1.16.11 Víceznačnost bezkontextových gramatik. Je dána bezkontextová gramatika $\mathcal{G} = (N, \Sigma, S, P)$, kde N je množina neterminálních symbolů, Σ je množina terminálních symbolů, S je startovací symbol a P je množina pravidel typu $X \to \alpha$ pro $X \in N$, $\alpha \in (N \cup \Sigma)^\star$.

Otázka: Rozhodněte, zda existuje slovo w, které má dva různé derivační stromy.

1.16.12 Věta. Platí

$$\text{PCP} \ \lhd \ \text{víceznačnost bezkontextových gramatik.}$$

1.16.13 Nástin redukce pro důkaz věty 1.16.12. Je dána instance PCP, tj. seznamy slov $A = (w_1, w_2, \dots, w_k)$ a $B = (x_1, x_2, \dots, x_k)$. Sestrojíme bezkontextovou gramatiku $\mathcal{G} = (\{S, A, B\}, \Sigma \cup \{a_1, a_2, \dots, a_k\}, S, P)$, kde P obsahuje tato pravidla

$$S \to A \mid B,$$

$$A \to w_1\, A\, a_1 \mid w_2\, A\, a_2 \mid \dots | w_k\, A\, a_k,$$

$$A \to w_1\, a_1 \mid w_2\, a_2 \mid \dots | w_k\, a_k,$$

$$B \to x_1\, B\, a_1 \mid x_2\, B\, a_2 \mid \dots | x_k\, B\, a_k,$$

$$B \to x_1\, a_1 \mid x_2\, a_2 \mid \dots | x_k\, a_k,$$

Pak gramatika $\mathcal{G}$ je víceznačná právě tehdy, když nějaké slovo $wa_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_r}$, $w \in \Sigma^\star$, má dvě různá odvození. Tato situace nastává právě tehdy, když instance PCP má řešení. (Uvědomte si, že dvě různá odvození jsou možná jen, můžeme-li stejné slovo $wa_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_r}$ odvodit při použití pravidla $S \to A$ i $S \to B$, tedy w vytvořit ze seznamu A i ze seznamu B při použití slov se stejným indexem.)

1.16.14 Věta. Jsou dány bezkontextové gramatiky $\mathcal{G}_1$ a $\mathcal{G}_2$. Označme $L(\mathcal{G}_1)$ a $L(\mathcal{G}_2)$ jazyky generované gramatikami $\mathcal{G}_1$ a $\mathcal{G}_2$. Následující úlohy jsou nerozhodnutelné.

1. $L(\mathcal{G}_1) \cap L(\mathcal{G}_2) = \emptyset$.
2. $L(\mathcal{G}_1) = L(\mathcal{G}_2)$.
3. $L(\mathcal{G}_1) \subseteq L(\mathcal{G}_2)$.
4. $L(\mathcal{G}_1) = \Sigma^\star$.

1.16.15 Tiling problém. Jsou dány čtvercové dlaždičky velikosti 1 cm^2 několika typů. Každá dlaždička má barevné okraje. Máme neomezený počet dlaždiček každého typu.

Otázka: Je možné dlaždičkami vydláždit každou plochu daného typu tak, aby se dlaždičky dotýkaly hranami stejné barvy, za předpokladu, že dlaždičky nesmíme rotovat?

1.16.16 Věta. Tiling problém je nerozhodnutelný.

Tedy specielně je nerozhodnutelné, zda každou neomezenou plochu je možné vydláždit předem danou sadou dlaždiček.