Sprawozdanie MSD - Lista 1

Przemysław Sipa

14.03.2022

1 Wstęp

Opis teoretyczny tematu listy

Tematem listy jest model Lotki-Volterry, który przedstawia wzajemną zależność rozmiarów populacji drapieżników i ofiar w danym środowisku. Rozważane środowisko posiada wyłącznie gatunki zwierząt mających wpływ na dynamikę populacji ofiar i drapieżników. Tempo zmian populacji ofiary jest określone poprzez dynamikę jej wzrostu minus tempo, w jakim jest ona uśmiercana, zaś tempo zmian populacji drapieżnika zależy od szybkości uśmiercania ofiary oraz od śmiertelności danego gatunku. Badany model dynamiczny określony jest układem dwóch równań nieliniowych:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (a - by)x \\ \frac{dy}{dt} = (cx - d)y \end{cases}$$

Gdzie:

$$x - populacja\ ofiar$$
$$y - populacja\ drapieżników$$
$$t - czas$$
$$a - częstotliwość\ narodzin\ ofiar$$
$$b - częstotliwość\ umierania\ ofiar$$
$$c - częstotliwość\ narodzin\ drapieżników$$
$$d - częstotliwość\ umierania\ drapieżników$$

Na potrzeby zadania przyjęto wartości wejściowe parametrów:

$$a = 1.2$$
$$b = 0.6$$
$$c = 0.3$$
$$d = 0.8$$
$$x_0 = 2$$
$$y_0 = 1$$

2 Model

2.1 Sprawdzenie wyników dla ww. wartości parametrów wejściowych, odnalezienie, który wykres odpowiada danej populacji.

2.2 Zachowanie modelu dla jednakowo dużych populacji

Sprawdzę, jak będzie zachowała się dynamika rozwoju modelu dla liczby $k \in Z$, gdzie:

$$x = y = k$$

Pozostałe zmienne są zgodne z wartościami wejściowymi.

2.3 Rezultat modelu dla populacji w której, jedna nie ma żadnych osobników, a druga choć jednego

W tym rozpatrywanym przypadku, będziemy mieli dwie możliwości:

a) Populacja drapieżników wynosi 0, a populacja ofiar $x_0 > 0$

b) Populacja ofiar wynosi 0, a populacja drapieżników $y_0 > 0$

$$x_0, y_0 \in Z$$

Pozostałe zmienne są zgodne z wartościami wejściowymi.

2.4 Rezultat zachowania modelu po zmianie wartości częstości narodzin

Rozpatrywany przypadek posiada dwie zmienne:

- a- częstotliwość narodzin ofiar
- c – częstotliwość narodzin drapieżników

gdzie,

$$a, c \in R$$

Pozostałe zmienne są zgodne z wartościami wejściowymi.

2.5 Rezultat zachowania modelu po zmianie wartości częstotliwości umierania

Rozpatrywany przypadek posiada dwie zmienne:

- b- częstotliwość umierania ofiar
- d – częstotliwość umierania drapieżników

gdzie,

$$b, d \in R$$

Pozostałe zmienne są zgodne z wartościami wejściowymi.

2.6 Rezultat zmiany czasu

Wyżej przedstawione reprezentacje modelów opierały się na parametrze czasu $t \in [0,20]$.

Stworzymy modele dynamiczne zawierające wartości zmiennych zgodne z wartościami wejściowymi oraz czas, który:

a) $t \in [0,10], t \in R$

b) $t \in [0{,}5], t \in R$
c) $t \in [0{,}1), t \in R$
d) $t \in [0{,}01], t \in R$
e) $t \in [0{,}300000], t \in R$

2.7 Rezultat zmiany parametru kroku symulacji

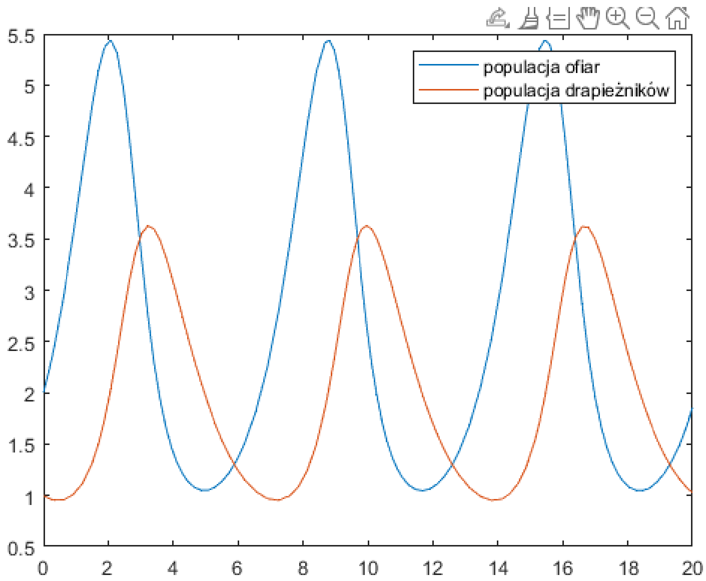
Powyższe metody symulacji opierały się na kroku symulacji dobieranym przez solver ode45. Stworzymy modele, które opierają się na wybieralnym przez nas kroku symulacji, który wynosi:

a) $dt = 0.000001$
b) $dt = 0.2$
c) $dt = 0.5$
d) $dt = 0.9$
e) $dt = 2$

3 Wyniki

3.1

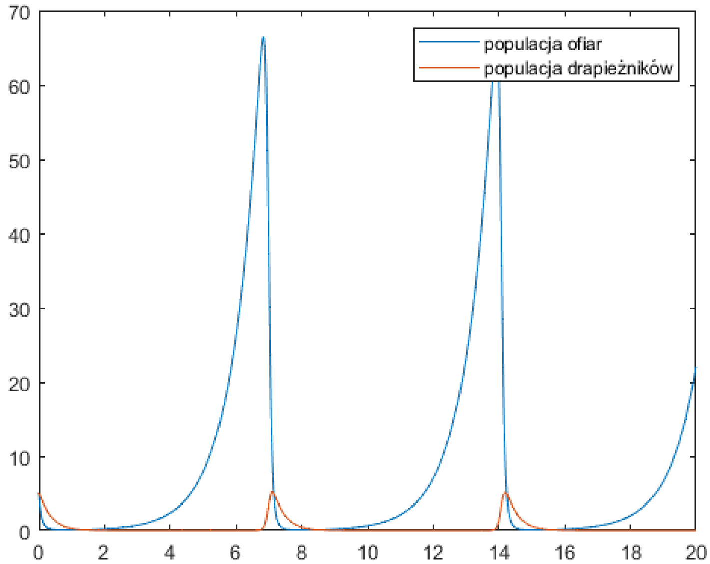
Po wprowadzeniu zmiennych zauważamy, że niebieski wykres przedstawia populację ofiar, a pomarańczowy populację drapieżników



Wykres 1

3.2 Wynik modelu dla jednakowo dużych populacji

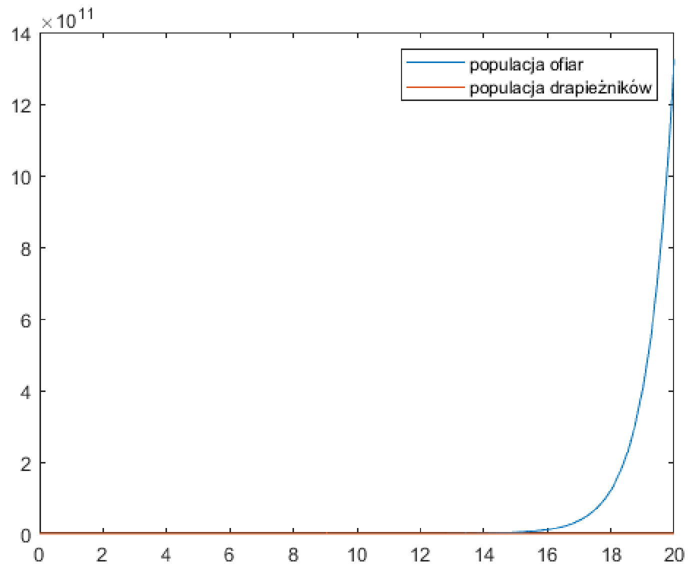
Po ustanowieniu parametru $k = 5$



Wykres 2

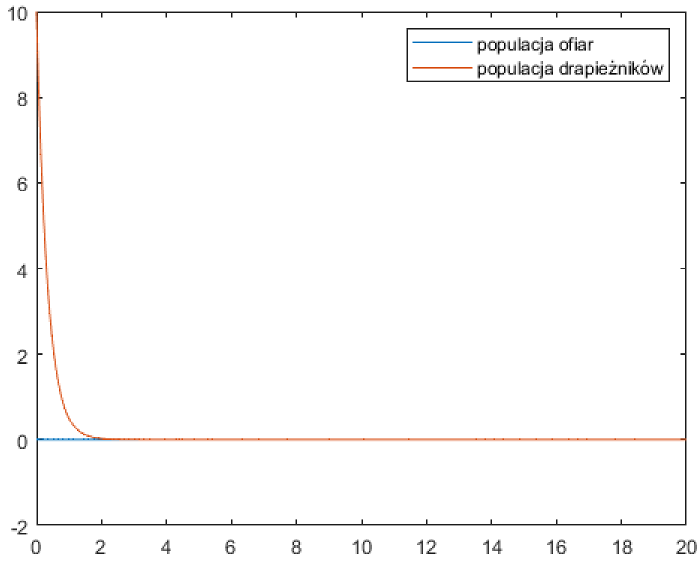
3.3 Wynik modelu dla populacji w której, jedna nie ma żadnych osobników, a druga choć jednego

a) Populacja drapieżników wynosi 0, a populacja ofiar $x_0 > 0$



Wykres 3

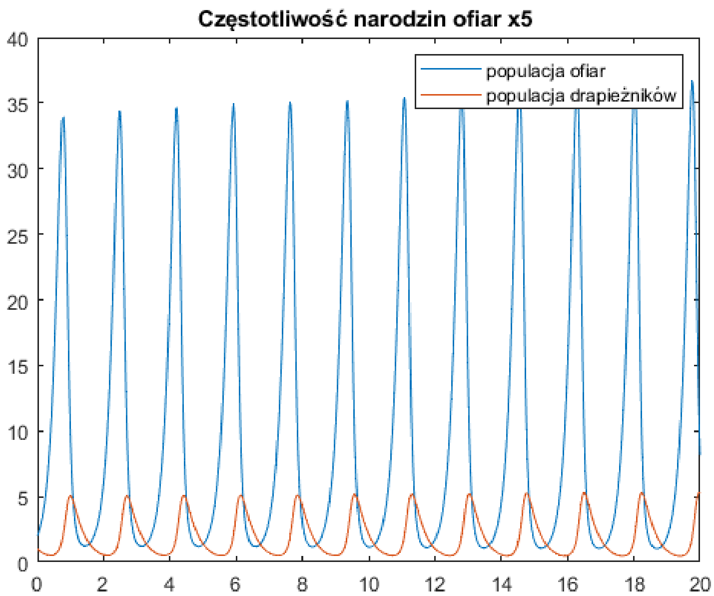
b) Populacja ofiar wynosi 0, a populacja drapieżników $y_0 > 0$



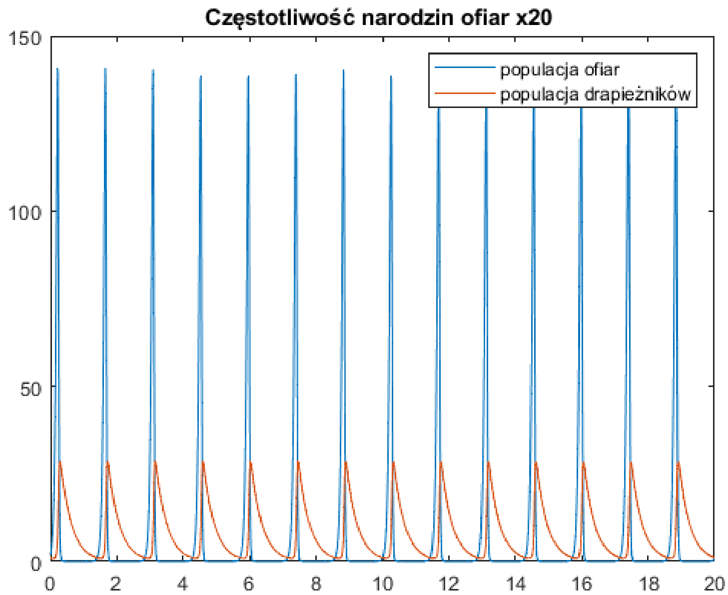
Wykres 4

3.4 Wynik zachowania populacji po zmianie zmiennych częstości narodzin

a) zmiana częstości narodzin ofiar:

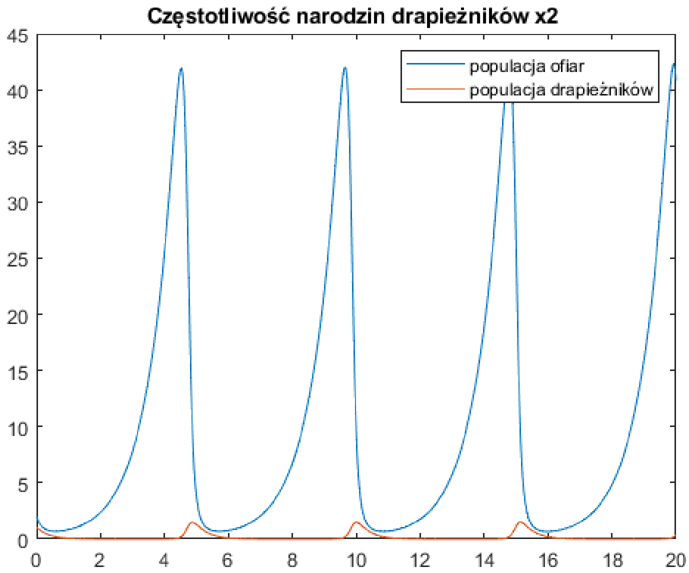


Wykres 6

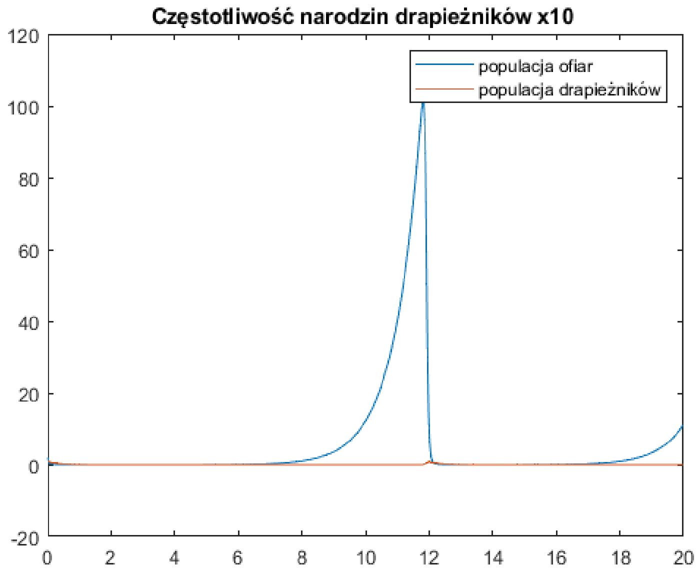


Wykres 5

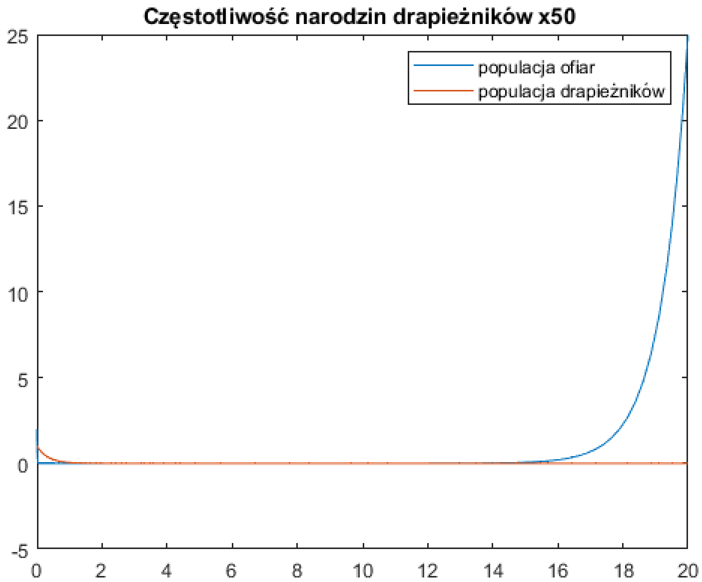
b) zmiana częstości narodzin drapieżników:



Wykres 9



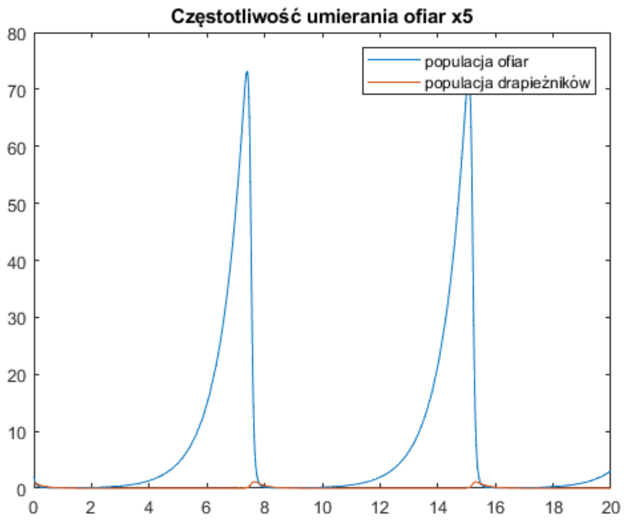
Wykres 8



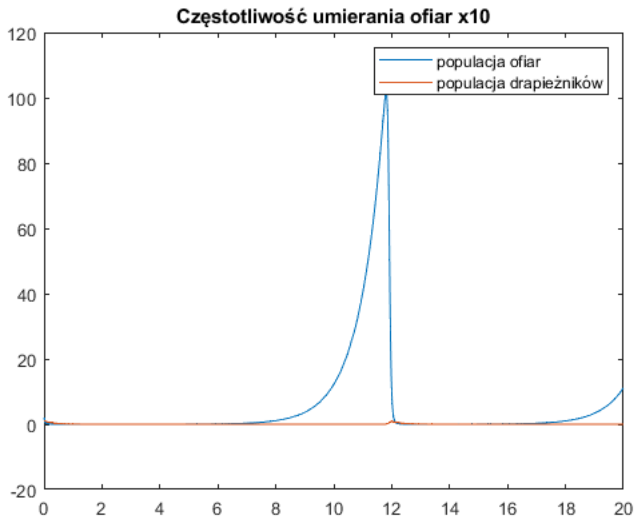
Wykres 7

3.5 Wynik zachowania populacji po zmianie częstotliwości umierania

a) częstotliwość umierania ofiar:

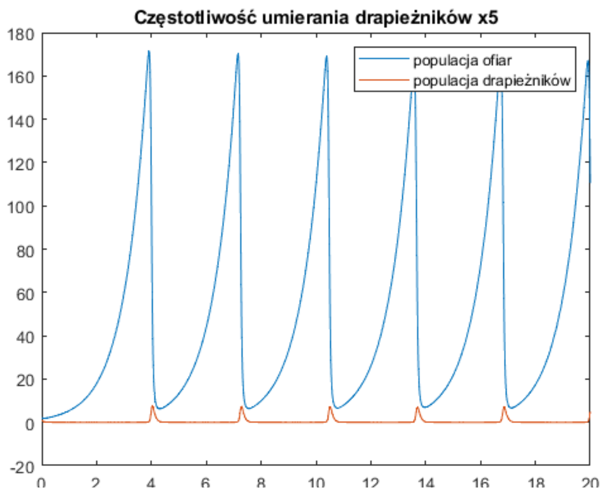


Wykres 10

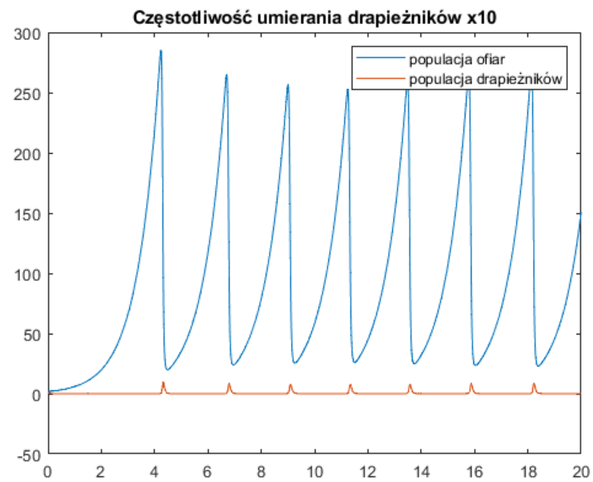


Wykres 11

b) Częstotliwość umierania drapieżników:



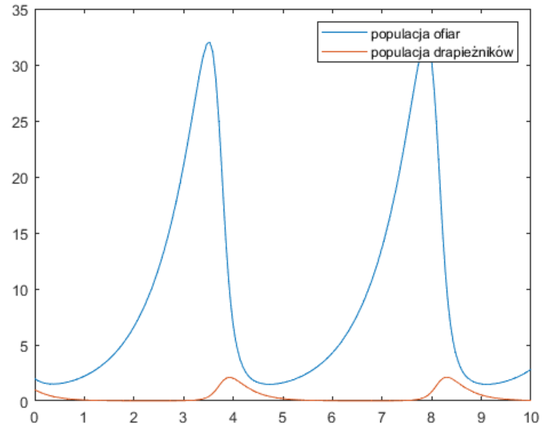
Wykres 12



Wykres 13

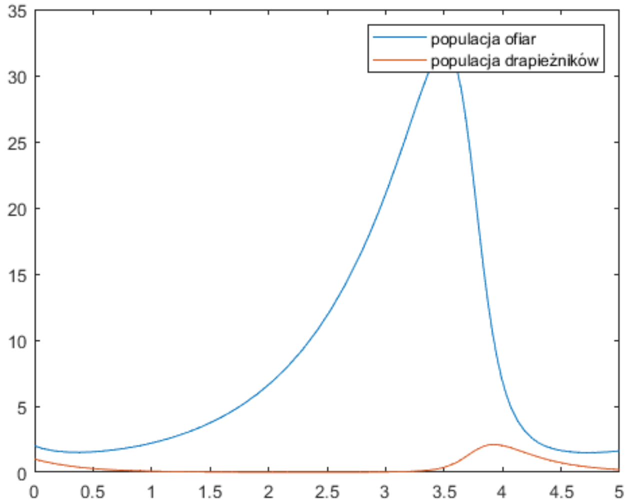
3.6 Wyniki zachowania populacji po zmianie czasu

a) $t \in [0,10], t \in R$



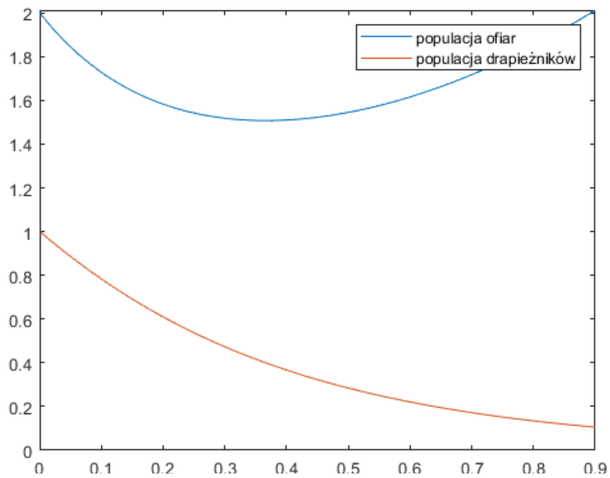
Wykres 14

b) $t \in [0,5], t \in R$



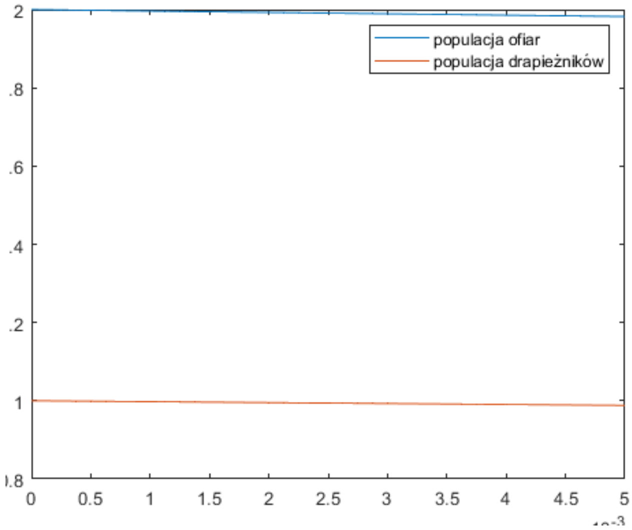
Wykres 15

c) $t \in [0,1), t \in R$



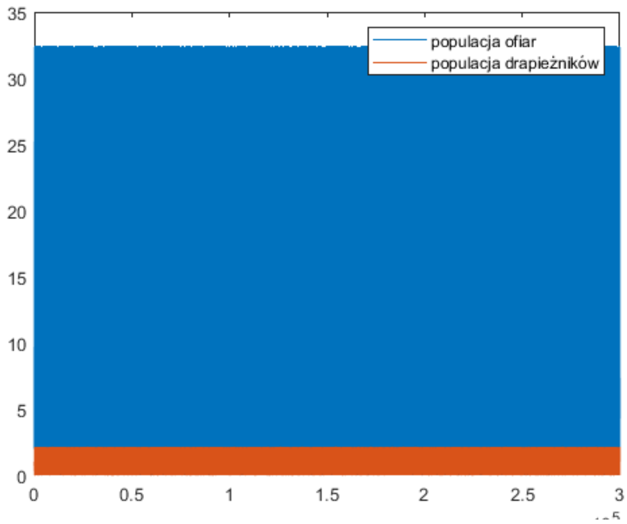
Wykres 16

d) $t \in [0{,}005], t \in R$



Wykres 17

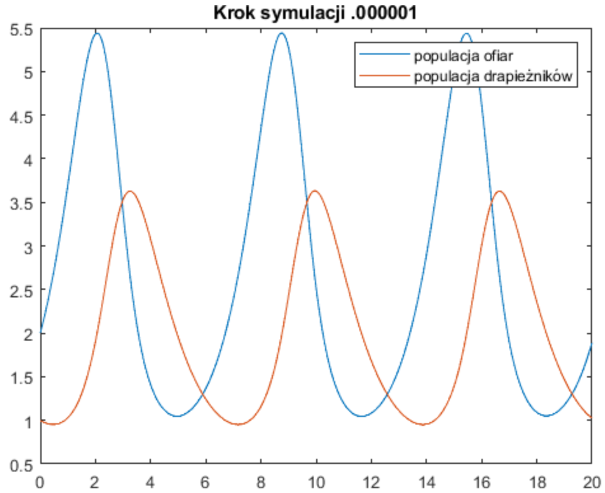
e) $t \in [0{,}300000], t \in R$



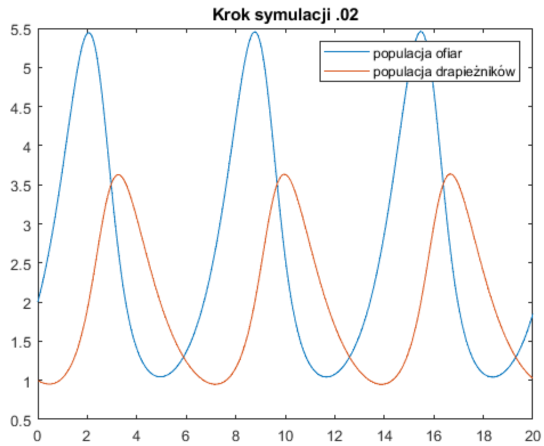
Wykres 18

3.7 Wyniki zachowania modelu na skutek zmiany parametru skoku symulacji

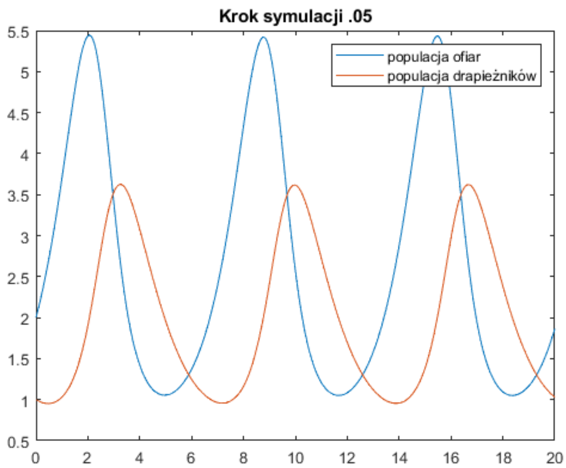
a) $dt = 0.00001$



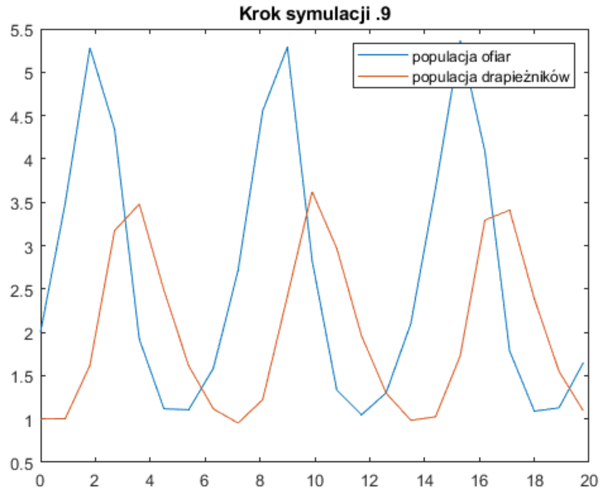
b) $dt = 0.02$



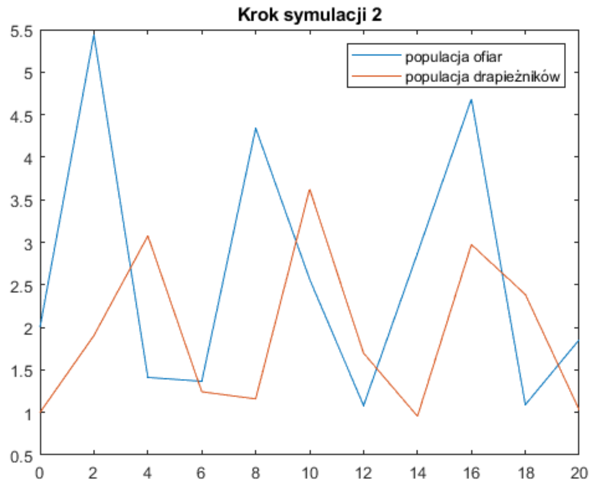
c) $dt = 0.05$



d) $dt = 0.9$



e) $dt = 2$



4 Wnioski

Tempo zmiany populacji jest proporcjonalne do jej wielkości, jednakże patrząc na dynamikę zmian populacji drapieżników, dochodzimy do wniosku, że im więcej jest ofiar, tym tempo rozwoju wyższe, niestety poprzez wysoką śmiertelność ofiar, drapieżniki później nie mają pożywienia i tym samym umierają. Śmierć drapieżników umożliwia ponowny wzrost populacji ofiar. Patrząc na wykresy powstałych funkcji możemy zauważyć, iż model bazowy (wykres 1) jest funkcją cykliczną – zjawiska w przyrodzie zachodzą również w taki sposób.

Dla zmiennych $x_0 = y_0 = k$, które przyjmują wartości $k \in Z$, możemy zauważyć, że w regularnych odstępach czasowych, wykres populacji ofiar, przyjmuje postać ekspotencjalną, która niemalże opada liniowo, ukazując gwałtowną śmiertelność ofiar. W chwili potężnego spadku populacji ofiar, zwiększa się kilkukrotnie populacja drapieżników. Nagły wzrost ilości drapieżników i spadek liczności ofiar jest preludium do spadku liczności obu gatunków do wartości granicznych, bliskich 0 (wykres 2). Zmiana wartości czasu z $t \in [0,20]$ na wartość $t \in [0,1023]$ ukazuje nową zależność, przedstawiającą dynamikę zmian populacji ofiar na przestrzeni t – populacja ofiar za każdym razem w swoim punkcie szczytowym będzie nieznacznie maleć, aż gdy dla $t \in (1023, \infty)$ populacja ofiar w swoim punkcie szczytowym będzie liniowa – zawsze taka sama.

W przypadku braku ofiar (wykres 4), czyli $x_0 = 0$ drapieżniki nie mają pożywienia, więc umierają. Model ma pewną wadę, gdyż zakładając, że $y_0 = 0$ (zerowa populacja drapieżników, wykres 3), wtedy rośnie liczebność ofiar do nieskończoności, takie zachowanie w przyrodzie jest raczej niespotykane. Zmieniając częstotliwość narodzin drapieżników o kilkakrotność częstotliwości narodzin ofiar, dochodzimy do podobnego wniosku – liczebność ofiar gwałtownie rośnie, gdyż w początkowej fazie rozwoju populacji jest więcej drapieżników niż ofiar, przez co liczność danej populacji oscyluje w granicach 0 . Jednakże zwiększając częstotliwość narodzin ofiar, liczebność populacji drapieżników również wzrasta.

Możemy zauważyć pewną zależność, rozważamy dwa osobne modele, pierwszy z zwiększoną częstotliwością umierania ofiar x10 (wykres 11), drugi zaś z zwiększoną częstotliwością narodzin drapieżników x10 (wykres 7). Omawiane wykresy przedstawionych populacji są identyczne, pomimo zmiany osobnych parametrów, populacja ofiar i drapieżników wykazuje te same właściwości dla dwóch różnych zmian parametrów – populacja drapieżników jest znikoma, natomiast populacja ofiar szybko rośnie i gwałtownie spada.

Ustalając parametry odpowiedzialne za częstotliwość umierania, możemy zauważyć, że zwiększenie wartości zmiennej przypisanej do częstotliwości umierania drapieżników (wykres 12, 13), powoduje nagły wzrost liczności populacji ofiar, spowodowane jest to tym, że poprzez zwiększoną śmiertelność drapieżników, populacja ofiar staje się mniej podatna na ataki ze strony drapieżników. Z kolei zwiększenie śmiertelności populacji ofiar (wykres 10,11), powoduje, że dynamika wzrostu populacji ofiar maleje, populacja potrzebuje wtedy więcej czasu, żeby odbudować swoją populację, sprzed zmiany parametru umierania.

Istotny wpływ na postrzeganie liczności populacji i odbierania danych w postaci wykresu ma zmienna czasowa, dzięki której możemy manipulować odbieranymi wizualnie danymi. Przy zmniejszającej się zmiennej czasowej t, (wykres 17) możemy dojść do wniosku, iż im mniejsza jest wartość t, tym bardziej wykres populacji ofiar i drapieżników będzie podobny do funkcji liniowej. Zwiększanie zaś tego parametru, (wykres 18) utwierdza nas w przekonaniu, że wykres populacji z danymi wejściowymi jest funkcją cykliczną.

Zmieniając parametry kroku symulacji dt, gdzie $tspan = [0: dt: t]$ zauważymy zmiany w obrębie przebiegu funkcji. Im mniejszy krok symulacji, tym funkcja jest bardziej dokładna, dla domyślnego kroku symulacji $dt = 0.001$ zauważymy, że funkcja w punktach zmieniających monotoniczność przypomina wykres paraboli, zwiększając krok symulacji, zasymulowane przez nas informacje będą mniej dokładne, wykres będzie przyjmował mniej szczegółowe informacje, przez co punkty, gdzie zmienia się monotoniczność będą bardziej „kanciaste".