pole, které čte (může i stejným symbolem).
- Každá hlava se posune doprava nebo doleva (podle přechodové funkce).

1.6.15 Jazyk přijímaný Turingovým strojem. Obdobně jako pro Turingův stroj s jednou páskou definujeme: Turingův stroj se *úspěšně zastaví*, jestliže řídící jednotka vstoupila do koncového stavu. Jestliže Turingův stroj nemá definován následující krok a není v koncovém stavu, říkáme, že se Turingův stroj *neúspěšně zastavil*.

Slovo $w \in \Sigma^\star$ je *přijímáno* Turingovým strojem, jestliže se na něm Turingův stroj úspěšně zastaví. Všechna slova přijímána Turingovým strojem tvoří *jazyk přijímaný* tímto strojem. Jestliže se navíc Turingův stroj na všech slovech zastaví, říkáme že Turingův stroj *rozhoduje* L.

1.6.16 Poznámky. Na každý Turingův stroj s jednou páskou se můžeme dívat jako na Turingův stroj s k páskami, kde $k = 1$. Proto Turingův stroj s jednou páskou je zvláštní případ Turingova stroje s k páskami.

Stejně jako u Turingova stroje s jednou páskou i pro více pásek existuje několik variant — pásky mohou mít pevné levé konce, Turingův stroj v jednom kroku nemusí pohnout některou z hlav. Opět platí, že všechny tyto varianty mají stejnou sílu.

1.6.17 Věta. Ke každému Turingovu stroji M_1 s k páskami existuje Turingův stroj s jednou páskou M_2, který má stejné chování jako M_1.

Navíc, jestliže M_1 potřeboval k úspěšnému zastavení n kroků, pak M_2 potřebuje $\mathcal{O}(n^2)$ kroků.

Idea důkazu. Turingův stroj M_2 má jedinou pásku rozdělenu do $2k$ stop. Každá páska M_1 je simulována dvěma stopami M_2 — a to tak, že první stopa vždy obsahuje informaci o poloze odpovídající hlavy M_1, ve druhé stopě je obsah simulované pásky.

Simulace 1 kroku TM M_1: hlava TM M_2 se nachází na pásce tak, že všechna pole s informací o poloze hlavy jsou nalevo. Hlava nejprve přejede pásku tak, aby stroj navštívil pozice všech hlav (a zapamatoval si obsahy odpovídajících polí). Tím získá všechny informace, které určují krok TM M_1. Na základě přechodové funkce TM M_1 při postupu do leva změní nejen obsahy sudých stop, ale i posune označení polohy hlav buď o jedno pole do leva nebo do prava.

Jestliže TM M_1 udělal od začátku práce n kroků, potřebuje TM M_2 na jeden krok maximálně $\mathcal{O}(n)$ kroků.

1.6.18 Nedeterministický Turingův stroj. Jestliže pro Turingův stroj (ať již s jednou páskou nebo s více páskami) připustíme, aby v jedné situaci mohl provést několik různých kroků, dostáváme nedetrministický Turingův stroj. Formálně zadefinujeme nedeterministický Turingův stroj (NTM) pouze pro variantu s jednou páskou, která je nekonečná na obě strany.

Nedeterministický Turingův stroj je sedmice $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$, kde

- Q je konečná množina stavů,
- Σ je konečná množina vstupních symbolů,
- Γ je konečná množina páskových symbolů, přitom $\Sigma \subset \Gamma$,
- B je prázdný symbol (též nazývaný *blank*), jedná se o páskový symbol, který není vstupním symbolem, (tj. $B \in \Gamma \setminus \Sigma$),
- δ je přechodová funkce, tj. parciální zobrazení z množiny $(Q \setminus F) \times \Gamma$ do množiny $\mathcal{P}_f(Q \times \Gamma \times \{L, R\})$ ($\mathcal{P}_f(X)$ je konečná podmnožina množiny X),
- $q_0 \in Q$ je počáteční stav a
- $F \subseteq Q$ je množina koncových stavů.

Krok nedeterministického Turingova kroku je definován analogicky jako pro (deterministický) Turingův stroj:
Pro $(p, Y, R) \in \delta(q, X_i)$

$$X_1\, X_2\, \ldots\, X_{i-1}\, q\, X_i\, \ldots\, X_k \vdash X_1\, X_2\, \ldots\, X_{i-1}\, Y\, p\, X_{i+1}\, \ldots\, X_k. \tag{1.7}$$

Pro $(p, Y, L) \in \delta(q, X_i)$

$$X_1\, X_2\, \ldots\, X_{i-1}\, q\, X_i\, \ldots\, X_k \vdash X_1\, \ldots\, X_{i-2}\, p\, X_{i-1}\, Y\, X_{i+1}\, \ldots\, X_k. \tag{1.8}$$

1.6.19 Jazyk přijímaný nedeterministickým Turingovým strojem se skládá ze všech slov $w \in \Sigma^\star$, pro něž

$$q_0\, w \vdash^\star Y_1\, Y_2\, \ldots Y_i\, q_f\, Y_{i+1}\, \ldots\, Z_m,$$

pro některý koncový stav q_f.

Neformálně: slovo w je přijato nedeterministickým Turingovým strojem právě tehdy, když existuje „přijímací výpočet“, tj posloupnost kroků, po nichž se stroj dostane do koncového stavu.

Jestliže nedeterministický Turingův stroj M přijímá jazyk L a navíc každý jeho výpočet vždy končí po konečně mnoha krocích, říkáme, že M *rozhoduje* jazyk L.