Sprawozdanie MSD - Lista 2

Przemysław Sipa

30.03.2022

1 Wstęp

Opis teoretyczny tematu listy

Lista zawiera dwa modele dynamiczne, które trzeba zasymulować w pakiecie systemu Simulink. Pierwszym modelem jest omawiany poprzednio model Lotki-Volterry, drugim zaś układ Lorenza.

Pierwszy model przedstawia wzajemną zależność rozmiarów populacji drapieżników i ofiar w danym środowisku. Rozważane środowisko posiada wyłącznie gatunki zwierząt mających wpływ na dynamikę populacji ofiar i drapieżników. Tempo zmian populacji ofiary jest określone poprzez dynamikę jej wzrostu minus tempo, w jakim jest ona uśmiercana, zaś tempo zmian populacji drapieżnika zależy od szybkości uśmiercania ofiary oraz od śmiertelności danego gatunku. Badany model dynamiczny określony jest układem dwóch równań nieliniowych:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (a - by)x \\ \frac{dy}{dt} = (cx - d)y \end{cases}$$

Gdzie:

$x - populacja\ ofiar$

$y - populacja\ drapieżników$

$t - czas$

$a - częstotliwość\ narodzin\ ofiar$

$b - częstotliwość\ umierania\ ofiar$

$c - częstotliwość\ narodzin\ drapieżników$

$d - częstotliwość\ umierania\ drapieżników$

Na potrzeby zadania przyjęto wartości wejściowe parametrów:

$$a = 1.2$$

$$b = 0.6$$

$$c = 0.3$$

$$d = 0.8$$

$$x_0 = 2$$

$$y_0 = 1$$

Drugim obiektem dynamicznym jest układ Lorenza modelujący przepływ ciepła w atmosferze. Zmienna x odnosi się do ruchu konwekcyjnego, zaś zmienna y reprezentuje występujące różnice temperatur, zmienna z określa rozkład pionowy temperatury w atmosferze. Układ związany jest z teorią chaosu, która w tym przypadku mówi, że minimalna zmiana warunków początkowych prowadzi do odwrotnie proporcjonalnej zmiany wyniku modelów dynamicznych. Będziemy badali następujące funkcje: $y(x), z(y), z(x), z(x, y)$. Badany model składa się z trzech równań różniczkowych:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \dfrac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y \\ \dfrac{dz}{dt} = xy - \beta z \end{cases}$$

Gdzie:

$$\sigma - liczba\ charakteryzująca\ lepkość\ ośrodka$$

$$\rho - liczba\ charakteryzująca\ przewodnictwo\ cieplne\ ośrodka$$

$$\beta - stała\ charakteryzująca\ rozmiary\ obszaru,$$

$$w\ którym\ odbywa\ się\ przepływ\ ciepła$$

Na potrzeby zadania przyjęto wartości początkowe parametrów:

$$\sigma = 10$$

$$\beta = \frac{8}{3}$$

$$\rho = 28$$

$$x_0 = 1$$

$$y_0 = 1$$

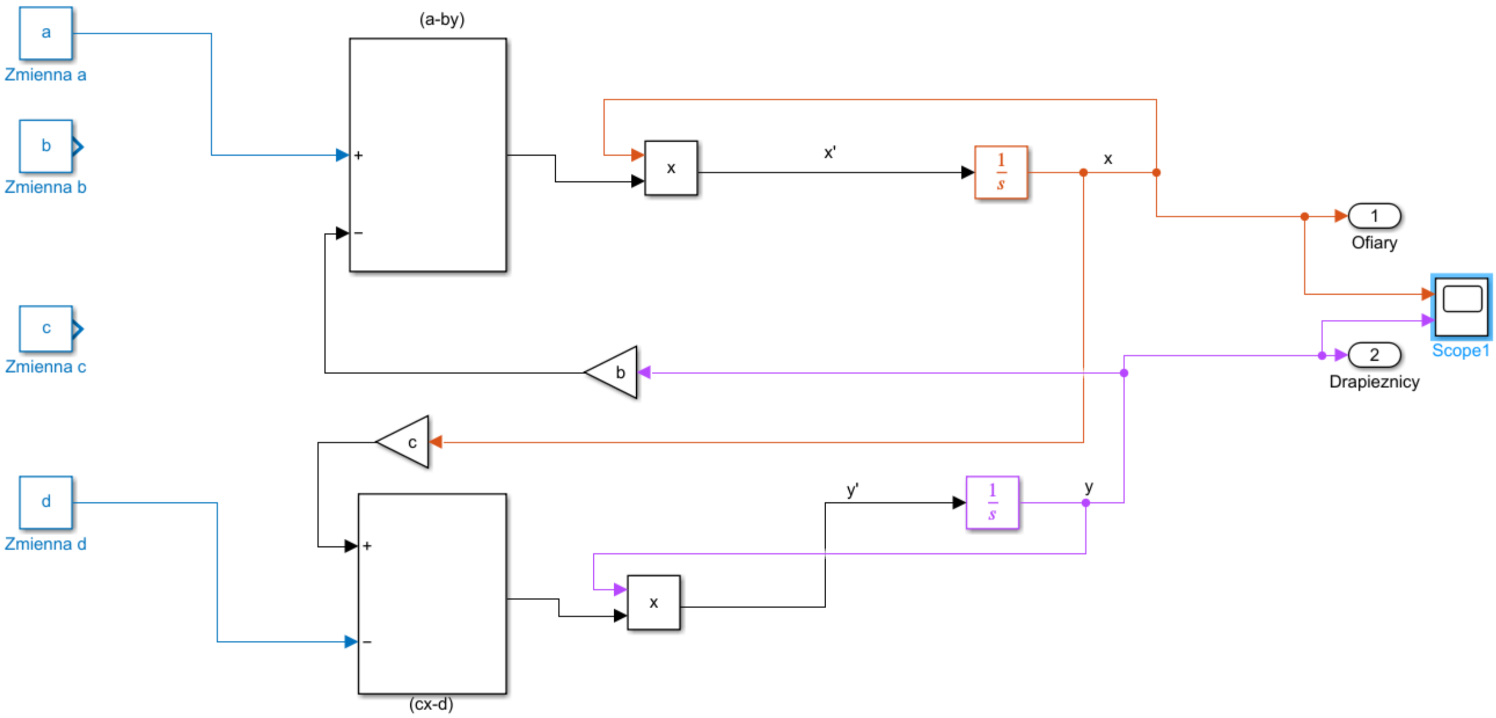
$$z_0 = 1$$

2 Model

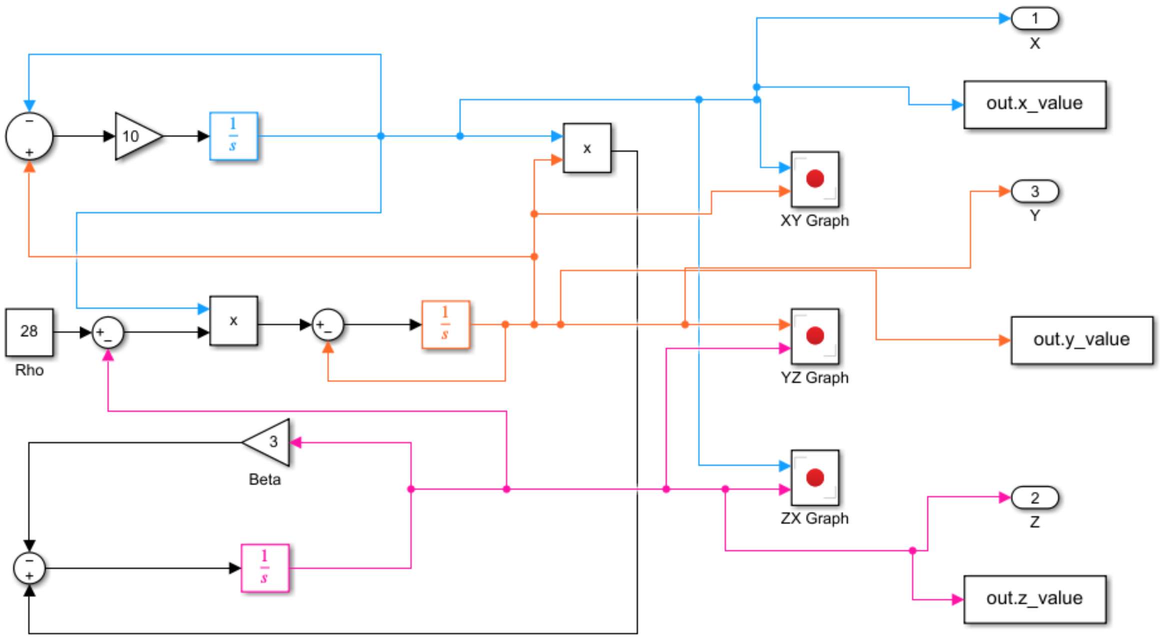
2.1 Zasymulowanie działania modelu Lotki-Volterry

Na podstawie ww. wartości początkowych, oraz T=20 zasymulowałem działanie modelu. Pomarańczowym kolorem zaznaczona jest zmienna x, fioletowym zaś zmienna y. Zmienne podane przez użytkownika widnieją w kolorze niebieskim. Krok symulacji został ustawiony na dt=0.001

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (a - by)x \\ \frac{dy}{dt} = (cx - d)y, \end{cases}$$



2.2 *Symulacja dla modelu układu Lorenza dla wartości początkowych.*



Zasymulujemy działanie układu Lorenza dla wartości początkowych, przy czym $t \in [0,25]$, przy kroku symulacji $dt = 0.001$. Przedstawienie działania dla $y(x), z(y), z(x)$

2.3 Rozwiązania układu Lorenza z zmienionymi warunkami początkowymi

Warunek początkowy $x_{0,} = 1$:

a) $x_0 = 0.9$
b) $x_0 = 100$

Warunek początkowy $y_0 = 1$:

a) $y_0 = 0.9$
b) $y_0 = 100$

Warunek początkowy $z_0 = 1$:

a) $z_0 = 0.9$
b) $z_0 = 100$

Pozostałe parametry są zgodne z parametrami wejściowymi.

2.4 Rozwiązania układu Lorenza z zmienionym parametrem ρ

Ustalamy wartości parametru ρ ($\rho_0 = 28$):

a) $\rho = 27$
b) $\rho = 30$

Pozostałe parametry są zgodne z parametrami wejściowymi.

2.5 Rozwiązania układu Lorenza z zmienionym parametrem β

Ustalamy wartości parametru β ($\beta_0 = 3$):

a) $\beta = 2$
b) $\beta = 4$

Pozostałe parametry są zgodne z parametrami wejściowymi.

2.6 Rozwiązania układu Lorenza z zmienionym parametrem σ

Ustalamy wartości parametru σ ($\sigma_0 = 10$):

a) $\sigma = 9$
b) $\sigma = 11$

Pozostałe parametry są zgodne z parametrami wejściowymi.

2.7 Rozwiązania układu Lorenza dla zmienionego przedziału czasu

Stworzymy modele dynamiczne zawierające wartości zmiennych zgodne z wartościami wejściowymi oraz czas, który:

a) $t \in [0,24], t \in R$
b) $t \in [0,1], t \in R$
c) $t \in [0,100), t \in R$

Pozostałe parametry są zgodne z parametrami wejściowymi.

2.8 Rozwiązania układu Lorenza dla zmienionego kroku symulacji

Stworzymy modele, które opierają się na wybieralnym przez nas kroku symulacji, który wynosi ($dt_0 = 0.001$) :

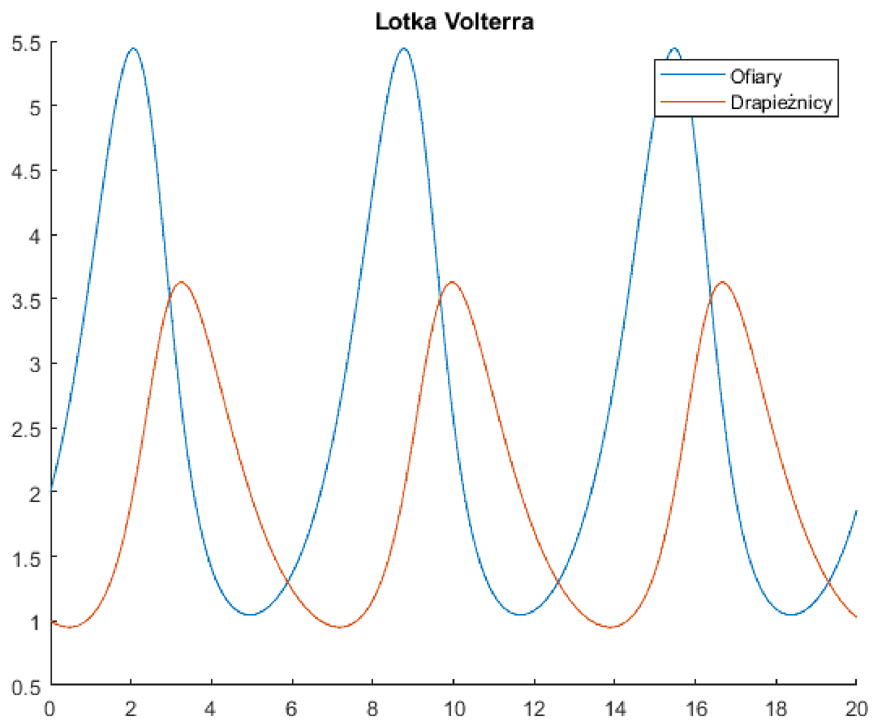
a) $dt = 0.1$
b) $dt = 1$
c) $dt = 10$

Pozostałe parametry są zgodne z parametrami wejściowymi.

3 Wyniki

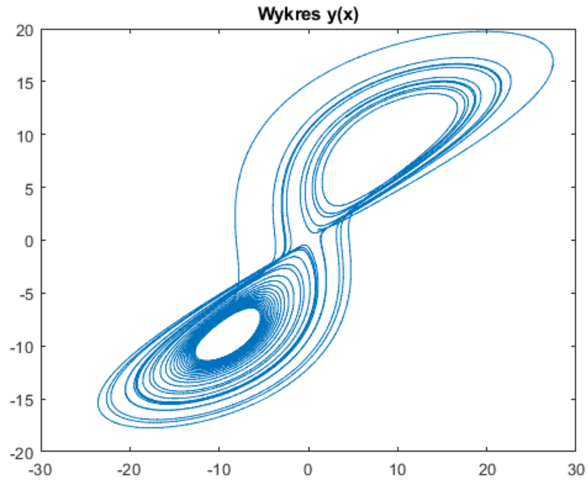
3.1

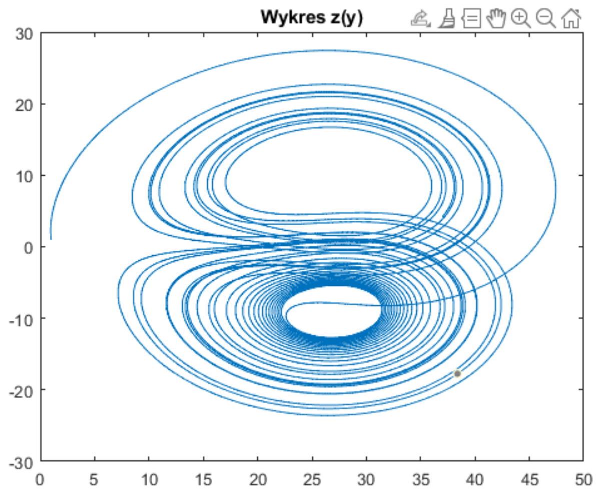
Po wprowadzeniu zmiennych zauważamy, że żółty wykres przedstawia populację ofiar, a niebieski populację drapieżników.

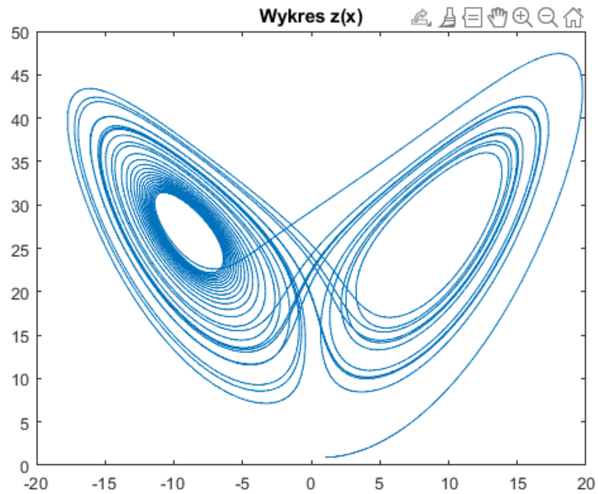


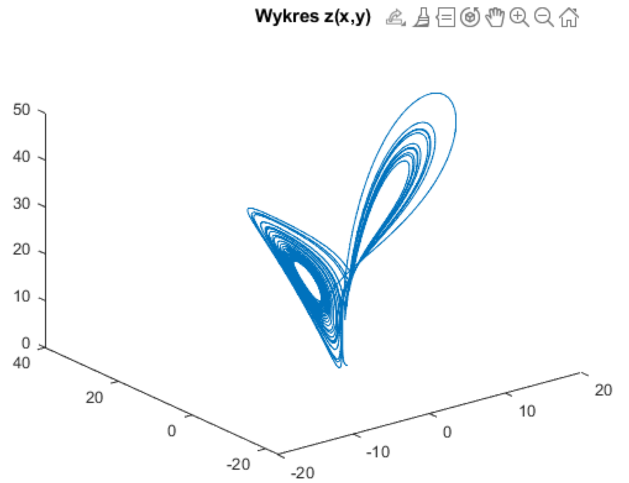
3.2

Wykresy są równoważne z wykresami przedstawionymi na liście 2, przy tych samych parametrach początkowych.



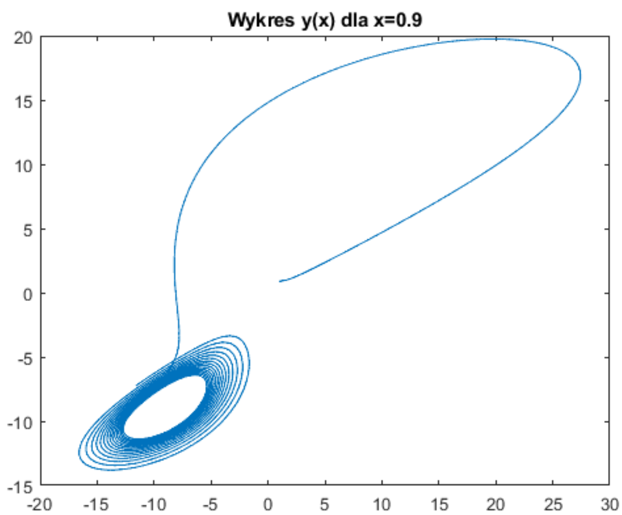


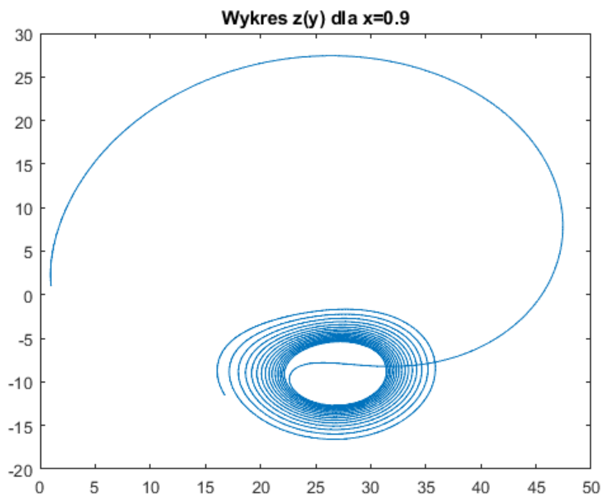


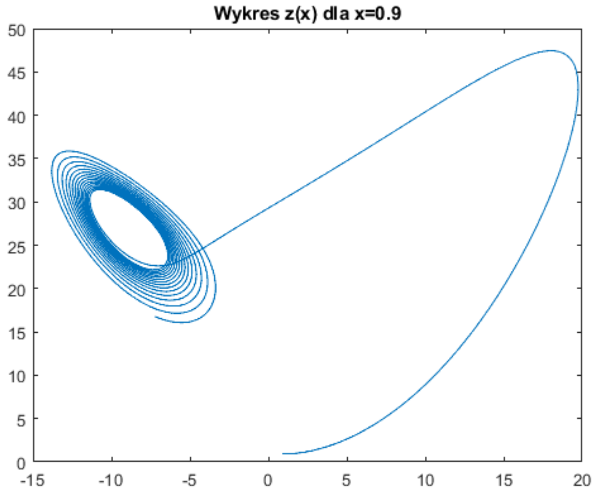


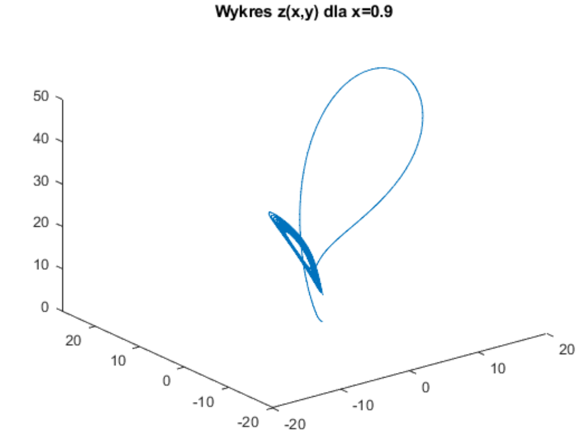
3.3

a) dla x=0.9

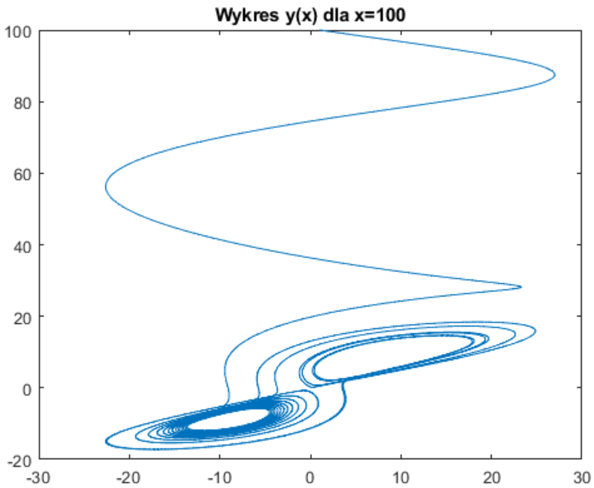


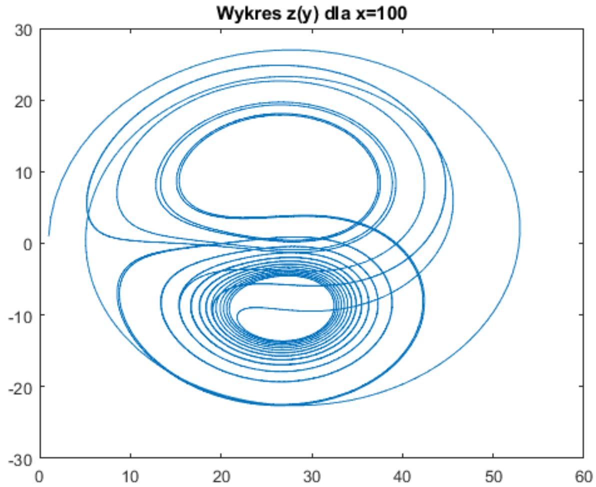


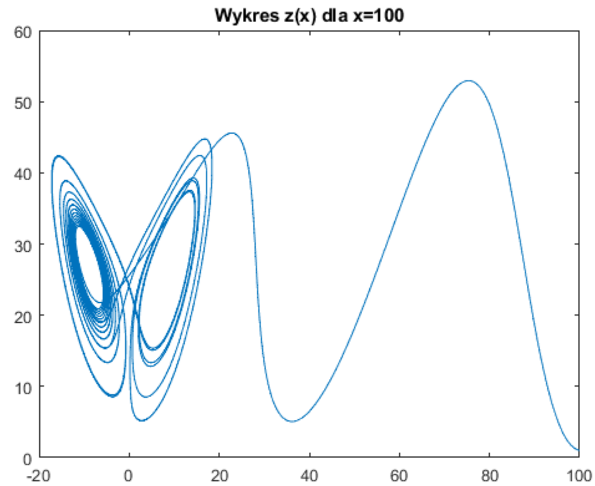


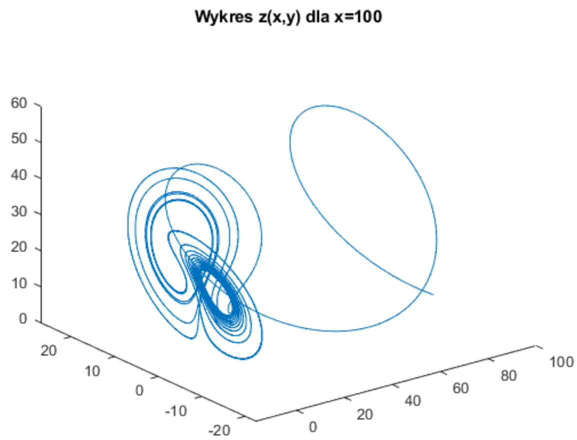


b) dla x=100



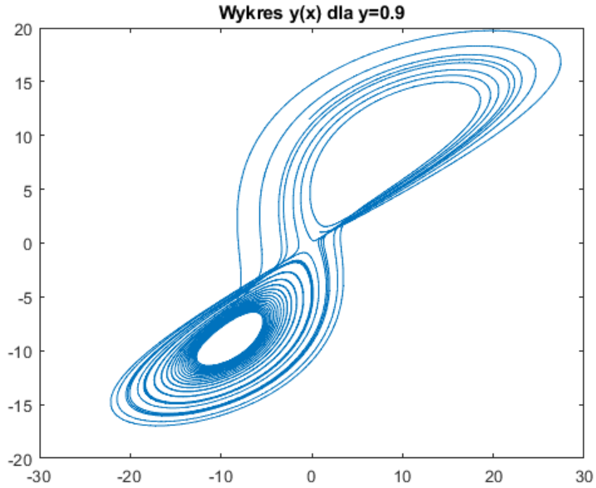


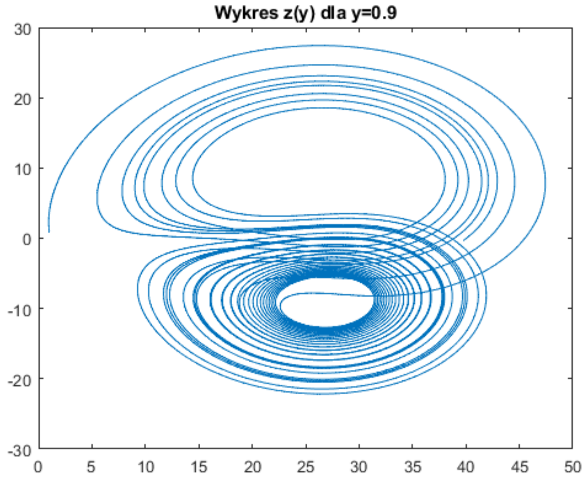


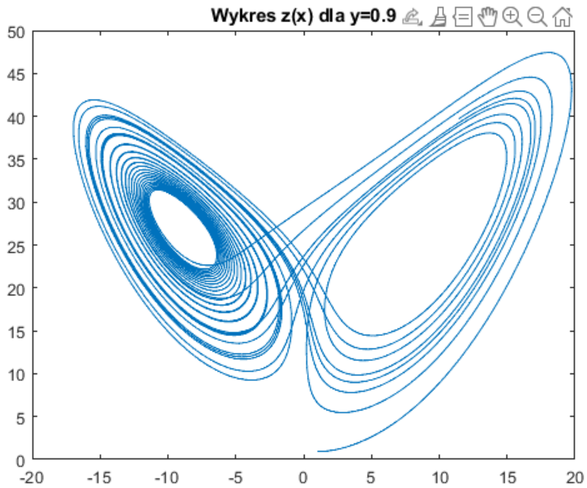


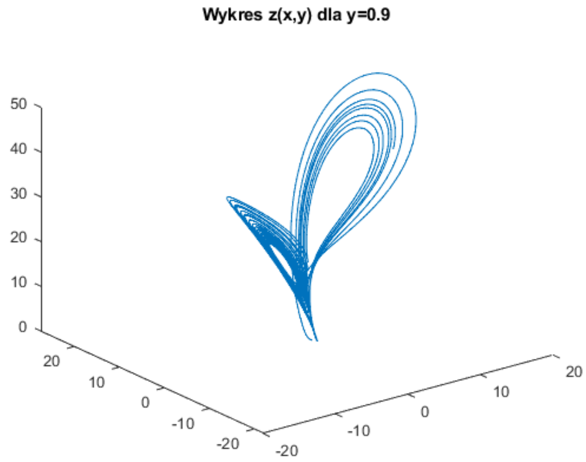
Dla y

a) $y_0 = 0.9$

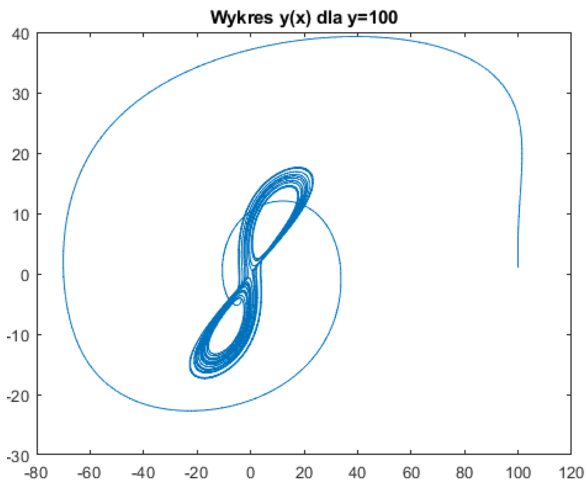

Wykres y(x) dla y=0.9

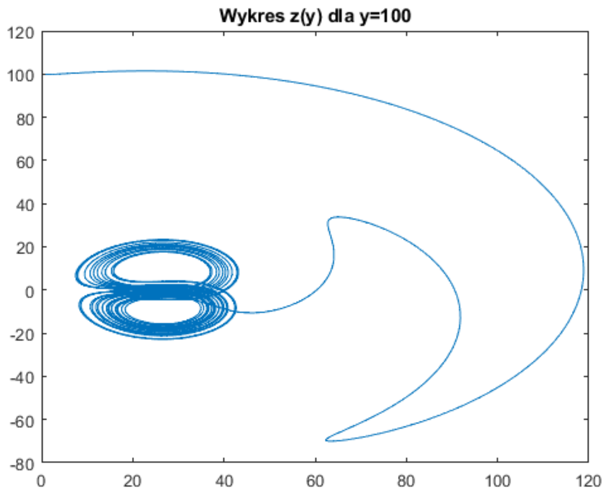

Wykres z(y) dla y=0.9

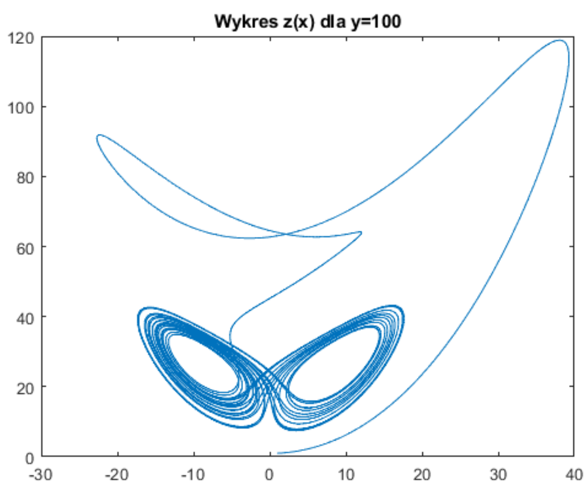

Wykres z(x) dla y=0.9

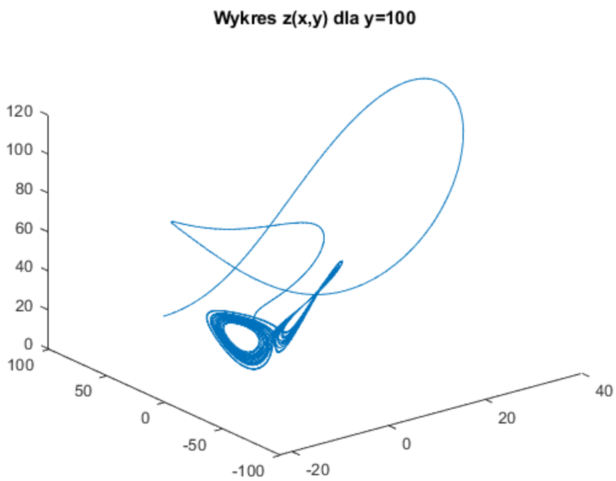

Wykres z(x,y) dla y=0.9

b) $y_0 = 100$


Wykres y(x) dla y=100

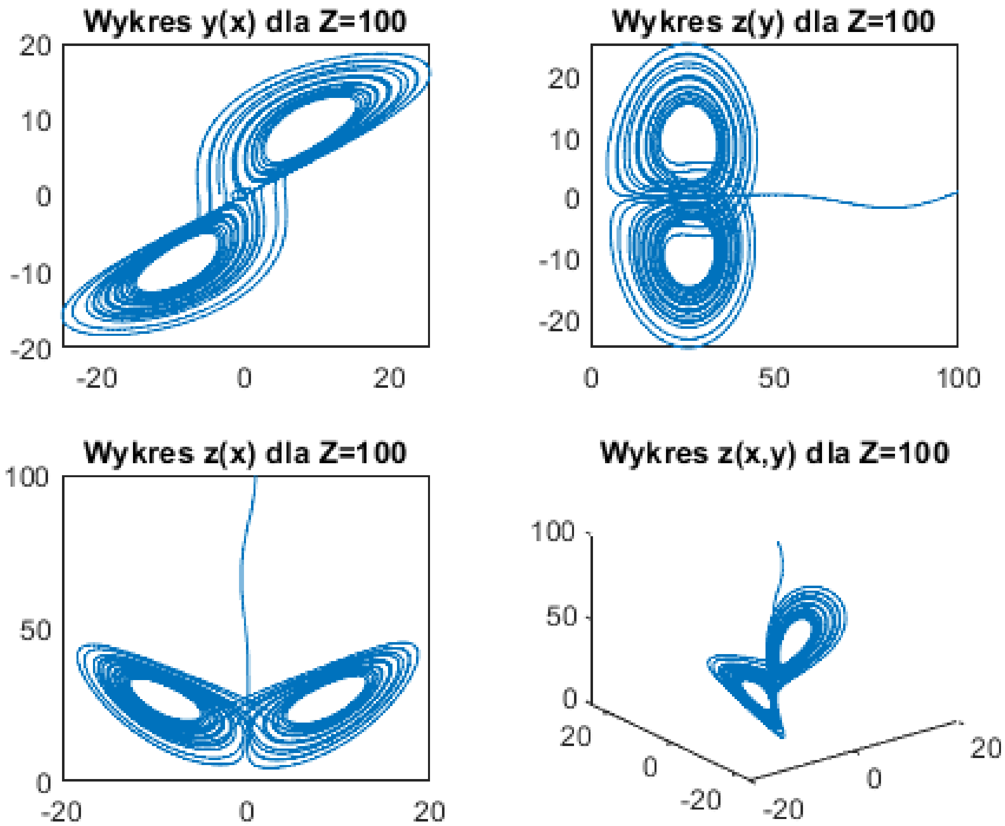

Wykres z(y) dla y=100


Wykres z(x) dla y=100

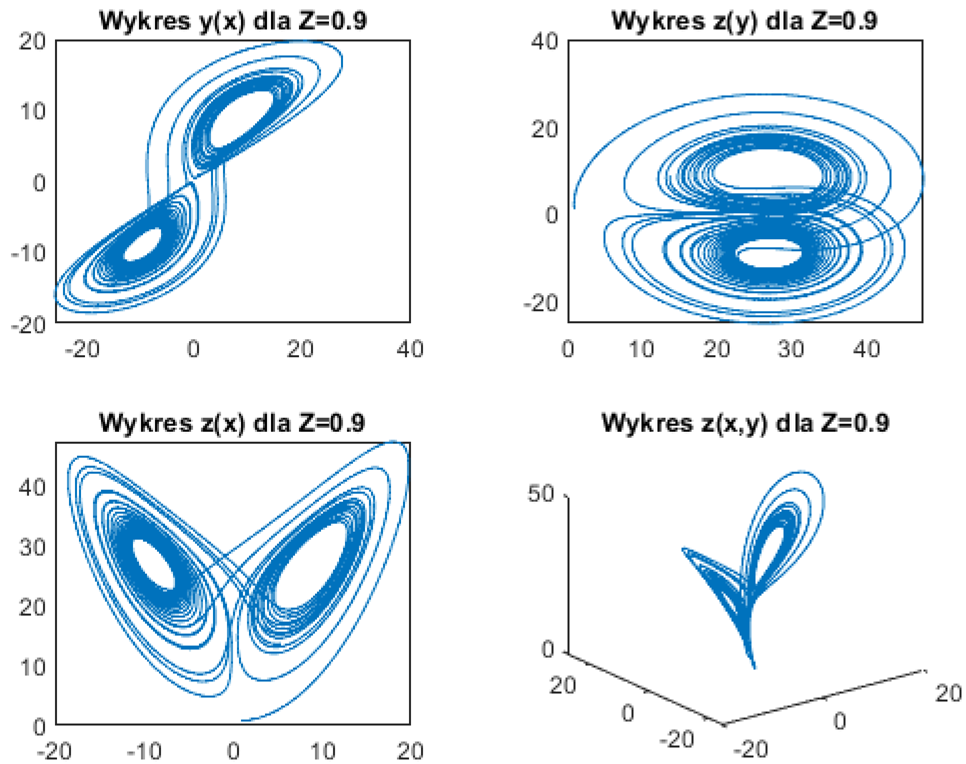

Wykres z(x,y) dla y=100

Dla z

a) $z_0 = 100$

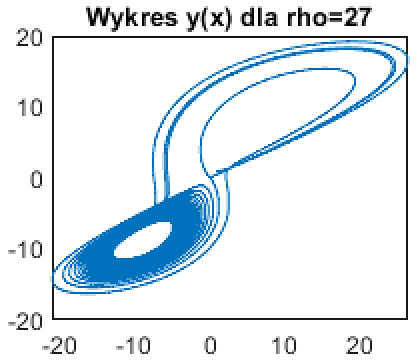


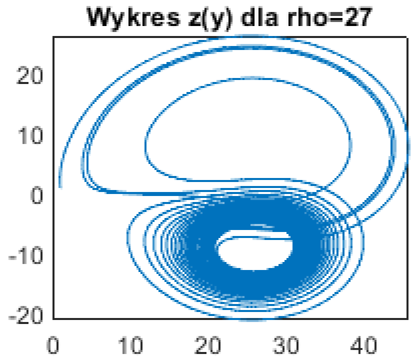
b) $z_0 = 0.9$

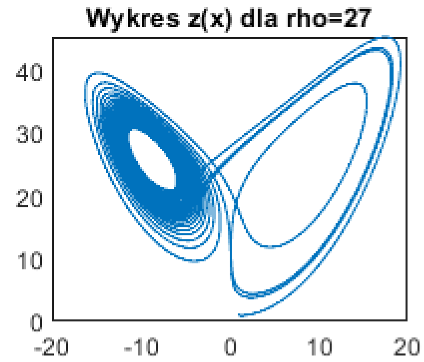


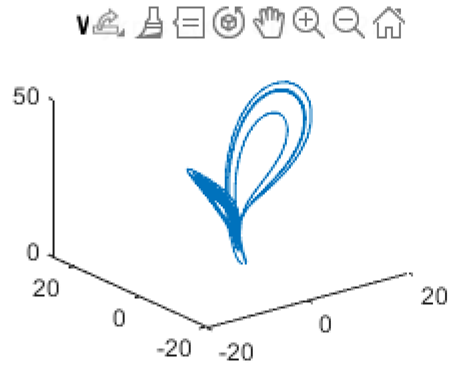
3.4

a) $\rho = 27$

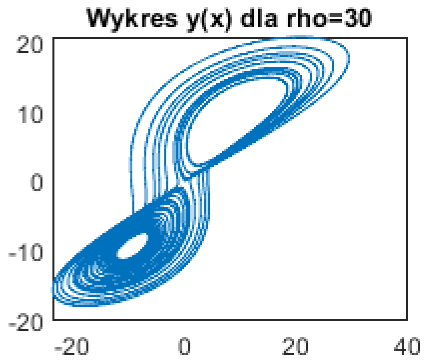


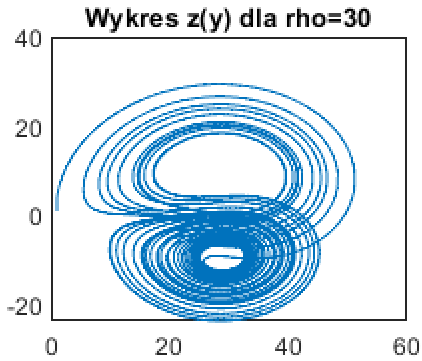


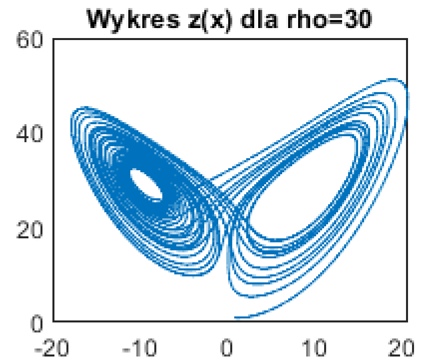


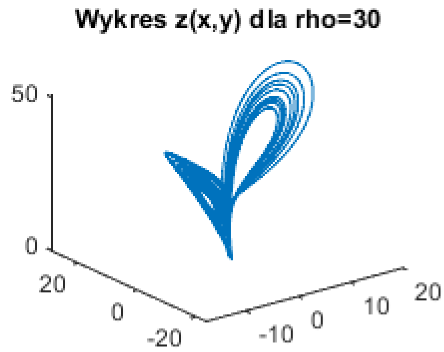


b) $\rho = 30$



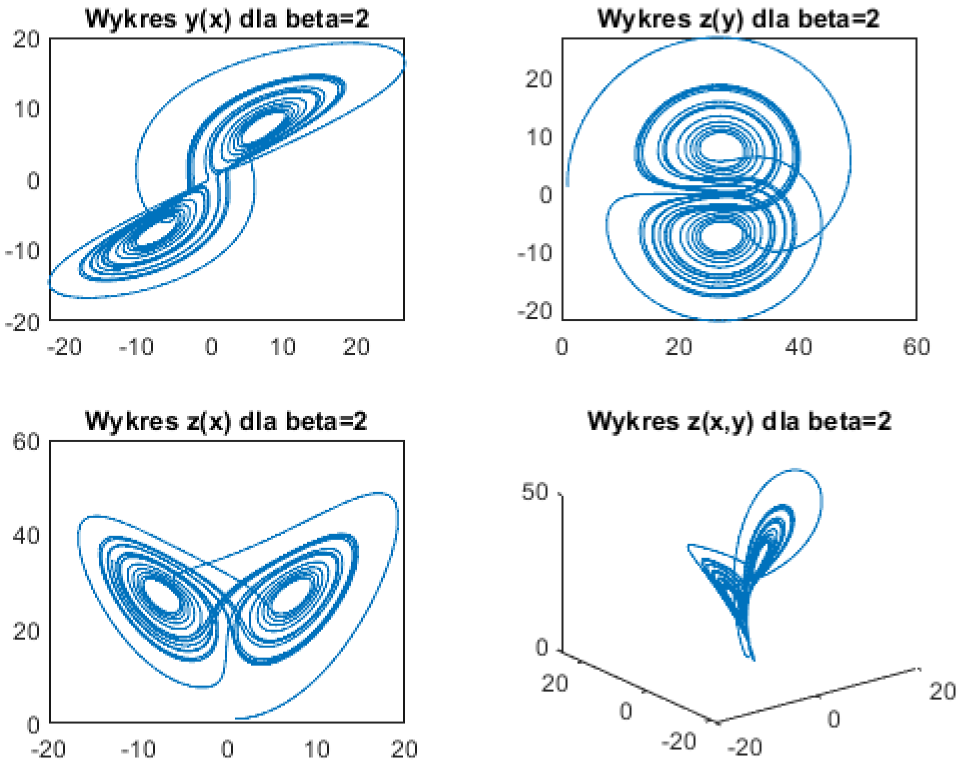




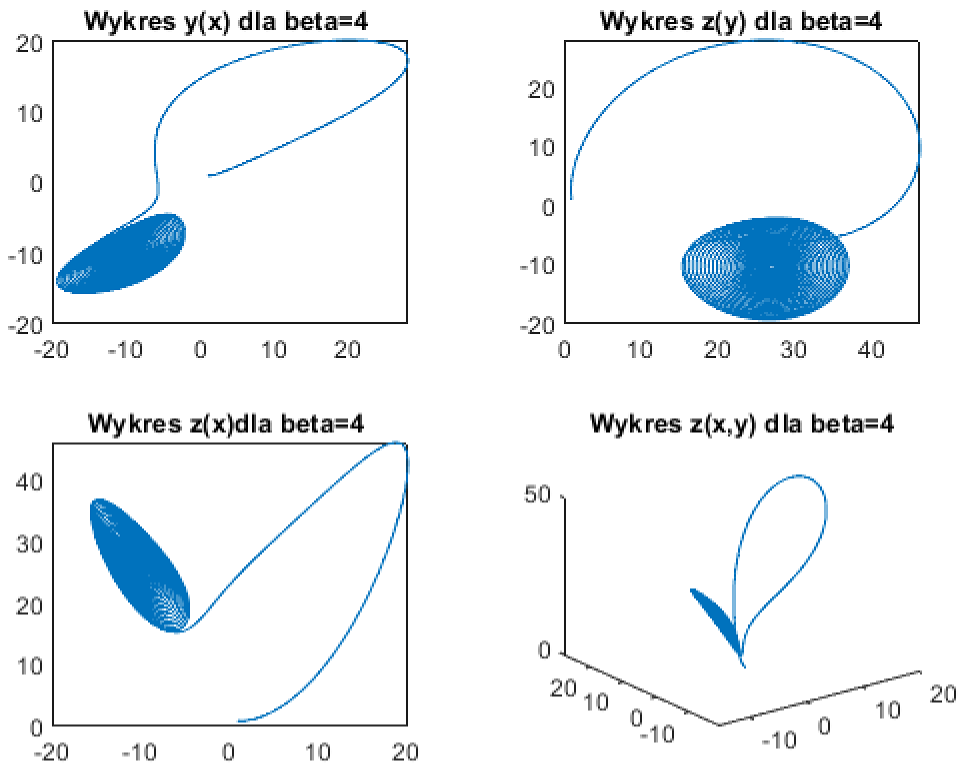


3.5

a) $\beta = 2$

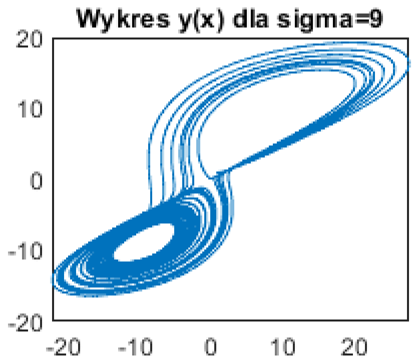


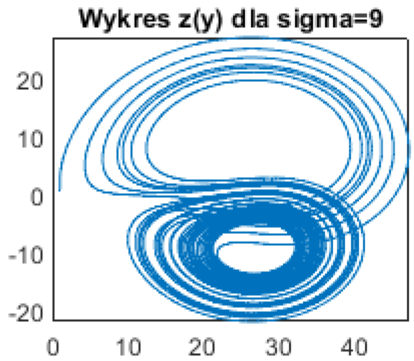
b)$\beta = 4$

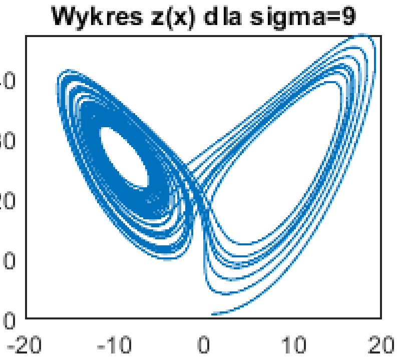


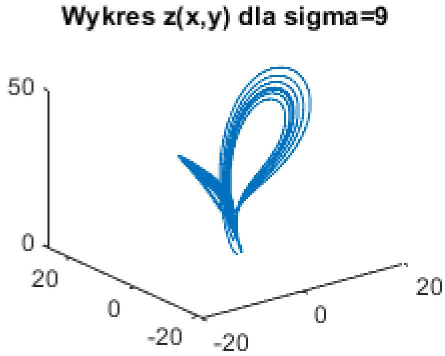
3.6

a) $\sigma = 9$

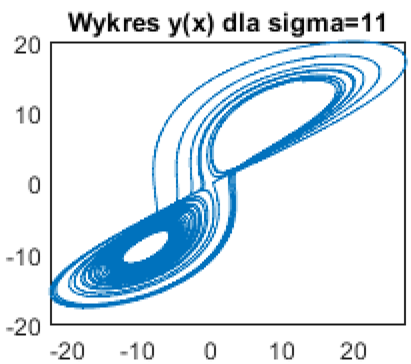


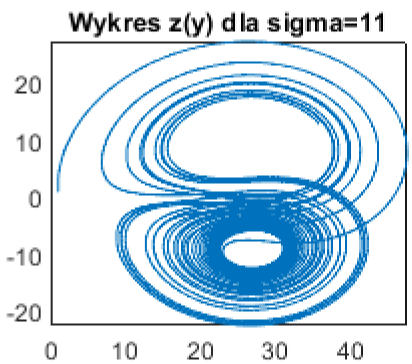


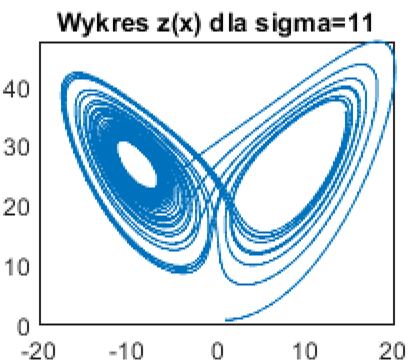


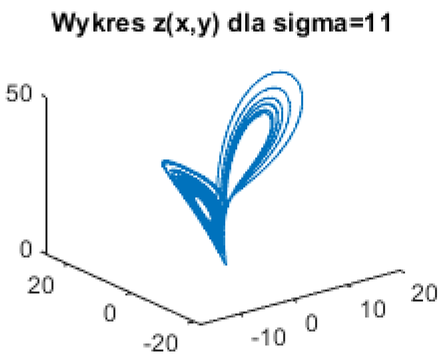


b) $\sigma = 11$



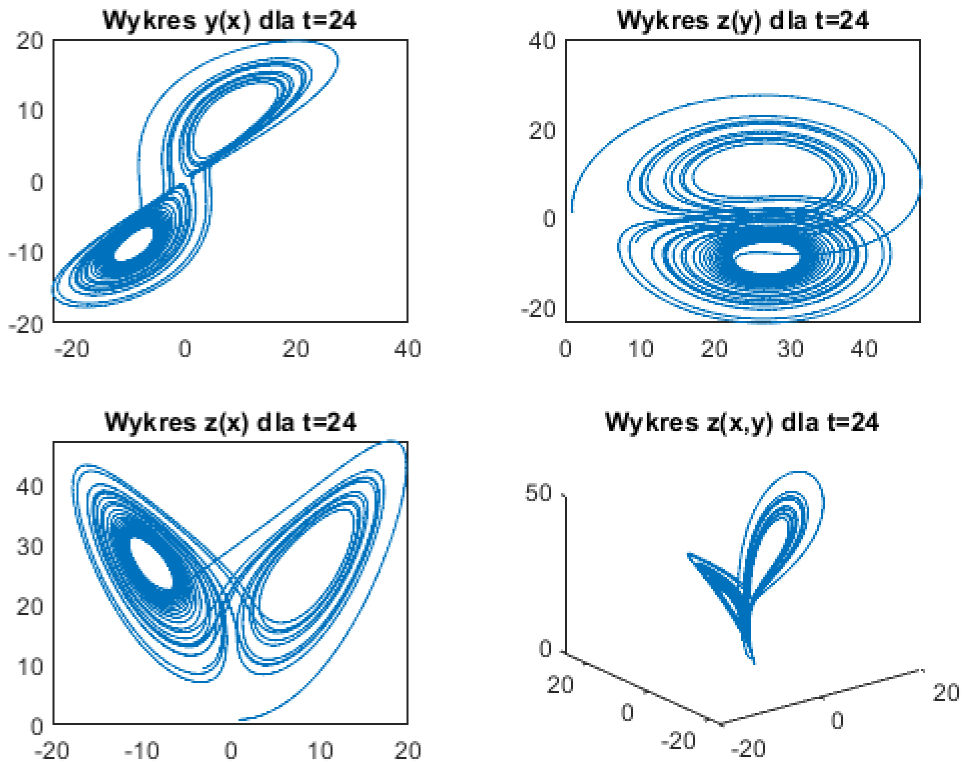




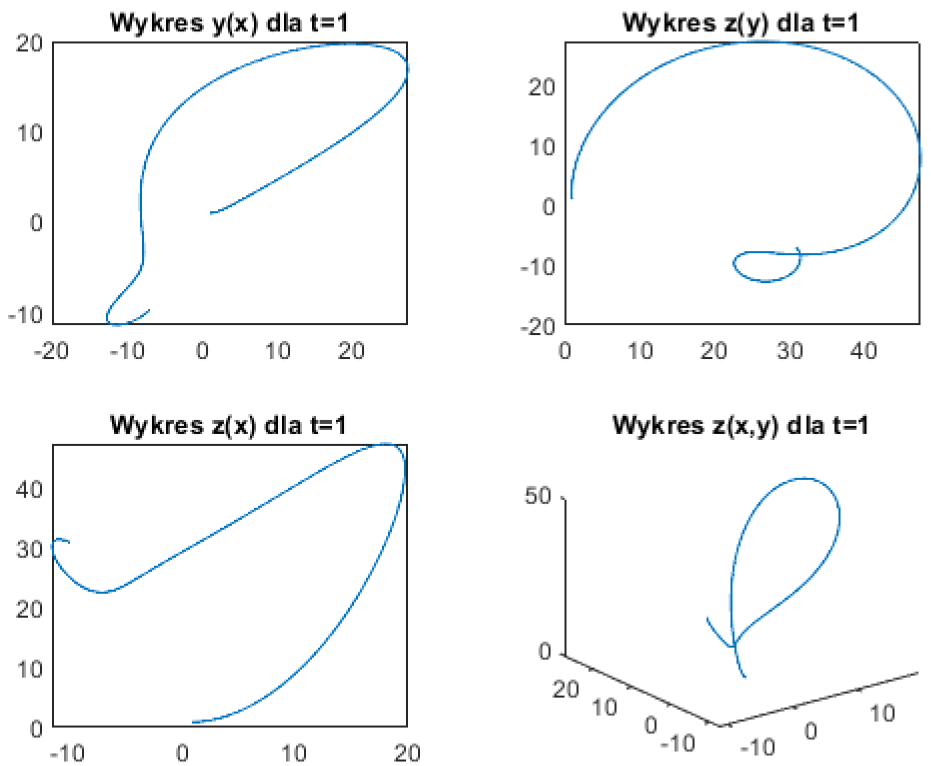


3.7

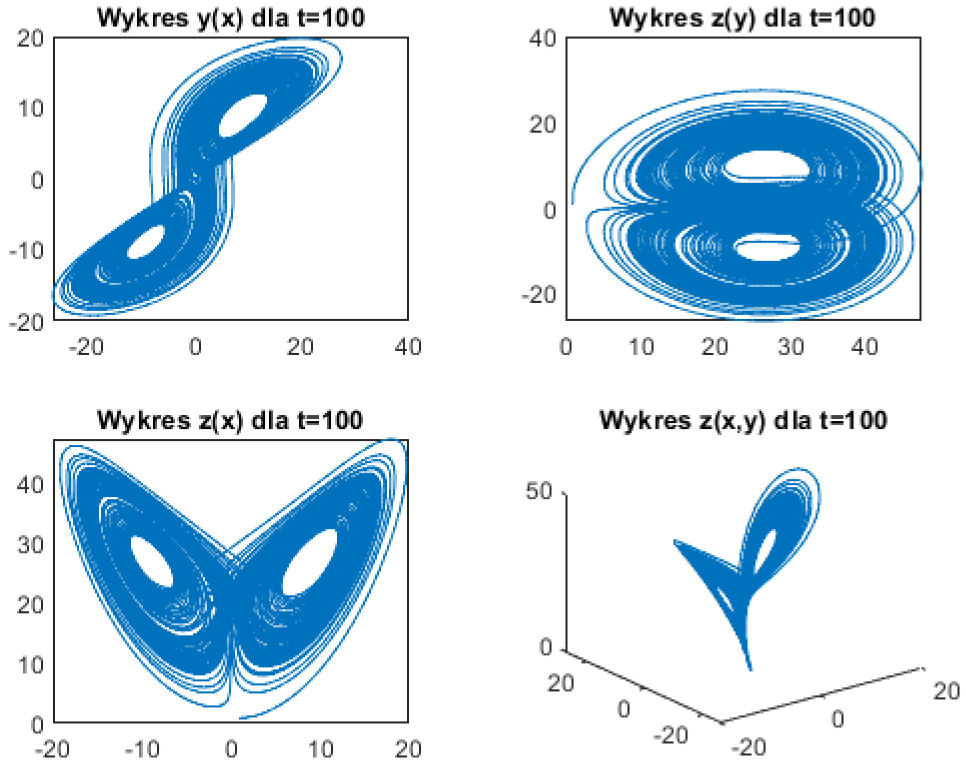
a) $t \in [0,24], t \in R$



b) $t \in [0,1], t \in R$

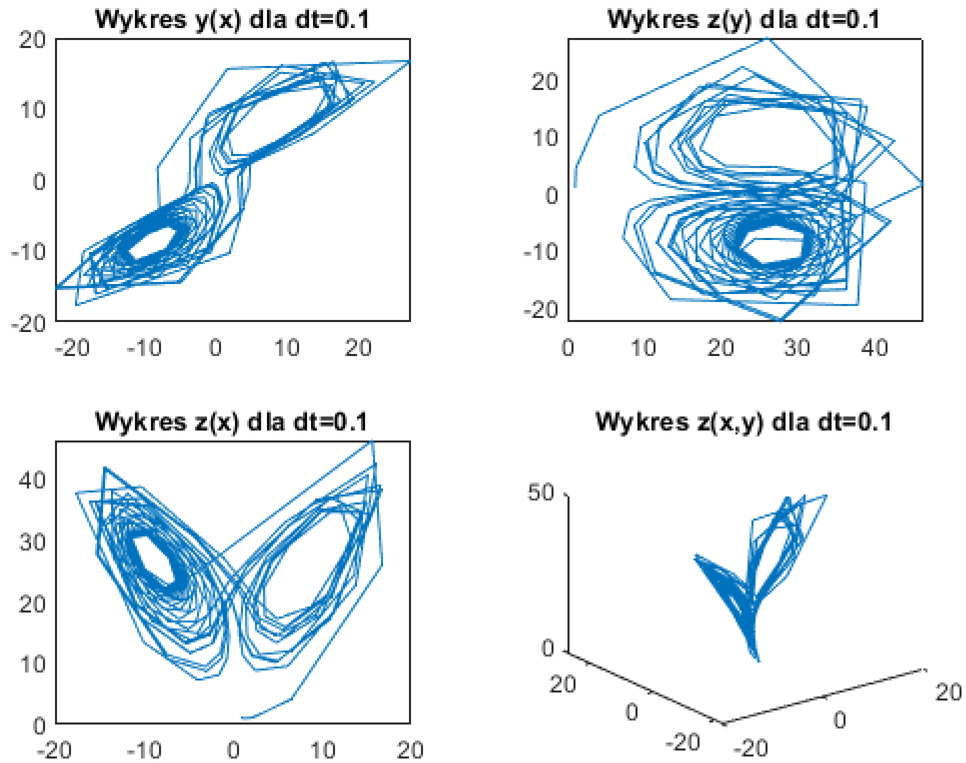


c) $t \in [0,100), t \in R$

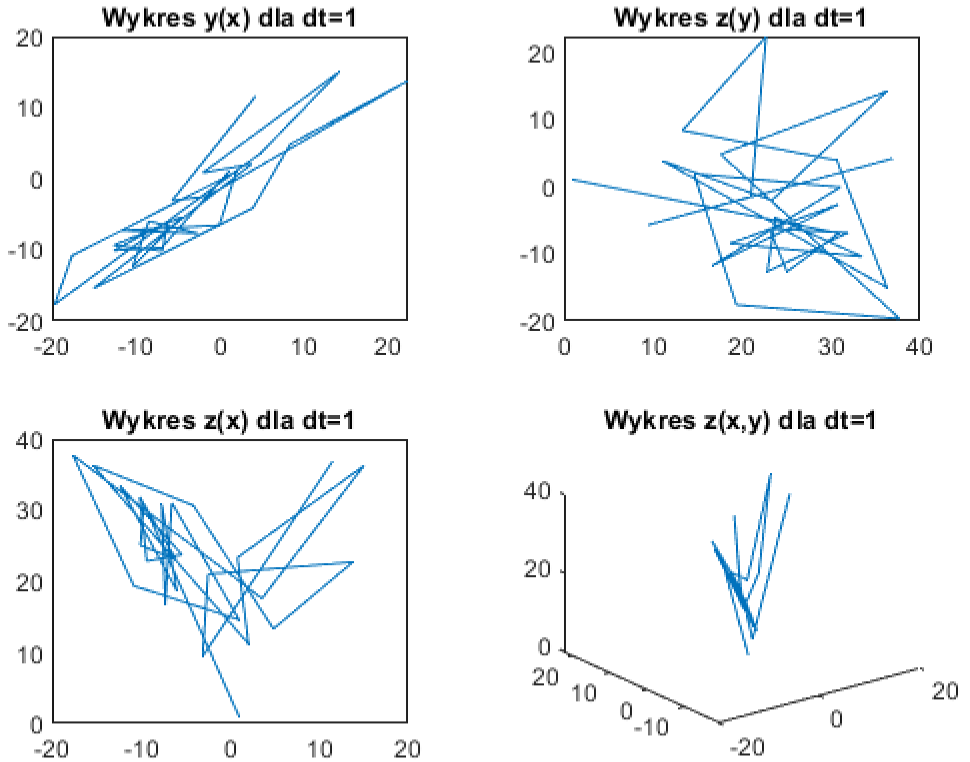


3.8

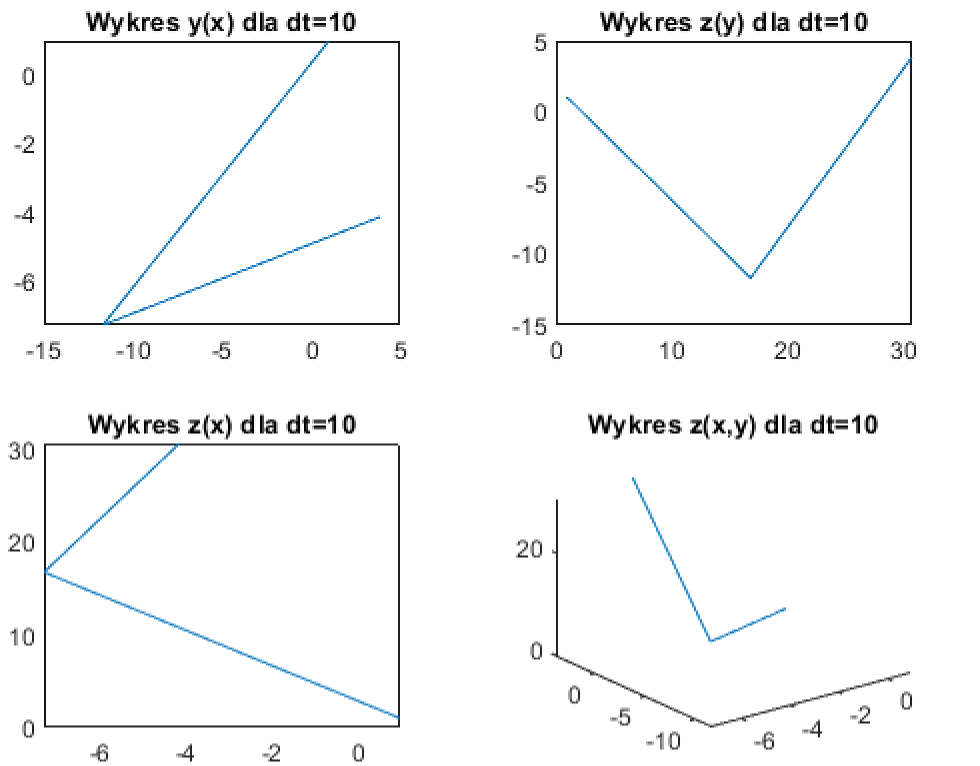
a) $dt = 0.1$



b) $dt = 1$


Wykres y(x) dla dt=1
20
10
0
-10
-20
-20 -10 0 10 20
Wykres z(y) dla dt=1
20
10
0
-10
-20
0 10 20 30 40
Wykres z(x) dla dt=1
40
30
20
10
0
-20 -10 0 10 20
Wykres z(x,y) dla dt=1
40
20
0
20 10 0 -10
-20 0 20

c) $dt = 10$


Wykres y(x) dla dt=10
0
-2
-4
-6
-15 -10 -5 0 5
Wykres z(y) dla dt=10
5
0
-5
-10
-15
0 10 20 30
Wykres z(x) dla dt=10
30
20
10
0
-6 -4 -2 0
Wykres z(x,y) dla dt=10
20
0
0 -5 -10
-6 -4 -2 0

4 Wnioski

Układ Lorenza jest bardzo „wrażliwy" na niewielkie zmiany zadanych parametrów. Niewielka zmiana jednej zmiennej powoduje gwałtowne zmiany w innych obszarach. W wykresach danego obiektu widzimy dwie powierzchnie, poruszające się ruchem spiralnym na zewnątrz. Patrząc na przebieg czasowy zmiennej x(t) widzimy chaotyczność danego układu. Wykresy odzwierciedlają dynamikę okresową układu Lorenza.

Zmiana warunków początkowych x_0, y_0, z_0 o 10% w dół oraz 10000% w górę ukazały gwałtowne zmiany wykresów układu, przy minimalnej zmianie z $x_0 = 1\ na\ x_0 = 0{,}9$. Struktura wykresu została kompletnie zmieniona, implikując model jest wrażliwy nawet na najmniejsze zmiany. Jednakże zagłębiając się w wartości początkowe, możemy zauważyć pewną zależność – parametr wejściowy x_0 jest bardziej podatny na zmiany, niż parametry y_0, z_0, zauważamy to na podstawie zmiany parametru wejściowego o 10% w dół, wykres po zmianie x_0 zmienia się diametralnie, w przypadku pozostałych zmian parametrów wejściowych, wykres zmienia się nieznacznie.

Zmiana parametrów ρ, β powoduje również liczne zmiany, przy niewielkim stopniu zmienienia ww. parametrów. Intersującą zmianą w przypadku parametru β jest fakt, że dla wyższej wartości tego parametru, wykres zmienia się szybciej, aniżeli dla mniejszej.

Kolejnym czynnikiem mającym wpływ na przebieg wykresu jest czas, który również jest wrażliwy na zmiany. Im mniejszy parametr czasu, tym wykres zamiera mniej obrotów, prowadnic, zwiększając zaś parametr t ukaże się nam wykres z wieloma obrotami i prowadnicami, które w mniejszej perspektywie nachodzą na siebie.

Zmieniając krok symulacji na wyższy, przedstawiany wykres będzie mniej dokładny.

Finalnie patrząc na układ Lorenza możemy stwierdzić, że niewielka zmiana warunków początkowych powoduje rosnące wykładniczo z czasem zmiany w zachowaniu danego układu. Pomimo tego, że model jest deterministyczny, czyli połączony związkami przyczynowo skutkowymi, to i tak w dłuższej skali czasowej zachowuje się w sposób losowy.