

Modele Systemów Dynamicznych

Lista 4 - Oscylator Harmoniczny

Przemysław Sipa

Maj 2022

1 Wstęp

Przedmiotem modelowania jest oscylator harmoniczny określający położenie ciała w ruchu, zmieniającego się w czasie zgodnym z funkcją sinus lub cosinus, zmiany takich położień nazywamy funkcjami harmonicznymi. [3] Wiele układów fizycznych można opisać za pomocą modelu oscylatora, jeśli w rozważanym modelu występują małe drgania, charakteryzujące się małą amplitudą. Dużo zagadnień otaczającego nas świata daje się sprowadzić do równania oscylatora harmonicznego np. masa na sprężynie, drgania sieci krystalicznej, czy kropka kwantowa. Okres oscylatora harmonicznego zależy od amplitudy i od masy oscylowanego obiektu[2]. Okres pełnego ruchu dla małych wychyleń dany jest wzorem:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\xi}} \quad (1)$$

Model oscylatora harmonicznego określony jest równaniem:

$$\frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} + \xi \frac{\partial x(t)}{\partial t} + \omega_0^2 x(t) = \frac{F(t)}{m} \quad (2)$$

Po przekształceniu stronami:

$$\frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} = \frac{F(t)}{m} - \xi \frac{\partial x(t)}{\partial t} - \omega_0^2 x(t) \quad (3)$$

Gdzie:

- $x(t)$ - wartość położenia
- ξ - stała sprężystości, zależna od materiału, z którego wykonano sprężynę oraz od długości sprężyny
- ω_0 - częstotliwość kołowa drgań
- $F(t)$ - pewne opory ruchu, tarcie
- m - masa

Warunki początkowe określone są następująco[4]:

- $x(t) = 1$
- $\frac{dx}{dt}x(t) = 0$
- $\xi = 0$
- $\omega_0 = 2$
- $F(t) = 0$, czyli równanie będzie opisywać czysty ruch harmoniczny, w którym dla wartości początkowych drgania nie zanikają w czasie i energia drgań jest stała
- $m = 10$
- $dt = 0.001$ (dla metody SciPy)
- $T = [0; 25]$

Czyli dla danych parametrów początkowych model oscylatora harmonicznego prezentuje się następująco:

$$\frac{\partial^2 x(t)}{\partial t \partial t} + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad (4)$$

Dane równanie opisywane jest jako jednorodne liniowe równanie różniczkowe. Przykładowe doświadczenie fizyczne opisujące zagadnienie:

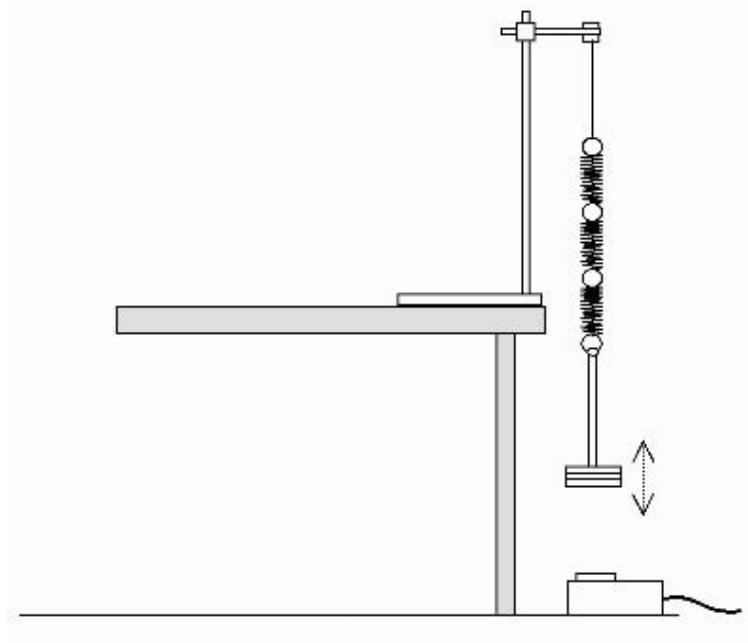


Figure 1: Ilustracja przedstawiająca działanie modelu na przykładzie masy na sprężynie

Podany system dynamiczny został modelowany przy użyciu pakietów: SymPy, Scipy, NumPy, Pandas oraz Matplotlib. Porównanie rozwiązań dokładnych oraz wartości przybliżonych w tym modelu przedstawiono za pomocą metod obliczeniowych wykonanych przez SymPy, liczący dokładne rozwiązanie podanego modelu oraz Scipy, działający na przybliżeniach wartości równań różniczkowych.

Portrety fazowe

Portret fazowy[1] to rodzina trajektorii w układzie współrzędnych, przedstawiających zachowanie obiektu obserwowane przy stałym wymuszeniu, ale dla różnych wariantów warunków początkowych, które są wówczas jedyną przyczyną zmian w obserwowanym układzie. Jest to graficzny sposób zobrazowania właściwości dynamicznych obiektu.

2 Modele

2.1 Model oscylatora dla wartości początkowych

Rozwiązywanie modelu na podstawie wartości początkowych podanych we wstępnie.

2.1.1 Kod programu dla pakietu Scipy

```

1 x_0 =1
2 dx_x =0
3 xi = 0
4 omega = 2
5 sila_oporu = 0
6 m=10
7 time = np.arange(0,25,0.0001)
8 wart_poczatkowe = [x_0,dx_x]
9 diff = np.diff(wart_poczatkowe)
10 def oscylator_harmoniczny(wart_poczatkowe,t):
11     x,dx = wart_poczatkowe
12     dxxdt=sila_oporu/m -xi*dx -omega**2*x
13     return dx,dxxdt
14 solution = odeint(oscylator_harmoniczny,wart_poczatkowe,time)
15 print(solution)
16
17 def modeluj_oscylator_scipy(x_0=1,dx_x=0,xi=0,omega=0,sila_oporu=0,m=10):
18     wart_poczatkowe = [x_0,dx_x]
19     return odeint(oscylator_harmoniczny,wart_poczatkowe,time)

```

2.1.2 Kod programu dla pakietu SymPy

```

1 t,xi,omega,sila_oporu,m = symbols("t,xi,omega,sila_oporu,m")
2 x= Function('x')
3 xi = 0
4 omega = 2
5 sila_oporu = 0
6 m=10
7 time = np.arange(0,25,0.0001)
8 eq=Eq(x(t).diff(t,2)+xi*x(t).diff(t,1)+(omega**2)*x(t),sila_oporu/m)

```

```
9  solution = dsolve(eq,ics={x(0):1,x(t).diff(t,1).subs(t,0):1})
10
11 def oscylator_harmoniczny_sympy(x_0=1,dx_x=0,xi=0,omega=0,sila_oporu=0,m=10):
12     t,xi,omega,sila_oporu,m = symbols("t,xi,omega,sila_oporu,m")
13     x= Function('x')
14     eq=Eq(x(t).diff(t,2)+xi*x(t).diff(t,1)+(omega**2)*x(t),(sila_oporu/m))
15     solution = dsolve(eq,ics={x(0):x_0,x(t).diff(t,1).subs(t,0):dx_x})
16     return solution
17 oscylator_harmoniczny_sympy()
```

2.2 Model oscylatora ze zmiennym parametrem $x(t)$

- $x = 1$
- $x = -1$
- $x = 100$
- $x = -100$

2.3 Model oscylatora ze zmiennym parametrem $\frac{dx}{dt}x(t)$

- $x = 1$
- $x = -1$
- $x = 100$
- $x = -100$

2.4 Model oscylatora ze zmiennym parametrem ξ

- $\xi = -1$
- $\xi = 1$
- $\xi = 5$

- $\xi = 10$
- portret fazowy

2.5 Model oscylatora ze zmiennym parametrem ω_0

- $\omega_0 i = -1$
- $\omega_0 = 1$
- $\omega_0 = 5$
- $\omega_0 = 10$
- portret fazowy

2.6 Model oscylatora ze zmiennym parametrem dt

- $dt = 0.02$
- $dt = 0.1$
- $dt = 0.01$
- portret fazowy dt

3 Wyniki

3.1 Wyniki modelu oscylatora dla wartości początkowych

3.1.1 Obliczenie pakietem SymPy

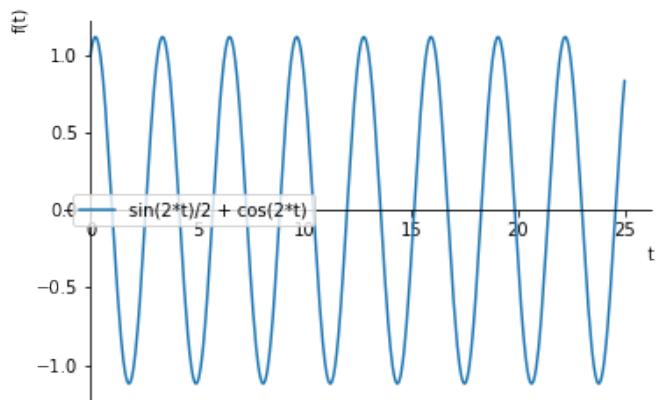


Figure 2: Wykres przedstawiający przebieg modelu dla wartości początkowych

3.1.2 Obliczenie pakietem SciPy

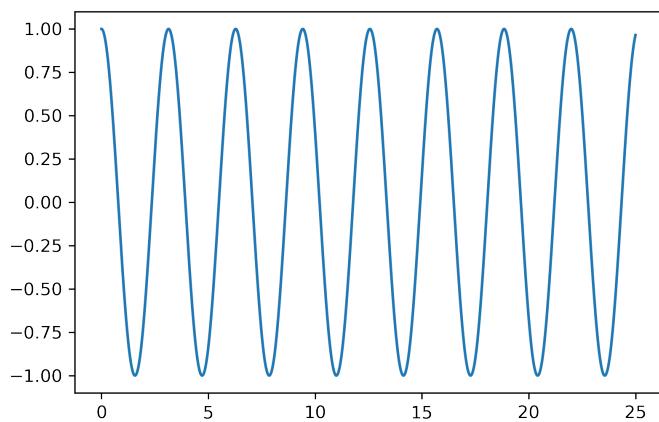


Figure 3: Wykres przedstawiający przebieg modelu dla wartości początkowych

3.2 Wyniki modelu ze zmiennym parametrem $x(t)$

3.2.1 Obliczenie pakietem SymPy

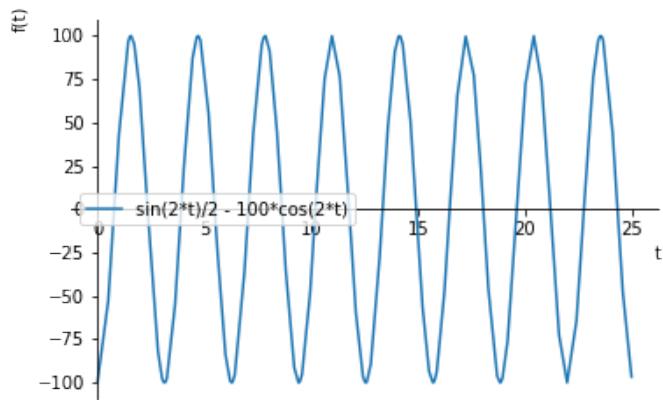


Figure 4: Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $x = -100$ metoda SymPy

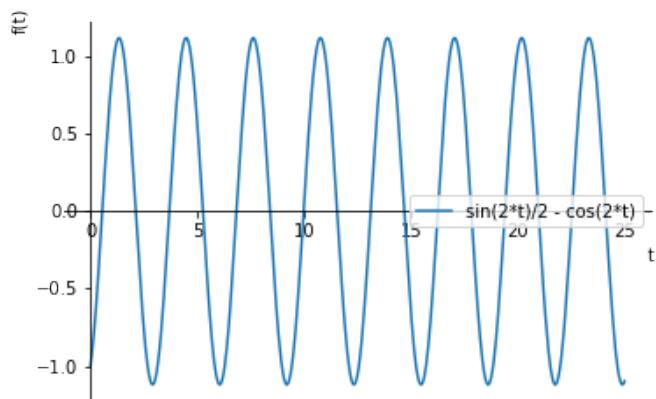
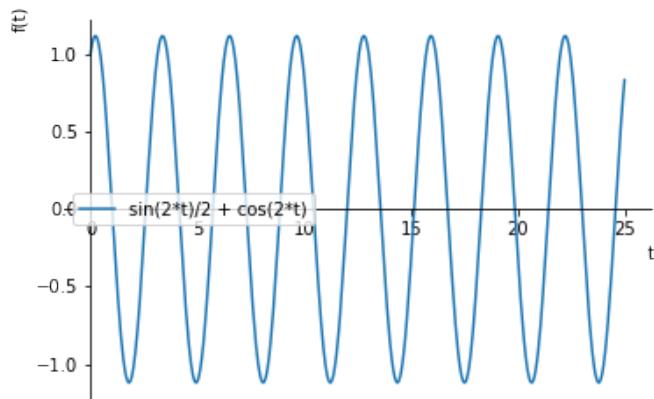
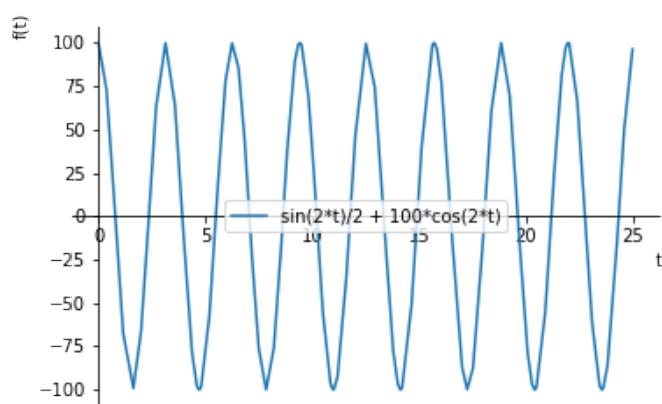


Figure 5: Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $x = -1$ metoda SymPy

Figure 6: Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $x = 1$ metoda SymPyFigure 7: Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $x = 100$ metoda SymPy

3.2.2 Obliczenie pakietem SciPy

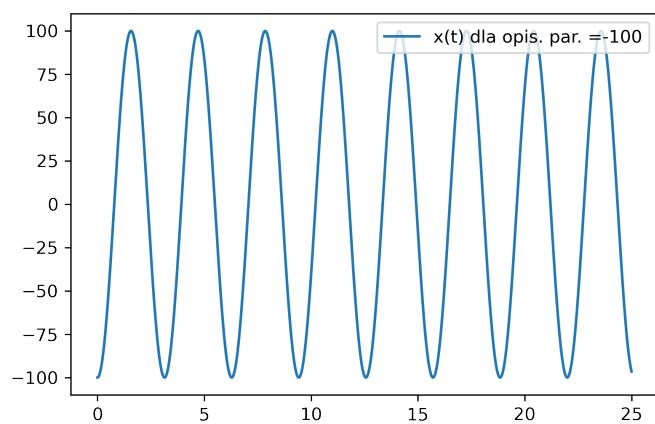


Figure 8: Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $x = -100$ metoda Scipy

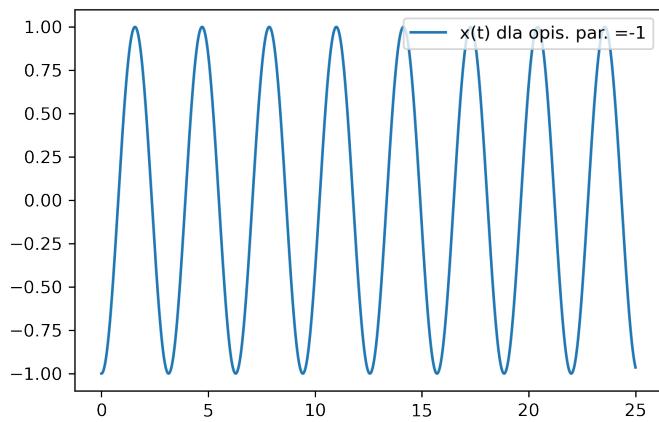
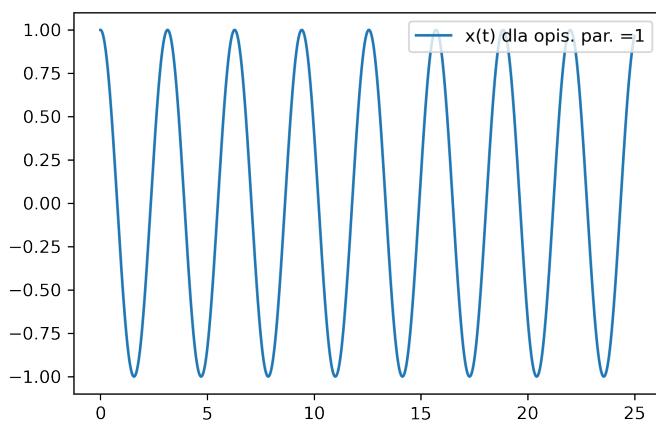
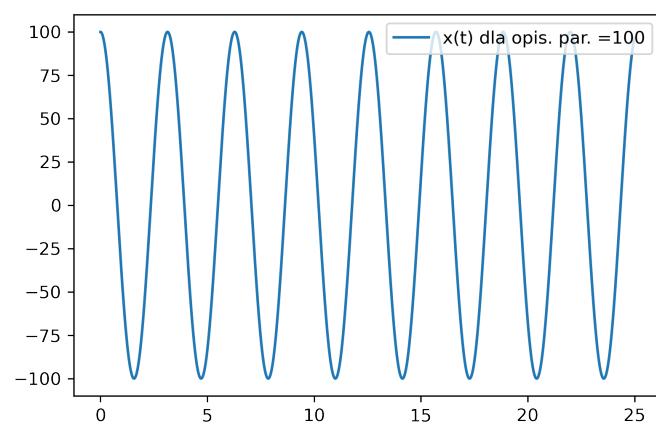


Figure 9: Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $x = -1$ metoda Scipy

Figure 10: Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $x = 1$ metoda ScipyFigure 11: Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $x = 100$ metoda Scipy

3.3 Model oscylatora ze zmiennym parametrem $\frac{dx}{dt}x(t)$

3.3.1 Obliczenie pakietem SymPy

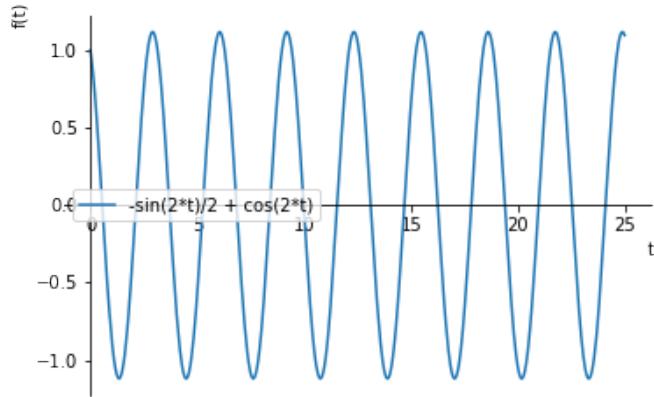


Figure 12: Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\frac{dx}{dt}x(t) = -1$ metoda SymPy

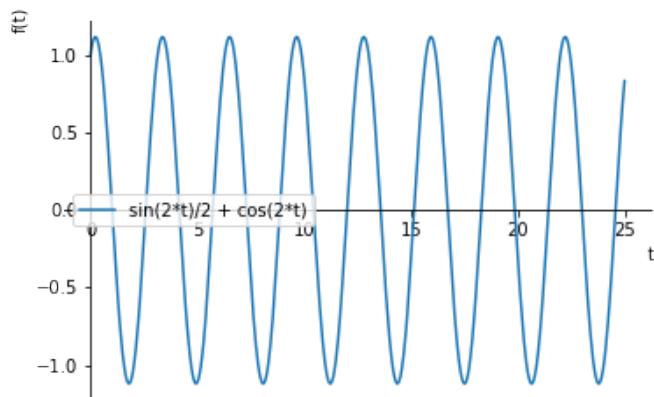


Figure 13: Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\frac{dx}{dt}x(t) = 1$ metoda SymPy

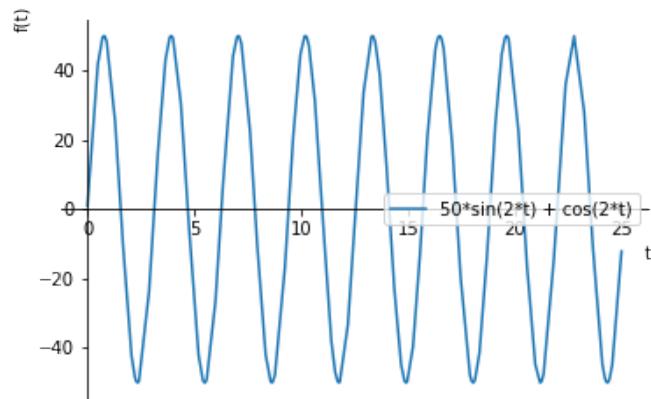


Figure 14: Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\frac{dx}{dt}x(t) = 100$ metoda SymPy

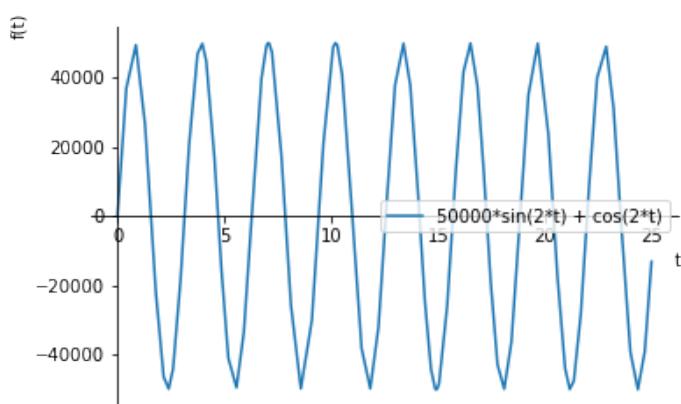


Figure 15: Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\frac{dx}{dt}x(t) = 100000$ metoda SymPy

3.3.2 Obliczenie pakietem SciPy

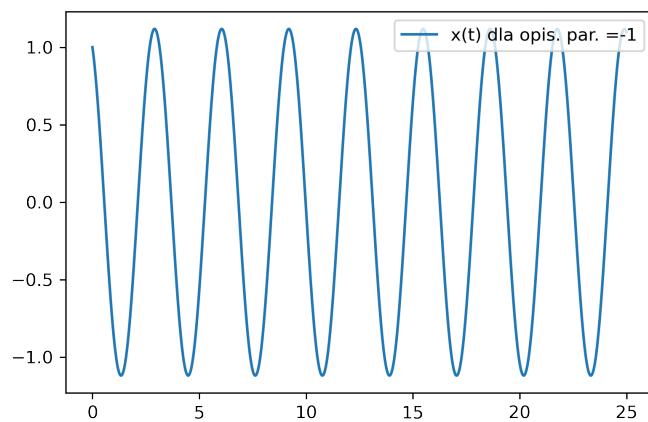


Figure 16: Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\frac{dx}{dt}x(t) = -1$ metoda Scipy

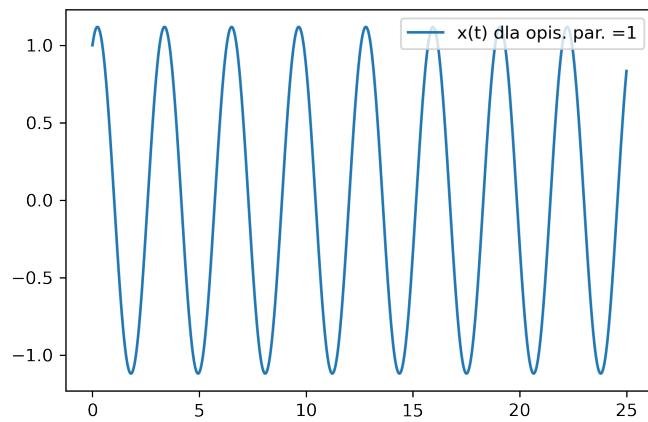


Figure 17: Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\frac{dx}{dt}x(t) = 1$ metoda Scipy

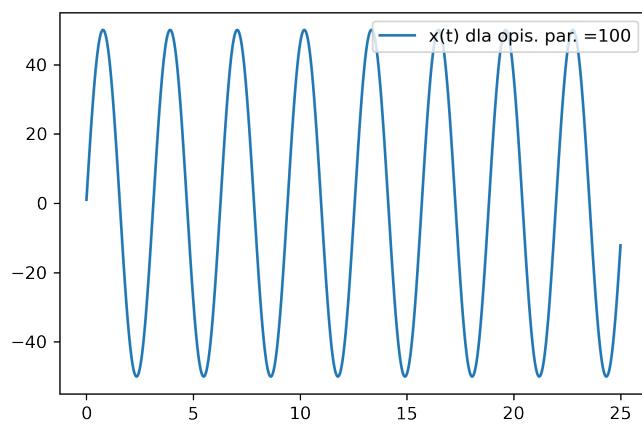


Figure 18: Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\frac{dx}{dt}x(t) = 100$ metoda Scipy

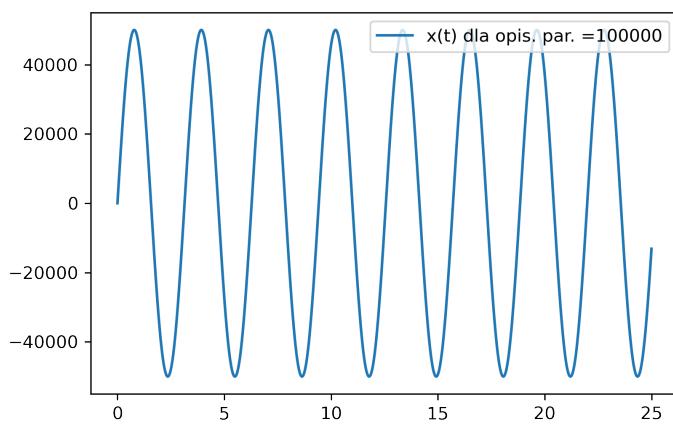


Figure 19: Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\frac{dx}{dt}x(t) = 100000$ metoda Scipy

3.4 Wyniki modelu ze zmiennym parametrem ξ

3.4.1 Obliczenie pakietem SymPy

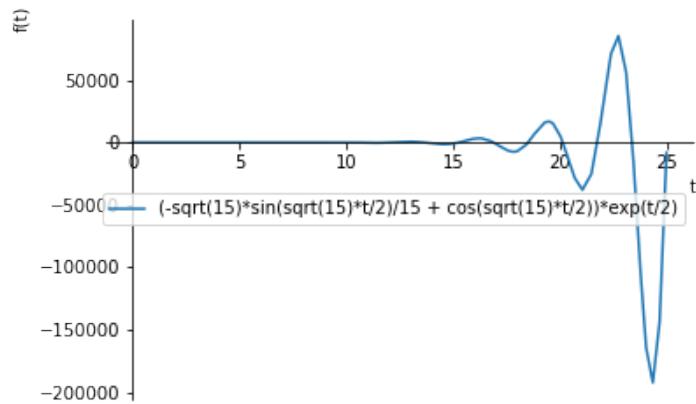


Figure 20: Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\xi = -1$ metoda SymPy

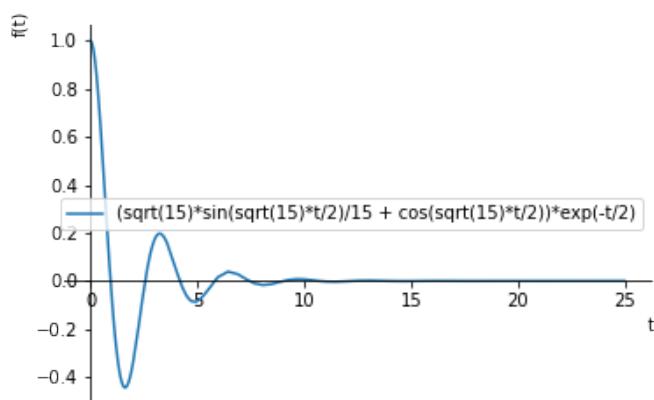


Figure 21: Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\xi = 1$ metoda SymPy

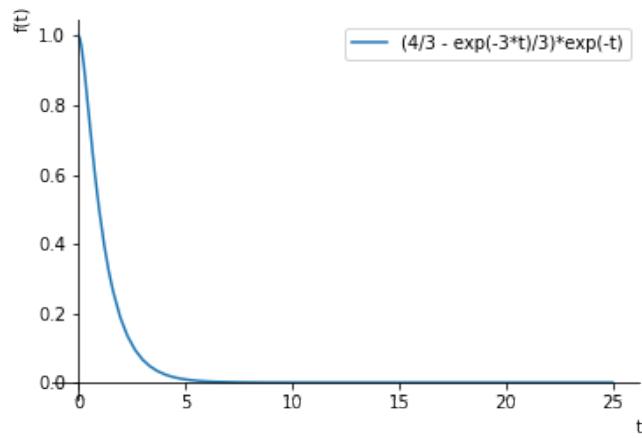


Figure 22: Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\xi = 5$ metoda SymPy

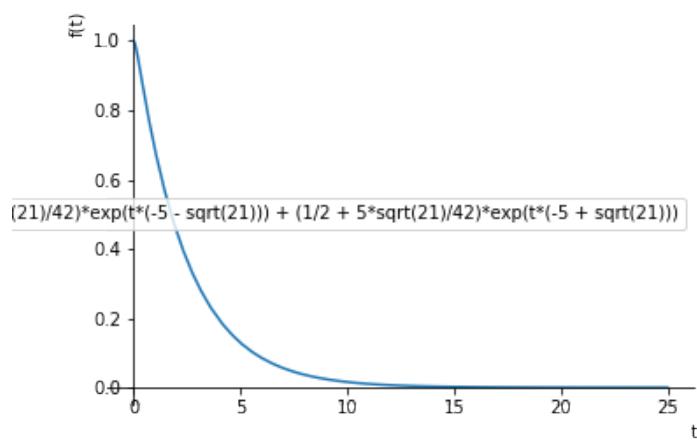


Figure 23: Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\xi = 10$ metoda SymPy

3.4.2 Obliczenie pakietem SciPy

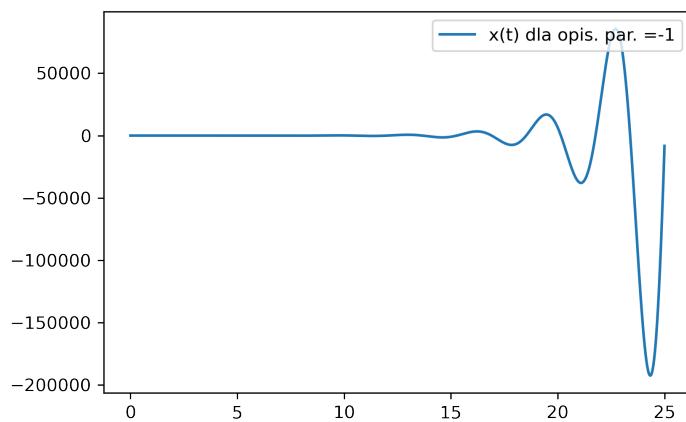


Figure 24: Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\xi = -1$ metoda Scipy

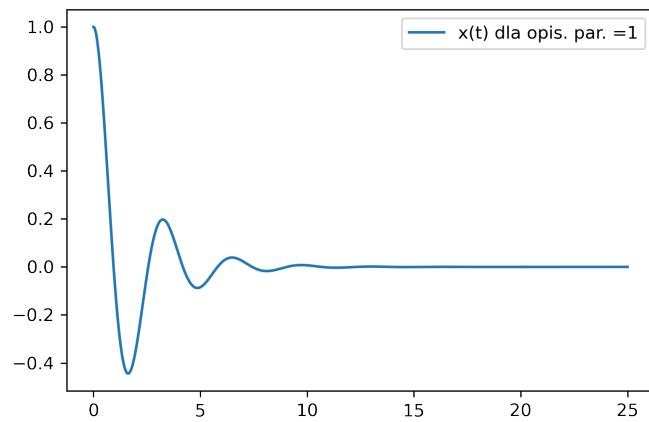


Figure 25: Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\xi = 1$ metoda Scipy

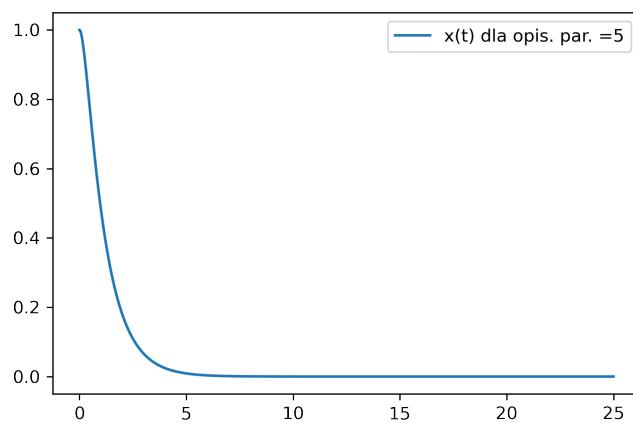


Figure 26: Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\xi = 5$ metoda Scipy

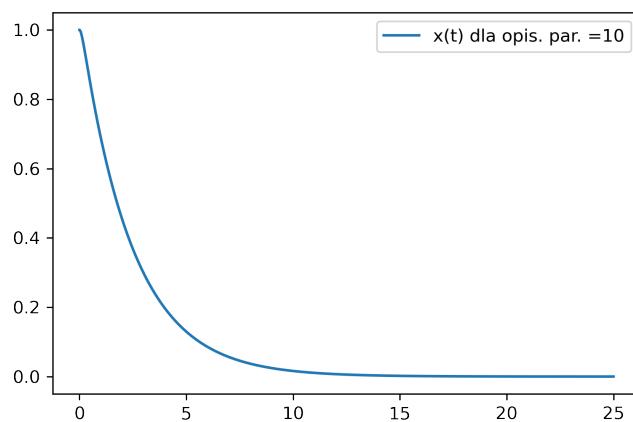


Figure 27: Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\xi = 10$ metoda Scipy

Portret fazowy dla parametru ξ

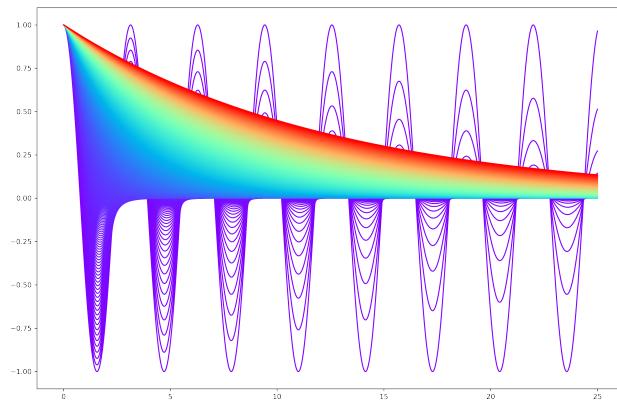


Figure 28: Portret fazowy modelu ukazujący zmiennosć parametru $\xi \in [0; 50]$ dla próby $= 5000$

3.5 Wyniki modelu ze zmiennym parametrem ω_0

3.5.1 Obliczenie pakietem SymPy

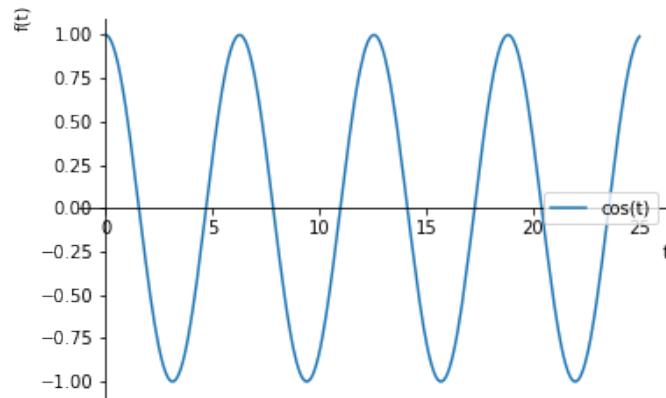
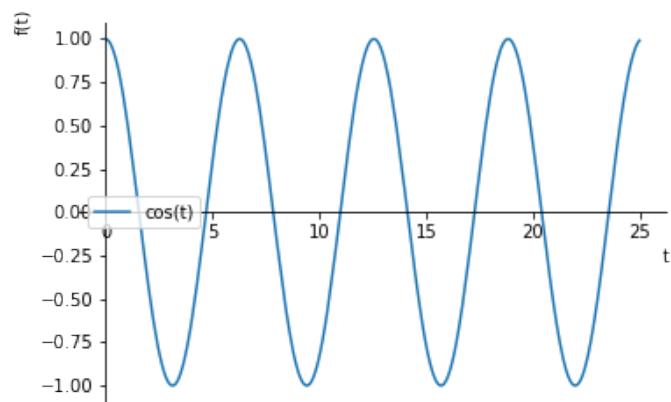
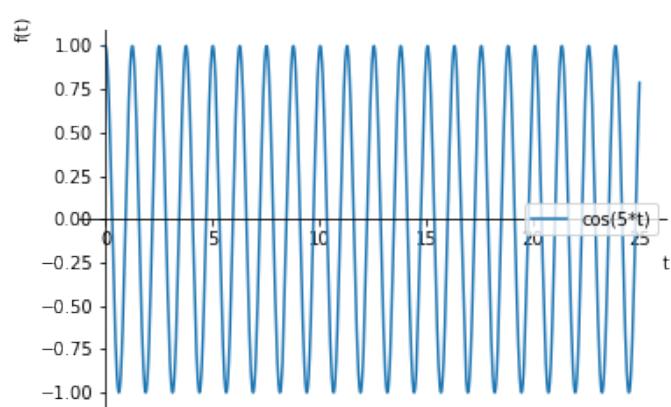


Figure 29: Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\omega_0 = -1$ metoda SymPy

Figure 30: Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\omega_0 = 1$ metoda SymPyFigure 31: Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\omega_0 = 5$ metoda SymPy

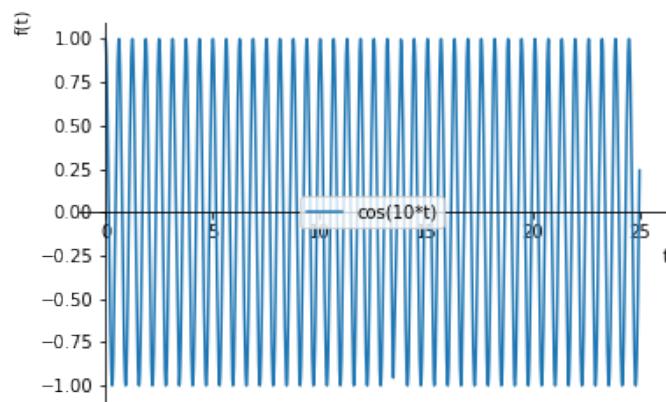


Figure 32: Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\omega_0 = 10$ metoda SymPy

3.5.2 Obliczenie pakietem SciPy

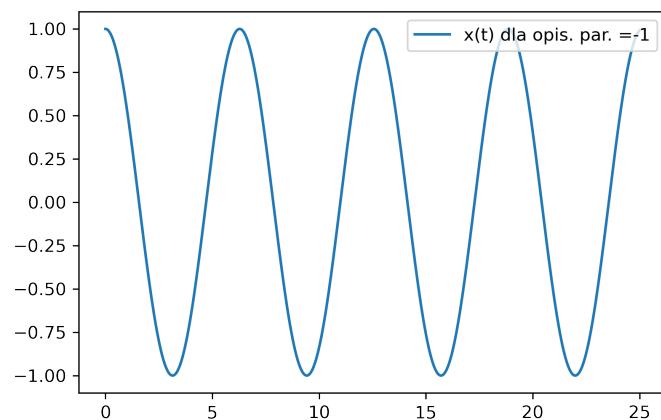


Figure 33: Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\omega_0 = -1$ metoda Scipy

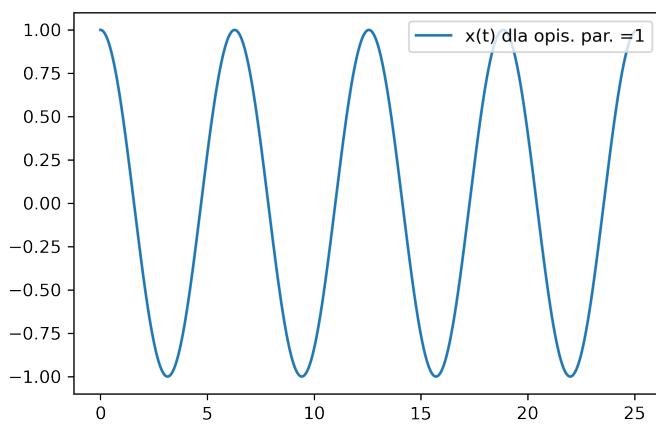


Figure 34: Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\omega_0 = 1$ metoda Scipy

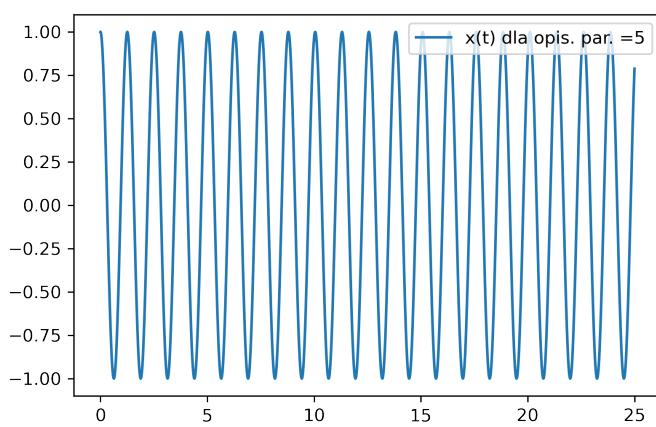


Figure 35: Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\omega_0 = 5$ metoda Scipy

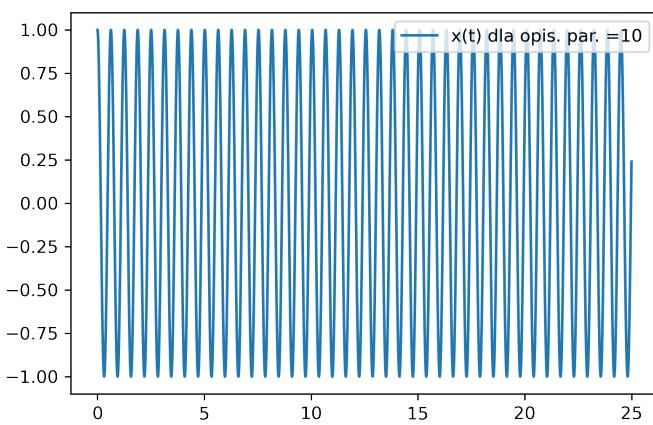


Figure 36: Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\omega_0 = 10$ metoda Scipy

Portret fazowy dla parametru ω

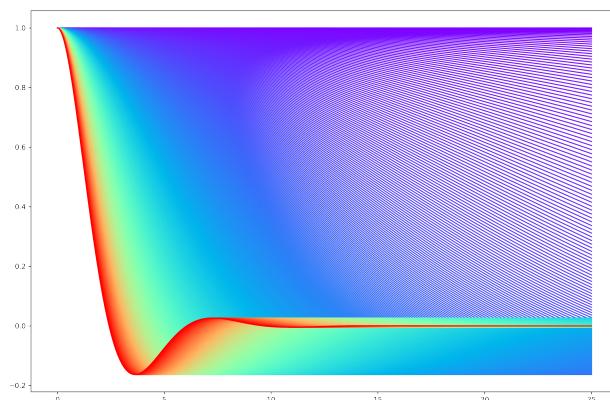


Figure 37: Portret fazowy przedstawiający zmienność parametru $\omega \in [0; 0.5]$ dla próby
 $= 100$

3.6 Wynik modelu oscylatora ze zmiennym parametrem dt

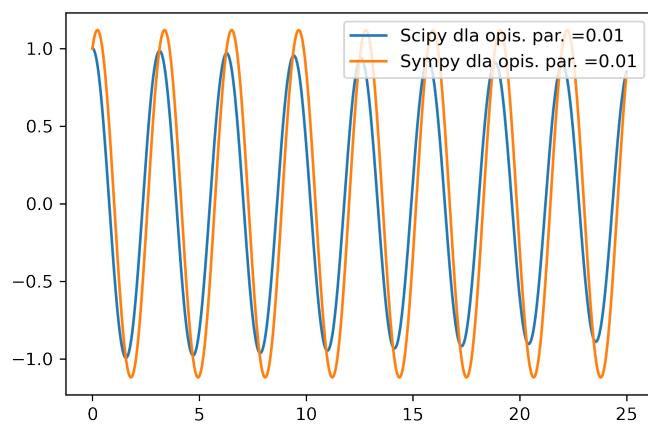


Figure 38: Wykres porównujący przebieg modelu dla $dt = 0.01$ model Scipy oraz SymPy

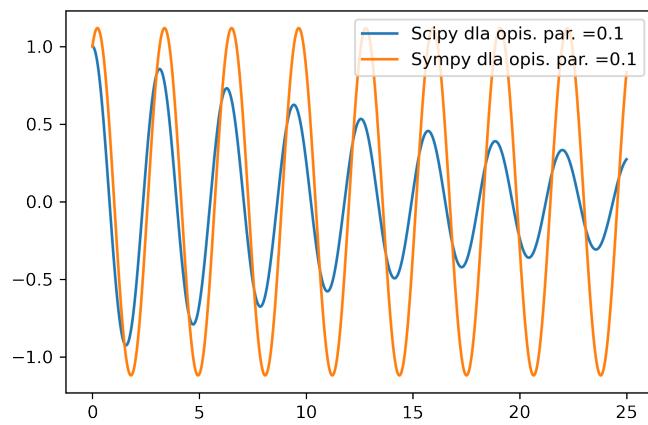


Figure 39: Wykres porównujący przebieg modelu dla $dt = 0.1$ model Scipy oraz SymPy

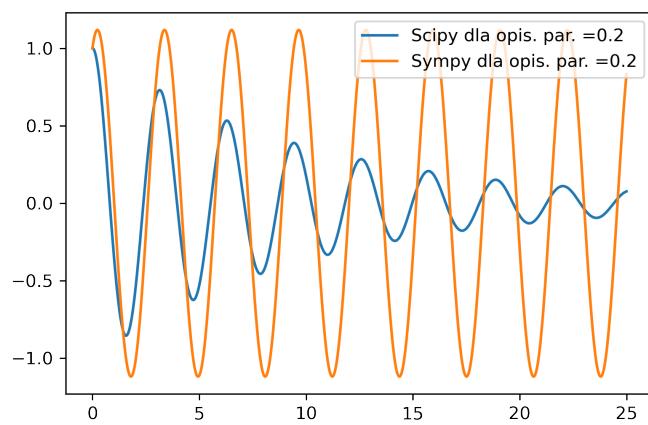


Figure 40: Wykres porównujący przebieg modelu dla $dt = 0.2$ model Scipy oraz SymPy

Portrety fazowe dla parametru dt

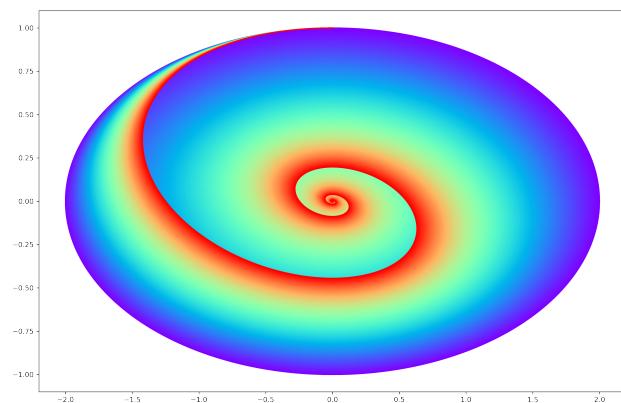


Figure 41: Portret fazowy ukazujący zmienność parametru dt wykonany wprost z definicji

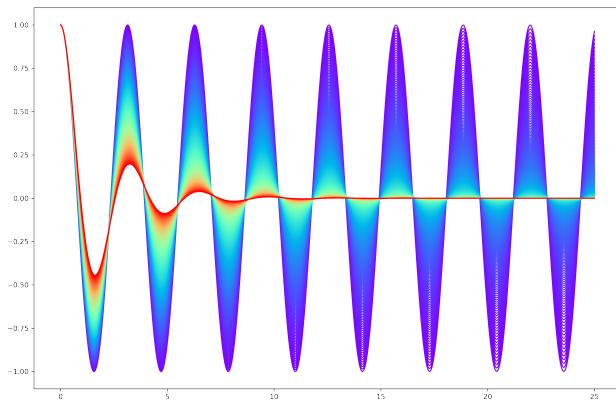


Figure 42: Portret fazowy ukazujący zmienność parametru $dt \in [0.0001; 1]$ dla próby = 500

3.6.1 Statystyki opisowe oraz błędy

Porównanie wyników końcowych zostanie przedstawione przy użyciu średniego błędu kwadratowego oraz średniego błędu bezwzględnego.

Średni błąd kwadratowy definiowany jest jako:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (p(x_i) - f_i)^2 \quad (5)$$

gdzie:

- x - argument położenia
- $p(x)$ - wartość funkcji aproksymującej
- $f(x)$ - wartość funkcji aproksymowanej
- n - ilość elementów w przedziale

Średni błąd bezwzględny definiowany jest jako

$$\frac{\sum_{i=1}^n |(p(x_i) - f(x_i)|}{n} \quad (6)$$

3.6.2 Kod programu do obliczeń statystycznych

```
1 tab = [0.001,0.1,0.3,0.4,0.7]
2 for i in tab:
3     x_0 =1
4     dx_x =0
5     xi = i
6     omega = 2
7     sila_oporu = 0
8     m=200
9     time = np.arange(0,25,i)
10    wart_poczatkowe = [x_0,dx_x]
11    diff = np.diff(wart_poczatkowe)
12    solution_1 = odeint(oscylator_harmoniczny_scipy,wart_poczatkowe,time).T[0]
13
14
15    metoda_scipy = solution_1.mean()
16    print(metoda_scipy)
17    t,xi,omega,sila_oporu,m = symbols("t,xi,omega,sila_oporu,m")
18    x= Function('x')
19    xi = 0
20    omega = 2
21    sila_oporu = 0
22    m=10
23    eq=Eq(x(t).diff(t,2)+xi*x(t).diff(t,1)+(omega**2)*x(t),sila_oporu/m)
24    solution = dsolve(eq,ics={x(0):1,x(t).diff(t,1).subs(t,0):1})
25
26    metoda_sympy = (np.sin(2*time)/2+np.cos(2*time)).mean()
27
28
29    blad_kwadratowy = (metoda_sympy - metoda_scipy)**2
30    blad_bezwzgledny = abs((metoda_sympy - metoda_scipy))
31    print(f"Błąd kwadratowy dla dt={i} wynosi {blad_kwadratowy.round(2)}")
32    print(f"Błąd bezwzględny dla dt={i} wynosi {blad_bezwzgledny.round(2)}")
33    print(f"Błąd aproksymacji dla dt={i} wynosi {((blad_bezwzgledny)*100).round(2)}%")
```

Table 1: Tabela porównująca średnie błędy danych metod obliczeniowych

Krok symulacji	Średni błąd kwadratowy	Średni błąd bezwzględny	Błąd aproksymacji
0.001	0.00	0.00	0.03%
0.1	0.00	0.01	0.51%
0.3	0.00	0.01	0.64%
0.4	0.00	0.01	0.97%
0.7	0.00	0.02	1.94%
0.8	0.00	0.01	0.84%
0.9	0.00	0.03	2.6%

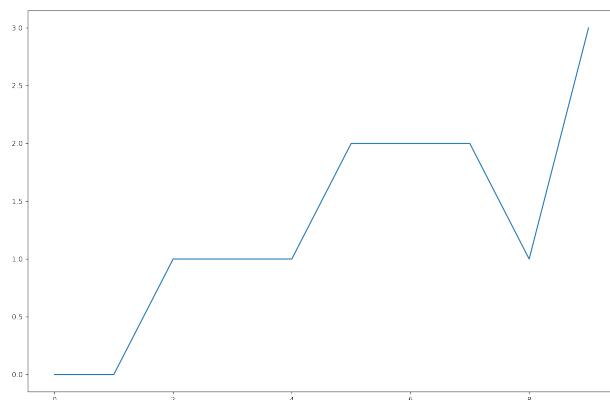


Figure 43: Wykres przedstawiający błąd obliczeniowy dla parametru $dt \in [0.0001; 0.9]$
dla próby = 10

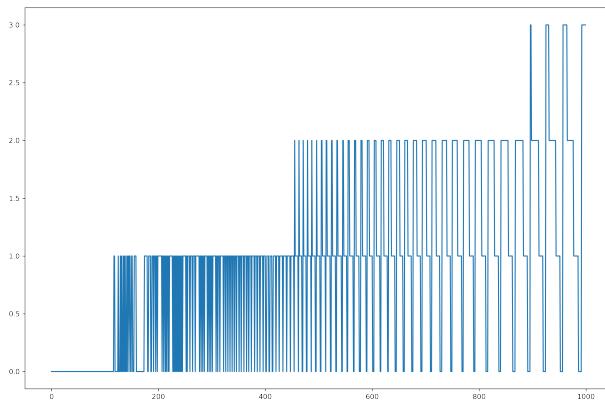


Figure 44: Wykres przedstawiający błąd obliczeniowy dla parametru $dt \in [0.0001; 5]$ dla próby = 1000

4 Wnioski

Po obliczeniu równania różniczkowego w metodzie SymPy, otrzymujemy równanie opisane wzorem:

$$4x(t) + \frac{d^2x}{dt^2}x(t) = 0 \quad (7)$$

Znając wartości początkowe, tj. $x(0) = 1$ oraz $\frac{dx}{dt} = 0$ program tworzy równanie:

$$x(t) = \frac{\sin(2t)}{2} + \cos(2t) \quad (8)$$

Podany model dynamiczny jest względnie systemem stabilnym, świadczy o tym fakt, że możemy obliczyć jego rozwiązania przy pomocy metod analitycznych, czyli biblioteki SymPy, która przedstawia dokładne wyniki dla podanych zmiennych wejściowych. W przypadku metody numerycznej - SciPy, wyniki zależne były od kroku symulacji, który nadawał szczegółowość danemu wykresowi funkcji.

Zmiana parametru $x(t)$ ukazywała podobne właściwości w przypadku obu metod obliczeniowych, dla wartości $x(t) < 0$ wykresem była funkcja odwrotna do funkcji oblicznej z parametrami początkowymi, a dla wartości $x(t) > 0$ wykresy nie zmieniały drastycznie swoich przebiegów - w przypadku metody numerycznej, model był obo-

jetny na jakąkolwiek zmianę ww. parametru, jednakże metoda analityczna ukazywała niewielkie zmiany w przebiegu funkcji - zmiana przedziału monotoniczności przechodziła gwałtownie. Zmiana ta nie miała wpływu na częstotliwość występowania kolejnych powtórzeń funkcji. Zerując dany parametr otrzymujemy funkcję liniową. Zmieniając parametr $\frac{dx}{dt}x(t)$ dojdziemy do tych samych wniosków, system reaguje identycznie jak w przypadku zmiany parametru $x(t)$.

Zmieniając stałą sprężystości, czyli parametr ξ , przedstawiony model zamienia się w model oscylatora harmonicznego wytłumionego, w którym sygnał w chwili przebiegu czasu t słabnie, częstotliwość dąży do 0. Oscylator reaguje gwałtownie na zmianę stanu podanego parametru. Od wartości $\xi \approx 3$ wykres ukazuje funkcję symetryczną względem osi OY do funkcji eksponencjalnej, gdzie $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$. Portret fazowy omawianego parametru na przestrzeni $\xi \in [0; 50]$ dla próby = 5000, ukazuje dążenie do liniowości wykresu. Dla początkowych wartości z przedziału, częstotliwość jest wysoka, jednakże z każdą następną iteracją częstotliwość maleje. Mapa cieplna ukazuje zmieniającą się amplitudę, kolory zimne opisują model, gdzie parametr ξ jest niewielki, zaś cieplejsze ukazują wzrost tego parametru na przestrzeni czasu.

Przy zmianie parametru ω zauważymy, że drgania, pomimo tego, że odbywają się z daną częstością ω siły wymuszającej to amplituda i faza zależy do relacji pomiędzy częstością wymuszenia ω a współczynnikiem tłumienia. Pomimo wprowadzenia wspomnianego współczynnika tłumienia ruch jest wciąż periodyczny, amplituda drgań nie jest stała, zaś częstotliwość jest funkcją czasu dającą do ∞ , gdy $t \rightarrow \infty$. Portret fazowy omawianego parametru na przestrzeni $\omega_0 \in [0; 0.5]$ dla próby = 100, ukazuje właściwości odwrotne do właściwości opisanych w przypadku zmiany parametru ξ - wykres dla początkowych wartości z danego przedziału jest liniowy, zaś zwiększające się wartości parametru ω powodują zwiększenie się amplitudy, co za tym idzie utworzenie przebiegu funkcji trygonometrycznej sinus/cosinus.

Zmiana wartości parametru kroku symulacji jest możliwa jedynie dla biblioteki SciPy. Wybieranie coraz większych kroków symulacji, powoduje utworzenie przebiegu wykresu opisującego oscylator harmoniczny wytłumiony, gdzie $\lim_{amplituda \rightarrow \infty} f(t) = 0$. Tworząc

portret fazowy omawianego parametru na przedziale $dt \in [0.00001; 1]$ dla próby = 500, zauważymy, że wykres się linearyzuje, wynika to z rosnących wartości kroków symulacji. Im mniejszy krok, tym amplituda modelu jest większa. Analizując portret fazowy wykonyany wprost z definicji, dostaniemy uproszczoną interpretację dynamiki danego systemu - system jest względnie stabilny, wynika to z kształtu oraz przebiegu środkowej spirali.

Błąd obliczeniowy dla zadanych parametrów dt przedstawionych na wykresach jest funkcją nierosnącą, która zwiększa swoją wartość dwukrotnie w sposób cykliczny.

Bibliografia

- [1] Anna Czamplik. Praktyczne wprowadzenie do opisu, analizy i symulacji dynamiki obiektów. skrypt na zajęcia [Online].
- [2] Zbigniew Kąkol and Jan Żukowski. „podstawy fizyki”. online.
- [3] Robert Resnick. *Fizyka. T. 2 / David Halliday, Robert Resnick ; [z jęz. ang. tl. Teresa Kaniowska, Wojciech Ratyński]*. Wydaw. Naukowe PWN, Warszawa, wyd. 12 dodr. edition, 2002.
- [4] Matthew Schwartz. Simple harmonic oscillators. OpenScholar - Harvard University, 2014 [Online].

List of Figures

1	Ilustracja przedstawiająca działanie modelu na przykładzie masy na sprężynie	3
2	Wykres przedstawiający przebieg modelu dla wartości początkowych	7
3	Wykres przedstawiający przebieg modelu dla wartości początkowych	7
4	Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $x = -100$ metoda SymPy	8
5	Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $x = -1$ metoda SymPy	8
6	Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $x = 1$ metoda SymPy	9
7	Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $x = 100$ metoda SymPy	9

8	Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $x = -100$ metoda Scipy	10
9	Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $x = -1$ metoda Scipy	10
10	Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $x = 1$ metoda Scipy	11
11	Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $x = 100$ metoda Scipy	11
12	Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\frac{dx}{dt}x(t) = -1$ metoda SymPy . .	12
13	Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\frac{dx}{dt}x(t) = 1$ metoda SymPy . . .	12
14	Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\frac{dx}{dt}x(t) = 100$ metoda SymPy . .	13
15	Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\frac{dx}{dt}x(t) = 100000$ metoda SymPy	13
16	Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\frac{dx}{dt}x(t) = -1$ metoda Scipy . . .	14
17	Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\frac{dx}{dt}x(t) = 1$ metoda Scipy	14
18	Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\frac{dx}{dt}x(t) = 100$ metoda Scipy . . .	15
19	Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\frac{dx}{dt}x(t) = 100000$ metoda Scipy .	15
20	Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\xi = -1$ metoda SymPy	16
21	Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\xi = 1$ metoda SymPy	16
22	Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\xi = 5$ metoda SymPy	17
23	Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\xi = 10$ metoda SymPy	17
24	Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\xi = -1$ metoda Scipy	18
25	Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\xi = 1$ metoda Scipy	18
26	Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\xi = 5$ metoda Scipy	19
27	Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\xi = 10$ metoda Scipy	19
28	Portret fazowy modelu ukazujący zmienność parametru $\xi \in [0; 50]$ dla próby $=5000$	20
29	Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\omega_0 = -1$ metoda SymPy	20
30	Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\omega_0 = 1$ metoda SymPy	21
31	Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\omega_0 = 5$ metoda SymPy	21
32	Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\omega_0 = 10$ metoda SymPy	22
33	Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\omega_0 = -1$ metoda Scipy	22
34	Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\omega_0 = 1$ metoda Scipy	23
35	Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\omega_0 = 5$ metoda Scipy	23
36	Wykres przedstawiający przebieg modelu dla $\omega_0 = 10$ metoda Scipy	24

37	Portret fazowy przedstawiający zmienność parametru $\omega \in [0; 0.5]$ dla próby = 100	24
38	Wykres porównujący przebieg modelu dla $dt = 0.01$ model Scipy oraz SymPy	25
39	Wykres porównujący przebieg modelu dla $dt = 0.1$ model Scipy oraz SymPy	25
40	Wykres porównujący przebieg modelu dla $dt = 0.2$ model Scipy oraz SymPy	26
41	Portret fazowy ukazujący zmienność parametru dt wykonany wprost z definicji	26
42	Portret fazowy ukazujący zmienność parametru $dt \in [0.0001; 1]$ dla próby = 500	27
43	Wykres przedstawiający błąd obliczeniowy dla parametru $dt \in [0.0001; 0.9]$ dla próby = 10	29
44	Wykres przedstawiający błąd obliczeniowy dla parametru $dt \in [0.0001; 5]$ dla próby = 1000	30

List of Tables

1	Tabela porównująca średnie błędy danych metod obliczeniowych	29
---	--	----