

Przesło łukowe wiaduktu kolejowego. Wpływ  
schematu statycznego i rozwiązań konstrukcyjnych  
na własności dynamiczne.

Przemysław Kalitowski

2 maja 2021

# Spis treści

<b>Wprowadzenie</b>	<b>5</b>
<b>1 Kolejowe, łukowe przęsła mostowe</b>	<b>6</b>
1.1 Przegląd . . . . .	6
1.2 Układy statyczne (pomosty, wieszaki, łuki, ściągi) . . . . .	6
1.3 MES + KALIBRAJCA . . . . .	6
1.4 Dynamiczne obciążenie kolejowe . . . . .	6
1.4.1 Oddziaływanie dynamiczne taboru na mostach kolejowych . . . . .	6
1.4.2 Efekty dynamiczne w mostach kolejowych . . . . .	9
1.4.3 Przepisy normowe i wytyczne . . . . .	11
<b>2 Dynamiczna analiza konstrukcji</b>	<b>24</b>
2.1 Wiadomości wstępne . . . . .	24
2.2 Klasyfikacja metod analizy modalnej . . . . .	26
2.3 Modele teoretyczne układów dynamicznych . . . . .	28
2.3.1 Zagadnienie własne . . . . .	29
2.3.2 Transformacja do współrzędnych normalnych . . . . .	32
2.3.3 Odpowiedź systemów dynamicznych o jednym stopniu swobody	32
2.3.4 Odpowiedź systemów dynamicznych o skończonej liczbie stopni swobody (MDOF) . . . . .	35
2.3.5 MES? . . . . .	38
2.3.6 Mała dawka tłumienia . . . . .	38
<b>3 Identyfikacja cech dynamicznych konstrukcji</b>	<b>41</b>
3.1 Operacyjna analiza modalna (OMA) . . . . .	41
3.1.1 Koncepcja OMA . . . . .	41
3.1.2 Metody operacyjnej analizy modalnej . . . . .	42
3.2 Przykłady zastosowań (literatura i własne) . . . . .	45
3.3 Metoda NExT-ERA . . . . .	45
3.3.1 Funkcje korelacji, a odpowiedź swobodna układu . . . . .	45
3.3.2 Eigenystem Realization Algorithm . . . . .	52
3.4 Aplikacja do identyfikacji modalnej OMA . . . . .	60
3.4.1 Algorytm programu . . . . .	60
3.4.2 Elementy oceny poprawności rozwiązania . . . . .	62
3.4.3 Testy numeryczne metody NEXT-ERA . . . . .	65
3.4.4 Testy eksperymentalne metody NEXT-ERA . . . . .	69
3.5 Podsumowanie testów metody NExT-ERA . . . . .	76

<b>4 Optymalizacja metodą roju cząstek - Particle Swarm Optimizaton</b>	<b>78</b>
4.1 Klasyfikacja problemów i metod optymalizacji	79
4.2 Określenie funkcji celu i wybór metody optymalizacji	81
4.3 Particle Swarm Optimization	81
4.4 Zastosowania optymalizacji algorytmem PSO	88
4.4.1 Przykład teoretyczny	88
4.5 Optymalizacja wielokryterialna	90
4.6 Optymalizacja wielokryterialna rojem cząstek	93
4.6.1 Przykład teoretyczny	96
4.7 Optymalizacja wspomagana uczeniem maszynowym	98
<b>5 Wiadukt WK2 w ciągu Pomorskiej Kolei Metropolitalnej</b>	<b>100</b>
5.1 Charakterystyka obiektu	100
5.2 Budowa modelu numerycznego	102
5.3 Identyfikacja modalna wiaduktu WK2	106
5.4 Kalibracja modelu numerycznego z wykorzystaniem PSO	116
5.4.1 Funkcja celu	118
5.4.2 Zmienne projektowe	119
5.4.3 Algorytm kalibracji	119
5.4.4 Rezultaty kalibracji	121
5.5 Wpływ wymiarów elementów konstrukcyjnych na odpowiedź dynamiczną przęsła	125
5.5.1 Model uproszczony do analizy dynamicznej	127
5.5.2 Założenia do optymalizacji	129
5.5.3 Algorytm rozwiązania problemu	131
5.6 Rezultaty optymalizacji	132
5.6.1 Wieszaki Proste - prędkość maksymalna 160 km/h	135
5.6.2 Wieszaki Proste - prędkość maksymalna 200 km/h	137
5.6.3 Wieszaki Proste - prędkość maksymalna 300 km/h	139
5.6.4 Wieszaki Ukośne - prędkość maksymalna 160 km/h	141
5.6.5 Wieszaki Ukośne - prędkość maksymalna 200 km/h	143
5.6.6 Wieszaki Ukośne - prędkość maksymalna 300 km/h	145
5.6.7 Wieszaki Network - prędkość maksymalna 160 km/h	147
5.6.8 Wieszaki Network - prędkość maksymalna 200 km/h	149
5.6.9 Wieszaki Network - prędkość maksymalna 300 km/h	151
<b>6 Podsumowanie i wnioski</b>	<b>153</b>

# Symbole i oznaczenia

# Wprowadzenie

# Rozdział 1

## Kolejowe, łukowe przesła mostowe

### 1.1 Przegląd

### 1.2 Układy statyczne (pomosty, wieszaki, łuki, ściągi)

### 1.3 MES + KALIBRAJCA

### 1.4 Dynamiczne obciążenie kolejowe

Ryzyko nadmiernych drgań mostów kolejowych jest rozpatrywane od samych początków budowy dróg szynowych w Anglii na początku XIX wieku (Ladislav 1996). Historię tą zwięźle przedstawił w swojej pracy Szafranowski 2013, opierając się na obszernych studiach literatury. Podsumowując doświadczenia naukowców i inżynierów, poza wyjątkowymi przypadkami wykolejeń i uderzeń pociągów w elementy konstrukcyjne, wywołanie niebezpiecznych amplitud drgań mostów związane jest głównie ze zjawiskiem rezonansu. Rezonans mechaniczny może wystąpić w przypadku kiedy pojawia się obciążenie cykliczne, którego częstotliwość oddziaływanego pokrywa się z częstotliwością drgań własnych konstrukcji mostu. Kiedy obciążenie jest długotrwałe i w układzie nie ma tłumienia amplitudy drgań mogą teoretycznie rosnąć w nieskończoność. W rzeczywistych konstrukcjach, nie ma możliwości bezograniczonego wzrostu amplitud, z uwagi na tłumienie układu i skończony czas oddziaływania obciążen ruchomych. Niemniej jednak konstrukcje mostowe charakteryzują się zazwyczaj małym tłumieniem, a obciążenia kolejowe mogą charakteryzować się stosunkowo długim czasem oddziaływania o stałą częstotliwością wymuszenia. W połączeniu z ciągłym rozwojem zarówno taboru kolejowego jak i dróg szynowych, problem wprowadzenia mostu kolejowego w drgania ewoluje i wymaga od inżynierów ciągłej pracy badawczej.

#### 1.4.1 Oddziaływanie dynamiczne taboru na mostach kolejowych

W trakcie bogatej historii badań nad interakcją taboru kolejowego i konstrukcji mostów rozpoznano kilka oddziaływań charakteryzujących się cyklicznością i długim czasem działania, co spełnia znamiona ryzyka rezonansu (Frýba 2001). Warto zaznaczyć, że ryzyko to nie dotyczy jedynie oddziaływań pionowych, ale również

poprzecznych do osi toru. Opisując kompleksowo zagadnienie, należy rozpocząć od historycznych oddziaływań, niewystępujących już z uwagi na rozwój techniki. Pierwszym z nich był efekt niedokładnego wyważenia kół osi napędowych lokomotywy parowej. Koło takie posiada przeciwwagę dla elementów połączenia z wiązarami łączącymi koło z osią silnikową. W przypadku braku idealnego wyważenia, koło takie oddziałuje na szynę sinusoidalną siłą. Drugie historyczne oddziaływanie było związane z występowaniem połączeń szyn na obiekcie mostowym. Równo i blisko rozstawione koła przejeżdżające przez przerwę połączenia szyn wywoływały cykliczne uderzenie i w konsekwencji drgania całej konstrukcji. To oddziaływanie również nie występuje już w rzeczywistości, ponieważ obecne przepisy zabraniają łączenia szyn na obiektach mostowych.

Spośród obecnie występujących oddziaływań pierwszą przyczyną pośrednią są duże i ciągle rosnące prędkości eksploatacyjne pociągów. Przy równomiernym lub niemal równomiernym rozstawie osi i przy stałej prędkości przejazdu, siły przekazywane przez koła na szyny pojawiają się okresowo na obiekcie. Istnieje więc ryzyko, że przy rozstawie osi  $d$  i przy prędkości taboru  $c$  czas potrzebny na pojawienie się kolejnych osi na obiekcie  $t$  będzie równy okresowi drgań  $T_i$ . Okres  $T_i$  odpowiada częstotliwości drgań własnych konstrukcji  $T_i = \frac{1}{f_i}$ . Jednakże wzbudzenie może nastąpić również dla wielokrotności (lub ułamka)  $k$  okresu drgań. W takim przypadku kolejne siły przykładowe są do obiektu co  $k$ -te wychylenie konstrukcji z położenia równowagi. Prędkość związana z niekorzystną koincydencją  $t = kT_i$  nazywana jest prędkością krytyczną (*eng. critical speed*). Równaniem (1.1) opisano równość czasu  $t$  i okresu  $T_i$ :

$$t = \frac{d}{c} = \frac{k}{f_i} = T_i \quad \text{dla } \begin{cases} i = 1, 2, 3 \dots \\ k = 1, 2 \dots, 1/2, 1/3, \dots \end{cases} \quad (1.1)$$

Na podstawie równania (1.1) wyznaczyć można prędkość krytyczną  $c_{cr}$ :

$$c_{cr} = \frac{df_i}{k} \quad \text{dla } \begin{cases} i = 1, 2, 3 \dots \\ k = 1, 2 \dots, 1/2, 1/3, \dots \end{cases} \quad (1.2)$$

Częstotliwość pojawiania się kolejnych osi jest oczywiście związana z prędkością  $c$  i rozstawem osi  $d$ . Frýba 2001 podaje również drugą formułę na prędkość krytyczną, której osiągnięcie grozi destabilizacją przesła. Wzór na tę prędkość wyznaczony dla belki swobodnie podpartej podano następujący:

$$c_{cr} = \frac{2lf_j}{j} \quad \text{dla } j = 1, 2, 3 \dots \quad (1.3)$$

Jak podaje autor, teoretyczne prędkości powodujące destabilizację przesła są zbyt wysokie i aktualnie nieosiągalne w praktyce. Jednakże należy je rozważyć w kontekście rozwoju technologicznego transportu (Ladislav Frýba 2008).

Drugim niebagatelnym czynnikiem wpływającym na drgania obiektu mostowego przy przejeździe taboru są nierównomierności jezdni (Ladislav 1996; R. Dias i in. 2008). Są one nieuniknione i wynikają ze zużycia, luzów, osiadania czy niewłaściwego utrzymania. Objawiają się odchyleniem wewnętrznych krawędzi szyn od idealnej, projektowanej geometrii. Dla danego punktu wzduż osi toru rozróżnia się cztery typy nierównomierności:

- nierównomierność wysokościowa:
  - średnia zmiana wysokości osi toru,

- różnica wysokości toków szynowych,
- nierównomierność poprzeczna:
  - średnie przesunięcie poprzeczne osi toru,
  - zbliżenie/oddalenie się toków szynowych.

Nierównomierności wysokościowe wpływają głównie na pionowe drgania konstrukcji, a poprzeczne na poziome i skrętne. Każdy z typów może mieć charakter cykliczny lub losowy. Nierównomierności cykliczne opisane mogą być za pomocą szeregi Fouriera (Ladislav 1996). Inną metodą opisu nierównomierności jest użycie gęstości widmowych mocy wyliczonych na podstawie zmierzonych w trakcie przejazdów odpowiedzi (Claus i Schiehlen 1998; R. Dias i in. 2008). Metoda wykorzystująca szeregi Fouriera pozwala również na opisanie jako nierównomierności toru innych, rzeczywistych efektów takich jak wypłaszczenie powierzchni tocznej obręczy kół (Zhou i in. 2020) czy efekt zmiany sztywności jezdni na poprzecznicyach i podkładach w pomoście z jezdnią otwartą (Ladislav Frýba 1999). Powyższe oddziaływanie wywołują z reguły pionowe drgania. Z kolei poziome wzbudzenia związane mogą być z podłużnymi lub poprzecznymi siłami. Pierwsze z nich wynikają głównie z przyspieszenia bądź hamowania taboru na moście. Drgania poprzeczne związane są głównie z bocznymi ruchami pojazdu. Mają one swoje źródło głównie w nierównomiernościach poprzecznych toru, mechanizmie węzykowania (Babeł i Gardas 2016), deformacjach konstrukcji w skutek mimośrodowego obciążenia obiektu i występowaniu siły odśrodkowej (R. Dias i in. 2008). Na rysunku 1.1 przedstawiono schemat podsumowujący rzeczywiste oddziaływanie.



Rysunek 1.1: Zestawienie efektów dynamicznych działających na konstrukcję mostu w trakcie przejazdu taboru kolejowego (na podstawie (Ladislav 1996)) **UZUPEŁNIĆ**

Pierwsze z nich utożsamiane jest z normowym Stanem Granicznym Nośności, a drugie ze Stanem Granicznym Użytkowania (PN-EN 1990 2004a).

### 1.4.2 Efekty dynamiczne w mostach kolejowych

Obecnie rozważania dotyczące oddziaływań taboru na mostu kolejowe skupiają się przede wszystkim na obiektach projektowanych wzdłuż Linii Dużych Prędkości (LDP) lub ogólniej dotyczących Kolei Dużych Prędkości (KDP). Oczywiście od wielu lat w przypadku wszystkich mostów kolejowych w trakcie projektowania należy sprawdzić dwa główne kryteria: po pierwsze wytrzymałość i trwałość konstrukcji i po drugie bezpiecznego i komfortowego użytkowania. W ramach pierwszego sprawdzane są zwykle wytrzymałość materiałów, stateczność i deformacje konstrukcji oraz wykonywane są analizy zmęczeniowe (Ladislav Frýba 2008).

Drugie kryterium jest znacznie bardziej złożone i restrykcyjne w przypadku mostów w ciągu LDP. Poza relatywnie prostym w zrozumieniu komfortem pasażera, wymaga ono sprawdzenia bezpieczeństwa nawierzchni kolejowej na moście. Zakłada się, że nawierzchnia jest bezpieczna jeśli jest stabilna i wskutek przejazdu nie nastąpi ryzyko zerwania kontaktu pomiędzy szyną i kołem (Ramondenc 2008). Przy regularnie utrzymywany torze, utrata stabilności nawierzchni może nastąpić przede wszystkim w przypadku rozluźnienia podszypki. Pierwszy raz z tym problemem zetknęto się w trakcie utrzymywania obiektów mostowych w ciągu trasy francuskiego TGV (Ramondenc 1998). Zauważono, że tor wymagał znacznie częstszych niż zwykle prac konserwacyjnych. Przeprowadzono badania, w których wykazano, że przy przyspieszeniach większych niż  $0.7g - 0.8g$  następuje efekt rozluźnienia podszypki i utrata jej stabilności przez zmniejszenie sił tarcia pomiędzy ziarnami kruszywa (Zacher i Baefler 2008). Niestateczność podszypki może skutkować zmniejszeniem siły w styku koła i szyny, a w skrajnym wariancie wykolejeniem się pociągu. Kolejnym czynnikiem mogącym wpływać na zaburzenie styku koła z szyną są zmiany geometrii toru wywołane przejazdem taboru po obiekcie. W zależności od typu konstrukcji, schematu statycznego, liczby torów zagadnienie to może różnić się stopniem skomplikowania. Niebezpieczne deformacje mogą wynikać z ugięcia wspornika za osią podparcia mostu, z obrotu konstrukcji na łożysku wskutek ugięcia przęsła, ze skręcenia toru po długości obiektu czy ze zmiany krzywizny w planie. Dodatkowo z uwagi na możliwość wystąpienia rezonansu pomiędzy drganiami poprzecznymi mostu i pojazdem szynowym ogranicza się minimalną częstotliwość poprzecznych drgań własnych mostu (José M Goicolea i Antolin 2003; R. F. d. S. Dias 2007; R. Dias i in. 2008). (Niemierko 2012) podaje, że już na etapie projektowania należy rozważyć następujące wartości związane z bezpieczeństwem i komfortem przejazdu pojazdu szynowego:

- przyspieszenia przęsła,
- pionowe ugięcia pomostu,
- reakcje (uniemożliwić odrywanie na łożyskach),
- przemieszczenia wspornika przęsła poza osią podparcia,
- kąty skręcenia przęsła,
- kąty obrotu na łożyskach,
- przemieszczenia wzdłuż osi podłużnej mostu,
- ugięcie w poprzek mostu,
- kąt obrotu przęsła w poziomie,
- częstotliwości drgań własnych konstrukcji.

Uwzględnienie efektów dynamicznych przy projektowaniu i w ocenie mostów może odbywać się na wiele sposobów. Aktualnie uwzględnienie efektów oddziaływań

dynamicznych może odbyć się na dwa główne sposoby (J. Goicolea i in. 2008):

1. przez zwiększenie odpowiednim współczynnikiem dynamicznym<sup>1</sup> efektów oddziaływań statycznych od obciążen ruchomych,
2. przez wyznaczenie i ocenę odpowiedzi dynamicznej układu pod obciążeniem ruchomym.

Od wielu lat normy polskie jak i zagraniczne posługują się współczynnikiem dynamicznym do uwzględnienia efektów dynamicznych przy projektowaniu mostów (Karaś 2011a). Metoda polega na zwiększeniu efektów oddziaływania pochodzącego od statycznych modeli obciążen kolejowych, tak żeby uwzględnić nadwyżkę wynikającą z dynamiki przejazdu po obiekcie. W ten sposób bierze się pod uwagę zarówno wzbudzenie dynamiczne wynikające ze zmienności położenia obciążenia w czasie oraz nierównomierności nawierzchni kolejowej i niedoskonałości kół pojazdów. Należy jednak pamiętać, że podane wzory na wyznaczenie współczynnika dynamicznego zostały wyznaczone dla pojedynczej osi obciążenia ruchomego przejeżdżającego przez obiekt i nie uwzględniają warunków rezonansu (Jose M. Goicolea i Gabaldón 2008). Jest to uzasadnione rozwiązanie ponieważ zjawisko rezonansu zwykle nie występuje przy przejazdach z prędkością mniejszą niż 200 km/h. Dodatkowo współczynnik dynamiczny nie jest stosowany do obciążen odwzorowujących rzeczywisty tabor tylko do modeli obciążenia będących obwiednią szerokiej klasy obciążen kolejowych: pociągów pasażerskich, towarowych i specjalnych. Należy więc pamiętać o jego ograniczeniach stosowności co ma odzwierciedlenie w obecnych przepisach (PN-EN 1991-2 2007).

Druga rodzina metod opiera na wyznaczeniu odpowiedzi układu pod wpływem przejazdu poprzez wykonanie analizy dynamicznej. Stosowane podejścia różnią się stopniem złożoności i liczbą uwzględnianych czynników (J. Goicolea i in. 2008). Obliczenia mogą odbywać się analitycznie lub za pomocą metod numerycznych. Pojazd może być opisany jako pojedyncza siła pozbawiona inercji, jako masa poruszająca się bezpośrednio po układzie lub też jako oscylator lekko sprężysty odwzorowujący zawieszenie pociągu. Ostatni wariant może być rozbudowywany do większej liczby stopni swobody i o inne elementy interakcji pomiędzy pojazdem, a konstrukcją (Całcada i in. 2008; Szafrański 2013; Szafrański 2021). Uwzględnienie resorowania pojazdu szynowego z reguły obniża efekt wzbudzenia obiektu w trakcie przejazdu. Warto jednak zauważyć, że rozważenie interakcji pomiędzy taborem, a konstrukcją nie wpływa zauważalnie na wyniki drgań poza warunkami rezonansu i dla dużych rozpiętości lub konstrukcji ciągłych (J. Goicolea i in. 2008).

Pierwsze rozwiązania analityczne drgań konstrukcji z obciążeniem ruchomym dla elementarnych modeli mechanicznych pojawiły się już XIX w. Prace (Willis 1849; Stokes 1849; Saller 1921; Timoshenko 1922; Inglis 1934; Kolousek 1973) stanowią kamienie milowe w historii rozwoju metod wyznaczania odpowiedzi w mostach pod obciążeniem ruchomym. Tematyka rozwiązań analitycznych nie będzie rozwijana w niniejszej pracy z uwagi na obszerność zagadnień i dostępną literaturę krajową (Szczęśniak i Ataman 2018). Metody analityczne ograniczone są do raczej prostych

---

<sup>1</sup>Dyskusję na temat nazewnictwa dotyczącego różnicy pomiędzy przemieszczeniami statycznymi i dynamicznymi, a w tym m.in.: "współczynnik dynamiczny", "współczynnik nadwyżki dynamicznej" i "współczynnik przewyższenia dynamicznego" w kontekście projektowania i próbnych obciążzeń przeprowadzono w pracy (Poprawa 2018)

modeli elementarnych i typowych obciążeń. Pomimo, że ich istota w rozwoju badania odpowiedzi dynamicznej mostów oraz ich walory edukacyjne są niekwestionowane, w pracy posłużyły się bardziej uniwersalnymi metodami numerycznymi. Warto jednak wspomnieć o jednej z najprostszych, a jednocześnie stosunkowo uniwersalnej metodzie wyznaczenia maksymalnych przyspieszeń za pomocą Dynamicznej Sygnatury Pociągu (*eng. Dynamic Train Signature*) (J. Goicolea i in. 2008; ERRI D214 1998). Chociaż ma ona zastosowanie jedynie do układu belki wolno podpartej to jej niewątpliwą zaletą jest to, że nie wymaga stosowania złożonych metod numerycznych ani zaawansowanego aparatu matematycznego do uzyskania miarodajnych wyników. W metodzie uwzględnia się charakterystyki dynamiczne układu, dynamiczną linię wpływu mostu (*eng. dynamic influence line*) oraz sygnaturę dynamiczną pociągu. Wspomniana sygnatura dynamiczna pociągu jest funkcją określoną indywidualnie dla danego pociągu i jest niezależna od cech mechanicznych przęsła. Funkcja zależna jest od typowego rozstawu osi pociągu oraz liczby tłumienia układu. Dzięki wyprowadzonym formułom metoda jest przystępna również dla inżynierów nie zajmujących się pracą naukową. W przypadkach złożonych, gdzie metody analityczne nie mają zastosowania aktualnie najbardziej uniwersalną metodą przewidywania odpowiedzi dynamicznej jest wykorzystanie Metody Elementów Skończonych (MES). MES umożliwia dyskretyzację konstrukcji dzieląc ją na węzły i elementy skończone. Dzięki temu możliwe jest sformułowanie różniczkowego równania ruchu dla układu o wielu stopniach swobody (MDOF) danego wzorem (2.22). Podstawowe metody rozwiązania równania ruchu MDOF opierają się na bezpośrednim całkowaniu numerycznym (metoda Newmarka) lub superpozycji modalnej. Obie metody opisano w punkcie 2.3.4. Metoda Elementów Skończonych pozwala na opis skomplikowanych struktur, zadanie różnorodnych obciążień i wybór odpowiedniego rodzaju analizy. Możliwe jest rozwiązywanie zarówno układów liniowych jak i nieliniowych. Z uwagi na swoją skuteczność została zaimplementowana w wielu komercyjnych programach do analizy konstrukcji. Istnieje obszerny zbiór zagranicznych pozycji bibliograficznych opisujących fundamentalne sformułowania MES (Zienkiewicz, Taylor i Zhu 2005; T. Hughes 1987; Langtangen i Mardal 2019; Hartmann i Katz 2007), a także w języku polskim (Kleiber 1985; Rakowski i Kacprzyk 2016).

### 1.4.3 Przepisy normowe i wytyczne

Po omówieniu przyczyn, efektów i metod przewidywania drgań konstrukcji należy odnieść się do aktualnego stanu prawnego. Obecnie w Polsce obowiązuje szereg norm i zarządzeń opisujących elementy projektowania, dostosowywania i utrzymania obiektów kolejowych w ciągu Linii Dużych Prędkości (Polskie Linie Kolejowe S.A. 2005; Polskie Linie Kolejowe S.A. i Centrum Naukowo-Techniczne Kolejnictwa 2009; RMTiGM 1998; PN-EN 1990 2004a; PN-EN 1991-2 2007). Szczegółową analizę zapisów dotyczących uwzględniania zachowania dynamicznego mostów kolejowych według polskich przepisów opisali w swoich pracach Oleszek 2015; Oleszek i Radomski 2015; Oleszek i Radomski 2016. Aktualnie obowiązujące Eurokody w części poświęconej dynamice mostów kolejowych opierają się na badaniach i doświadczeniach członków Europejskiego Instytutu Badawczego Kolejnictwa (*eng. European Railway Research Institute (ERRI)*) (ERRI D214 1998; Muncke 2008), Międzynarodowego Związku Kolei (*eng. International Union of Railways, fr. Union Internationale des Chemins de fer (UIC)*) (Union Internationale Des Chemins De Fer 2006; Union In-

ternationale Des Chemins De Fer 2009). Szczegółową historię ewolucji przepisów do postaci aktualnie występującej w normach europejskich oraz ich interpretację przedstawił w pracy doktorskiej G. James 2003. Również bardzo obszerny opis zagadnienia można znaleźć w (J. M. Goicolea i in. 2002; R. F. d. S. Dias 2007).

Karaś 2011b określił podejście dotyczące uwzględniania efektów dynamicznych przedstawione w Eurokodach jako kompromis. Z jednej strony w niektórych przypadkach stosuje się tradycyjną metodę zwiększenia efektu oddziaływań statycznych za pomocą współczynnika dynamicznego, z drugiej zaś strony niekiedy wymagane jest stosowanie nowoczesnych metod wyznaczania bezpośrednio odpowiedzi konstrukcji pod obciążeniem dynamicznym. Ostatecznie jednak norma nakazuje porównanie efektów obliczeń obiema metodami i uznaje za decydujący przypadek bardziej niekorzystny.

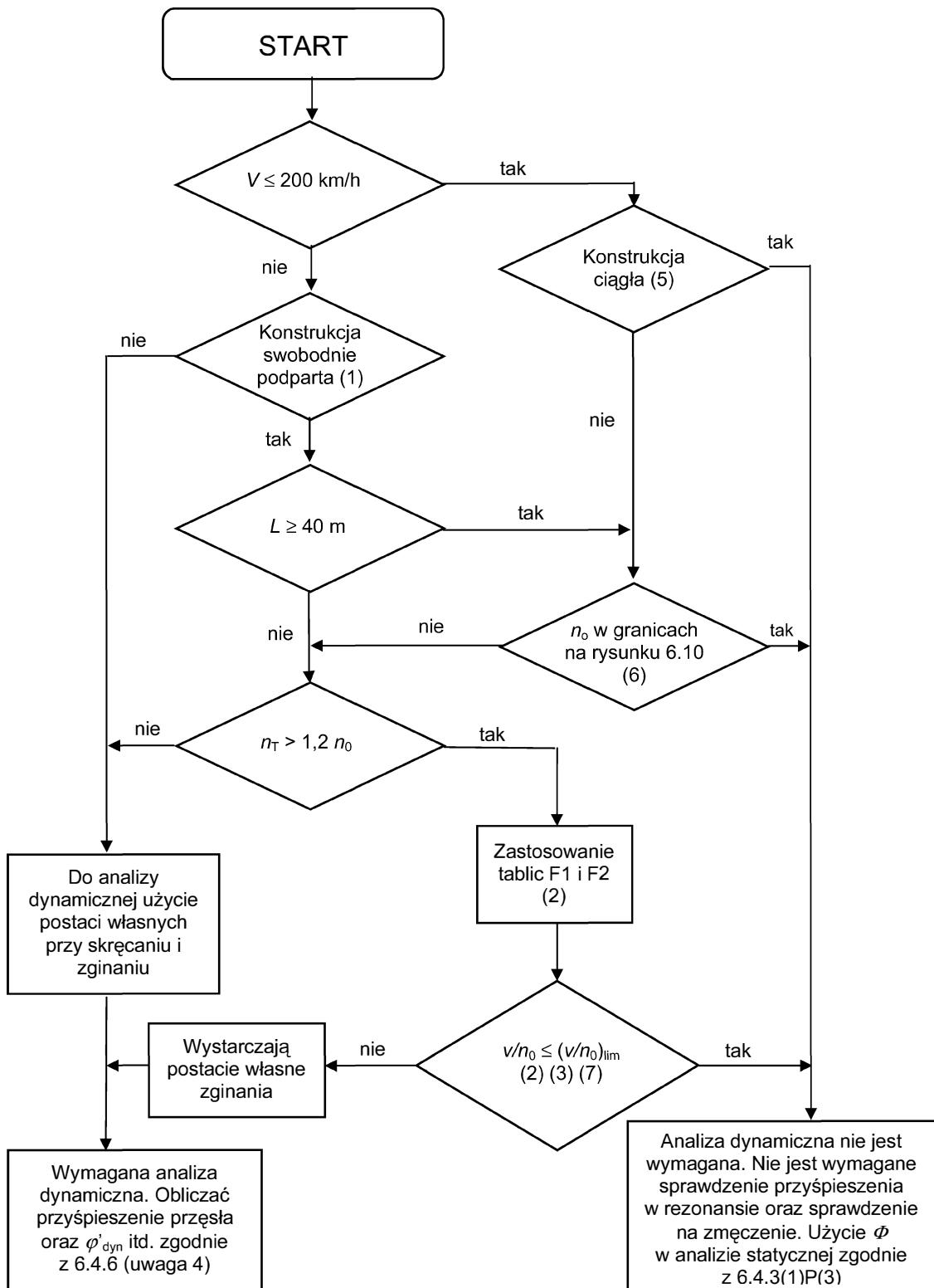
### Algorytm wyboru zakresu analiz

W normie PN-EN 1991-2 wyraźnie określono w punkcie 6.4.5.1(1), że współczynnik dynamiczny nie uwzględnia efektów rezonansu. Jednocześnie zdając sobie sprawę z czasochronności pełnej analizy dynamicznej spróbowano ograniczyć jej wykonanie do przypadków nietypowych i zagrożonych nadmiernymi drganiami. Wprowadzono algorytm decydujący o wyborze metody uwzględnienia efektów dynamicznych. Zastosowano szereg kryteriów, po których spełnieniu można pominąć wyznaczenie odpowiedzi dynamicznej konstrukcji, a efekty przejazdu uwzględnia się za pomocą współczynnika dynamicznego. Algorytm opisujący ścieżkę postępowania zawartą w normie przytoczono na rysunku 1.2, gdzie:  $V$  - miejscowa maksymalna prędkość liniowa [km/h],  $L$  - rozpiętość przęsła [m],  $n_0$  - pierwsza częstotliwość giętnych drgań własnych mostu [Hz],  $n_T$  - pierwsza częstotliwość skrętnych drgań własnych mostu [Hz],  $v$  - maksymalna prędkość nominalna [m/s],  $(v/n_0)_{lim}$  - wg załącznika F normy. Samodzielne liczby w nawiasach okrągłych (1) - (7) oznaczają uwagi przytoczone w normie w sąsiedztwie diagramu. Zgodnie z przedstawionym schematem kluczowymi parametrami potrzebnymi do podjęcia decyzji o wykonaniu analizy dynamicznej są:

- maksymalna miejscowa prędkość na linii,
- schemat statyczny konstrukcji,
- rozpiętość przęsła,
- pierwsza częstotliwość giętnych drgań własnych  $n_0$ ,
- pierwsza częstotliwość skrętnych drgań własnych  $n_T$

Po ustaleniu wszystkich parametrów schemat decyzyjny wskazuje ewentualną konieczność wykonania analizy dynamicznej. Algorytm zależnie od ich wartości realizuje wiele scenariuszy. Można jednak wyodrębnić poszczególne sytuacje, które wynikają z algorytmu i mają potwierdzenie we wcześniej przytoczonych badaniach i opracowaniach. Poniżej krótko omówiono kluczowe aspekty mechanizmu decyzyjnego.

Schemat statyczny wpływa na przebieg procesu wyboru w dwóch miejscach. Po pierwsze konstrukcja może być ciągła lub swobodnie podparta. Po drugie, swobodnie podparte przęsło może różnić się stopniem skomplikowania układu. Roboczo w tej pracy rozróżniono je i nazwano jako konstrukcje „proste” bądź „złożone”. Konstrukcja określona jako „prosta” to zgodnie z normą taka, której schematem statycznym jest belka swobodnie podparta zachowująca się tylko jak prosta belka podłużna lub pro-



Rysunek 1.2: Algorytm określający czy wymagana jest analiza dynamiczna wg (PN-EN 1991-2 2007)

sta płyta z pomijalnymi efektami skosu na podporach niepodatnych. W przeciwnym wypadku konstrukcja jest „złożona”.

Do wyznaczenia częstotliwości i postaci drgań własnych niezbędne jest wykonanie analizy modalnej (p. 2.3.1). Dla złożonych układów wykonywana jest ona zazwyczaj w programach MES. Dodatkowo, w niektórych sytuacjach proces decyzyjny pozwala pominąć analizę dynamiczną opierając się na nomogramie (rys. 1.3) oraz Załączniku F do normy PN-EN 1991-2. Nomogram pokazuje obszar stosowności współczynników dynamicznych w zależności od częstotliwości pierwszej giętnej postaci drgań własnych w funkcji rozpiętości przęsła. Innymi słowy jeżeli pierwsza częstotliwość giętnych drgań własnych obiektu o konstrukcji ‘prostej’ i danej rozpiętości mieści się pomiędzy dolną, a górną granicą zakreskowanego obszaru, to współczynniki dynamiczne  $\phi'$  i  $\phi''$  zdefiniowane przez normę są miarodajne i analiza dynamiczna nie jest wymagana. Granica górna nomogramu jest związana z nierównościami toru, a granica dolna ujmuje dodatkowe oddziaływanie wynikające z samej dynamiki przejazdu. W przypadku prędkości większych niż 200 km/h nomogram ma zastosowanie do obiektów krótkich ( $L \leq 40$  m). Przy odpowiednim stosunku częstotliwości drgań skrętnych i giętnych ( $n_T > 1.2n_0$ ) możliwe jest pominięcie analizy dynamicznej z wykorzystaniem załącznika F do normy. W załączniku F zestawiono współczynniki graniczne  $(v/n_0)_{lim}$ , gdzie  $v$  - maksymalna prędkość nominalna taboru. Współczynniki graniczne zostały zdefiniowane i zestawione w tablicach F.1 i F.2 normy. Wyznaczono je dla ‘prostych’ obiektów o zróżnicowanych - lecz nieograniczonych - rozpiętościach oraz dla różnych ułamków tłumienia i różnych zastępczych obciążzeń równomiernie rozłożonych przypadających na metr bieżący mostu. Według algorytmu jeżeli dla obliczanego obiektu spełnione jest  $(v/n_0) > (v/n_0)_{lim}$  to analiza dynamiczna nie jest wymagana, ponieważ efekt obciążenia będzie mniejszy niż przy obciążeniu statycznym LM 71 z odpowiednim współczynnikiem dynamicznym. Wartości graniczne zostały wyznaczone przy uwzględnieniu współczynników bezpieczeństwa dla kryteriów przyspieszenia, ugięcia i wytrzymałości, dla starania utrzymanego toru i częstotliwości  $n_0$  mniejszej niż górna granica nomogramu (rys. 1.3. Do analiz użyto 7 pociągów rzeczywistych A-F również przedstawionych w załączniku F.

Nomogram (rys. 1.3) oraz tablice w załączniku F, powstały na bazie wielu lat badań i doświadczeń naukowców i inżynierów zajmujących się tematyką drgań mostów kolejowych (Union Internationale Des Chemins De Fer 2009; ERRI D214 1998). Dzięki nim zidentyfikowano przypadki konstrukcji dla których nie ma obowiązku ponownego prowadzenia pełnej analizy dynamicznej. Mimo że dotyczy to jedynie prostych, powtarzalnych konstrukcji, to w typowych przypadkach pozwala zaoszczędzić projektantom mnóstwo czasu. Z drugiej strony, przy maksymalnej prędkości większej od 200 km/h analiza dynamiczna musi być wykonana jeśli:

- konstrukcja jest „złożona”,
- konstrukcja jest „prosta”, rozpiętość jest mała ( $L < 40$  m), a częstotliwość drgań skrętnych jest bliska częstotliwości drgań giętnych ( $n_T < 1.2n_0$ ),
- konstrukcja jest „prosta”, rozpiętość jest duża ( $L < 40$  m), ale częstotliwość giętnych drgań własnych nie mieści się w wyznaczonych granicach (Rys. 1.3) i częstotliwość drgań skrętnych jest bliska częstotliwości drgań giętnych ( $n_T < 1.2n_0$ ).

Górna granica  $n_0$  jest wynikiem nadwyżek dynamicznych związanych z nierównościami toru i jest dana jako:

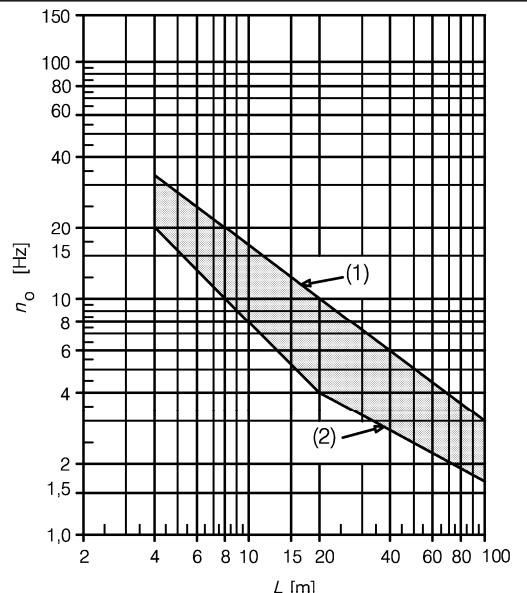
$$n_0 = 94,76L^{-0.748} \quad (6.1)$$

Dolna granica  $n_0$  jest wynikiem kryteriów dynamicznego oddziaływanie i jest dana jako:

$$\begin{aligned} n_0 &= 80/L \\ &\text{dla } 4 \text{ m} \leq L \leq 20 \text{ m} \\ n_0 &= 23,58L^{-0.592} \\ &\text{dla } 20 \text{ m} < L \leq 100 \text{ m} \end{aligned} \quad (6.2)$$

przy czym:

$n_0$  pierwsza częstotliwość drgań własnych mostu uwzględniająca masę związaną z oddziaływaniami stałymi,  
 $L$  rozpiętość przęsła mostów swobodnie podpartych lub  $L_\phi$  w przypadku innych rodzajów mostów.



#### Objaśnienia

(1) Góra granica częstotliwości drgań własnych

(2) Dolna granica częstotliwości drgań własnych

Rysunek 1.3: Granice pierwszej częstotliwości drgań własnych mostu określone w normie PN-EN 1991-2 2007

## Obciążenia

W pracy poruszany jest temat optymalizacji struktury obiektów mostowych, który zdecydowanie częściej może być rozważany na etapie projektowania mostu niż w trakcie jego życia. Z tego względu w dalszej części pracy rozważane zostaną obciążenia służące projektowaniu, a nie sprawdzaniu istniejących konstrukcji. Według rozporządzenia (RMTiGM 1998) do projektowania należy używać modeli obciążzeń zawartych w omawianej już normie PN-EN 1991-2, a do sprawdzania nośności istniejących obiektów kolejowych modeli obciążzeń eksploatacyjnych opisanych w normie PN-EN 15528 (PN-EN 15528 2015; Łuszczki 2015). Norma PN-EN 15528 2015 zawiera instrukcje i przepisy pozwalające zaklasyfikować pojazdy i linie kolejowe do odpowiednich klas.

W normie PN-EN 1991-2 występują kilka obciążień kolejowych podzielonych na dwie grupy w zależności od przeznaczenia. Pierwszą grupę stanowią obciążenia do analiz statycznych. W jej skład wchodzą modele obciążenia: UIC 71, SW/0, SW/2 i pociąg bez ładunku. Model UIC 71 został opracowany już w 1971 roku (Union Internationale Des Chemins De Fer 2006) i był stosowany w poprzedniej generacji Polskich Norm (PN-85/S-10030 1985). Z tego względu jest dobrze znany środowisku projektowemu i zwykle nie występują problemy w jego zastosowaniu. Obciążenia statyczne nie stanowią głównego tematu niniejszej pracy i nie będą szerzej omawiane. Ich szczegółowy opis, pochodzenie oraz zasady użycia można znaleźć w normie PN-EN 1991-2 oraz pracach (G. James 2003; Union Internationale Des Chemins De Fer 2006). Druga grupa zawiera modele obciążzeń wykorzystywane w analizach dynamicznych lub zmęczeniowych. Zaliczają się do niej:

- Pociągi Uniwersalne HSLM-A i HSLM-B (PN-EN 1991-2 p. 6.4.6.1.1),
- Pociągi Rzeczywiste (PN-EN 1991-2 załącznik F)

- Pociągi Zmęczeniowe<sup>2</sup> (PN-EN 1991-2 załącznik D).

Opis obciążeń dynamicznych należy rozpocząć od przywołania idei interoperacyjności. Zgodnie z dyrektywą Rady Unii Europejskiej 96/48/WE z 1996 roku opracowane opracowano Warunki Techniczne Interoperacyjności (*eng. Technical Specifications of the Interoperability (TSI)*) (Muncke 2008). Mają one założeniu ujednolicić dotychczas zróżnicowane systemy kolejowe państw członkowskich Unii Europejskiej. Dzięki wdrożeniu idei ułatwione miałyby być podróżowanie pomiędzy krajami Unii bez utrudnień związanych z zastosowaniem różnych rozwiązań technicznych. Zgodnie z Warunkami TSI wszystkie obiekty kolejowe powinny być zwymiarowane na obciążenie statyczne LM71 oraz pozwolić na liniach dużych prędkości na ruch wszystkich aktualnie występujących i mogących wystąpić w przyszłości pociągów dużych prędkości.

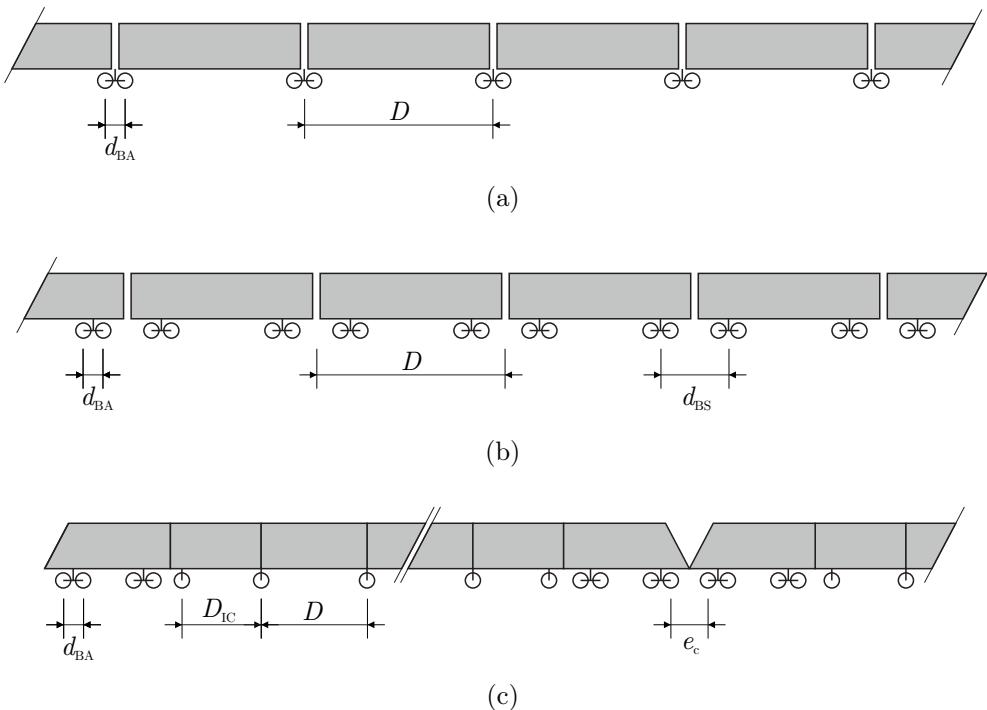
Pierwszą grupą obciążień normowych używanych do analiz dynamicznych są Pociągi Rzeczywiste. Pociągi dużych prędkości występujące na europejskich liniach mogą być podzielone na trzy grupy taboru w zależności od wzajemnego usytuowania wózków i wagonów (J. Goicolea i in. 2008). Schematy pociągów zawarto w normie PN-EN 1991-2 załącznik E i przytoczono na rysunku 1.4. Poszczególne grupy można opisać następująco (w nawiasach podano przykłady rzeczywistego taboru):

- pociągi przegubowe - dwa wagony połączone są jednym wózkiem znajdującym się między nimi (THALYS, AVE i EUROSTAR),
- pociągi typowe - każdy wagon posiada dwa własne wózki (ICE2, ETR500),
- pociągi regularne - brak wózków, wagony są oparte na pojedynczych osiach znajdujących się na połączeniu wagonów (TALGO).

Na liniach kolejowych o prędkości maksymalnej mniejszej niż 200 km/h zarządca w indywidualnej dokumentacji technicznej może określić Pociągi Rzeczywiste, które należy uwzględnić w analizach.

Drugą grupę obciążień stosowanych w analizach dynamicznych stanowią pociągi uniwersalne (*eng. Universal Trains*). W jej skład wchodzą dwa modele HSML-A i HSML-B (*eng. High Speed Load Model (HSLM)*). Są to teoretyczne modele, które powstały aby zagwarantować spełnienie warunków interoperacyjności kolei w państwach Unii Europejskiej. Odzwierciedlają szeroki zakres obciążzeń od pociągów dużej prędkości aktualnie użytkowanych i potencjalnie występujących w przyszłości. Model HSML-A został przedstawiony na rysunku 1.5 i występuje w 10 wariantach różniących się parametrami - oznaczonych od A1 do A10. Parametry dla modelu HSML-A przedstawiono w tabeli 1.1. Model obciążenia stanowi potok sił, w większości rozstawionych w regularny sposób jak dla osi kół pociągu. Schemat rozkładu sił odpowiada pociągowi o typie przegubowym (rys. 1.4a). Całkowita długość pociągu w każdym z wariantów wynosi około 400 m i zależy od liczby wagonów  $N$  i ich długości  $D$ . Obciążenie przypadające na oś oznaczono jako  $P$ , a jego wartość

<sup>2</sup>Odniesienie do Pociągów Zmęczeniowych w kontekście analizy dynamicznej znajduje się w punkcie 6.4.6.1.1(7) normy. Mówią o zalecanych obciążeniach w przypadku kiedy analiza dynamiczna jest wymagana, a maksymalna prędkość jest mniejsza niż 200 km/h. W angielskiej wersji tekstu pojawia się zdanie "Train Types 1 to 12 given in annex D", które wyraźnie odnosi się do Pociągów Zmęczeniowych. W polskiej wersji zdanie to zostało przetłumaczone jako "Pociągi Typowe od 1 do 12 podane w załączniku D". Pojęcie Pociąg Typowy występuje również w załączniku D w odniesieniu do jednego z rodzajów Pociągów Rzeczywistych. Racjonalne wydaje się dosłowne stosowanie przepisu w jego angielskiej formie.



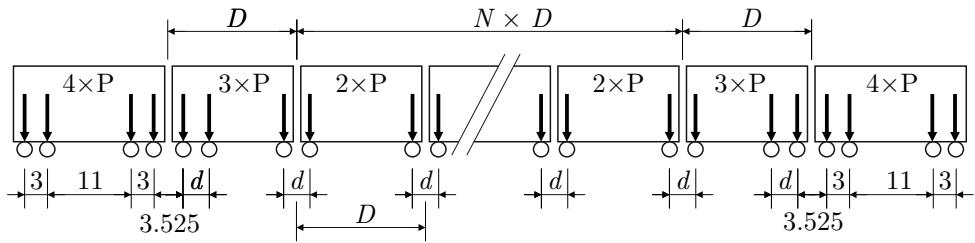
Rysunek 1.4: Typy pociągów rzeczywistych kursujących na europejskich liniach dużych prędkości: (a) pociąg przegubowy; (b) pociąg typowy; (c) pociąg regularny. Oznaczenia:  $d_{BA}$  - rozstaw osi w wózku,  $D$  - odległość miedzy regularnie odległymi osiami lub długość wagonu,  $D_{IC}$  - długość wagonu pośredniego,  $e_c$  - odległość między sąsiednimi osiami dwójecznymi zestawów pociągów (PN-EN 1991-2 2007).

miesci się w zakresie od 170 kN do 210 kN. Rozstaw osi wózków  $d$  również został zróżnicowany od 2 do 3.5 m. Dodatkowo na początku i na końcu modelu znajduje się nieregularny układ sił odwzorowujący lokomotywę. Model HSLM-B pokazano na rysunku 1.6. Składa się z  $N$  sił w regularnym rozstawie  $d$ . Parametry modelu  $d$  i  $N$  przyjmuje się w zależności od rozpiętości przęsła  $L$  zgodnie z rysunkiem 1.6. Model HSLM-B zgodnie z zaleceniem stosowany może być dla obiektów 'prostych' o rozpiętości poniżej 7 m. Dla pozostałych obiektów zalecane jest wyznaczenie odpowiedzi od obciążenia modelem HSLM-A dla wszystkich wariantów A1-A10.

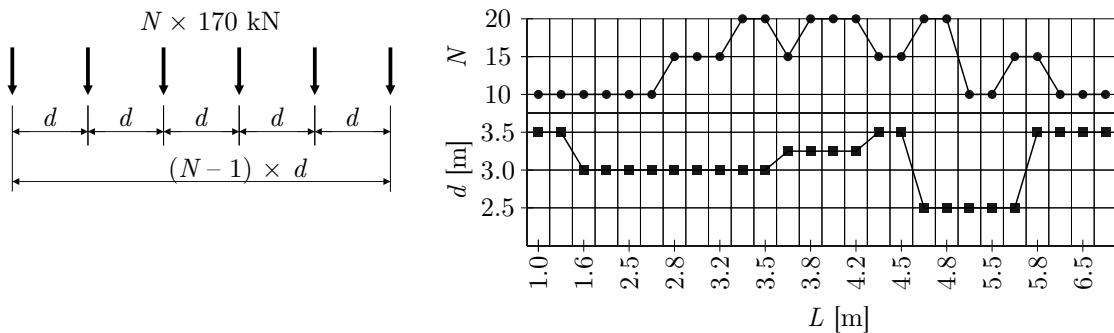
### Parametry analizy dynamicznej

Do analiz dynamicznych należy zastosować obciążenia Pociągami Rzeczywistymi występującymi na linii oraz modele HSLM jeśli dla linii stosowane są międzyoperacyjne kryteria europejskie dużych prędkości. Jeśli analiza dynamiczna jest wymagana, a prędkość liniowa jest mniejsza niż 200 km/h to do sprawdzenia efektów dynamicznych należy zastosować Pociągi Rzeczywiste A-F (załącznik F normy PN-EN 1991-2 2007) oraz Pociągi Zmęczeniowe 1-12 (załącznik D normy PN-EN 1991-2 2007).

Prędkości analizowanego przejazdu należy przyjmować od 40 km/h do maksymalnej prędkości obliczeniowej co 10 km/h. Maksymalną prędkość obliczeniową zaleca się przyjmować jako  $1.2 \times \text{maksymalna dopuszczalna prędkość pojazdu}$ . W pobliżu prędkości rezonansowych (1.3) należy zageścić obliczenia. Według przepisów (PN-EN 1991-2 2007; Union Internationale Des Chemins De Fer 2009) przy-



Rysunek 1.5: Model pociągu HSLM-A według PN-EN 1991-2. Na podstawie PN-EN 1991-2 2007



Rysunek 1.6: Model pociągu HSLM-B według PN-EN 1991-2. Na podstawie PN-EN 1991-2 2007

spieszenia powinny być wyznaczone w zakresie częstotliwości sygnału do  $f_{max} = \max\{1.5n_0; n_3; 30 \text{ Hz}\}$ , gdzie  $n_0$  i  $n_3$  oznaczają odpowiednio pierwszą i trzecią postać giętnych drgań elementu. W przypadku mostów zwykle decydujący jest warunek 30 Hz, ponieważ drgania o częstotliwości powyżej 20 Hz dotyczą zazwyczaj elementów drugorzędnych (Oleszek i Radomski 2015). Powyższy warunek ma również potwierdzenie w badaniach nad destabilizacją podsypki (Zacher i Baefler 2008).

### Parametry mostów

Na etapie projektowania istnieje szereg niepewności projektowanej konstrukcji. Dotyczą one przede wszystkim wymiarów elementów konstrukcji, ciężarów objętościowych materiału, modułu sprężystości materiału i tłumienia całej struktury. Wszystkie z tych czynników wpływają na masę, tłumienie i sztywność układu, co ma bezpośrednie przełożenie na częstotliwości drgań własnych i tłumienia modalne. W konsekwencji decyduje o możliwości wystąpienia rezonansu i amplitudach drgań. Najlepszą metodą parametrów przyjętych w analizach są wyniki eksperymentów na rzeczywistej konstrukcji. Naturalnie jest to możliwe jedynie w trakcie modernizacji, a nie projektowania.

Tolerancje wymiarów konstrukcji ograniczone są przez normy dotyczące danych materiałów (Eurokody od 2 do 4). Przy obliczeniach na etapie projektowania zalecane jest przyjmować wymiary nominalne.

Eurokody PN-EN 1991-1-1 2004; PN-EN 1991-2 2007 podają zalecenia dotyczące przyjmowania parametrów materiałowych kiedy nie ma możliwości wyznaczenia ich rzeczywistych (zmierzonych) wartości. Według normy PN-EN 1991-2 2007 w przypadku mostów kolejowych zalecane jest przyjmowanie masy konstrukcji i jej wy-

Tablica 1.1: Parametry modelu HSLM-A wg PN-EN 1991-2 2007

HSLM	Liczba pośrednich wagonów pasażerskich <i>N</i>	Długość wagonu pasażerskiego <i>D</i> [m]	Rozstaw osi wózków <i>d</i> [m]	Siła skupiona <i>P</i> [kN]
A1	18	18	2,0	170
A2	17	19	3,5	200
A3	16	20	2,0	180
A4	15	21	3,0	190
A5	14	22	2,0	170
A6	13	23	2,0	180
A7	13	24	2,0	190
A8	12	25	2,5	190
A9	11	26	2,0	210
A10	11	27	2,0	210

Tablica 1.2: Zalecane wartości liczby tłumienia według normy PN-EN 1991-2 2007

Rodzaj mostu	Dolna granica ułamka tłumienia [%]	
	Rozpiętość $L < 20\text{ m}$	Rozpiętość $L \geq 20\text{ m}$
Stalowy i zespolony	$0.5 + 0.125(20-L)$	0.5
Betonowy sprężony	$1.0 + 0.07(20-L)$	1.0
Dźwigary obetonowane i żelbetowe	$1.5 + 0.07(20-L)$	1.5

posażenia w dwóch wariantach. Dotyczy to głównie podsypki, która na kolejowych mostach stalowych stanowi bardzo istotną składową całkowitego ciężaru własnego. Ogólną regułą jest, że zwiększona masa powoduje obniżenie częstotliwości drgań własnych i zmniejszenie amplitud drgań. Stąd przy obliczeniu maksymalnych przyspieszeń należy przyjąć minimalną szacowaną wartość obciążenia. Z uwagi jednak na możliwość przeszacowania prędkości krytycznej (proporcjonalnej do częstotliwości drgań własnych) należy również sprawdzić przypadek górnego szacowania ciężaru własnego. Moduł sprzyjności jest z reguły bardzo precyzyjnie określony w przypadku stali. Odwrotnie niż w przypadku masy zwiększoną sztywność powoduje zwiększenie częstotliwości drgań własnych. Z tego względu w przypadku szacowania sztywności elementów betonowych, połączeń czy posadowienia zalecane jest przyjmować dolne szacowanie.

W dobie obliczeń za pomocą programów MES poprawne odwzorowanie sztywności oraz rozkładów masy (zwłaszcza w konstrukcjach stalowych) nie stanowi wiekszego problemu. Jednakże do analizy dynamicznej należy określić jeszcze parametry tłumienia modalnego układu. Na etapie projektowania określa się je w sposób przyblizony na podstawie norm lub wartości zidentyfikowanych przez badania na podobnych, rzeczywistych konstrukcjach (Ladislav 1996). W normie PN-EN 1991-2 2007 podano wartości, które są dolną, a zatem bezpieczną granicą oszacowania. Zalecane wartości przytoczono w tablicy 1.2. Z reguły w obliczeniach stosowane jest tłumienie proporcjonalne charakteryzujące się liniowym działaniem. Jest to również podejście

bezpieczne, ponieważ uwzględnienie nieliniowego tłumienia skutkuje zmniejszeniem amplitud drgań (Ülker-Kaustell i Karoumi 2012; Oleszek 2015). Najczęściej spotykane normowe modele obciążenia wyrażone są za pomocą potoku sił, tworząc bezinercyjne schematy obciążenia. W konsekwencji przy tak wykonanej analizie nie uwzględnia się interakcji pomiędzy pojazdem, a konstrukcją. Z reguły uwzględnienie resorowania i tłumienia zawieszenia zmniejsza amplitudy odpowiedzi układu w rezonansie. Ma to jednak istotne znaczenie głównie dla krótkich przęsła. W normie PN-EN 1991-2 2007 efekt ten uwzględniono w sposób uproszczony przez zastosowanie nadwyżki tłumienia, dla obiektów o rozpiętości mniejszej niż 30 m. Całkowite tłumienie  $\xi_{total}$  po uwzględnieniu nadwyżki wyrażone jest wzorem 1.4, a dodatek tłumienia  $\Delta\xi$  określony w funkcji rozpiętości przęsła  $L$  zaproponowano w postaci równania 1.5.

$$\xi_{total} = \xi + \Delta\xi \quad (1.4)$$

$$\Delta\xi = \frac{0.0187L - 0.00064L^2}{1 - 0.0441L - 0.0044L^2 + 0.000255L^3} \quad (1.5)$$

### Kryteria oceny rozwiązania

Jeżeli analiza dynamiczna jest wymagana norma PN-EN 1991-2 nakazuje wyznaczenie przemieszczeń i przyspieszeń przęsła oraz współczynnika  $\phi'_{dyn}$  zdefiniowanego równaniem:

$$\phi'_{dyn} = \max\left|\frac{y_{dyn}}{y_{stat}}\right| - 1 \quad (1.6)$$

gdzie:  $y_{dyn}$  oznacza maksymalną odpowiedź dynamiczną, a  $y_{stat}$  odpowiadającą maksymalną odpowiedź statyczną od obciążenia Pociągiem Rzeczywistym lub modelem HSLM. Norma nie preczyzuje jakie efekty należy porównywać przy wyznaczaniu współczynnika, jednakże nie jest to bez znaczenia dla wyniku. Przykładowo Klasztorny 2005 wskazuje, że dla mostów belkowych stalowych i zespolonych współczynniki dynamiczne wyznaczane na podstawie ugięć są o około 10% niższe niż dla naprężeń. Wartości te należy uwzględnić w ocenie Stanów Granicznych. W rozdziale 6.4.6.5 normy podano elementy, które należy sprawdzić w celu zapewnienia bezpieczeństwa ruchu.

W celu sprawdzenia wytrzymałości elementów konstrukcji należy wybrać bardziej niekorzystny z przypadków obciążenia:

- obciążenie statyczne modelem LM 71 powiększone przez odpowiedający mu współczynnik dynamiczny. Jeśli wymagane należy sprawdzić również obciążenie SW/0 ze współczynnikiem dynamicznym,
- obciążenie Pociągiem Rzeczywistym (RT) lub HSLM, w obu przypadkach powiększone przez współczynnik dynamiczny  $\phi'_{dyn}$  dany wzorem (1.6) i współczynnik  $\phi''$  wynikający z nierównomierności toru, zdefiniowany w załączniku C do PN-EN 1991-2.

Podsumowując powyższe, należy wyznaczyć efekty obciążenia i wybrać bardziej niekorzystne zgodnie z poniższą formułą podaną w normie:

$$\phi \times (LM\ 71\ ,+“\ SW/0) \quad \text{lub} \quad (1 + \phi'_{dyn} + 0.5 \times \phi'') \times \begin{pmatrix} HSLM \\ \text{lub} \\ RT \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Ważnym i obszernym zagadnieniem dotyczącym trwałości mostów kolejowych jest oszacowanie nośności zmęczeniowej. Norma nakazuje uwzględnienie przy badaniu wpływu zjawiska zmęczenia również efektów dynamicznych przez porównanie z rezultatem obciążenia LM 71 powiększonym o współczynnik dynamiczny. Zjawisko zmęczenia oraz metody jego uwzględniania w mostach opisano w literaturze przedmiotu (Kocańda i Szala 1985; Schijve 2001; Malm i Andersson 2006; Siwowski 2012; Siwowski i Kulpa 2014; Szafranski, Galewski i Łapigrowski 2017).

Norma PN-EN 1991-2 zwraca szczególną uwagę na sprawdzenie bezpieczeństwa nawierzchni kolejowej. W celu sprawdzenia wszystkich warunków bezpieczeństwa należy wyznaczyć i ocenić następujące wielkości:

- przemieszczenia i przyspieszenia pionowe pomostu,
- skręcenie pomostu,
- przemieszczenia i przyspieszenia poziome pomostu.

Wszystkie kryteria opisano w PN-EN 1990 załącznik A2 w punkcie A2.4.4. Spśród powyższych decydujące jest zazwyczaj sprawdzenie przyspieszeń pionowych. Ze względu na ryzyko destabilizacji podsypki wyznaczone maksymalne pionowe przyspieszenia pomostu należy porównać z wartościami dopuszczalnymi podanymi w Eukodzie 0 załącznik A.2. Wartości te wynoszą odpowiednio  $3.5 \text{ m/s}^2$  dla pomostu z nawierzchnią podsypkową oraz  $5.0 \text{ m/s}^2$  dla nawierzchni bezpodsypkowej. Wartości te wynikają wprost z wyników badań (Zacher i Baßler 2008) przy uwzględnieniu współczynników bezpieczeństwa. Dla nawierzchni z podsypką zastosowano współczynnik 2.0 i uzyskano  $a_{dop} = 7/2.0 = 3.5 \text{ m/s}^2$ , a dla bezpodsypkowej 1.4 co prowadzi do wyniku  $a_{dop} = 7/1.4 = 5.0 \text{ m/s}^2$ . W przypadku mostów o dużych rozpiętościach decydujący może być również warunek częstotliwości pierwszej poziomej postaci drgań. PN-EN 1990 2004b w regule opisuje, że najniższa częstotliwość poprzecznych drgań własnych mostu nie może być niższa niż 1.2 Hz. Warunek powstał na podstawie badań sześciu stalowych, łukowych bądź kratownicowych mostów kolejowych o pomoście otwartym i o zróżnicowanej rozpiętości od 31 do 119m (ERRI 1996). Jednakże R. Dias i in. 2008 na podstawie badań i analiz dynamicznych pod obciążeniem pionowym i poprzecznym udowodnili, że warunek ten nie powinien być stosowany bezrefleksyjnie i możliwe jest projektowanie obiektów o niższych częstotliwościach drgań poprzecznych.

Trzecim kryterium, które należy sprawdzić dla obiektów kolejowych jest komfort pasażyrow. W normie PN-EN 1990 przyjęto 3 klasy komfortu pasażyrow: bardzo dobrą, dobrą i dostateczną. Przynależność do danej klasy komfortu zależy od maksymalnych wartości przyspieszeń działających na pasażera, a wiec mierzonych wewnętrz pojazdu. Wartości progowe przyspieszeń dla poszczególnych klas przytoczono w tablicy 1.3. Naturalnie w celu wyznaczenia przyspieszeń wewnętrz pojazdu w trakcie analiz dynamicznych należy posłużyć się modelem interakcji pomiędzy pojazdem, a mostem. Analiza dynamiczna w podstawowej formie jest zadaniem złożonym, a jej trudność jeszcze wzrasta przyłączeniu współpracy pomostu i taboru. Z tego względu w normie znalazła się również uproszczona metoda oszacowania komfortu na podstawie pionowych przemieszczeń statycznych przesła. Posiada ona jednak ograniczenia stosowania. Dotyczy ona jedynie przesła o schemacie statycznym belki swobodnie podpartej lub belki ciągłe o niewielkim zróżnicowaniu rozpiętości i sztywności oraz o rozpiętościach mniejszych niż 120 m. Na wykresie 1.7 przytoczono nomogram zawarty w normie. Przedstawiono na nim krzywe graniczne  $L/\delta$  w funkcji

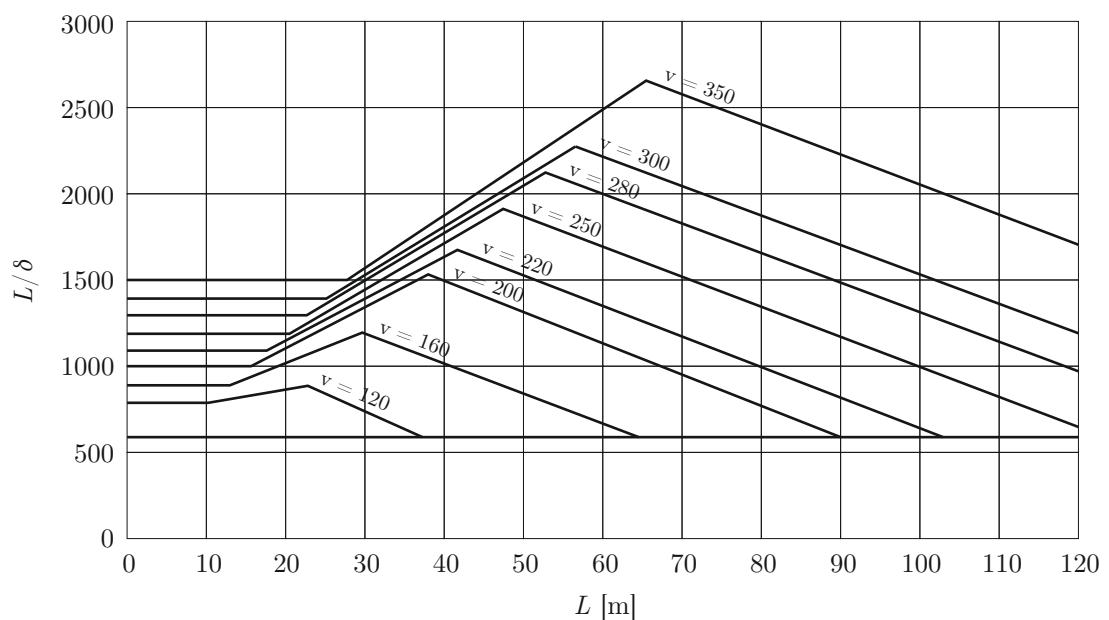
Tablica 1.3: Zalecane klasy komfortu według (PN-EN 1990 2004b)

Poziom komfortu	Przyspieszenia pionowe $b_v$ [ $\text{m/s}^2$ ]
Bardzo dobry	1.0
Dobry	1.3
Dostateczny	2.0

prędkości przejazdu  $V$  [km/h] i rozpiętości przęsła  $L$  [m] dla przypadku ustawionych w ciągu 3 przęseł swobodnie podpartych. Symbol  $\delta$  oznacza przemieszczenia pionowe przęsła pod obciążeniem statycznym LM 71, z uwzględnieniem współczynnika dynamicznego i dla współczynnika klasy obciążenia  $\alpha = 1$ . Jeżeli wyznaczony wskaźnik  $L/\delta$  mieści się poniżej odpowiedniej krzywej i powyżej wartości 600 to zagwarantowany jest bardzo dobry komfort pasażerów. W normie podano szereg modyfikacji wartości podanych na wykresie, pozwalających ocenić spełnienie pozostałych klas komfortu, przypadki z inną liczbą przęseł swobodnie podpartych i belek ciągłych. Dla przypadków niemieszczących się w obszarze stosowności metody uproszczonej należy przeprowadzić szczegółową analizę dynamiczną. Norma wskazuje, że należy w niej uwzględnić:

- szereg prędkości do wartości maksymalnej,
- obciążenie charakterystyczne pociągów rzeczywistych,
- dynamiczne współdziałanie mas między wagonami, a konstrukcją,
- charakterystyki modalne zawieszenia wagonu,
- liczbę wagonów wystarczającą do wywołania maksymalnych możliwych efektów,
- efekt działania nierównomierności toru na współdziałanie pojazdu z mostem.

Obiekt kolejowy uzna się za poprawnie zaprojektowany jeśli spełnione są wszystkie Stany Graniczne Nośności i Użytkowania według PN-EN 1990 i PN-EN 1991-2, a w tym: warunki nośności konstrukcji, trwałości zmęczeniowej, bezpieczeństwa nawierzchni kolejowej i wymagana klasa komfortu.



Rysunek 1.7: Nomogram do oceny komfortu w pojeździe na podstawie ugięć dla układu w postaci ciągu trzech przęseł swobodnie podpartych przy bardzo dobrym poziomie komfortu

# Rozdział 2

## Dynamiczna analiza konstrukcji

### 2.1 Wiadomości wstępne

Podstawowym celem pracy jest określenie zależności pomiędzy przyjętymi rozwiązaniami konstrukcyjnymi mostów kolejowych, a ich zachowaniem dynamicznym. Predykcja odpowiedzi, jak wspomniano wcześniej, możliwa jest dzięki rozwiązaniom numerycznym modeli MES poddanych odpowiednim obciążeniom. Na każdym etapie analiz trzeba zdawać sobie sprawę z niepewności, które mogą wystąpić przy konstruowaniu założeń. Brincker i C. E. Ventura 2015 zestawili różnego rodzaju parametry występujące w modelu i stopień niepewności, który im towarzyszy na etapie modelowania. Niepewności te przytoczono w tabeli 2.1. Wyraźnie widać, że przyjęcie niektórych parametrów modelu w sposób bezkrytyczny może prowadzić do zupełnie nieodpowiednich rezultatów. Niektóre, związane np. ze sztywnością szeroko rozumianych podpór czy połączeń śrubowych, mogą wypaczyć rezultaty i wprowadzić badacza w błąd na temat stanu i zachowania konstrukcji. Aby zbudować model, który będzie efektywnie odwzorowywał rzeczywiste zachowanie należy dołożyć wszelkich starań aby wyeliminować możliwe niepewności. Model taki może zostać poddany walidacji i kalibracji. Oba te pojęcia zostaną rozwinięte w następnych rozdziałach. Niemniej, aby model dostosować do rzeczywistych warunków należy mieć punkt odniesienia. W przypadku analizy statycznej takim odniesieniem mogą być pomiary statyczne ugięć, np. w trakcie próbnego obciążenia. W przypadku analizy dynamicznej, do porównania będą służyć charakterystyki modalne: częstotliwości i postaci drgań własnych oraz tłumienia. Parametry te można zaczerpnąć z literatury i doświadczenia na etapie projektowania. Na etapie badania rzeczywistej konstrukcji warto sięgnąć po narzędzie zwane identyfikacją modalną. Poniższy rozdział przytoczy podstawowe zagadnienia związane z analizą modalną, obliczeniami odpowiedzi dynamicznej i identyfikacją charakterystyk modalnych układu. Informacje te zostaną w dalszej części pracy zastosowane w obliczeniach numerycznych i optymalizacyjnych.

**GDZIEŚ DO WSTĘPU:** Drgania towarzyszą ludzkości od zawsze. Jakkolwiek trywialnie nie brzmiałoby to zdanie, wibracje występują w naszym otoczeniu przejawiając się często w sposób niepożądany: wywołują dyskomfort użytkowania, są odbierane jako hałas, powodują zjawiska zmęczeniowe czy w skrajnej sytuacji wywołują uszkodzenia i zniszczenia (Maia i Silva 1997). Wciąż postępujący rozwój nauki połączony z komputeryzacją i informatyzacją sprawiają, że używane materiały są coraz wytrzymalsze. Jednocześnie rośnie zapotrzebowanie na coraz większe, spekta-

Tablica 2.1: Niepewności najistotniejszych parametrów modeli numerycznych i modalnych na podstawie Brincker i C. E. Ventura 2015

Własność fizyczna	Poziom niepewności [%]
Moduł sprężystości i gęstość masy dla stali i innych metali	1–5
Moduł sprężystości i gęstość masy dla betonu, drewna i zbrojonych włóknami materiałów	5–20
Warunki brzegowe z podłożem	10-nieskończoność
Połączenia śrubowe	10-nieskończoność
Połączenia spawane	2-10
Masa całkowita	1-5
Określana częstotliwość drgań własnych	0.1-0.05
Pomierzona odpowiedź	0.2-2
Określone postaci drgań własnych	2-5
Określone tłumienie	5-20
Współczynnik skalujący postaci drgań własnych	5-30

kularne konstrukcje. Te dwa czynniki połączone ze sobą sprawiają, że zachowanie dynamiczne struktury często decyduje o właściwościach użytkowych i wytrzymałościowych konstrukcji.

W odpowiedzi na zapotrzebowanie, w sposób naturalny rozwinała się dziedzina nauki zajmująca się opisem i modelowaniem zjawisk dynamicznych. Podstawowym narzędziem służącym identyfikacji parametrów modalnych i zachowania dynamicznego jest analiza modalna (*eng. modal analysis*). Często Analiza modalna bywa określana jako identyfikacja modalna (*eng. modal identification*). (L. Zhang, Brincker i Palle Andersen 2004) w pracy definiuje identyfikację modalną jako gałąź szerszego pojęcia identyfikacji systemów, a jej celem jest budowa modelu matematycznego systemu dynamicznego poprzez pomiar i analizę zestawu danych wejściowych i wyjściowych. Z kolei Chmielewski i Zembaty 1998 zwięzle preczyzuje pojęcie modelu matematycznego dla zagadnień dynamiki budowli jako zównanie lub zbiór równań, które opisują ruch modelu obliczeniowego". Ewins 2000 podaje trzy główne cele przeprowadzania analizy modalnej:

- ocena źródła drgań i ich przebiegu,
- weryfikacja modeli teoretycznych i przewidywanie zjawisk dynamicznych,
- identyfikacja charakterystyk materiałowych ciała poddanego wymuszeniu dynamicznemu (np. tłumienie, tarcie, wytrzymałość zmęczeniowa).

Każdy z powyższych celów może być jedynie środkiem do osiągnięcia zupełnie innego celu. W rzeczywistości tak właśnie jest najczęściej o czym świadczy mnogość aplikacji analizy modalnej w bardzo różnych zagadnieniach dotyczących konstrukcji.

W poniższej pracy, tak jak w zdecydowanej większości innych opracowań, modele matematyczne będą oparte na trzech głównych zasadach (Maia i Silva 1997):

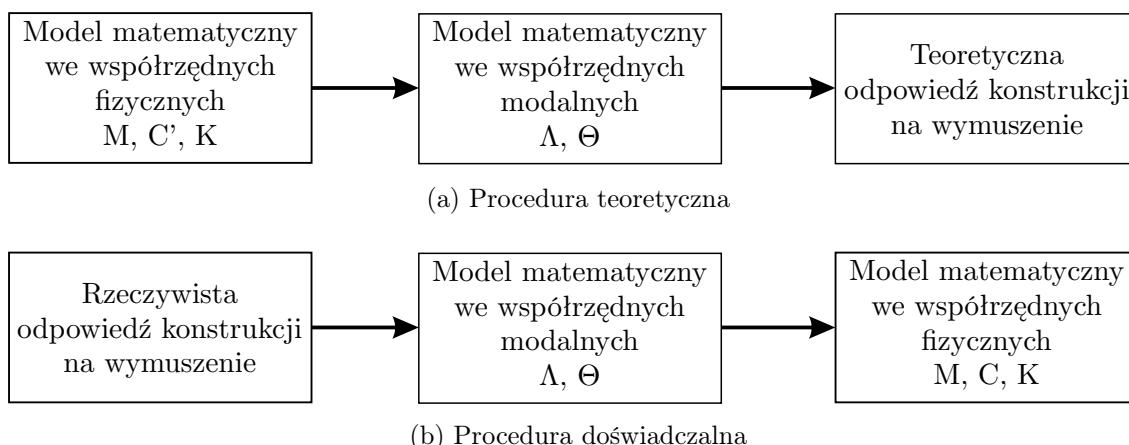
- system jest liniowy,
- obowiązuje zasada wzajemności Maxwell'a,
- system jest niezależny od czasu.

## 2.2 Klasyfikacja metod analizy modalnej

Identyfikacja modalna jest zbiorem technik, które są rozwijane dynamicznie od lat 60' XX w. Gwałtowny przyrost zainteresowania tym tematem wywołał głównie rozwój technik cyfrowych (Ewins 2000). Do tej pory powstało wiele różnych technik, których krótką klasyfikację z podziałem na główne kryteria podano w tym podrozdziale.

Matematyczne modele modalne mogą charakteryzować się różnym stopniem skomplikowania. Parametrami, które mogą opisywać model są postaci drgań własnych oraz powiązane z nimi częstotliwości i tłumienia modalne, a także masa i sztywność modalna. Z kolei metody analizy modalnej również różnią się pod względem informacji, którą mogą dostarczyć. Z tego względu wybór odpowiedniej metody powinien być świadomym i popartym przeglądem wielu technik, z których wybrana zostanie ta optymalna. Aspektami mogącymi wpływać na wybór metody są m.in.: czas potrzebny do implementacji (pierwszego użycia), informacje możliwe do uzyskania z modelu, możliwy wpływ założeń i uproszczeń, liczba parametrów potrzebnych do stworzenia modelu czy też stabilność rozwiązania. Przedstawiony podział opiera się na klasycznych kryteriach stosowanych przy klasyfikacji metod analizy modalnej. Istnieje wiele pozycji literaturowych, w których zainteresowany znajdzie dokładny opis wielu metod ze wskazówkami do ich użycia (Ewins 2000; Maia i Silva 1997; L. Zhang, Brincker i Palle Andersen 2004; Brincker i C. E. Ventura 2015; Rainieri i Fabbrocino 2014).

Najogólniej analizę modalną można podzielić na dwie główne gałęzie zależne od typu stosowanej procedury, jej danych wejściowych i rezultatów: teoretyczną i eksperymentalną (Lengvarský i Bocko 2013). W niniejszej pracy wielokrotnie używane będą oba podejścia, dlatego autor zdecydował się na krótki ich opis. Ogólny schemat procedur teoretycznej i doświadczalnej analizy modalnej pokazano na rysunku 2.1.



Rysunek 2.1: Porównanie procedur teoretycznej i doświadczalnej analizy modalnej

Metody teoretyczne opierają się na rozwiązaniach analitycznych lub numerycznych (rys. 2.1a). Badanie zachowania dynamicznego rozpoczyna się od definicji struktury, najczęściej za pomocą modelu dyskretnego opisanego macierzami  $M, C', K$  oznaczającymi odpowiednio macierz mas, tłumienia i sztywności. Macierz tłumienia, w przypadku metod teoretycznych, jest to niewyznaczalna analitycznie macierz bazująca na doświadczeniach i rezultatach badań, stąd została oznaczona apostrofem  $C'$ . Za pomocą przekształceń matematycznych (skrótnie opisanych w dalszej

części tekstu) tworzony jest model matematyczny we współrzędnych modalnych. Uzyskiwane są charakterystyki modalne układu  $\Lambda$  i  $\Phi$  odpowiednio częstości drgań własnych, postaci drgań własnych i dodatkowo parametry opisujące przyjęty model tłumienia. Po uzyskaniu modelu matematycznego opisanego współrzędnymi modalnymi możliwe jest wyznaczenie odpowiedzi konstrukcji w czasie przy jej znanym wymuszeniu. Powyższy opis przedstawia pełną procedurę teoretyczną zakończoną wyznaczeniem odpowiedzi układu. Jednakże, jak wspomniano wcześniej, analiza modalna oraz jej metody są zróżnicowane z punktu widzenia skomplikowania. Zazwyczaj wybór metody zależy od zapotrzebowania na rezultaty. Zwłaszcza w przypadkach obliczeń inżynierskich często poprzestaje się na wyznaczeniu charakterystyk modalnych, które są następnie oceniane z punktu widzenia zagrożenia nadmiernymi efektami dynamicznymi. Metody analityczne znajdują realne zastosowanie w przypadku obiektów, których opis ciągły nie jest złożony, a dyskretny ograniczony jedynie do niewielkiej liczby stopni swobody. Rzeczywiste konstrukcje są układami o nieskończonej liczbie stopni swobody. Niemniej, sprowadzenie ich do skończonej (choć zazwyczaj bardzo dużej) liczby stopni swobody pozwala otrzymać zadowalająco prawne rezultaty. W przypadku dużej liczby stopni swobody najszerzej stosowane są metody przybliżone opierające się obliczeniach numerycznych, takie jak: metoda różnic skończonych (MRS) czy metoda elementów skończonych (MES). Teoretyczna analiza modalna ma wiele zalet. Pozwala uzyskać rezultaty relatywnie szybko i tanio. Wynika to z powszechności narzędzi do modelowania i obliczania konstrukcji. W obrębie modelowania realnych struktur współczesne oprogramowanie pozwala budować modele numeryczne praktycznie bez ograniczeń. Stosowane preprocesory graficzne pozwalają użytkownikowi na odwzorowanie nawet skomplikowanych kształtów geometrycznych. Rosnąca moc obliczeniowa komputerów przestaje być ograniczeniem, zwłaszcza przy obliczeniach statycznych modeli o znaczącej liczbie stopni swobody. Niepodważalną zaletą jest również dowolność sposobów obciążania i modyfikacji modelu numerycznego. Pomimo wielu niewątpliwych zalet, teoretyczna analiza modalna posiada ograniczenia, z których należy zdawać sobie sprawę. Przede wszystkim jakość rezultatów zależy wprost od jakości wprowadzonych przez użytkownika danych. (Potrzebne przykłady). W przypadku zagadnień dynamicznych kolejnym bardzo ważnym ograniczeniem jest brak analitycznej możliwości określenia tłumienia konstrukcji. Taką możliwość daje jedynie badanie doświadczalne na rzeczywistej konstrukcji. Metody analityczne i numeryczne są obszernie opisane w wielu publikacjach (Chmielewski i Zembaty 1998; Chopra 2012; Rucka i Wilde 2014). W dalszej części rozdziału zaprezentowano absolutne podstawy i założenia analitycznej analizy dynamicznej.

Doświadczalna analiza w odróżnieniu od wersji teoretycznej angażuje do identyfikacji warsztat badawczy. Ewins 2000 definiuje ją jako zespół procesów związanych z badaniem elementów konstrukcji w celu uzyskania matematycznego opisu ich zachowania dynamicznego. Jest to definicja zbliżona do ogólniejszej podanej przez L. Zhang, Brincker i Palle Andersen 2004, ale stawia szczególnie mocny akcent na aspekt badawczy. Jak przedstawiono na rysunku (rys. 2.1b) ten typ analizy ma niejako odwrotny kierunek niż teoretyczna analiza modalna. W tym przypadku odpowiedź konstrukcji jest mierzona i na jej podstawie wyznaczane są wielkości opisujące model matematyczny:  $\Lambda$  i  $\Phi$ . Następnie na dopiero ich podstawie możliwe jest przekształcenie na model matematyczny wyrażony we współrzędnych fizycznych:  $M$ ,  $C'$ ,  $K$ . Doświadczalna analiza modalna dzieli się na dwie główne odnogi

związane z zakresem rejestrowanych danych w trakcie wykonywania eksperymentu. Pierwsza z nich to Eksperimentalna Analiza Modalna (EMA) (*eng. Experimental Modal Analysis*) wymaga pomiaru sił wymuszających oraz odpowiedzi konstrukcji na to wymuszenie. Druga to Operacyjna Analiza Modalna (OMA) (*eng. Operational Modal Analysis*), która estymuje parametry modalne wyłącznie na podstawie pomierzonych efektów nieznanego wymuszenia. Wymuszenie to jednak nie może być dowolne, a ograniczenia przedstawione zostaną w dalszej części pracy.

Kwestia pomiaru sił wymuszających wpływa na podstawowe różnice pomiędzy dwoma rodzinami metod: EMA i OMA. EMA najczęściej prowadzona jest w kontrolowanych warunkach i przez to pozwala dostarczyć bardziej szczegółowych i dokładniejszych informacji na temat zachowania dynamicznego konstrukcji. Jednakże w przypadku rzeczywistych konstrukcji inżynierskich (np. mosty) trudno jest stworzyć takie kontrolowane warunki. Obiekt musi zostać na czas pomiarów wyłączony z eksploatacji. Okazuje się to często niemożliwe z przyczyn proceduralnych, a na pewno kosztowne. Drugim zasadniczym ryzykiem jest potrzeba stworzenia takiego systemu wymuszenia, które wywoła mierzalną odpowiedź konstrukcji. W przypadku dużych konstrukcji inżynierskich może okazać się to trudne do zrealizowania ponieważ oddziaływanie środowiskowe mogą wywoływać efekty oddziaływań porównywalne z kontrolowanym wymuszeniem. OMA praktycznie pozbywa się negatywnych skutków potrzeby kontroli wymuszenia. Badania prowadzone mogą być przy normalnej eksploatacji, a losowe oddziaływanie środowiskowe zazwyczaj polepszają jakość wyników. Oczywiście odbywa się to kosztem dokładności rezultatów. Teoretyczne założenia metody są spełnione tylko w sposób przybliżony. Z tego względu serie pomiarowe zwykle muszą trwać znacznie dłużej, a interpretacja wyników wymaga większego doświadczenia.

### Połączenie obu typów analiz

Obszerność zagadnień dotyczących analizy teoretycznej i identyfikacji modalnej wypełnia wiele tomów specjalistycznej literatury. Mimo chęci nie sposób przytoczyć je wszystkie z zadowalającą dokładnością. W rozdziale opisano najważniejsze według autora pojęcia których zrozumienie było kluczowe do przeprowadzenia badań i analiz numerycznych.

## 2.3 Modele teoretyczne układów dynamicznych

Metody teoretycznej analizy modalnej są obszernie opisane w literaturze przedmiotu (cytowania). Ze względu na złożoność rzeczywistych konstrukcji, w praktyce mają one zastosowanie głównie w formie rozwiązań numerycznych. Według przedstawionej na rysunku 2.1a procedury metody teoretycznej analizy modalnej służą głównie dwóm celom: identyfikacji charakterystyk modalnych (częstotliwości i postaci drgań własnych) i wyznaczaniu odpowiedzi układu. Dla zrozumienia zagadnienia, metody analityczne najczęściej przedstawione są dla najprostszego przypadku układu z jednym stopniem swobody. Układ ten z reguły łatwo daje się uogólnić do układu o wielu stopniach swobody. Macierzowe równanie drgań wymuszonych dla tłumionego układu o skończonej liczbie stopni swobody przedstawiono we wzorze 2.1.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (2.1)$$

gdzie  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  to odpowiednio macierze mass, tłumienia i sztywności,  $\mathbf{x}$  to wektor współrzędnych uogólnionych (przemieszczeń lub obrotów punktu),  $\mathbf{F}(t)$  to wektor

uogólnionych sił wymuszających. Wzór 2.1 odpowiadający formule 2.2 pozbawionej składnika reprezentującego opory ruchu opisuje ruch nietłumiony układu.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (2.2)$$

Drgania swobodne są procesem fizycznym spowodowanym zaburzeniem stanu równowagi, przez zaistnienie warunków początkowych. Macierzowe równanie ruchu drgań swobodnych, tłumionych opisane jest wzorem 2.3, a nietłumionych wzorem 2.4. Od równań ruchu drgań wymuszonych, równania te różnią się brakiem składnika sił wymuszających.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

Okazuje się, że parametry modalne systemu są ściśle powiązane z rozwiązyaniem algebraicznego problemu własnego równań drgań własnych.

### 2.3.1 Zagadnienie własne

Identyfikacja modalna modelu matematycznego polegająca na wyznaczeniu częstotliwości i postaci drgań własnych najczęściej sprowadza się do rozwiązywania zagadnienia własnego. Bardzo pozytywnym aspektem tej zależności jest to, że istnieje wiele prostych w aplikacji, wydajnych i dokładnych algorytmów pozwalających rozwiązać numerycznie zagadnienie własne (Golub i Van Loan 2013). Dzięki temu, właśnie ta metoda identyfikacji modalnej cieszy się największą popularnością wśród producentów oprogramowania do obliczania konstrukcji. Użytkownicy oprogramowania mogą bez większego wysiłku dokonać identyfikacji parametrów modalnych nawet złożonych modeli matematycznych.

#### Układ nietłumiony

Z reguły przyjmuje się, że rozwiązywanie zagadnienia własnego wykorzystuje równanie drgań swobodnych nietłumionych (2.4). Należy zaznaczyć, że drgania własne nie opisują procesu fizycznego, a są jedynie matematyczną idealizacją drgań układu. W przypadku nietłumionym, dla każdego z modów, układ oscyluje wokół położenia równowagi z częstotliwością drgań własnych, a wszystkie stopnie swobody drgają w tej samej fazie. Oznacza to, że każdy z punktów osiąga swoje ekstremalne położenie w tej samej chwili. Podobnie wszystkie punkty znajdują się w położeniu równowagi w tym samym czasie. Poniżej przedstawiono rozwiązanie dla nietłumionego układu  $N$  dynamicznych stopni swobody.

Założono rozwiązanie 2.4 w postaci  $\mathbf{x}(t) = \phi e^{j\omega t}$  gdzie  $\omega$  to częstotliwość drgań własnych,  $j = \sqrt{-1}$ , a  $\phi$  to niezerowy wektor postaci drgań własnych. Po podstawieniu rozwiązania i jego drugiej pochodnej ( $\ddot{\mathbf{x}}(t) = -\phi\omega^2 e^{j\omega t}$ ) do równia 2.4 otrzymamy równanie 2.5.

$$-\mathbf{M}\phi\omega^2 e^{j\omega t} + \mathbf{K}\phi e^{j\omega t} = \mathbf{0} \quad (2.5)$$

Dzieląc strony równania przez niezerową wartość  $e^{j\omega t}$  otrzymujemy układ liniowych równań algebraicznych:

$$-\mathbf{M}\omega^2\phi + \mathbf{K}\phi = \mathbf{0} \quad (2.6)$$

w którym dwie niewiadome do ustalenia to:  $\phi$  - niezerowy wektor postaci drgań własnych oraz  $\omega$  - częstość drgań własnych. Równanie to można zapisać w formie 2.7 z indeksami określającymi poszczególne mody drgań własnych. Liczba par odpowiadających sobie częstości  $\omega_i$  i postaci drgań własnych  $\phi_i$  jest równa liczbie  $N$  stopni swobody.

$$\omega_i^2 \mathbf{M} \phi_i = \mathbf{K} \phi_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.7)$$

Z kolei równanie 2.8 to reprezentacja uogólnionego problemu własnego, w którym  $\lambda_i$  to wartość własna, a  $u_i$  to wektor własny. Z porównania wzorów 2.7 i 2.8 wyraźnie widać powiązanie  $\lambda_i = \omega_i^2$ . Wynika z tego, że rozwiązanie numeryczne uogólnionego problemu własnego pozwala wprost uzyskać częstości ( $\lambda_i = \omega_i^2$ ) i postaci drgań własnych ( $\phi_i$ ).

$$\lambda_i \mathbf{A} u_i = \mathbf{B} u_i \quad (2.8)$$

Układ równań (2.7) ma nietrywialne rozwiązania tylko jeśli

$$\det[\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}] = \mathbf{0} \quad (2.9)$$

Formuła 2.9 jest znana jako równanie charakterystyczne zagadnienia własnego. Jeśli rozwiniąć wyznacznik, otrzymamy wielomian stopnia  $N$  względem  $\omega_i^2$ . Pierwiastkami równania 2.9 są częstości drgań własnych  $\omega_i$ . Znając częstości własne  $\omega_i$  z równania 2.7 można obliczyć odpowiadające wektory własne  $\phi_i$  z dokładnością do stałego czynnika. Taki wynik bywa nieprzystępny w ocenie więc wektory poddawane mogą być normalizacji. Do najczęściej stosowanych metod normalizacji należy taka modyfikacja wektora tak aby maksymalna wartość bezwzględna spośród wszystkich elementu była równa jedności. Innym przykładem może być normalizacja wektorów tak aby wartość elementu dla danego stopnia swobody, we wszystkich wektorach była równa jedności.

Jeżeli macierze  $\mathbf{M}$  i  $\mathbf{K}$  ( $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$  wg 2.6) są symetryczne i dodatnio określone o wartościach rzeczywistych to wartości oraz wektory własne są również rzeczywiste. W przypadku konstrukcji budowlanych macierz  $\mathbf{K}$  jest zawsze dodatnio określona ponieważ warunki brzegowe zapewniają brak ruchu ciała jako bryły sztywnej. Nie jest to oczywiste dla innych niż budowlane struktur, takich jak np. samolot w locie (Chopra 2012).

Postaci drgań własnych (wektory własne) odpowiadające różnym częstościom własnym spełniają warunki ortogonalności. W przypadku gdy  $\omega_i \neq \omega_j$  prawdziwe są zależności 2.10. Ortogonalność wektorów własnych może być wykorzystana do weryfikacji obliczonych wektorów.

$$\phi_i^T \mathbf{K} \phi_j = 0 \quad \phi_i^T \mathbf{M} \phi_j = 0 \quad (2.10)$$

Obliczone z równania 2.9 wartości oraz wektory własne możemy przedstawić w postaci dwóch specjalnych macierzy.  $N$  obliczonych wartości własnych zestawionych w macierz diagonalną tworzy tak zwaną macierz widmową (2.11). Z kolei  $N$  wektorów własnych zestawionych kolumnowo nazywamy macierzą modalną (2.12).

$$\Omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_N^2 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$\boldsymbol{\phi} = [\phi_{i,j}] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1N} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{N1} & \phi_{N2} & \dots & \phi_{NN} \end{bmatrix} \quad 1 \leq i, j \leq N. \quad (2.12)$$

Dla układu o  $N$  stopniach swobody możemy wyznaczyć  $N$  par częstotliwości i postaci drgań własnych. Jednak w rzeczywistości rozwiązanie ogranicza się do wyznaczenia jedynie ograniczonej do kilkunastu (maksymalnie kilkuset) pierwszych par. Określenie "pierwszych" właściwe jest w przypadku kiedy wyznaczone częstotliwości uporządkujemy w szeregu rosnącym

$$0 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \dots \omega_{N-1} \leq \omega_N \quad (2.13)$$

W większości przypadków zagadnienie własne jest rozwiązywane numerycznie za pomocą maszyn cyfrowych. Metody numeryczne wykorzystują iteracyjne algorytmy do rozwiązania zagadnienia własnego. Chopra 2012 definiuje trzy główne kategorie algorytmów:

- Metody iteracji wektora wykorzystujące właściwości równania (2.7),
- Metody transformacyjne korzystające z ortogonalności wektorów własnych,
- Metody iteracyjne wykorzystujące równanie charakterystyczne (2.9).

Dla dużych systemów korzystne okazuje się łączenie algorytmów z tej samej bądź różnych kategorii co podnosi wydajność metody rozwiązania. W oprogramowaniu komercyjnym stosowane są złożone algorytmy takie jak metoda iteracji podprzestrzeni, metoda Lanczosa czy metoda gradientów Ritz'a. Wybór metody zależy również od wybranego solvera (silnika programu rozwiązującego równania). Algorytmy te różnią się pod względem wydajności, maksymalnej dokładności rozwiązania czy zbieżności. Ich wydajność może zależeć od liczby zadanych do wyznaczenia wartości własnych czy wielkości zadania. Więcej szczegółów odnośnie stosowanych metod rozwiązania zagadnienia własnego można odnaleźć w literaturze (Bathe 2006; Wilson i Itoh 1983; Wilson 1997; Fialko 2000; Papadrakakis 1993; T. Hughes 1987; Chopra 2012). W przypadku dobrej jakości oprogramowania komercyjnego informacje na temat używanych algorytmów powinny dostępne w pomocy do programu.

## Układ tłumiony

Drgania swobodne tłumione układu określone są równaniem (2.3), które przytoczono ponownie poniżej:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

Rozwiązanie tego równania jest uzależnione od postaci tłumienia: klasycznego lub nieklasycznego. Tłumienie klasyczne zwane również proporcjonalnym (*eng. classical damping, proportional damping*) występuje w przypadku kiedy spełnione jest równanie (2.15).

$$\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = \mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \quad (2.15)$$

Kiedy macierz  $\mathbf{C}$  jest diagonalna to warunek (2.15) jest spełniony. W takim przypadku wszystkie częstotliwości drgań własnych są rzeczywiste i identyczne do tych wyznaczonych dla układu nietłumionego. W przypadku przeciwnym mamy do czynienia

z tłumieniem nieklasycznym bądź nieproporcjonalnym (*eng. nonclassical damping, nonproportional damping*). Dla tej sytuacji macierz  $\mathbf{C}$  nie jest diagonalna, a wartości własne są zespolone. Szczegółowe informacje oraz metody rozwiązania przypadków dynamiki konstrukcji nieklasycznie tłumionych podano w (Caughey i O'Kelly 1961; Chopra 2012). Inman i Lallement 1995 na przykładzie pokazali, że obliczanie struktur charakteryzujących się tłumieniem nieklasycznym za pomocą zagadnienia własnego bez uwzględnienia macierzy tłumienia może prowadzić do błędnych rezultatów. Tak wyznaczone częstotliwości drgań będą różnić się od rzeczywistych, co może pociągnąć za sobą błędne wnioski odnośnie zakresu częstotliwości grożących rezonansem.

### 2.3.2 Transformacja do współrzędnych normalnych

Rozważmy ponownie równanie ruchu układu MDOF (2.14). Wiemy, że każdy wektor o długości  $N$  może być przedstawiony jako kombinacja liniowa  $N$  liniowo niezależnych wektorów. Przedstawmy zatem wektor przemieszczeń  $\mathbf{x}$  jako kombinację wektorów własnych  $\boldsymbol{\phi}$ .

$$\mathbf{x} = \sum_{r=1}^N \boldsymbol{\phi}_r q_r = \boldsymbol{\phi} \mathbf{q} \quad (2.16)$$

gdzie współczynniki  $q_r$  nazywane są współrzędnymi normalnymi (*eng. modal coordinates, normal coordinates*) i  $\mathbf{q} = \langle q_1 \ q_2 \ \dots \ q_N \rangle^T$ . Założmy, że zagadnienie własne zostało rozstrzygnięte i wyznaczyliśmy macierz modalną  $\boldsymbol{\phi}$  (2.12). Aby uzyskać wartości współczynników  $q_n$  dla danego  $\mathbf{x}$ , przemnóżmy obie strony równania 2.16 przez  $\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M}$ :

$$\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M} \mathbf{x} = \sum_{r=1}^N (\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_r) q_r \quad (2.17)$$

Ortogonalność wektorów własnych (2.10) sprawia, że wszystkie składniki powyżej sumy są równe 0 poza tymi, w których  $r = n$ . Pomińmy więc znak sumy i zapiszmy

$$\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M} \mathbf{x} = (\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n) q_n \quad (2.18)$$

$$q_n = \frac{\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M} \mathbf{x}}{\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n} \quad (2.19)$$

Transformacja do współrzędnych normalnych jest istotnym elementem przewidywania odpowiedzi wymuszonych, liniowych układów MDOF z tłumieniem proporcjonalnym (p. 2.3.4).

### 2.3.3 Odpowiedź systemów dynamicznych o jednym stopniu swobody

Przegląd metod pozwalających wyznaczyć odpowiedź konstrukcji poddanej wymuszeniu wypada zacząć klasycznie od układu z jednym stopniem swobody. W przypadku liniowego układu SDOF obciążonego siłą zewnętrzną, równanie ruchu jest liniowym równaniem różniczkowym drugiego rzędu (2.20). Znając warunki początkowe  $x(0)$  i  $\dot{x}(0)$  możemy traktować zadanie jako w pełni sformułowane. Dla konstrukcji wstępnie nieobciążonej dynamicznie przemieszczenie i prędkość początkowe

można przyjąć jako równe zeru.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (2.20)$$

Dla tak sformułowanego problemu istnieją cztery podstawowe metody wyznaczenia odpowiedzi dynamicznej:

- klasyczne rozwiązanie równań różniczkowych,
- wykorzystanie całki Duhamela,
- rozwiązanie w dziedzinie częstotliwości,
- wykorzystanie metod numerycznych.

Dla porządku powyższe metody zostaną w dalszej części krótko opisane. Dokładny opis metod jest przedstawiony w wielu podstawowych pozycjach literaturowych dotyczących dynamiki budowli (Clough i Penzien 1975; Chmielewski i Zembaty 1998; Chopra 2012).

### Metoda klasyczna

Rozwiązanie liniowego równania różniczkowego o stałych współczynnikach jakim jest równanie ruchu składa się z rozwiązania całki ogólnej i szczególnej, a następnie zsumowania ich. Równanie ruchu jest rzędu drugiego stąd do wyznaczenia pozostają dwie zmienne całkowania. Z kolei do ich wyznaczenia wykorzystane są warunki początkowe. **OGRANICZENIA**

### Całka Duhamela

Metoda rozwiązania równania ruchu układu SDOF za pomocą całki Duhamela polega na przekształceniu funkcji obciążenia  $f(t)$  na sekwencję nieskończonie krótkich impulsów. Przykładając impulsowe, jednostkowe wymuszenie (delta Diraca) do układu (2.20), dla odpowiednich warunków początkowych otrzymuje się rozwiązanie w postaci odpowiedzi impulsowej, inaczej zwanej impulsową funkcją przejścia (*eng. unit response function*). Aby uzyskać odpowiedź układu w czasie  $t$  sumuje się wszystkie odpowiedzi impulsowe do chwili czasowej  $t$ . W przypadku całkowalnej funkcji wymuszenia, całka Duhamela może być alternatywą do rozwiązania metodą klasyczną. Dla eksperymentalnych funkcji wymuszenia, całkę Duhamela można wyznaczyć metodami numerycznymi. W tym przypadku odpowiedź będzie wyznaczona w dyskretnych chwilach czasowych. Należy jednak wspomnieć, w przypadku angażowania metod numerycznych całka Duhamela nie jest najwydajniejszym rozwiązaniem. Dodatkowo, ze względu na wykorzystywaną superpozycję, rozwiązanie to jest ograniczone wyłącznie do układów liniowych.

### Metoda przejścia do dziedziny częstotliwości

Metoda przejścia do dziedziny częstotliwości (*eng. frequency-domain method*) wykorzystuje właściwości przekształceń Laplace'a lub Fourier'a. Dla układu SDOF (2.20) wykonuje się wybrane przekształcenie funkcji wymuszenia  $f(t)$  uzyskując  $F(\omega)$ .  $F(\omega)$  można określić jako amplitudy wszystkich składników harmonicznych, które składają się na wymuszenie  $f(t)$ . Przekształcenie  $X(\omega)$  rozwiązania równania różniczkowego  $x(t)$  można z kolei opisać następująco

$$X(\omega) = H(\omega)F(\omega) \quad (2.21)$$

gdzie  $H(\omega)$  to odpowiedź zespolona w dziedzinie częstotliwości nazywana też funkcją przenoszenia lub transmitancją (*eng. complex frequency-response function (FRF)*). Funkcja przenoszenia  $H(\omega)$  opisuje odpowiedź układu w dziedzinie częstotliwości przy wymuszeniu harmonicznym. Ostatnim krokiem metody jest wyznaczenie rozwiązania  $x(t)$  podając  $X(\omega)$  odwrotnemu przekształceniu (Fourier'a bądź Laplace'a). Tak uzyskany rezultat  $x(t)$  można traktować jako określenie odpowiedzi harmonicznych układu na każdy z składników wymuszenia. Te częstkoweg odpowiedzi te są następnie sumowane w celu uzyskania całkowitej odpowiedzi  $x(t)$ . Ponownie, metoda ta bezpośrednio może być stosowana tylko dla prostych funkcji wymuszenia  $f(t)$ . Jeżeli funkcja wymuszenia jest określona numerycznie, odpowiednie przekształcenia można przeprowadzić np. z użyciem algorytmu dyskretnej transformaty Fouriera w wariancie szybkiej transformaty Fourier'a (*eng. Fast Fourier Transform (FFT)*)).

### Metody numeryczne

Zastosowanie powyższych trzech metody wyznaczania odpowiedzi dynamicznej ograniczone jest tylko do układów liniowych. Wspomniano również, że stają się niepraktyczne lub wręcz niemożliwe do zastosowania w przypadku skomplikowanych, zmiennych w czasie funkcji wymuszenia  $f(t)$ . W takich niekorzystnych okolicznościach z pomocą przychodzą metody numeryczne. Co więcej, okazuje się, że w przypadkach liniowych układów metody te są również konkurencyjne dla metod analitycznych.

Stworzono wiele metod i algorytmów numerycznych służących skutecznemu rozwiązaniu równań ruchu. Powstało również wiele pozycji traktujących o tym zagadnieniu (LITERATRA). Z tego względu przytoczono tylko podstawowe pojęcia i założenia dotyczące istoty rozwiązań numerycznych.

Metody numeryczne w głównej mierze opierają się na mechanizmie kroku czasowego (*eng. time-step*) (p. 2.3.4). Zwykle nie jest to rozwiązanie ścisłe. Metody dostarczają jedynie przybliżonych rozwiązań, dlatego też muszą spełniać następujące kryteria:

- zbieżności (*eng. convergence*) - wraz ze zmniejszeniem kroku czasowego, rozwiązanie powinno zmierzać do rozwiązania dokładnego,
- stabilności (*eng. stability*) - rozwiązanie powinno być stabilne pomimo występowania błędów zaokrągleń,
- dokładności (*eng. accuracy*) - rozwiązanie powinno być dostatecznie bliskie rozwiązanie dokładnego.

Wśród metod numerycznych, które okazały się skuteczne w rozwiązaniach problemów możemy wyróżnić trzy główne:

- metoda interpolacji funkcji wymuszającej,
- metoda różnic skończonych,
- metoda średniego lub limiowego przyspieszenia w przedziale różnicowym, oparte na metodzie Newmark'a.

Pomimo, że powyższe metody są opisane dla układu SDOF, są łatwo uogólniane i praktycznie wykorzystywane do obliczania układów MDOF. Algorytm metody Newmark'a jest najpowszechniej używany w obliczeniach konstrukcji inżynierskich oraz został wykorzystany w niniejszej pracy. Stąd w następnym podrozdziale zawarto zwięzły opis jego działania.

### 2.3.4 Odpowiedź systemów dynamicznych o skończonej liczbie stopni swobody (MDOF)

Systemy o skończonej liczbie stopni swobody mogą charakteryzować się tłumieniem klasycznym (proporcjonalnym) bądź nieklasycznym (nieproporcjonalnym). Mogą być liniowe lub nieliniowe geometrycznie lub materiałowo. Czynniki te mają wpływ na wybór metody przewidywania odpowiedzi takiego układu. Macierzowe równanie ruchu dla układu o  $N$  stopniach swobody możemy zapisać jako  $N$  równań różniczkowych w formie (2.22)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (2.22)$$

Modelem z tłumieniem proporcjonalnym, z wystarczającym przybliżeniem, można opisać większość badanych struktur. Odpowiedź układów ograniczonych do kilku stopni swobody może być wyznaczana przez rozwiązanie równania różniczkowego 2.22. W przypadku większej liczby stopni swobody zwykle wykorzystuje się metody numeryczne. Jak wiemy z rozdziału 2.3, dla takich układów zawsze możliwe jest wyznaczenie częstotliwości i postaci drgań własnych. Co więcej, opisujące je macierzowe równanie ruchu można przekształcić za pomocą metody transformacji własnej do postaci zależnej od współrzędnych modalnych. W takiej formie równanie to jest zbiorem równań rozwiązkanych. Z tego względu można wyznaczyć odpowiedź dla każdego modu (zestawu jednej częstotliwości i postaci własnej oraz towarzyszącego tłumienia) osobno, a następnie złożyć ją w celu wyznaczenia odpowiedzi całkowitej. Dodatkowo, każda odpowiedź modalna może być wyznaczona jako funkcja czasu przez analizę układu SDOF. Równania SDF mogą być oczywiście rozwiązane wszystkimi przytoczonymi wcześniej wymienionymi metodami - w tym numerycznymi.

W przypadku kiedy mamy do czynienia z układem o tłumieniu nieproporcjonalnym, klasyczne parametry modalne nie mogą być wyznaczone, a równania ruchu nie mogą być rozwiązkane. Takie systemy można analizować dwiema metodami: poprzez przekształcenie równań ruchu na wektory własne obliczone w zespolonym zagadnieniu własnym lub poprzez bezpośrednie całkowanie nierożwiłanych równań różniczkowych. Druga metoda wykorzystuje metody numeryczne co wynika z braku zamkniętych rozwiązań analitycznych nawet dla analitycznie opisanych funkcji obciążenia. Metody numeryczne muszą być stosowane również w przypadku kiedy układ jest nieliniowy (niezależnie czy materiałowo, czy geometrycznie). W przypadku braku założenia o liniowości wybór metody nie jest uzależniony od tego, czy tłumienie jest proporcjonalne, czy też nie jest.

Zachowując porządek i kompletność wywodu poniżej przedstawiono krótki zarys dwóch podstawowych metod wyznaczania odpowiedzi układów dyskretnych o skończonej liczbie stopni swobody.

#### Metoda superpozycji modalnej

Rozpatrzmy układ MDOF, liniowy o tłumieniu proporcjonalnym dany równaniem 2.22. Wiemy, że wektor przemieszczeń  $\mathbf{x}$  może być zapisany za pomocą współrzędnych normalnych (p. 2.3.2) co powtórzono dla wygody poniżej:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{r=1}^N \phi_r q_r(t) = \Phi \mathbf{q}(t) \quad (2.23)$$

Podstawmy 2.23 do równania 2.22

$$\sum_{r=1}^N \mathbf{M}\phi_r \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^N \mathbf{C}\phi_r \dot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^N \mathbf{K}\phi_r q_r(t) = \mathbf{F}(t) \quad (2.24)$$

Następnie przemnóżmy z lewej strony każdy składnik przez  $\phi_n^T$  otrzymując:

$$\sum_{r=1}^N \phi_n^T \mathbf{M}\phi_r \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^N \phi_n^T \mathbf{C}\phi_r \dot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^N \phi_n^T \mathbf{K}\phi_r q_r(t) = \phi_n^T \mathbf{F}(t) \quad (2.25)$$

Podobnie jak w punkcie 2.3.2, ortogonalność wektorów własnych  $\phi$  sprawia, że wszystkie składniki sum, w których  $r \neq n$ , zerują się. Możemy więc zapisać zredukowane równanie w postaci

$$(\phi_n^T \mathbf{M}\phi_n) \ddot{q}_n(t) + (\phi_n^T \mathbf{C}\phi_n) \dot{q}_n(t) + (\phi_n^T \mathbf{K}\phi_n) q_n(t) = \phi_n^T \mathbf{F}(t) \quad (2.26)$$

Zauważmy, że iloczyny zawarte w nawiasach są skalarami. Uprośćmy więc zapis do następującej formy:

$$\mathcal{M}_n \ddot{q}_n(t) + \mathcal{C}_n \dot{q}_n(t) + \mathcal{K}_n q_n(t) = \mathcal{F}_n(t) \quad (2.27)$$

gdzie:

$$\mathcal{M}_n = \phi_n^T \mathbf{M}\phi_n \quad \mathcal{C}_n = \phi_n^T \mathbf{C}\phi_n \quad \mathcal{K}_n = \phi_n^T \mathbf{K}\phi_n \quad \mathcal{F}_n(t) = \phi_n^T \mathbf{F}(t) \quad (2.28)$$

Okazuje się, że wszystkie powyższe przekształcenia doprowadzają do tego, że (2.27) jest równaniem o jednym stopniu swobody dla  $n$ -tej współrzędnej normalnej odpowiadającej  $n$ -tej postaci drgań. Z tego względu współczynniki  $\mathcal{M}_n$ ,  $\mathcal{C}_n$ ,  $\mathcal{K}_n$ ,  $\mathcal{F}_n(t)$  nazywane są odpowiednio uogólnioną masą, uogólnionym tłumieniem, uogólnioną sztywnością i uogólnioną siłą dla  $n$ -tej postaci własnej (*eng. generalized mass, generalized damping, generalized stiffness, generalized force*). Równanie to możemy rozwiązać wszystkimi metodami dotyczącymi układów SDOF przedstawionymi w (p. 2.3.3). Warto też zwrócić uwagę, że wartości  $\mathcal{M}_n$ ,  $\mathcal{C}_n$ ,  $\mathcal{K}_n$ ,  $\mathcal{F}_n(t)$  są uzależnione jedynie od pojedynczej postaci drgań  $\phi_n$ . Naturalnie więc, jeśli znamy tylko jeden mod  $\phi_n$ , możemy wyznaczyć odpowiadający mu parametr  $q_n$  bez znajomości pozostałych modów. Jeśli współczynniki normalne  $q_n$  zostały wyznaczone dla  $N'$  wybranych (najczęściej kilku istotnych) modów, to wkład  $n$ -tego modu w całkowitą wartość przemieszczeń  $\mathbf{x}(t)$  wyznaczyć można następująco

$$\mathbf{x}_n(t) = \phi_n q_n(t) \quad (2.29)$$

a wykorzystując równania (2.23) i (2.29) obliczyć przemieszczenie całkowite

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{r=1}^{N'} \mathbf{x}_n(t) \quad (2.30)$$

Sumowanie wkładu poszczególnych postaci drgań w przemieszczenie całkowite jest par excellence superpozycją. Stąd też nazwa: "metoda superpozycji modalnej". Należy wspomnieć o paru istotnych założeniach mogących wpływać na zastosowanie tej metody. Jak już wcześniej wspomniano, może być ona wykorzystana tylko w układach liniowych (ze względu na superpozycję) i tłumionych proporcjonalnie. W przypadku tłumienia nieproporcjonalnego przekształcenie równania (2.25) do (2.26) nie będzie prawdziwe. Warto również pamiętać, że wynikowe przemieszczenia  $\mathbf{x}(t)$  są niezależne od normalizacji wektorów własnych, natomiast współrzędne normalne  $q_n(t)$  są od niej ścisłe zależne.

### Metoda całkowania bezpośredniego równań ruchu - Newmarka

Metoda Newmarka jest algorytmem opartym na koncepcji kroku czasowego i metodach numerycznych. Zgodnie z koncepcją kroku czasowego całkowity czas podzielony jest na serię kroków czasowych  $\Delta t$ . Konsekwencją tego jest dyskretyzacja siły wymuszającej i odpowiedzi układu poprzez określenie ich wyłącznie w wybranych chwilach czasowych. Rozpatrzmy ponownie równanie ruchu MDOF:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}(t) \quad (2.31)$$

Dokonajmy dyskretyzacji i przedstawmy siłę wymuszającą  $\mathbf{F}(t)$  określoną dla  $t \in <0, t_k>$  jako zestaw dyskretnych wartości w chwilach czasowych  $t_i$ :

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}(t_i) \quad i = 0, 1, 2 \dots N-1, N \quad (2.32)$$

gdzie  $t_N \leq t_k$ . Krokiem czasowym nazywamy różnice pomiędzy kolejnymi zdyskretyzowanymi chwilami czasowymi:

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i \quad (2.33)$$

Krok czasowy jest zazwyczaj przyjmowany jako stały, ale nie jest to konieczne. Tak jak wymuszenie, odpowiedź również podlega dyskretyzacji w chwilach  $t_i$ , a więc równanie ruchu można zapisać w nowej formie

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}_i + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}_i + \mathbf{K}\mathbf{x}_i = \mathbf{F}_i \quad (2.34)$$

Znając warunki początkowe  $\mathbf{x}(0)$  i  $\dot{\mathbf{x}}(0)$  algorytm wykorzystywane w metodach numerycznych potrafią wyznaczyć rozwiązania równania w kolejnych krokach  $i = 1, 2 \dots N-1, N$ . Należy zaznaczyć, że w metodzie "kroku czasowego" rozwiązanie ruchu nie jest spełnione w całej dziedzinie czasu, a jedynie w określonych krokach  $\Delta t$  chwilach czasowych  $t_i$ .

Rodzina metod numerycznych opartych na koncepcji kroku czasowego została rozwinięta przez Nathana M. Newmarka (Newmark 1959). Wykorzystuje ona dwa podstawowe równania:

$$\dot{\mathbf{x}}_{i+1} = \dot{\mathbf{x}}_i + [(1-\gamma)\Delta t]\ddot{\mathbf{x}}_i + (\gamma\Delta t)\ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \quad (2.35a)$$

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + (\Delta t)\dot{\mathbf{x}}_i + [(0.5-\beta)(\Delta t)^2]\ddot{\mathbf{x}}_i + (\beta(\Delta t)^2)\ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \quad (2.35b)$$

gdzie współczynniki  $\beta$  i  $\gamma$  definiują zmienność przyspieszeń w trakcie kroku czasowego i istotnie wpływają na stabilność i dokładność metody. Ze względu na oba te warunki, przy braku modyfikacji algorytmu, parametry powinny mieć następujące wartości:  $\gamma = \frac{1}{2}$ , a  $\frac{1}{6} \leq \beta \leq \frac{1}{4}$ . Na skrajach zalecanego przedziału wartości parametru  $\beta$  występują dwa przypadki szczególnne, w których przyspieszenie ma określony charakter w kroku czasowym:

- przyspieszenie stałe -  $\gamma = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = \frac{1}{4}$
- przyspieszenie zmienne liniowo -  $\gamma = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = \frac{1}{6}$

Metoda numeryczna do wyznaczenia trzech niewiadomych  $\ddot{\mathbf{x}}_{i+1}$ ,  $\dot{\mathbf{x}}_{i+1}$  i  $\mathbf{x}_{i+1}$  wymaga układu trzech równań macierzowych. Zatem dwa zaproponowane równania 2.35a i 2.35b, połączone z równaniem równowagi (2.34) zapewnionym na końcu kroku czasowego, pozwalają wyznaczyć przemieszczenia, prędkość i przyspieszenia w chwili

$t_{i+1}$ . Ze względu na występowanie w równaniach (2.35) składników w chwili czasowej  $i + 1$  po obu stronach równania, algorytm musi mieć charakter iteracyjny. Jednakże istnieją modyfikacje równań, które dla układów liniowych pozwalają rozwiązać układ w jednym kroku. **DODAĆ Z ROZDZIAŁU Z KSIĄZKI MES PARĘ DODATKOWYCH INFORMACJI**

### 2.3.5 MES?

### 2.3.6 Mała dawka tłumienia

Drgania układów rzeczywistych nierozerwalnie związane są tłumieniem. Wśród polskich autorów obszerne rozważania na temat tłumienia drgań mostów przeprowadził Salamak 2003. Określa on tłumienie drgań jako w prosty sposób jako rozproszenie energii mechanicznej drgającego układu. Tłumienie można podzielić ze względu na źródło na konstrukcyjne i zewnętrzne. Pierwsze wynika między innymi z wewnętrznego tarcia wiskotycznego materiałów budowlanych w trakcie deformacji czy niejednorodności materiału i jego spękań. Tłumieniem zewnętrznym określa się wszystkie czynniki działające z zewnątrz na konstrukcję. Mogą być związane z tarciem niechybnie występującym na łożyskach, w tłuczniku i w połączeniach, z interakcją pomiędzy konstrukcją, a powietrzem, czy z wiskoelastycznych parametrów posadowienia.

W przypadku liniowych układów zazwyczaj przyjmuje się tłumienie klasyczne, proporcjonalne opisane jak w równaniu 2.22, pomimo że wartość tłumienia jest zależna chociażby od amplitudy drgań (Ladislav 1996). Obecnie nie ma możliwości analitycznego wyznaczenia wartości tłumienia dla projektowanej konstrukcji. Istnieją opracowania poparte badaniami informujące o zalecanych wartościach tłumienia jakie należy przyjąć przy projektowaniu danej konstrukcji. Przykładowe wartości oraz wzory empiryczne można odnaleźć w pracach (Salamak 2003; Ladislav Frýba 1999; Bachmann i in. 2012; Yamaguchi i Ito 1997).

W literaturze można odnaleźć kilka miar tłumienia. Pierwszą z nich jest liczba tłumienia (*eng. damping ratio*) nazywana również ułamkiem tłumienia lub tłumieniem względnym. Definiuje się ją jako stosunek współczynnika tłumienia wiskotycznego do tłumienia krytycznego. Dla jednego stopnia swobody (por. (2.20)) liczę tłumienia można zapisać formułą (2.36).

$$\zeta = \frac{c}{c_{kr}} = \frac{c}{2m\omega} \quad (2.36)$$

Tłumieniem krytycznym nazywamy wartość tłumienia, po przekroczeniu której ruch staje się aperiodyczny. Dla tłumienia równego tłumieniu krytycznemu liczba tłumienia jest równa 1. W przypadku mostów liczba tłumienia zwykle nie przekracza 10% (Salamak 2003).

Inną miarą tłumienia jest Logarytmiczny Dekrement Tłumienia (LDT). Określa się go jako logarytm naturalny stosunku dwóch kolejnych amplitud drgań swobodnych danego modu (2.37).

$$LDT = \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} \quad (2.37)$$

Przy małym tłumieniu wartości dwóch kolejnych amplitud mogą różnić się nieznacznie, a więc błąd powstały przy odczytce może być duży. W takim przypadku zalecane jest wyznaczenie średniego dekrementu z odległszych w czasie amplitud, Odczytując wartość  $n$ -tej amplitudy i  $n + m$ -tej amplitudy wartość LDT można wyznaczyć

z równania:

$$LDT = \frac{1}{m} \ln \frac{a_n}{a_{n+m}} \quad (2.38)$$

Zależność pomiędzy LDT, a liczbą tłumienia określona jest następująco:

$$LDT = \ln \frac{q(t)}{q(t+T)} = \ln \frac{e^{-\zeta\omega t}}{e^{-\zeta\omega(t+T)}} = \ln e^{\zeta\omega T} = \zeta\omega T = \zeta\omega \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (2.39)$$

gdzie:  $\omega_d$  - częstość drgań tłumionych ( $\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}$ ),  $T$  - okres drgań tłumionych  $T = \frac{2\pi}{\omega_d}$ . W przypadku drgań konstrukcji budowlanych liczba tłumienia jest z reguły niewielka ( $\zeta < 0.1$ ). Z tego względu częstość drgań własnych tłumionych i nietłumionych są zbliżone. W takim przypadku zależność pomiędzy LDT, a liczbą tłumienia często upraszcza się do postaci przybliżonej:

$$LDT \approx 2\pi\zeta \quad (2.40)$$

Spośród metod pozwalających na uwzględnienie tłumienia w obliczeniach najpopularniejszą jest tłumienie masowo-sztywnościowe Rayleigh'a (Chopra 2012). Opiera się ono na stworzeniu macierzy tłumienia  $\mathbf{C}$  bazując na liniowej kombinacji macierzy mas  $\mathbf{M}$  i macierzy sztywności  $\mathbf{K}$  (por. 2.22):

$$\mathbf{C} = a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{K} \quad (2.41)$$

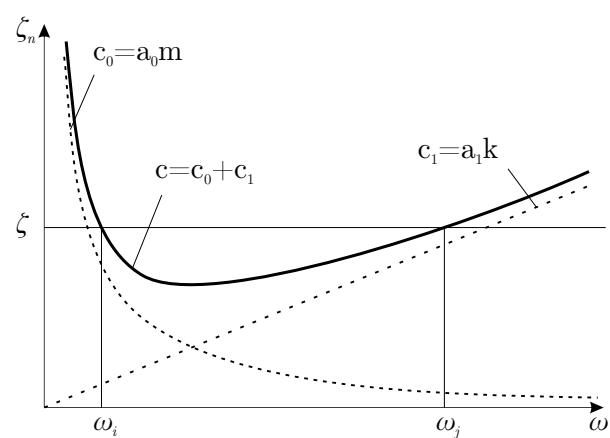
W przypadku zastosowania tłumienia Rayleigh'a liczba tłumienia odpowiadająca danemu modowi wyznaczona jest z wzoru:

$$\zeta_n = \frac{a_0}{2} \frac{1}{\omega_n} + \frac{a_1}{2} \omega_n \quad (2.42)$$

Z kolei przyjmując liczbę tłumienia o określonej wartości można wyznaczyć wartości parametrów  $a_0$  i  $a_1$ . Dla danych częstości  $\omega_i$  i  $\omega_j$  współczynniki Rayleigh'a wyznaczyć można z wzorów (2.43).

$$a_0 = \zeta \frac{2\omega_i\omega_j}{\omega_i + \omega_j} \quad a_1 = \zeta \frac{2}{\omega_i + \omega_j} \quad (2.43)$$

Wpływ składowych macierzy tłumienia pochodzących od macierzy mas i macierzy sztywności najlepiej zobrazować na przykładzie jednego stopnia swobody. Jakościowo wpływ przedstawiono na rysunku 2.2. Z rysunku 2.2 można wysnuć przydatne z praktycznego punktu widzenia wnioski. Założone tłumienie  $\zeta$  jest spełnione jedynie dla dwóch użytych w formułach 2.43 częstości  $\omega_i$  i  $\omega_j$ . Składnik  $c_1 = a_1 k$  wzrasta liniowo wraz ze wzrostem częstości. Z kolei składnik  $c_0 = a_0 m$  maleje nieliniowo wraz ze wzrostem częstości. Sumaryczna wartość obu składników dla przedziału częstości  $\langle \omega_i, \omega_j \rangle$  jest mniejsza niż zakładana. Z kolei dla częstości spoza przedziału tłumienie jest większe niż zakładane. Jeżeli przedział interesujących częstości jest dobrany prawidłowo, to takie podejście jest bezpieczne z punktu widzenia projektanta, ponieważ odpowiedź modelu konstrukcji jest zawsze zgodna z rzeczywistej (Oleszek 2015).



Rysunek 2.2: Wizualizacja wpływu masy i sztywności na macierz tłumienia według Rayleigh'a

# Rozdział 3

## Identyfikacja cech dynamicznych konstrukcji

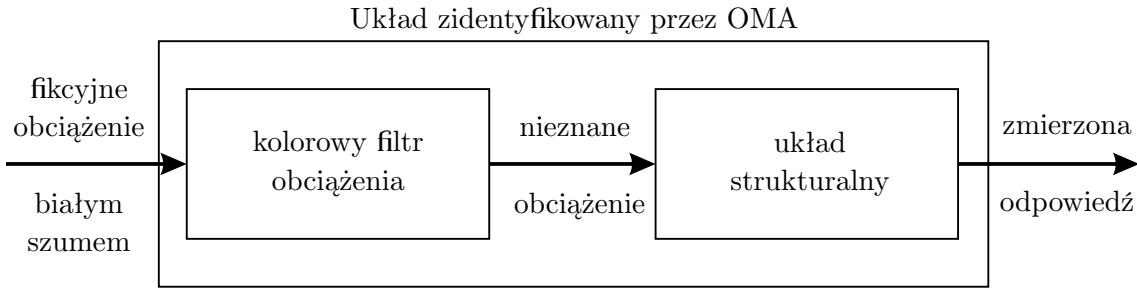
### 3.1 Operacyjna analiza modalna (OMA)

#### 3.1.1 Koncepcja OMA

W ogólności doświadczalna analiza modalna to proces korelacji charakterystyk dynamicznych modelu matematycznego, z fizycznymi właściwościami systemu opisanego rezultatami pomiarów. Przypomnijmy, że w OMA do procesu estymacji parametrów modalnych używane są tylko pomiary odpowiedzi konstrukcji. Różni ją to od EMA, w której mierzone są zarówno wymuszenia jak i odpowiedź. Fundamentem wszystkich metod OMA jest założenie, że badana struktura obciążona jest wymuszeniem o widmie zbliżonym do białego szumu. Oznacza to, że energia konstrukcji jest rozłożona w szerokim paśmie częstotliwości, które zawiera wszystkie interesujące badacza mody do identyfikacji. Z oczywistych względów idealne wymuszenie o charakterystyce białego szumu nie jest możliwe. Większość metod radzi sobie z tym brakiem, jednak najważniejsze jest, żeby wszystkie interesujące mody były odpowiednio wzbudzone, tak aby ich wkład był wychwycony przez przyrządy pomiarowe. Brincker i C. E. Ventura 2015 tłumaczą tę koncepcję za pomocą fikcyjnego, kolorowego filtru obciążenia. Zaproponowano, że kolorowe obciążenie może być traktowanego jako wynik obciążenia kolorowego filtra (zgodnego z obciążeniem) przez idealnie biały szum. Udowodniono, że takie podejście nie zmienia fizycznych modów systemu. Należy jednak pamiętać, że metody OMA w tym przypadku dokonają identyfikacji modalnej zarówno struktury fizycznej, jak i filtra obciążenia. Koncepcję zaprezentowano na rysunku 3.1. Najważniejszą konsekwencją jest możliwość występowania wśród wyników identyfikacji nie tylko modów związanych z konstrukcją, ale też wynikających z warunków obciążenia. Należy pamiętać również, że pomierzone wartości obarczone są szumem pomiarowym. Nie niesie on żadnej istotnej, fizycznej informacji, ale jest nieunikniony w trakcie rzeczywistych pomiarów. Tak więc wynik identyfikacji zawiera w sobie trzy składowe:

- parametry modalne związane z drganiami własnymi konstrukcji,
- myślowy filtr obciążenia, kolorujący biały szum do rzeczywistego, nieznanego obciążenia,
- szum pomiarowy.

W idealnych warunkach, kiedy filtr obciążenia ma biały kolor, a szum pomiarowy byłby zerowy, OMA zidentyfikuje wyłącznie mody konstrukcji.



Rysunek 3.1: Schemat układu identyfikowanego przez OMA przy koncepcji kolorowego filtru obciążenia

Operacyjna Analiza Modalna jest obwarowana pewnymi założeniami. Są one rozwinięciem założeń podanych w punkcie 2.1. Układ poddany analizie OMA musi spełniać następujące warunki:

- liniowość - odpowiedź układ na zadaną kombinację obciążzeń, jest sumą odpowiedzi odpowiadających każdemu obciążeniu traktowanemu osobno - zasada superpozycji,
- stacjonarność - charakterystyki dynamiczne konstrukcji nie zmieniają się w czasie. Innymi słowy, współczynniki równań różniczkowych opisujących odpowiedź struktury są niezależne od czasu.
- obserwowalność - dobór lokalizacji punktów pomiarowych musi być tak zaprojektowany, żeby był w stanie dostrzec interesujące obserwatora mody. Niezależnie od tego w trakcie analizy spełnione muszą być również kryteria obserwowalności sterowalności opisane w punkcie 3.3.2.

WARUNKI DOTYCZĄCE WYMUZENIA? Rainieri i Fabbrocino 2014

### 3.1.2 Metody operacyjnej analizy modalnej

Metody identyfikacji modalnej dzielą się na dwa główne rodzaje związane z dziedziną w której działa algorytm:

- metody w dziedzinie czasu (*eng. time-domain methods (TDM)*),
- metody w dziedzinie częstotliwości (*eng. frequency-domain methods (FDM)*).

Metody EMA w dziedzinie czasu wykorzystują do estymacji parametrów modalnych funkcje odpowiedzi impulsowej (*eng. impulse response function (IRF)*). W OMA, nośnikiem informacji o odpowiedzi swobodnej układu (*eng. free decays*) są funkcje korelacji (*eng. correlation functions*). Identyfikacja parametrów polega w tym przypadku na dopasowaniu parametrów modalnych do informacji zawartej w funkcjach korelacji. Stosowane są do tego modele parametryczne wykorzystujące techniki

regresji. Główną różnicą pomiędzy dostępnymi algorytmami TD jest właśnie zastosowana metoda regresji. Zasadniczo wszystkie metody TD stosowane w EMA mogą być użyte w OMA właśnie z zastosowaniem funkcji korelacji.

Podobną analogię jak w metodach TD można zauważać dla metod w dziedzinie częstotliwości. W algorytmach EMA w dziedzinie częstotliwości bazą do identyfikacji są funkcje odpowiedzi częstotliwościowej (*eng. frequency-response function (FRF)*). W OMA rolę tę pełnią funkcje gęstości widmowej (*eng. spectral density functions*).

Przed wyborem dziedziny w której badacz chce się poruszać, warto poznać elementy charakterystyczne dla grupy algorytmów TD i FD. Podstawową wadą metod TD jest to, że wszystkie mody, które występują w sygnale są ujęte w funkcjach korelacji. W konsekwencji wszystkie mody zawsze są rozważane w trakcie rozwiązania problemu. Z kolei ich zaletą, w porównaniu do metod FD, jest większa odporność na wystąpienie błędów systematycznych w estymowanych parametrach modalnych. Niejako w kontrze do metod TD, zaletą metod FD jest to, że każdy z modów występuje w wąskim przedziale częstotliwości. Dzięki temu możliwe jest rozważanie tylko przedziałów częstotliwości, w których występują interesujące badacza mody. Z drugiej strony wadą metod FD jest wykorzystywanie do identyfikacji funkcje gęstości widmowej, które są wyznaczane za pomocą różnych metod (CYTOWANIE) obciążonych błędami systematycznymi. Błędy te nieuchronnie przenoszą się na wynikowe parametry modalne, a określenie ich wpływu jest problematyczne. Maia i Silva 1997 sugerują, że metody w dziedzinie czasu są z reguły lepszym wyborem w przypadku dużego przedziału interesujących badacza częstotliwości, albo dużej liczby modów w tym zakresie. Natomiast metody w dziedzinie częstotliwości dostarczają lepszych wyników kiedy zakres częstotliwości jest niewielki, a liczba modów relatywnie mała.

Drugie kryterium podziału algorytmów dotyczy liczby modów, które mogą być jednocześnie analizowane za pomocą danej metody. Podział jest zbliżony do tego dotyczącego teoretycznej analizy modalnej. Metoda może identyfikować albo jeden stopień swobody (*eng. single degree-of-freedom*) albo wiele stopni swobody (*eng. multiple degree-of-freedom*).

Metody TDM i FDM możemy podzielić również na bezpośrednie (*eng. direct*) i pośrednie (*eng. indirect*). Różnica polega na sposobie wyznaczania FRF. Metody bezpośrednie pozwalają wyznaczyć ją bezpośrednio z równania ruchu. Natomiast metody pośrednie estymują FRF na podstawie wcześniej zidentyfikowanego modelu modalnego.

Ostatnim ogólnie przyjętym kryterium podziału jest liczba punktów poddanych wymuszeniu i mierzonych w trakcie serii pomiarowej. Koresponduje to z liczbą analizowanych jednocześnie przez metodę identyfikacji funkcji FRF. Kiedy mówimy o jednoczesnej analizie tylko jednej funkcji FRF mamy do czynienia z metodą jedno-wejście-jedno-wyjście (SISO) (*eng. single-input-single-output*). Kiedy mierzymy wymuszenie w jednym punkcie, a odpowiedź badamy w kilku różnych punktach na konstrukcji, otrzymując kilka funkcji FRF, metodę klasyfikuje się jako jedno-wejście-wiele-wyjść (SIMO) (*eng. single-input-multi-output*). W powyższej technice obowiązuje założenie, że parametry modalne uzyskane z każdej funkcji FRF będą takie same. Innymi słowy są to parametry globalne dla całej konstrukcji. Naturalnym rozwińciem są metody które mogą analizować wszystkie dostępne funkcje FRF jednocześnie, uzyskane w skutek wymuszenia i pomiaru wielu różnych punktów. Metody te określone są jako wiele-wejście-wiele-wyjście (MIMO) (*eng. multi-input-multi-output*).

Maia i Silva 1997 opisali szczegółowo wiele z metod zarówno eksperymental-

nej jaki i doświadczalnej analizy modalnej. Z kolei Brincker i C. E. Ventura 2015 sklasyfikowali najpopularniejsze, używane współcześnie metody identyfikacji OMA. Spośród algorytmów działających w dziedzinie czasu należy wymienić:

- Poly Reference (PR) (Norton 2009; Vold i in. 1982),
- Autoregressive Moving Average (ARMA) (D. Shi i Stühler 1987; C. S. Huang 2000; Giorcelli i in. 1994),
- Ibrahim Time Domain (ITD) (Samir R. Ibrahim 1983; Richard S Pappa i Samir R Ibrahim 1985),
- Eigensystem Realization Algorithm (ERA) (Jer-Nan Juang i Richard S Pappa 1985; R S Pappa i J N Juang 1985; Juang i Suzuki 1988),
- Stochastic Subspace Identification (SSI). (Van Overschee i De Moor 1996; Peeters i De Roeck 1999; Peeters 2000).

Warto zaznaczyć, że metoda ERA przy zastosowaniu postulatów NExT stanowi jeden z pośrednich wariantów metody SSI, używający funkcji korelacji jako źródła informacji przy identyfikacji.

Z kolei najpopularniejsze algorytmy w dziedzinie częstotliwości to:

- Basic Frequency Domain (Peak-Picking) (Felber 1994),
- Frequency-Domain-Decomposition (FDD) (Brincker, L. Zhang i Andersen 2000; Brincker, L. Zhang i Palle Andersen 2001; Brincker, C. Ventura i Palle Andersen 2001),
- The Least Squares Complex Frequency Method (LSCF) (Verboven i in. 2005),
- The Poly-Reference Least Squares Complex Frequency Method (p-LSCF) (Peeters i Van der Auweraer 2005).

Wszystkie z powyższych algorytmów są bardzo dobrze opisane i udokumentowane w literaturze. Trudno orzec, który z nich jest obiektywnie najlepszy. Wiele zależy od doświadczenia i wiedzy autora oraz specyfiki zadania. Jak powiedział Sam Ibrahim: "Jeśli nie występują blisko położone mody i szum - wszystko zadziała" (*eng. "If there are no closely spaced modes and no noise - everything works"*). Wybór metody może więc zależeć od preferencji, umiejętności programowania czy dostępnych narzędzi. W literaturze można napotkać wiele indywidualnych aplikacji algorytów (CYTOWANIE). Istnieją również komercyjne programy, które pozwala na identyfikację modalną. Do najpopularniejszych należą ARTeMIS - SVS (Extractor ARTeMIS 1999) i MACEC - dodatek do programu MATLAB (Reynders, Schevenels i De Roeck 2014).

Do identyfikacji parametrów modalnych konstrukcji, które są częścią tej pracy autor zdecydował o zastosowaniu algorytmu NExT-ERA. Wynika to z doświadczenia zespołu mostów Politechniki Gdańskiej przy stosowaniu tej metody oraz z dostępnej szerokiej literatury pokazującej skuteczne zastosowanie tej metody w przypadku badania mostów. W kolejnym rozdziale omówiono szczegółowo metody oraz implementację jej algorytmu w autorskiej aplikacji napisanej w języku python.

## 3.2 Przykłady zastosowań (literatura i własne)

### 3.3 Metoda NExT-ERA

Metoda NExT-ERA jest jedną z metod operacyjnej analizy modalnej. Składnik NExT pochodzi od słów **Natural Excitation Technique**. NExT jest właściwie klasą metodą OMA. Zawiera w sobie algorytmy początkowo stworzone do eksperymentalnej analizy modalnej wejście-wyjście (*eng. input-output*) (np. ERA, LSCE, ITD), a które następnie rozszerzone zostały do analizy problemu jedynie na podstawie sygnałów odpowiedzi konstrukcji (*eng. output-only*). Taką możliwość ujawniło odkrycie faktu, że funkcje korelacji odpowiedzi konstrukcji, wywołanej losowymi wymuszeniami mogą być wyrażone jako suma zanikających sinusoid. Potwierdzono również, że funkcje korelacji zawierają informację na temat parametrów modalnych struktury. Zauważono więc, że można zastąpić tradycyjnie używane funkcje odpowiedzi impulsowej (IRF), funkcjami korelacji losowych drgań konstrukcji pod wymuszeniem środowiskowym. W ten sposób tradycyjne metody EMA zostały skutecznie zaadaptowane do OMA (Rainieri i Fabbrocino 2014). W dalszej części rozdziału zostaną przedstawione najważniejsze zagadnienia dotyczące identyfikacji metodą NExT-ERA.

#### 3.3.1 Funkcje korelacji, a odpowiedź swobodna układu

Przyjmijmy, że  $X$  oznacza zmienną losową, a  $x(t)$  realizację tej zmiennej losowej w czasie.  $x(t)$  w tej pracy może być utożsamiany z zaobserwowanym sygnałem. Wprowadźmy prostą definicję kowariancji. Jest to funkcja, która dostarcza informacji o zależności pomiędzy dwoma zmiennymi i dana jest wzorem:

$$\text{cov}[X, Y] = \text{E}[XY] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy p_{xy}(x, y) dx dy \quad (3.1)$$

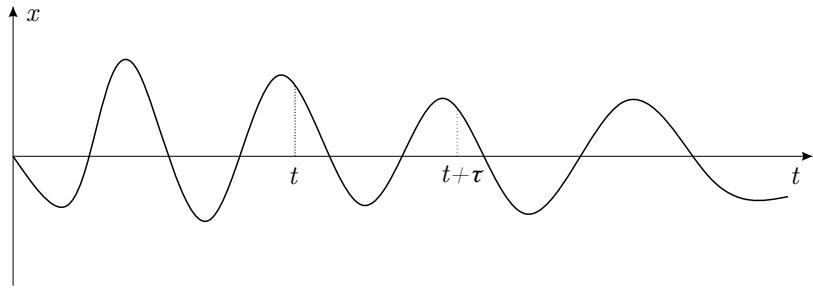
gdzie:  $\text{E}[\cdot]$  - wartość oczekiwana,  $p_{xy}(x, y)$  - wspólna funkcja gęstości prawdopodobieństwa (*eng. joint probability density function*). Używając metody uśredniania w czasie  $[0, T]$  możemy zapisać kowariancję jako:

$$\text{cov}[x(t), y(t)] = \text{E}[x(t)y(t)] = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t) dt \quad (3.2)$$

Korelacją możemy określić zależność jak dla kowariancji, w której usunięto czynnik stały (wartość średnią) i opisać równaniem (3.3). W OMA zwykle sygnały na samym początku analizy są pozbawiane czynnika stałego, stąd użycie właśnie funkcji korelacji jest dla tej rodziny metod analizy modalnej kluczowe.

$$\text{cor}[x(t), y(t)] = \text{E}[(x(t) - \mu_x)(y(t) - \mu_y)] = \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - \mu_x)(y(t) - \mu_y) dt \quad (3.3)$$

W OMA funkcja korelacji wykorzystywana jest jako autokorelacja (*eng. autocorrelation*) i cross-korelacja (*eng. cross-correlation*). Dla pojedynczego sygnału  $x(t)$  można rozważyć jak wygląda korelacja pomiędzy punktem  $x(t)$ , a punktem  $x(t + \tau)$ , czyli odległym w czasie o  $\tau$ . Przedstawienie graficzne problemu pokazano na rysunku 3.2. Intuicyjnie widać, że wartość korelacji dla punktów bliskich sobie będzie duża, a dla punktów bardzo od siebie odległych będzie maleć. Autokorelacją nazwiemy



Rysunek 3.2: Autokorelacja, jako korelacja wartości funkcji  $x(t)$  w czasie  $t$  i  $t + \tau$

funkcję daną równaniem (3.4), gdzie funkcję  $y$  w równaniu (3.3) zastąpiono  $x(t + \tau)$ .

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t + \tau)] \quad (3.4)$$

Funkcję cross-korelacji opiszemy analogicznie jak autokorelacji, z tą różnicą, że pod uwagę weźmiemy dwa losowe sygnały  $x(t)$  i  $y(t)$ .

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= E[x(t)y(t + \tau)] \\ R_{yx}(\tau) &= E[y(t)x(t + \tau)] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Nie znając funkcji gęstości prawdopodobieństwa, funkcje autokorelacji i cross-korelacji można wyznaczyć za pomocą uśredniania w czasie co opisano równaniami odpowiednio (3.6) i (3.7). W dalszej części pracy podane zostaną inne przykłady metod wyznaczania funkcji korelacji.

$$R_x = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t + \tau) dt \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} R_{xy} &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t + \tau) dt \\ R_{yx} &= \frac{1}{T} \int_0^T y(t)x(t + \tau) dt \end{aligned} \quad (3.7)$$

Jedną z istotnych właściwości funkcji korelacji jest możliwość wyznaczenia jej przez splot między sygnałem  $x(-t)$  i  $y(t)$ , co zapisano równaniem (3.8). Główną zaletą tego rozwiązania jest prostota obliczeń, ponieważ splot dwóch funkcji jest łatwy do wyznaczenia w dziedzinie częstotliwości (Brincker i C. E. Ventura 2015).

$$R_{xy}(\tau) = x(-t) * y(t) \quad (3.8)$$

W praktyce wykonywanych jest wiele pomiarów. Założymy, że dla zestawu  $N$  pomiarów, zmierzone odpowiedzi mogą być zestawione w wektor:

$$\mathbf{y}(t) = \{y_1(t), y_2(t), y_3(t), \dots, y_N(t)\}^T \quad (3.9)$$

Wyniki autokorelacji i cross-korelacji pomiędzy wszystkimi zmierzonymi sygnałami można zagregować i zapisać macierzowo (3.10). Na przekątnej macierzy znajdują się funkcje autokorelacji, a poza przekątną cross-korelacji.

$$\mathbf{R}^T(\tau) = E[\mathbf{y}(t)\mathbf{y}^T(t + \tau)] \quad (3.10)$$

Macierzą korelacji (*eng. correlation matrix*) nazywa się macierz (3.10) dla  $\tau = 0$  co można zapisać wzorem (3.11).

$$\mathbf{C} = \mathbb{E}[\mathbf{y}(t)\mathbf{y}^T(t)] = \mathbf{R}(0) \quad (3.11)$$

Funkcje korelacji posiadają dwie wspomniane wcześniej właściwości kluczowe dla OMA. Po pierwsze teoretycznie pozwalają wyodrębnić wszystkie informacje na temat parametrów modalnych konstrukcji z sygnału losowego. Po drugie mogą być utożsamiane z drganiami swobodnymi, gasącymi układu (G H James, Carne i Lauffer 1995). Oba założenia zostały wyjaśnione i udowodnione poniżej.

Założenie o reprezentacji wszystkich parametrów modalnych przez funkcje korelacji opiera się na wykorzystaniu właściwości funkcji korelacji, rozkładu normalnego oraz Centralnego Twierdzenia Granicznego (*eng. central limit theorem*). Centralne Twierdzenie Graniczne mówi, że dla niezależnych zmiennych losowych  $X_i$  o jednakowym rozkładzie, fluktuujących wokół wartości oczekiwanej  $\mu$  i o skończonej wariancji  $\sigma^2$  to wyrażenie (3.12)

$$\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^M X_i - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{M}}} \quad (3.12)$$

zbiega według rozkładu Gaussa przy nieskończonej liczbie M. Brincker i C. E. Ventura 2015 przedstawili uzasadnienie użycia tego twierdzenia w przypadku OMA w następujący sposób. Rozważmy zestaw zmiennych losowych  $\{x_1, x_2, \dots, x_M\}$ , które są niezależne i posiadają identyczny rozkład, ze średnią wartością  $\mu$  i wariancją  $\sigma^2$ . Liniowa kombinacja tych zmiennych losowych jest dana wzorem:

$$y = \sum_{i=1}^M a_i x_i \quad (3.13)$$

Centralne twierdzenie graniczne mówi o tym, że dla dużej liczby zmiennych losowych  $M$  rozkład  $y$  jest w przybliżeniu normalny, z wartością średnią  $\mu_y = \mu \sum a_i$ , wariancją  $\sigma_y^2 = \sigma^2 \sum a_i^2$  i przy  $M \rightarrow \infty$  zbiega do rozkładu normalnego. Odwołując się do dynamiki budowli możemy zapisać, że odpowiedź układu  $y(t)$  jest splotem siły wymuszającej  $x(\tau)$  i funkcji odpowiedzi impulsowej  $h(t)$  co pokazano równaniem:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)x(\tau) d\tau \quad (3.14)$$

Dla sygnału dyskretnego z krokiem czasowym  $\Delta t$  i ograniczając się jedynie do  $N_m$  istotnych z punktu widzenia pamięci systemu próbek, zależność może być przedstawiona następująco:

$$y(n) = \sum_{k=n-N_m}^n h(n-k)x(k)\Delta t \quad (3.15)$$

Można zauważyć, że dla wymuszenia szumem białym odpowiedź dynamiczna  $y(n)$  jest sumą, którą można przedstawić wzorem (3.13), gdzie poszczególne składniki obciążenia  $x(k)$  nie muszą mieć rozkładu normalnego, ale ostateczna odpowiedź będzie mieć rozkład Gaussa. Wynika to wprost z Centralnego Twierdzenia Granicznego. Warto nadmienić, że założenie o wymuszeniu białym szumem zapewnia nam niezależność składników obciążenia  $x(k)$ .

Bazując na powyższym, w OMA zwykle zakładamy, że mierzone sygnały posiadają wartość średnią równą zero oraz są Gaussowskie (*eng. Gaussian signals*)

lub bliskie Gaussowskim (Brincker i C. E. Ventura 2015). Przypomnijmy, że jednowymiarowa funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu normalnego dana jest wzorem:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.16)$$

, a przyjmując dodatkowo wartość średnią równą zero wzór można wyrazić następująco:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (3.17)$$

Dla wektora losowego, zawierającego zmienne losowe o zerowej wartości średniej  $\mathbf{x}^T = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_M\}$ , funkcja gęstości prawdopodobieństwa może być zapisana jako:

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{M}{2}} |\mathbf{C}|} e^{\mathbf{x}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{x} / 2} \quad (3.18)$$

gdzie  $|\mathbf{C}|$  jest wyznacznikiem macierzy korelacji (3.11). Podstawowym wnioskiem wynikającym z tej zależności jest to, że jednowymiarowy rozkład Gaussa może być opisany za pomocą średniej wartości, odchylenia standardowego i w przypadku wielowymiarowych danych o zerowej wartości średniej, jedynie przez macierz korelacji (3.18).

Aby wytłumaczyć dlaczego funkcje korelacji w OMA mogą być odpowiednikiem funkcji odpowiedzi impulsowej (IRF), a funkcje gęstości widmowej odpowiednikami funkcji odpowiedzi częstotliwościowej (FRF) przytoczymy wymagane definicje i zależności z dynamiki budowli. Szczegółowe wyprowadzenia i objaśnienia znajdują się między innymi w pracach (Brincker i C. E. Ventura 2015; Rainieri i Fabbrocino 2014; Chopra 2012; Ewins 2000). Funkcja odpowiedzi impulsowej układu, zwykle oznaczane jako  $h(t)$  jest odpowiedzią układu poddanego wymuszeniu przez impulsową siłę, o bardzo krótkim czasie działania, w chwili czasowej  $t = 0$ . Matematycznie impulsową siłę opisuje funkcja nazywaną deltą Diraca  $\delta(t)$ . Dla systemów liniowych i czasowo niezależnych, jeżeli przesunięta w czasie zostanie chwila przyłożenia impulsu o  $\tau$ , to otrzymamy odpowiedź  $y(t)$ , która będzie również przesunięta w czasie o  $\tau$ . Z definicji wiemy, że impuls jest iloczynem intensywności obciążenia i czasu jego działania. Rozważmy ciągłe obciążenie oznaczone jako  $x(t)$ , które jest superpozycją potoku impulsów o zmiennej amplitudzie, ale o równej krótkich czasach trwania. W takim przypadku impuls siły od czasu  $\tau$  do  $\tau + d\tau$  obliczamy jako  $x(\tau)d\tau$ , a odpowiedź układu jako  $h(t - \tau)x(\tau)d\tau$ . Układ jest liniowy a więc obowiązuje zasada superpozycji. Wynika z tego, że suma wpływu całego obciążenia może być wyznaczona jako suma wszystkich składowych odpowiedzia i opisana całką Duhamel'a jako (3.19) oraz w postaci splotu (3.20) między funkcją IRF  $h(t)$  i wymuszeniem  $x(t)$ .

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)x(\tau)d\tau \quad (3.19)$$

$$y(t) = h(t) * x(t) \quad (3.20)$$

Funkcję IRF można wyznaczyć wykonując przekształcenie Laplace'a równania ruchu przedstawionego równaniem (2.2). Dla przejrzystości przytoczono je poniżej (3.21), dla układu z jednym stopniem swobody, wymuszenia deltą Diraca i podstawiając w miejsce odpowiedzi układu funkcję IRF:

$$m\ddot{h}(t) + c\dot{h}(t) + kh(t) = \delta(t) \quad (3.21)$$

Wykonując transformatę Laplace'a obu stron otrzymamy:

$$(ms^2 + cs + k)H(s) = 1 \quad (3.22)$$

Wykorzystując właściwości transformaty i przekształcając odpowiednio równanie (3.22) otrzymamy formułę (3.23). Na jej podstawie można wprost wyznaczyć funkcję IRF podaną równaniem (3.24).

$$H(s) = \frac{1}{m(s - \lambda)(s - \lambda^*)} \quad (3.23)$$

$$h(t) = \frac{1}{m} \frac{e^{\lambda t} - e^{\lambda^* t}}{\lambda - \lambda^*} \quad (3.24)$$

Z kolei funkcja FRF w sensie fizycznym reprezentuje amplitudę i przesunięcie fazowe drgań ustalonych systemu SDOF, poddanego wymuszeniu harmonicznemu o jednostkowej amplitudzie i częstotliwości  $\omega_d$ . Matematycznie FRF  $H(\omega)$  można opisać również jako transformatę Laplace'a z IRF obliczoną dla urojonej współrzędnej  $s = i\omega$  (3.23) i zapisać następująco:

$$H(\omega) = \frac{1}{m(i\omega - \lambda)(i\omega - \lambda^*)} \quad (3.25)$$

Podobnie jak IRF, FRF łączy wymuszenie z odpowiedzią układu. Jeśli równanie ruchu (2.2) stronami przekształcimy transformatą Fouriera to otrzymamy:

$$(m(i\omega)^2 + ci\omega + k)Y(\omega) = X(\omega) \quad (3.26)$$

Szczegółowe rozwiązywanie za pomocą reprezentacji biegunów układu można znaleźć w literaturze (Brincker i C. E. Ventura 2015). Ostatecznie otrzymujemy:

$$m(i\omega - \lambda)(i\omega - \lambda^*)Y(\omega) = X(\omega) \quad (3.27)$$

Po przekształceniu wyraźnie widać relację pomiędzy odpowiedzią, a wymuszeniem układu za pośrednictwem FRF:

$$Y(\omega) = \frac{1}{m(i\omega - \lambda)(i\omega - \lambda^*)}X(\omega) = H(\omega)X(\omega) \quad (3.28)$$

gdzie  $X(\omega)$  i  $Y(\omega)$  są odpowiednio transformatami Fouriera wymuszenia  $x(t)$  i odpowiedzi  $y(t)$  układu. Porównując równania (3.26)(3.28) łatwo można zauważyć że FRF zawiera w sobie informację na temat bezwładności, tłumienia i sztywności układu.

Zarówno IRF jak i FRF można uogólnić do układów MDOF o  $N$  stopniach swobody. Zapis zależności wymuszenie-odpowiedź dla układu MIMO (wiele-wejście-wiele-wyjście) przedstawiono dla dziedziny czasu (3.29) i częstotliwości (3.30).

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}(t) * \mathbf{x}(t) \quad (3.29)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}(\omega) = \tilde{\mathbf{H}}(i\omega)\tilde{\mathbf{x}}(\omega) \quad (3.30)$$

gdzie  $\mathbf{H}(t)$  jest macierzą zawierającą funkcje IRF,  $\mathbf{x}(t)$  jest wektorem sił wymuszających,  $\tilde{\mathbf{y}}(\omega)$  i  $\tilde{\mathbf{x}}(\omega)$  są transformatami Fouriera odpowiednio  $\mathbf{x}(t)$  i  $\mathbf{y}(t)$ , a  $\tilde{\mathbf{H}}(i\omega)$  jest macierzą FRF. Wyrażenia na odpowiednio IRF  $\mathbf{H}(t)$  i FRF  $\tilde{\mathbf{H}}(i\omega)$  podano poniżej.

$$\mathbf{H}(t) = \sum_{n=1}^N (\mathbf{A}_n e^{\lambda_n t} + \mathbf{A}_n^* e^{\lambda_n t}) \quad (3.31)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(i\omega) = \sum_{n=1}^N \left( \frac{\mathbf{A}_n}{i\omega - \lambda_n} + \frac{\mathbf{A}_n^*}{i\omega - \lambda_n^*} \right) \quad (3.32)$$

gdzie  $\mathbf{A}_n = Q_n \boldsymbol{\psi}_n \boldsymbol{\psi}_n^T$ ,  $\boldsymbol{\psi}_n$  to n-ta postać drgań własnych,  $Q_n$  to współczynnik skalujący mody, a  $\lambda_n = \sigma_n + i\omega_{d,n}$  jest n-tym biegunem układu zawierającym informacje na temat częstotliwości drgań własnych tłumionych  $f_{d,n} = \omega_{d,n}/(2\pi)$  i liczby tłumienia  $\xi_r = -\sigma_n/\sqrt{\sigma_n^2 + \omega_{d,n}^2}$  n-tego moda.

Gęstość widmowa jest kolejnym kluczowym pojęciem potrzebnym do pełnego zrozumienia znaczenia funkcji korelacji dla OMA. Gęstość widmowa (*eng. auto spectral density*) dla przebiegu czasowego  $x(t)$  jest zdefiniowana jako transformata Fouriera z funkcji korelacji  $R_x(\tau)$  3.33. Istnieje również zależność odwrotna, w której odwrotną transformata Fouriera z gęstości widmowej pozwala otrzymać funkcję korelacji 3.34. Początkowy wyraz funkcji korelacji  $R_x(0)$  jest reprezentacją twierdzenia Parsevela i pozwala stwierdzić, że gęstość widmowa pokazuje rozkład energii w funkcji częstotliwości. Stąd gęstość widmową nazywa się również zamiennie gęstością widmową mocy (*eng. power spectral density*) (PSD) (Brincker i C. E. Ventura 2015).

$$G_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (3.33)$$

$$R_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (3.34)$$

Podobnie zdefiniować można gęstość widmową pomiędzy dwoma sygnałami  $x(t)$  i  $y(t)$  (*eng. cross spectral density*), jako przekształcenie Fouriera funkcji cross-korelacji  $R_{xy}(t)$ .

$$G_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (3.35)$$

$$R_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{xy}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (3.36)$$

Wykorzystanie właściwości splotu funkcji korelacji (3.8) i splotu<sup>1</sup> oraz symetrii Hermitowskiej<sup>2</sup> transformaty Fouriera pozwala uzyskać następującą właściwość gęstości widmowej (3.37). Należy nadmienić, że zależność ta będzie spełniona przy założeniu okresowego (lub bardzo długiego) sygnału (Brincker i C. E. Ventura 2015).

$$G_{xy}(\omega) = X^*(\omega)Y(\omega) \quad (3.37)$$

Rozważamy ponownie układ SISO o odpowiedzi  $y(t)$  przy wzbudzeniu  $x(t)$ :  $y(t) = x(t) * h(t)$  (3.20). Wykorzystując równanie (3.37) zapiszemy równanie na gęstość widmową odpowiedzi:

$$G_y(\omega) = Y^*(\omega)Y(\omega) \quad (3.38)$$

<sup>1</sup>Transformata Fouriera splotu dwóch funkcji w dziedzinie czasu  $h(t)$  i  $g(t)$  jest równa iloczynowi transformat Fouriera każdej z funkcji osobno. Innymi słowy transformacie Fouriera wyrażenia  $h(t)*g(t)$  odpowiada iloczyn  $H_k G_k$ , gdzie:  $H_k$  - transformata Fouriera funkcji  $h(t)$ ,  $G_k$  - transformata Fouriera funkcji  $g(t)$ .

<sup>2</sup>Jeżeli  $H(\omega)$  jest transformatą Fouriera rzeczywistej funkcji  $h(t)$ , to prawdziwe jest równanie  $H(\omega) = H^*(-\omega)$ . Równanie to jest nazywane symetrią Hermitowską (Boashash 2015).

Wykorzystując transformatę Fouriera oraz przemienność i łączność splotu zapisać można następujące równanie pokazujące zależność pomiędzy gęstością widmową odpowiedzi i wymuszenia układu.

$$G_y(\omega) = G_x(\omega)|H^*(i\omega)|^2 \quad (3.39)$$

Równanie (3.39) jest nazywane twierdzeniem podstawowym (*eng. fundamental theorem*) metody OMA. Dla układu MIMO twierdzenie to przyjmuje następującą formę w dziedzinie częstotliwości:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_y(\omega) &= \tilde{\mathbf{H}}^*(i\omega)\mathbf{G}_x(\omega)\tilde{\mathbf{H}}^T(i\omega) \\ &= \tilde{\mathbf{H}}^*(i\omega)\mathbf{G}_x(\omega)\tilde{\mathbf{H}}^T(i\omega) \end{aligned} \quad (3.40)$$

z kolei w dziedzinie czasu odpowiadająca macierz korelacji przedstawia się następująco:

$$\mathbf{R}_y(\tau) = \mathbf{H}(-\tau) * \mathbf{R}_x(\tau) * \mathbf{H}^T(\tau) \quad (3.41)$$

Jak już wielokrotnie wspomniano, w OMA zakłada się wymuszenie Gaussowskim, stacjonarnym szumem białym o zerowej wartości średniej. Podstawowym efektem tego założenia wymuszenia  $x(t)$  w postaci białego szumu jest brak korelacji pomiędzy wymuszeniem w chwili  $t$  i w chwili  $t+\tau$ . Wyjątkiem jest przypadek  $\tau = 0$ . Stąd sygnał posiada zerową wartość średnią, a funkcja korelacji jest deltą Diraca co zapiszymy:

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] = 2\pi G_{x0}\delta(\tau) \quad (3.42)$$

gdzie  $G_{x0}$  jest współczynnikiem skalującym. Zakładając dalej, że biały szum działa jedynie w ograniczonym spektrum od 0 do  $B$ , a  $\sigma_x^2$  to niezmienne wariancja sygnału, otrzymamy przekształconą wersję () funkcji korelacji. Na jej podstawie można stwierdzić, że PSD wymuszenia (będąca transformatą Fouriera funkcji korelacji) jest wartością stałą<sup>3</sup>.

$$R_x(\tau) = 2\pi \frac{\sigma_x^2}{2B} \delta(\tau) \quad (3.43)$$

Chcąc rozwinać tę zależność do układu MIMO założymy sygnały wymuszenia  $x_1(t)$  i  $x_2(t)$  jako szумy białe. Sformułowanie macierzy korelacji z wykorzystaniem równania (3.43) prowadzi do następującej zależności:

$$\mathbf{R}_x(\tau) = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t+\tau)] = 2\pi \frac{\delta(\tau)}{2B} \mathbf{C} \quad (3.44)$$

gdzie  $\mathbf{C}$  jest macierzą kowariancji sygnałów. Macierz gęstości widmowej sygnałów wymuszenia szumem białym ma postać:

$$\mathbf{G}_x(\omega) = \begin{cases} \frac{\mathbf{C}}{2B}, & 0 \leq \omega \leq B \\ 0, & \omega > B \end{cases} \quad (3.45)$$

Podsumowując powyższy ciąg myślowy możliwa jest dekompozycja równania (3.41) w dziedzinie czasu i równania (3.40) w dziedzinie częstotliwości. Dekompozycję w dziedzinie czasu przeprowadzili po raz pierwszy GH H James, Carne i Lauffer

---

<sup>3</sup>Transformata Fouriera delty Diraca jest równa jedności:  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{i\omega t} dt = e^{-i\omega \times 0} = 1$  (Zieliński 2002)

1993; G H James, Carne i Lauffer 1995. Z kolei dekompozycję w dziedzinie częstotliwości przedstawili Brincker, L. Zhang i Andersen 2000; Brincker, L. Zhang i Palle Andersen 2001. W powyższych pracach przedstawiono pełny tok postępowania. Poniżej przytoczono rezultaty końcowe w postaci opisu macierzy korelacji sygnałów odpowiedzi układu (3.46) i macierzy korelacji gęstości widmowej odpowiedzi (3.47).

$$\mathbf{R}_y(\tau) = \begin{cases} \sum_{n=1}^N (\boldsymbol{\phi}_n \boldsymbol{\gamma}_n^T e^{\lambda_n \tau} + \boldsymbol{\phi}_n^* \boldsymbol{\gamma}_n^H e^{\lambda_n^* \tau}), & \tau \geq 0 \\ \sum_{n=1}^N (\boldsymbol{\gamma}_n \boldsymbol{\phi}_n^T e^{-\lambda_n |\tau|} + \boldsymbol{\gamma}_n^* \boldsymbol{\phi}_n^H e^{-\lambda_n^* |\tau|}), & \tau < 0. \end{cases} \quad (3.46)$$

$$\mathbf{G}_y(\omega) = \sum_{n=1}^N \frac{\boldsymbol{\phi}_n \boldsymbol{\gamma}_n^T}{i\omega - \lambda_r} + \frac{\boldsymbol{\phi}_n^* \boldsymbol{\gamma}_n^H}{i\omega - \lambda_r^*} + \frac{\boldsymbol{\gamma}_n \boldsymbol{\phi}_n^T}{-i\omega - \lambda_r} + \frac{\boldsymbol{\gamma}_n^* \boldsymbol{\phi}_n^H}{-i\omega - \lambda_r^*} \quad (3.47)$$

gdzie oznaczenia przyjęto jak w równaniach (3.31) i (3.32), a  $\boldsymbol{\gamma}_n$  oznacza wektor referencyjny związany z n-tym modelem. Wektor ten zależny jest od wszystkich parametrów modalnych systemu oraz lokalizacji i macierzy korelacji wymuszeń (Rainieri i Fabbrocino 2014; Peeters 2000).

Równanie (3.46) pokazuje, że funkcje korelacji odpowiedzi mogą być wyrażone za pomocą sumy zespolonych funkcji eksponencjalnych. SHEN i in. 2003 wskazują na podobieństwo jego formy do równania (3.31). Kennedy i Eberhart 1995, w swojej kluczowej dla metody NExT pracy, rozwinęli to równanie do postaci ukazującej funkcję korelacji jako sumę zanikających sinusoid, o charakterystyce takiej samej jak w przypadku IRF. Podsumowując, funkcje korelacji mogą być użyte jako funkcje odpowiedzi impulsowej (IRF) w metodach TD identyfikacji parametrów modalnych.

### 3.3.2 Eigenystem Realization Algorithm

Metoda ERA została opracowana w latach 80' XX w. przez naukowców z NASA Langley Research Center: Richarda Pappa i Jer-Nan Juang'a. Przedstawili oni koncept identyfikacji modalnej i redukcji modelu układu dynamicznego na podstawie danych pomiarowych. Nowością, którą wprowadzili autorzy było połączenie pojęć z teorii kontroli i algorytmu rozkładu względem wartości osobliwych. Fundamentalne prace opisujące metodą zostały opisane w (R S Pappa i J N Juang 1985; Jer-Nan Juang i Richard S Pappa 1985; Juang i Suzuki 1988; Jer-Nan Juang 1994). Algorytm ERA był wielokrotnie testowany, na przykład pod względem odporności na zaszmienienie danych pomiarowych (J. N. Juang i R. S. Pappa 1986; P. Li, Hu i H. J. Li 2011). Spośród polskich autorów, szczegółowy opis metody zawarli w swoich pracach Szafrański 2013 i Dudek 2008.

#### Liniowy model dynamiczny w przestrzeni stanów

Model przestrzeni stanów<sup>4</sup> (*eng. state-space model*) używany jest do przekształcenia równania różniczkowego drugiego rzędu (2.1), do dwóch równań rzędu pierwszego. Dla przejrzystości macierzowe równanie ruchu przytoczono ponownie poniżej:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (3.48)$$

<sup>4</sup>Według Kaczorek i in. 2016 stanem układu nazywamy zbiór liniowo niezależnych wielkości  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  określających w pełni skutki przeszłych oddziaływań ( $t < t_0$ ) na układ, który jest wystarczający do wyznaczenie przebiegów chwilowych dowolnych wielkości w tym układzie dla  $t > t_0$ , gdy znane są wymuszenia i parametry obwodu. Wielkości  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  nazywa się zmiennymi stanu, a wektor  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]$  wektorem stanu tego obwodu.

gdzie:  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  to odpowiednio macierze mas, tłumienia i sztywności,  $\mathbf{x}(t)$  jest wektorem przemieszczenia, a  $\mathbf{F}(t)$  jest wektorem wymuszenia. Wektor wymuszenia można poddać faktoryzacji do macierzy  $\bar{\mathbf{B}}$  oraz wektora  $\mathbf{u}(t)$  (??). Macierz  $\bar{\mathbf{B}}$  opisuje lokalizację punków wymuszenia, a wektor  $\mathbf{u}(t)$  intensywność tego wymuszenia w funkcji czasu.

$$\mathbf{F}(t) = \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) \quad (3.49)$$

Macierzowe równanie ruchu może być więc przekształcone następująco:

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{M}^{-1}\bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) \quad (3.50)$$

Zdefiniujmy wektor stanu jako:

$$\mathbf{s}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{x}(t) \end{Bmatrix} \quad (3.51)$$

Liczba komponentów tworzących wektor stanu jest nazywana rzędem modelu. Podstawiając go do równania (3.50) dodatkowo wykorzystując oczywistą równość  $\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}(t)$  otrzymamy:

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{s}(t) + \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\bar{\mathbf{B}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (3.52)$$

Stąd możemy zdefiniować następujące macierze:  $\mathbf{A}_c$  i  $\mathbf{B}_c$ :

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

$$\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\bar{\mathbf{B}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Dzięki tak sformułowanym elementom zapiszmy równanie stanu (*eng. state equation*) następująco:

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{A}_c\mathbf{s}(t) + \mathbf{B}_c\mathbf{u}(t) \quad (3.55)$$

W równaniu (3.55)  $\mathbf{s}(t)$  jest wektorem stanu (3.51), czyli zestawem wielkości opisujących w sposób jednoznaczny stan modelowanego układu, a  $\mathbf{u}(t)$  jest wektorem wejścia (sterowania) i opisuje sygnał wejściowy. Macierze  $\mathbf{A}_c$  i  $\mathbf{B}_c$ , nazywane są odpowiednio macierzą stanu (*systemu*) (*eng. state matrix*) i macierzą wejścia (*eng. input influence matrix*). Są to macierze stałych współczynników, które odwzorowują modelowany układ dynamiczny i parametry elementów tworzących ten układ.

Drugim równaniem pozwalającym na stworzenie modelu w przestrzeni stanów jest równanie obserwacji (*eng. observation equation*) lub inaczej równanie wyjścia. W ogólności ma ono postać:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_a\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}_v\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}_d\mathbf{x}(t) \quad (3.56)$$

gdzie:  $\mathbf{y}(t)$  jest wektorem mierzonej odpowiedzi w  $m$  punktach pomiarowych, a  $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  i  $\mathbf{x}(t)$  to odpowiednio mierzone przyspieszenia, prędkości i przemieszczenia w danych  $m$  punktach. Z kolei macierze  $\mathbf{C}_a$ ,  $\mathbf{C}_v$  i  $\mathbf{C}_d$  określają lokalizację mierzonych, odpowiadających im przyspieszeń, prędkości i przemieszczeń. Należy zaznaczyć, że rzeczywista konstrukcja składa się z nieskończonej liczby stopni swobody. Nawet w

przypadku dyskretyzacji do układu MDOF, jak to ma miejsce w przypadku obliczeń numerycznych, liczba stopni swobody jest ogromna. Z tego względu, w trakcie pomiarów znacznie redukuje się liczbę mierzonych stopni swobody właśnie do  $m$ . Podstawiając równanie (3.50) do (3.56), po przekształceniach można otrzymać następujące równanie obserwacji:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_c \mathbf{s}(t) + \mathbf{D}_c \mathbf{u}(t) \quad (3.57)$$

w którym:

$$\mathbf{C}_c = [\mathbf{C}_v - \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \quad \mathbf{C}_d - \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}] \quad (3.58)$$

$$\mathbf{D}_c = \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \bar{\mathbf{B}} \quad (3.59)$$

Macierz  $\mathbf{C}_c$  jest nazywana macierzą wyjścia (*eng. output influence matrix*), a  $\mathbf{D}_c$  macierzą przenoszenia lub transmisyjną (*eng. direct transmission matrix*). Równania stanu (3.55) i obserwacji (3.57) łącznie tworzą ciągły, deterministyczny model przestrzeni stanów:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}}(t) &= \mathbf{A}_c \mathbf{s}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_c \mathbf{s}(t) + \mathbf{D}_c \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (3.60)$$

Wielkości mierzone w trakcie eksperymentu są próbkiowane jedynie w dyskretnych chwilach czasowych. W takim razie, naturalnym dla rzeczywistych zastosowań jest przekształcenie modelu ciągłego przestrzeni stanów w model dyskretny. Zakładając stały czas próbkowania równy  $\Delta t$ , równania ciągłe mogą być zdyskretyzowane i rozwiązane jedynie w chwilach czasowych  $t_k = k\Delta t$  dla  $k \in N$ . Dla poprawności zapisu dyskretnego, wymagane jest założenie o stałych wartościach elementów wektora wejścia  $\mathbf{u}(t)$  w trakcie pojedynczego kroku czasowego, tj.  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_k$  dla  $t \in [k\Delta t, (k+1)\Delta t]$ . Przy spełnieniu powyższych założeń możemy zapisać dyskretny model przestrzeni stanów:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{s}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}\mathbf{s}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k \end{aligned} \quad (3.61)$$

gdzie macierze  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  są odpowiednio macierzami stanu, wejścia, wyjścia i przenoszenia dla dyskretnego modelu przestrzeni stanów.

### Odpowiedź impulsowa w przestrzeni stanów

Przyjmijmy układ dynamiczny opisany równaniem (3.61), w którym  $\mathbf{s}_k$  - jest n-wymiarowym wektorem stanu,  $\mathbf{u}_k$  - m-wymiarowym wektorem sterowania, a  $\mathbf{y}_k$  - p-wymiarowym wektorem obserwacji. Parametry Markova takiego systemu  $\mathbf{G}_k$  można zdefiniować następująco (Schutter i De Schutter 2000):

$$\mathbf{G}_k = \begin{cases} \mathbf{D}, & \text{dla } k = 0 \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}, & \text{dla } k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.62)$$

Jeżeli spełnione jest równanie (3.62) to zestaw macierzy  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  jest realizacją łańcucha  $G(k)$  dla  $k = 1, 2, \dots, \infty$ . Realizację nazywa się minimalną, kiedy rząd modelu jest minimalny (3.51).

Zakładając warunek początkowy  $\mathbf{s}(0) = \mathbf{0}$  i wymuszenie wszystkich punktów układu jednostkowym impulsem w postaci:

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & \text{dla } k = 0 \\ 0, & \text{dla } k > 0 \end{cases} \quad (3.63)$$

otrzymamy odpowiedź układu postaci:

$$\mathbf{Y}_k = \begin{cases} \mathbf{D}, & \text{dla } k = 0 \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}, & \text{dla } k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.64)$$

Równanie (3.64) nazywa się odpowiedzią impulsową układu. Można zauważyć, że elementy sekwencji parametrów Markova odpowiadają wprost elementom odpowiedzi impulsowej układu (Phan, Jer-Nan Juang i Longman 1991). W przypadku identyfikacji modalnej rzeczywistej konstrukcji wyznaczenie macierzy opisujących układ jest celem. Dysponując pomierzonym sygnałem odpowiedzi swobodnej (wzbudzonej impulsem) możliwe jest sformułowanie parametrów Markova i poszukiwanie rozwiązań w postaci macierzy układu. W przypadku OMA odpowiedź impulsowa układu może być zastąpiona funkcjami korelacji co udowodniono w (3.3.1). Niezależnie od źródła danych, sygnały można złożyć w parametry Markova w identyczny sposób. W dalszej części wywodu elementy algorytmu ERA opisywane będą w sposób tradycyjny, operując na sygnale z odpowiedzi swobodnej układu.

Załóżmy, że  $y_k^i$  jest odpowiedzią konstrukcji w chwili czasowej  $k\Delta t$ , zmierzoną w punkcie pomiarowym  $n$ , jednym z wszystkich  $m$  punktów pomiarowych. Parametry Markova  $\mathbf{Y}_k$  zdefiniujemy zestawiając odpowiedź układu z wszystkich punktów pomiarowych dla danej chwili czasowej  $k\Delta t$ :

$$\mathbf{Y}_k = \begin{Bmatrix} y_k^1 \\ y_k^2 \\ y_k^3 \\ \vdots \\ y_k^m \end{Bmatrix}, \quad \text{dla } k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.65)$$

### Sformułowanie macierzy Hankela

Algorytm metody ERA rozpoczyna się od sformułowania uogólnionej, blokowej<sup>5</sup> macierzy Hankela<sup>6</sup> dyskretnego układu dynamicznego  $\mathbf{H}$  o wymiarach  $r \times s$ . Wymiary  $r$  i  $s$  nazywane są parametrami projektowymi (Szafrański 2013) i oznaczają:  $r$  - liczbę blokowych wierszy,  $s$  - liczbę blokowych kolumn macierzy Hankela. Jeżeli spełnione są warunki  $s > n$  i  $r > n$  to właściwością macierzy Hankela jest to, że w przypadku pomiarów pozbawionych szumów rząd macierzy Hankela jest równy rzędowi systemu

---

<sup>5</sup>Macierz blokową można opisać jako macierz złożoną z innych macierzy. Na przykład mając 4 macierze  $N \times N$ :  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$ ,  $\mathbf{A}_3$ ,  $\mathbf{A}_4$ , można sformułować macierz  $2N \times 2N$  postaci  $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_4]$ , która posiada dwa blokowe wiersze i dwie blokowe kolumny.

<sup>6</sup>W ogólności macierzą Hankela nazywamy taką macierz  $\mathbf{A}$  o wymiarach  $r \times s$ , że spełniona jest równość:  $\mathbf{A}_{r+1,s-1} = \mathbf{A}_{r-1,s+1}$

oraz dwukrotnej liczbie modów systemu.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_{k-1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_k & \mathbf{Y}_{k+1} & \dots & \mathbf{Y}_{k+s-1} \\ \mathbf{Y}_{k+1} & \mathbf{Y}_{k+2} & \dots & \mathbf{Y}_{1+k+s-1} \\ \mathbf{Y}_{k+2} & \mathbf{Y}_{k+3} & \dots & \mathbf{Y}_{2+k+s-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{r-1+k} & \mathbf{Y}_{r-1+k+1} & \dots & \mathbf{Y}_{r-1+k+s-1} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{B} & \dots & \mathbf{C}\mathbf{A}^{k+s-2}\mathbf{B} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^{k+1}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{C}\mathbf{A}^{k+1+s-2}\mathbf{B} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{k+1}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^{k+2}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{C}\mathbf{A}^{k+3+s-2}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{r-2+k}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^{r-2+k+1}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{C}\mathbf{A}^{r+k+s-3}\mathbf{B} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{rm \times sp} \quad (3.66) \\
 &= \mathbf{P}_r \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{Q}_s \quad \text{dla } k \geq 1
 \end{aligned}$$

Macierze  $\mathbf{P}_r$  i  $\mathbf{Q}_s$  to odpowiednio macierze obserwacji i sterowania układu i są zdefiniowane następująco:

$$\mathbf{P}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{r-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_s = [\mathbf{B} \ \mathbf{AB} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{s-1}\mathbf{B}] \quad (3.67)$$

Problem wyboru wartości parametrów  $s$  i  $r$  nie jest ściśle rozwiązyany. Zestawienie różnych badań dotyczących doboru parametrów projektowych przedstawił w pracy Szafranowski 2013. Na pewno należy spełnić zależność  $s > n$  i  $r > n$ . Z uwagi na występowanie w sygnale pomiarowym szumów i niepewności związanych ze wstępny oszacowaniem rzędu modelu parametry trzeba zawyżyć. Jednym z powszechniej używanych zaleceń jest przyjęcie  $r = (5 \div 10)n$   $s = (2 \div 3)r$  (Dudek 2008). Część badaczy zaleca aby parametr  $s$  dobrać tak, żeby macierz Hankela zawierała większość lub wszystkie parametry Markova odpowiadające wyraźnemu sygnałowi  $s = (\frac{2}{3} \div 1)N_s - r - 2$  gdzie  $N_s$  oznacza liczbę próbek wyraźnego sygnału (Caicedo 2011; Nayeri i in. 2009).

### Realizacja minimalna modelu w przestrzeni stanów

Jak już wspomniano realizacją układu nazywamy zestaw macierzy  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ . Podstawowym zdaniem jest znalezienie takiej realizacji, dla której zmierzona odpowiedź układu będzie możliwa od odtworzenia przez równania modelu w przestrzeni stanów. W przypadku odpowiedzi swobodnej, nie ma miejsca dodatkowe wymuszenie w trakcie pomiaru, więc prawdziwa jest zależność  $\mathbf{D} = \mathbf{Y}_0$ . Wszystkich możliwych realizacji, pozwalających spełnić powyższy warunek, jest nieskończoność wiele (Jer-Nan Juang i Richard S Pappa 1985). Naturalnym wyzwaniem jest więc znalezienie takiej realizacji, dla której rząd modelu będzie minimalny, a rząd modelu jest wprost związany z wymiarami macierzy  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ . Pierwsze prace dotyczące poszukiwania realizacji minimalnej zostały podane w (Kalman 1963; Ho i Kálmán 1966).

Aby ułatwić zrozumienie poszukiwania minimalnej realizacji przywołajmy twierdzenia o obserwonalności i sterowalności realizacji:

Twierdzenie o obserwonalności. Realizacja w postaci zestawu macierzy  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  nazywana jest obserwonalną jeżeli macierz obserwacji  $\mathbf{P}_r$  jest rzędu  $n$ , gdzie  $n$  jest rzędem systemu. Jeżeli realizacja jest obserwonalna to zawsze możliwe jest odtworzenie początkowego stanu  $s_0$  na podstawie znanych odpowiedzi i wymuszenia układu dla  $k > 0$ .

Twierdzenie o sterowalności. Realizacja w postaci zestawu macierzy  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  nazywana jest sterowalną jeżeli macierz sterowania  $\mathbf{Q}_s$  jest rzędu  $n$ , gdzie  $n$  jest rzędem systemu. Jeżeli realizacja jest sterowalna to zawsze możliwe jest takie przyjęcie parametrów wymuszenia, żeby w skończonej liczbie kroków doprowadzić układ ze stanu początkowego, do pożądanego stanu.

Dodatkowo Kalman sformułował następujące twierdzenie: Realizacja  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  jest minimalna, wtedy i tylko wtedy gdy jest sterowalna i obserwonalna. Podsumowując, minimalna realizacja musi spełniać warunki sterowalności i obserwonalności. Aby to zapewnić odpowiednie wymiary macierzy Hankela. W przypadku gdybyśmy zbudowali macierz Hankela z parametrów Markova pozbawionych szumów, rząd macierzy byłby równy rzędowi modelu  $n$ , pod warunkiem, że wymiary  $rm$  i  $sp$  są większe niż  $n$ . W rzeczywistości, pomiary obarczone są szumami związanymi z pracą aparatury pomiarowej i samym przebiegiem pomiaru. Dodatkowo w rzeczywistych konstrukcjach zawsze występuje pewien stopień nieliniowości i model liniowy być może nigdy nie jest w stanie perfekcyjnie jej opisać. Konsekwencją wystąpienia szumów w pomierzonym sygnale jest powiększenie rzędu model względem układu odpowiadającego sygnałom nie obarczonych szumem. Zadaniem analityka jest więc określić najmniejszy rząd modelu, dla którego realizacja pozwoli na wystarczająco wierny opis układu, przy jednoczesnym spełnieniu kryteriów błędu.

### Dekompozycja według wartości osobliwych (SVD)

Pierwszym właściwym krokiem algorytmu ERA jest sformułowanie macierzy Hankela  $\mathbf{H}_0$  oraz  $\mathbf{H}_1$ . Posługując się wzorem (3.66) sformułujmy:

$$\mathbf{H}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_0 & \mathbf{Y}_1 & \dots & \mathbf{Y}_{s-1} \\ \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 & \dots & \mathbf{Y}_s \\ \mathbf{Y}_2 & \mathbf{Y}_3 & \dots & \mathbf{Y}_{s+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{r-1} & \mathbf{Y}_r & \dots & \mathbf{Y}_{r+s-2} \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 & \dots & \mathbf{Y}_s \\ \mathbf{Y}_2 & \mathbf{Y}_3 & \dots & \mathbf{Y}_{s+1} \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4 & \dots & \mathbf{Y}_{s+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_r & \mathbf{Y}_{r+1} & \dots & \mathbf{Y}_{r+s-1} \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

Wykorzystując opis macierzy Hankela za pomocą macierzy obserwacji i sterowania możemy zapisać że:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0 &= \mathbf{P}_r \mathbf{A}^{1-1} \mathbf{Q}_s = \mathbf{P}_r \mathbf{Q}_s \\ \mathbf{H}_1 &= \mathbf{P}_r \mathbf{A}^{2-1} \mathbf{Q}_s = \mathbf{P}_r \mathbf{A} \mathbf{Q}_s \end{aligned} \quad (3.70)$$

Zauważmy, że dwie kolejne macierze Hankela pozwalają na proste wyznaczenie macierzy systemu  $\mathbf{A}$ . Jako metodę do oceny rzędu macierzy Hankela wykorzystano

algorytm rozkładu według wartości osobliwych SVD (*eng. Singular Value Decomposition*). Dla macierzy  $\mathbf{H}_0$  zapiszemy:

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{R}\Sigma\mathbf{S}^T = [\mathbf{R}_1 \quad \mathbf{R}_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^T \\ \mathbf{S}_2^T \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

w którym,  $\Sigma$  jest prostokątną macierzą diagonalną o wymiarach  $(rm \times s)$  i zawiera wartości osobliwe macierzy  $\mathbf{H}_0$ . Wartości osobliwe  $d_i$  rozmieszczone na przekątnej ułożone są w sposób niemalejący, tak że  $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq \dots \geq d_n$ . Z kolei kolumny macierzy  $\mathbf{R}$  i  $\mathbf{S}$  są ortonormalnymi wektorami osobliwymi odpowiadającymi poszczególnym wartościom osobliwym  $\mathbf{d}_i$ . Macierz wartości osobliwych można zapisać w następującej formie:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

gdzie  $\Sigma_1$  jest macierzą diagonalną o  $n$  wartościach niezerowych na przekątnej, a pozostałe elementy macierzy  $\Sigma$  są zerowe. Taką formę będzie miała macierz w przypadku braku szumów w sygnale i perfekcyjnym spełnieniu wszystkich założeń identyfikacji. Liczba wartości osobliwych będzie równa rzędowi macierzy Hankela i rzędowi modelu. Niestety w rzeczywistości takie warunki nie mają nigdy miejsca. W takim przypadku liczba niezerowych wartości osobliwych będzie większa niż  $n$ . Analiza SVD pozwala jednak efektywnie ocenić rząd macierzy. Wartości osobliwe, które odpowiadają fizycznej informacji na temat systemu są zawsze relatywnie duże, a wartości wywołane przez nieidealne warunki pomiaru relatywnie małe. Ostatecznie można dokonać podziału na wartości znaczące (oznaczające rząd modelu) i nieznaczące. Za pomocą macierzy można tę sytuację odwzorować następująco:

$$\Sigma_N = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\Sigma} \end{bmatrix} = \text{diag}[d_1, d_2, d_3, \dots, d_n, d_{n+1}, \dots, d_N] \quad (3.73)$$

gdzie  $d_i (i = 1, \dots, n)$  oznaczają istotne, a  $d_i (i = n+1, \dots, N)$  nieistotne wartości osobliwe. Postawienie wyraźnej granicy pomiędzy wartościami istotnymi i nieistotnymi nie jest oczywiste. Rozrysowując wartości osobliwe na wykresie, zwykle widać miejsce gdzie dwie kolejne wartości różnią się istotnie. Taki skok utożsamiany jest z końcem wartości istotnych. Niestety nie jest to reguła i aby w pełni odwzorować układ warto nieznacznie zwiększyć rząd modelu w trakcie identyfikacji (Szafrański 2013; Hollkamp i Gordon 2001). Podobnie zapiszmy dla macierzy  $\mathbf{S}$  i  $\mathbf{R}$ :

$$\mathbf{R}_N = [\mathbf{R}_n \quad \bar{\mathbf{R}}] \quad \mathbf{S}_N = [\mathbf{S}_n \quad \bar{\mathbf{S}}] \quad (3.74)$$

Porównując równania (3.66) i (3.71) i przyjmując  $k = 1$  otrzymamy:

$$\mathbf{P}_r \mathbf{Q}_s = \mathbf{R}\Sigma\mathbf{S}^T = \mathbf{R}\Sigma^{1/2}\Sigma^{1/2}\mathbf{S}^T \quad (3.75)$$

Następnie wykorzystując powyższy podział i równanie 3.70 otrzymamy następującą zależność:

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{R}\Sigma^{1/2}\mathbf{A}\Sigma^{1/2}\mathbf{S}^T \quad (3.76)$$

Przekształcenia pozwalają uzyskać formułę na wyznaczenie macierzy systemu  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A} = \Sigma^{-1/2}\mathbf{R}^T\mathbf{H}_1\mathbf{S}\Sigma^{-1/2} \quad (3.77)$$

Zakładając że  $\mathbf{0}_i$  jest macierzą zerową rzędu  $i$ , a  $\mathbf{I}_i$  jest macierzą jednostkową rzędu  $i$  zdefiniujmy macierze pomocnicze:

$$\mathbf{E}_p^T = [\mathbf{I}_p \quad \mathbf{0}_p \quad \dots \quad \mathbf{0}_p] \quad \mathbf{E}_m^T = [\mathbf{I}_m \quad \mathbf{0}_m \quad \dots \quad \mathbf{0}_m] \quad (3.78)$$

Po wykorzystując wzór (3.66) i wykonując przekształcenia możliwe jest wyznaczenie macierzy systemu będących minimalną realizacją. Po wykonaniu SVD i przyjęciu jedynie istotnych wartości osobliwych jako rzędu modelu  $n$  zapisać można równania na przybliżone wartości macierzy modelu w przestrzeni stanów, które dla odróżnienia oznaczono przez ( $\hat{\cdot}$ ):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}} &= \Sigma_n^{-1/2} \mathbf{R}_n^T \mathbf{H}_1 \mathbf{S}_n \Sigma_n^{-1/2} \\ \hat{\mathbf{B}} &= \Sigma_n^{1/2} \mathbf{S}_n^T \mathbf{E}_m \\ \hat{\mathbf{C}} &= \mathbf{E}_p^T \mathbf{R}_n \Sigma_n^{1/2} \end{aligned} \quad (3.79)$$

Przybliżone macierze dla wybranego rzędu  $n$  są wartościami estymowanymi w sensie metody najmniejszych kwadratów (Jer-Nan Juang 1994; Rainieri i Fabbrocino 2014).

### Identyfikacja parametrów modalnych

Rozwiązuje zagadnienie własne dla macierzy  $\hat{\mathbf{A}}$  otrzymamy zestaw niezależnych ze-spłonych wartości własne  $\lambda_i$  i wektorów własne  $\phi_i$ . Zestawiając je podobnie jak macierz widmową  $\Lambda$  (??) i modalną  $\Phi$  (??) otrzymamy minimalną realizację ( $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}$ ) we współrzędnych modalnych ( $\Lambda, \Phi^{-1}\hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}\Phi$ ). Poszczególne elementy realizacji we współrzędnych modalnych dostarczają różnych informacji na temat zidentyfikowanych charakterystyk modalnych.  $\Lambda$  zawiera informacje o tłumieniu i częstotliwościach drgań własnych układu.  $\Phi^{-1}\hat{\mathbf{B}}$  definiuje początkowe amplitudy modalne. Z kolei  $\hat{\mathbf{C}}\Phi$  zawiera w sobie postaci drgań własnych wyznaczone dla punktów pomiarowych (P. Li, Hu i H. J. Li 2011). Przed wyznaczeniem częstości drgań własnych i tłumienia należy przetranformować macierz  $\Lambda$  z formy dyskretnej do formy ciągkiej  $\Lambda_c$  (Szafrański 2013).

$$\Lambda_c = \frac{1}{\Delta t} \ln \Lambda \quad (3.80)$$

w którym  $\Delta t$  oznacza krok czasowy próbkowania, taki że  $\Delta t = 1/f_s$  dla  $f_s$  będącej częstotliwością próbkowania pomiaru. Częstość drgań własnych  $\omega_{ni}$  oraz tłumienie  $\xi_i$  wyznaczyć można na podstawie wartości własne zebranych w macierzy  $\Lambda_c$ , a postaci drgań własnych  $\psi_i$  z macierzy  $\Phi$  za pomocą następujących formuł:

$$\omega_{ni} = |\lambda_{ci}| = \sqrt{\operatorname{Re}(\lambda_{ci})^2 + \operatorname{Im}(\lambda_{ci})^2} \quad (3.81)$$

$$\xi_i = -\frac{\operatorname{Re}(\lambda_{ci})}{\omega_{ni}} \quad (3.82)$$

$$\psi_{j,i} = |\phi_{j,i}| \operatorname{sign}(\operatorname{Re}(\phi_{j,i})) \quad (3.83)$$

gdzie  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  ( $n$  - rząd modelu),  $j = 1, 2, 3, \dots, m$ , ( $m$  - liczba punktów pomiarowych),  $|\cdot|$  oznacza moduł liczby zespolonej,  $\operatorname{Re}(\cdot)$  i  $\operatorname{Im}(\cdot)$  oznaczają odpowiednio część rzeczywistą i urojoną liczby zespolonej, a  $\operatorname{sign}(\cdot)$  jest funkcją zwracającą  $+1$  dla liczb dodatnich i  $-1$  dla liczb ujemnych.

## 3.4 Aplikacja do identyfikacji modalnej OMA

Na rynku istnieją komercyjne aplikacje komputerowe, stworzone do identyfikacji modalnej. Należą do nich przede wszystkim ARTeMIS - SVS i MACEC - dodatek do programu MATLAB. Programy te służą zarówno naukowcom jak i szeroko pojętemu przemysłowi. Nie powinno więc dziwić, że są skomercjalizowane i płatne. W trakcie realizacji pracy doktorskiej podjęto decyzję o napisaniu własnej aplikacji komputerowej służącej identyfikacji modalnej. Zdaniem autora takie podejście zapewnia pełną kontrolę nad algorytmem i parametrami identyfikacji oraz nad sposobem przedstawienia wyników. Niebagatelnym profitem napisania programu autorskiego jest również lepsze zrozumienie mechanizmów i wrażliwości elementów algorytmu. W początkowej fazie tworzenia zaplanowano następującą funkcjonalność programu:

- wczytywanie i podgląd sygnałów pomiarowych, grupowanie sygnałów w serie pomiarowe, ze wskazaniem sygnałów referencyjnych i lokalizacją punktów pomiarowych,
- przetwarzanie sygnałów: okienkowanie, usunięcie składowej stałej i trendu, filtrowanie, zmiana próbkowania,
- wyznaczenie funkcji odpowiedzi impulsowych sygnałów wykorzystując algorytm NExT, z możliwością podziału na serie pomiarowe z punktem referencyjnym oraz uśredniania serii pomiarowych,
- identyfikacja modalna za pomocą algorytmu ERA,
- elementy kontroli obliczeń: zmiana parametrów metod, wybór elementów przetwarzania sygnałów,
- elementy wizualizacji wyników: wykresy sygnałów, animacja postaci drgań własnych, postaci we współrzędnych biegunkowych, diagramy stabilizacyjne metody NExT-ERA.

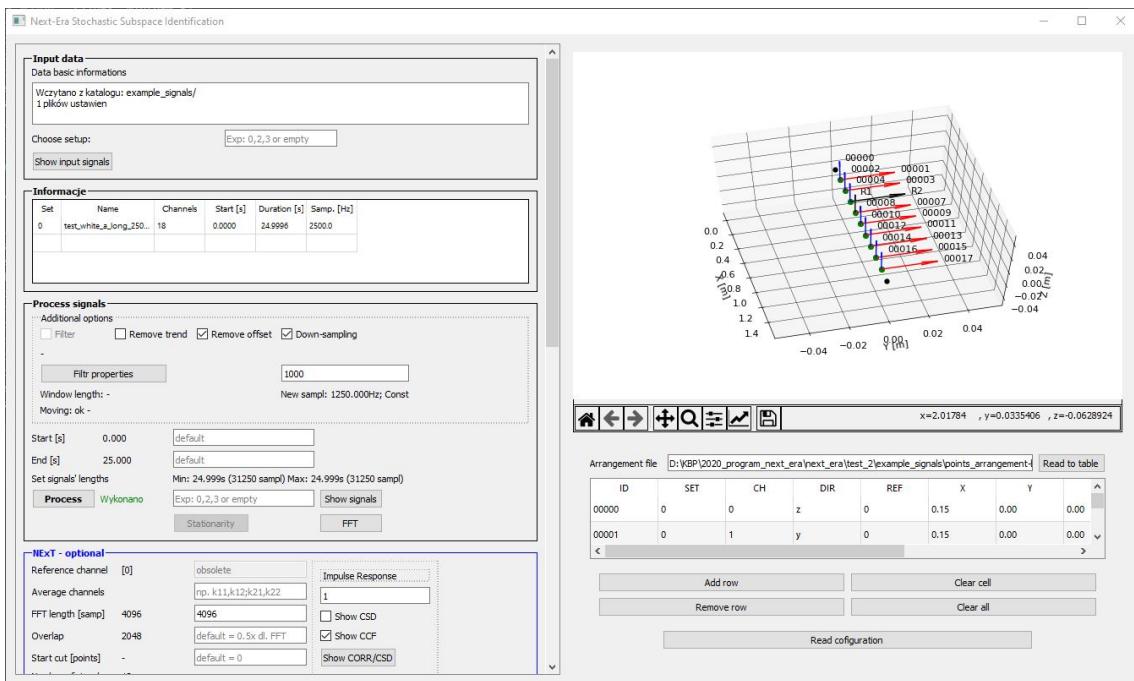
Aplikację napisano w języku Python 3.6 głównie z użyciem bibliotek NUMPY i SCIPY do obliczeń oraz MATPLOTLIB do wizualizacji rezultatów. Dodano interfejs graficzny wykorzystujący technologię Qt. Elementy interfejsu pokazano na rysunku 3.3.

### 3.4.1 Algorytm programu

Algorytm programu przedstawiono na grafice []. Poniżej omówiono podstawowe informacje na temat użytych metod przetwarzania sygnałów.

Wstępnie sygnały wyjściowe mogą być poddane standardowemu przetwarzaniu sygnału. Do zastosowanych metod należy filtrowanie, usuwanie składowej stałej i obniżenie próbkowania (*eng. downsampling, resampling*). Filtrowanie może posłużyć do odrzucenia niechcianych składowych z sygnału i ograniczyć identyfikację jedynie do określonego obszaru. Odcięcie składowej stałej jest koniecznym elementem przygotowania sygnałów do identyfikacji. Bez tego zabiegu, tak jak w przypadku Transformaty Fouriera występuje istotny pik na zerowej odciętej, tak utrudnia ona może być identyfikacja modów o niskiej częstotliwości. Zmiana częstotliwości próbkowania jest bardzo przydatną funkcją. Podobnie do filtrowania zmniejsza zakres analizowanej dziedziny, ale w odróżnieniu do filtrowania zmniejsza również liczbę próbek sygnału. Należy pamiętać, że resampling nie jest tożsamym pominięciu części próbek z sygnału. Wpływ obróbki sygnału na wyniki identyfikacji oraz zalecenia dotyczące przyjmowanych parametrów opisał Caicedo 2011

### 3.4. Aplikacja do identyfikacji modalnej OMA



Rysunek 3.3: Widok na okno główne stworzonej aplikacji do identyfikacji modalnej

Pierwszym głównym etapem w algorytmie NExT-ERA jest wyznaczenie funkcji korelacji wprowadzonych sygnałów. Wyznaczanie funkcji korelacji metodą bezpośrednią jest wymagające obliczeniowo. Z tego powodu wykorzystuje się zależność pomiędzy gęstością widmową mocy, a funkcją korelacji (3.33 i 3.34). Wyznaczenie gęstości widmowej mocy jest możliwe za pomocą znacznie bardziej efektywnych algorytmów. Jednym z nich jest metoda Welch'a (Welch 1967; Brincker i C. E. Ventura 2015), którą zastosowano w programie. Umożliwiono również łączenie i uśrednianie wielu serii pomiarowych w jeden wynik identyfikacji. Wykorzystano do tego algorytm przedstawiony w Brownjohn i in. 2010. W przypadku łączenia serii pomiarowych w jeden wynik, konieczne jest zastosowanie punktów referencyjnych. Punkty referencyjne są to punkty stałe w trakcie całych pomiarów, muszą występować w każdej serii pomiarowej i nie mogą znajdować się w węźle żadnej postaci drgań. Innymi słowy punkt referencyjny musi mieć niezerową wartość w wektorze określającym postać drgań, którą należy zidentyfikować. W zastosowanym algorytmie istnieje możliwość wyboru po jednym punkcie referencyjnym dla każdego z kierunków drgań: X, Y, Z. Łączenie serii pomiarowych odbywa się w następujący sposób:

- Algorytmem Welch'a wyznaczane są funkcje wzajemnych gęstości widmowych mocy pomiędzy sygnałem referencyjnym, a pozostałymi sygnałami na powiązanym kierunku. Wzajemne gęstości widmowe związane z danym punktem referencyjnym są zestawione w jeden wektor.
- Wyznaczane są funkcje auto gęstości widmowych mocy dla sygnałów w punktach referencyjnych. Użyty jest do tego ten sam algorytm co w przypadku wzajemnych funkcji gęstości widmowej mocy, z tą różnicą że sygnały wejściowe są identyczne.
- Funkcje wzajemnej gęstości widmowej mocy zestawione w jednym wektorze dzielone są przez funkcję auto gęstości widmowej punktu referencyjnego. W tym przypadku wymagane jest aby długość wektora wszystkich wektorów

była równa. Identycznie postępuje się z każdym wektorem gęstości widmowych mocy.

- Auto gęstości widmowe mocy dla danego punktu referencyjnego są uśredniane. Auto gęstości widmowe mocy są sumowane ze wszystkich ustawień, a wynik jest podzielony przez liczbę ustawień.
- Po procesie uśredniania gęstości widmowych mocy punktów referencyjnych następuje działanie odwrotne. Wcześniej podzielone wzajemne gęstości widmowe mocy mnożone są przez uśrednione auto gęstości widmowe mocy punktów referencyjnych.
- Wynikowe gęstości widmowe mocy przekształcane są za pomocą odwrotnej Transformaty Fouriera do sygnałów w dziedzinie czasu. Otrzymany wynik odpowiada funkcjom cross-korelacji i może być użyty w metodzie ERA.

Uśrednianie serii pomiarowych z tym samym ustawieniem punktów pomiarowych odbywa się przez sumowanie gęstości widmowych mocy z powtórzonych serii pomiarowych i podzieleniu przez liczbę powtórzonych serii. Pomimo zestawienia funkcji gęstości widmowych mocy w wektory, wszystkie wspomniane wyżej operacje mnożenia i dzielenia funkcji gęstości widmowych mocy polegają na działaniu na poszczególne prążki spektrum, a nie na klasycznym rozumieniu mnożenia i dzielenia wektorów.

### 3.4.2 Elementy oceny poprawności rozwiązania

Ważnym elementem w procesie identyfikacji modalnej jest ocena poprawności uzywanego rozwiązania. W tym celu najczęściej wykorzystywane są diagramy stabilizacyjne. W przypadku pomiarów obarczonych szumem, przyjęty rząd modelu musi być zadeklarowany jako większy niż miało by to miejsce w idealnych warunkach. Diagram stabilizacyjny pozwala na określenie minimalnego rzędu modelu, przy którym występują wszystkie interesujące mody i są one stabilne. Zastosowanie diagramów stabilizacyjnych opisano między innymi w (!!). W programie zastosowano dwie wersje diagramów: niefiltrowaną i filtrowaną. Wersja niefiltrowana obrazuje wszystkie wyznaczone mody: rzeczywiste i fikcyjne. Odróżnia je w zależności od wyników dla niższego rzędu modelu. Jeśli istnieje w modelu o rząd niższym mod spełniający odpowiednie kryteria to jest on uznany za rzeczywisty. Dla rzędu modelu  $n$  i obliczonego modu  $i$  zastosowane w programie domyślne kryteria to:

- częstotliwość  $f$  w dwóch kolejnych krokach nie może się różnić o więcej niż 1%,

$$\Delta f = \left| 1 - \frac{f_{n,i}}{f_{n+1,i}} \right| \leq 0.01 \quad (3.84)$$

- tłumienie  $\xi$  w dwóch kolejnych krokach nie może się różnić o więcej niż 5%,

$$\Delta \xi = \left| 1 - \frac{\xi_{n,i}}{\xi_{n+1,i}} \right| \leq 0.05 \quad (3.85)$$

- parametr MAC dla postaci w dwóch kolejnych krokach musi być większy niż 0.95,
- parametr MPC postaci modu musi być większy niż 0.9.

$$MAC_i^{n,n+1} \geq 0.95 \quad MPC_i \geq 0.90 \quad (3.86)$$

Diagram niefiltrowany obrazuje rozkład zidentyfikowanych modów w domenie częstotliwości. Wstępnie pozwala ocenić czy istnieją mody stabilne (częstotliwość i tłumienie), o rzeczywistych wektorach postaci (MPC) i o niezmiennej formie (MAC). W przypadku dużego rzędu modelu i bliskich sobie modów trudno jednoznacznie odnaleźć jedynie poprawne rozwiązania. Z tego względu stworzono również wersję filtrowaną diagramu stabilizacyjnego. Diagram filtrowany w znacznie bardziej czytelny sposób pozwala przedstawić jedynie mody uznane za rzeczywiste. Jego generacja opiera się na następujących krokach:

- Podział dziedziny częstotliwości na wąskie pasma (np. 1% dolnej granicy pasa) i podział wszystkich punktów według przynależności do poszczególnych pasm,
- Odrzucenie punktów, dla których tłumienie jest zbyt duże ( $LDT \geq 0.3$ ) lub ujemne,
- Wyznaczenie parametru MAC pomiędzy wszystkimi punktami w paśmie oraz parametru MPC dla każdego modu w paśmie.
- Wyznaczenie wartości średniej i odchylenia standardowego częstotliwości, tłumienia i parametrów MAC i MPC dla punktów pasa. Jeżeli wartości średnie pomniejszone o odchylenie standardowe są spełniają dopuszczalne warunki, to zestaw punktów uznany jest za określający rzeczywisty mod. Jeżeli nie, wyszukiwany jest punkt charakteryzujący się najgorszym parametrem MAC lub MPC albo zbyt różniczącą się liczbą tłumienia i jest odrzucany. Następnie ponownie oceniana jest wartość średnia i odchylenie standardowe. Proces ten toczy się do momentu odrzucenia wszystkich punktów lub spełnienia kryteriów uznania mod za rzeczywisty.
- Ostatecznie jako rzeczywiste i stabilne określone są mody, dla których liczba punktów w paśmie jest większa od wartości minimalnej. Domyślnie jest to 20% maksymalnego rzędu modelu na diagramie.

Wskaźniki MAC i MPC są istotną częścią algorytmu programu i służą ocenie poprawności wyników. Poniżej przytoczono ich definicje i podstawowe właściwości.

### Model Phase Colinearity (MPC)

Wynikiem przeprowadzonej analizy modalnej są postaci i częstotliwości o wartościach zespolonych. Postaci zidentyfikowane na podstawie pomiarów wartości rzeczywistych powinny stanowić wektory o współrzędnych rzeczywistych. W przypadku modów normalnych wszystkie punkty konstrukcji drgają dokładnie w fazie lub w przeciwnie fazie względem siebie. Przeciwne, kiedy postaci są wektorami zespolonymi, przemieszczenia osiągają wartości ekstremalne w różnych chwilach czasowych dla różnych stopni swobody. Ewins 2000; Chopra 2012 podają przykładowe przyczyny powstania postaci o wektorach zespolonych. Są to m.in. efekt żyroskopowy, efekty aerodynamiczne, nieliniowość czy nieproporcjonalne tłumienie. Zidentyfikowane mody zwykle występują w postaci zespolonej. Wynika to z relatywnie niskiego wskaźnika sygnału do szumu (Rainieri i Fabbrocino 2014). Mimo to, "stopień zespolenia" jest zwykle niewielki i w praktycznych zastosowaniach błęd wynikający z tej cechy może być zaniedbany. Mimo to ważnym jest żeby rozróżnić, które mody są normalne, a które w dużej mierze zespolone. Jedną z najprostszych metod jest wykreślenie współrzędnych składników postaci w układzie biegunkowym. Metoda została szerzej

opisana w (Ewins 2000). Zasadą jest, że jeśli w konstrukcji występuje tłumienie proporcjonalne to składniki danej postaci układają się na linii prostej w zespólnym układzie współrzędnych (Rainieri i Fabbrocino 2014)). Do ilościowego określenia stopnia przestrzennej spójności modu Richard S Pappa, Elliott i Schenk 1992 opracowali wskaźnik MPC (*Modal Phase Collinearity*). Jest on dla  $i$ -tego moda określony wzorem 3.91

$$S_{xx} = \Phi_i'^\top \Phi_i' \quad S_{yy} = \Phi_i''^\top \Phi_i'' \quad S_{xy} = \Phi_i'^\top \Phi_i'' \quad (3.87)$$

$$\mu = \frac{S_{xx} - S_{yy}}{2S_{xy}} \quad \beta = \mu + \text{sgn}(S_{xy})\sqrt{\mu^2 + 1} \quad \tau = \tan^{-1}(\beta) \quad (3.88)$$

$$\lambda_1 = S_{xx} + \frac{S_{xy}(2(\mu^2 + 1)\sin^2(\tau) - 1)}{\mu} \quad (3.89)$$

$$\lambda_2 = S_{yy} + \frac{S_{xy}(2(\mu^2 + 1)\sin^2(\tau) - 1)}{\mu} \quad (3.90)$$

$$\text{MPC}_i = \left[ 2 \cdot \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} - 0.5 \right) \right]^2 \quad (3.91)$$

gdzie  $\text{sgn}(\cdot)$  oznacza funkcję zwracającą znak liczby. Wskaźnik MPC jest bezwymiarowy i przyjmuje wartości z zakresu od 0 (dla modów z zupełnie nieskorelowanymi kątami fazowymi) do 1 (dla modów jednofazowych). Przykłady zastosowania tego wskaźnika zaprezentowano w pracach (!!).

### Modal Assurance Criterion (MAC)

Kryterium MAC (Modal Assurance Criterion) pozwala ocenić miarę dopasowania (stopień liniowości) dwóch wektorów modalnych (Randall J Allemand i Brown 1982). Jest to podstawowe i najbardziej popularne kryterium służące porównaniu wektorów modalnych Rainieri i Fabbrocino 2014. Jego wartość waha się od 0 (dla braku dopasowania) do 1 (dla idealnego dopasowania). Definicja wskaźnika dana jest wzorem 3.92.

$$\text{MAC}_n = \frac{(\psi_{n,a}^H \psi_{n,e})^2}{\psi_{n,a}^H \psi_{n,a} \psi_{n,e}^H \psi_{n,e}} \quad (3.92)$$

gdzie  $\psi_{n,a}$  i  $\psi_{n,e}$  to wektory postaci drgań własnych, a  $(\cdot)^H$  oznacza sprzężenie Hermitowskie wektora. Należy pamiętać, że kryterium MAC nie wskazuje czy rozwiązanie jest poprawne lub czy wektory modalne są ortogonalne. Wynik pokazuje jedynie dopasowanie dwóch wektorów. Wskaźnik MAC jest nieodporny na błędy zawarte jednocześnie w obu wektorach. Z tego względu za każdym razem należy kontrolować założenia metody. Zbiór wskazówek do stosowania kryterium MAC w swojej pracy zaważył Randall J. Allemand 2003. Poza swoistą instrukcją użycia wskaźnika, wskazuje on następujące główne przyczyny niemiarodajnych wyników przy korzystaniu z kryterium MAC:

- traktowanie kryterium MAC jako informacji o ortogonalności wektorów,
- nieprawidłowe matematyczne sformułowanie kryterium, głównie zastąpienie sprzężenia Hermitowskiego transpozycją. Zmiana ta jest słuszna wyłącznie przy rzeczywistych wektorach modalnych,
- duże różnice w wartościach współrzędnych wektorów. Kryterium jest bardzo wrażliwe na duże wartości, a niewrażliwe na małe wartości,

- przyjęcie zbyt małej liczby współrzędnych wektora,
- wypełnienie zerami współrzędnych wektora, na temat których nie ma żadnej informacji.

Ze względu na ograniczenia kryterium MAC, od momentu jego powstania pojawiły się szereg pokrewnych wskaźników. Są to między innymi: Coordinate Modal Assurance Criterion (COMAC) (Ewins 2000), Enhanced Coordinate Modal Assurance Criterion (ECOMAC) (Hunt 1992) czy Inverse Modal Assurance Criterion (IMAC) (MITCHELL 1998). Każde z kryteriów zostało zmodyfikowane w celu wyeliminowania konkretnego ograniczenia oryginalnej wersji. Zestawienie i opis wielu z nich przedstawiono między innymi w pracach (Randall J. Allemand 2003; Rainieri i Fabrocinio 2014; Szafrański 2013; Salamak 2003)

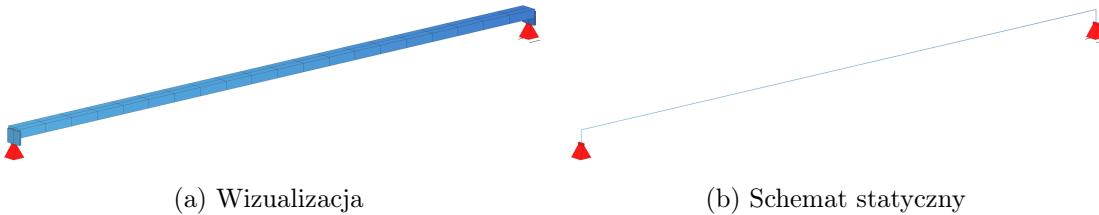
Poza diagramem stabilizacyjnym, w niniejszej pracy kryterium MAC zostało również użyte przy doborze lokalizacji czujników w trakcie pomiarów na konstrukcji rzeczywistej. Jest to kolejne z popularnych zastosowań współczynnika MAC (Randall J. Allemand 2003). Polega na takim doborze punktów pomiarowych, aby zdentyfikowane w tych punktach postaci drgań były od siebie maksymalnie różne. Opis przyjętego rozwiązania i wyniki obliczeń przedstawiono w wynikach badań w rozdziale 5.3.

### 3.4.3 Testy numeryczne metody NEXT-ERA

Każda aplikacja komputerowa przed użyciem powinna być poddana testom. W przypadku aplikacji służącej celom naukowym, gdzie zakłada się pewien poziom wiedzy i świadomości użytkownika zdecydowano, że testom poddane zostanie jedynie jądro programu - algorytm NExT-ERA. W tym celu założono wykonanie dwóch testów: numerycznego i laboratoryjnego. Test numeryczny ma opierać się na wykonaniu modelu obliczeniowego w oprogramowaniu MES, a następnie obciążeniu go losowo (w przybliżeniu szumem białym) i wykonaniu analizy dynamicznej. Test laboratoryjny ma polegać na pomiarze i analizie drgań środowiskowych rzeczywistego obiektu badawczego. Celem testu nie jest uzyskanie idealnej zgodności pomiędzy wynikami z badania numerycznego i laboratoryjnego, a jedynie sprawdzenie działania programu. Wyniki uzyskane z testu numerycznego są pozbawione wpływu wielu niedokładności, takich jak szumów, nieliniowych warunków brzegowych, nieosiowo ustawionych czujników czy wzajemnego wpływu składowych ortogonalnych na mierzone wartości. Dlatego traktowane są głównie jako test algorytmu. Mogą również służyć jako punkt odniesienia do wyników badań laboratoryjnych. Z kolei badania laboratoryjne pozwolą sprawdzić czy program i system pomiarowy są odporne na rzeczywiście występujące obciążenia procesu identyfikacji.

Przedmiotem badań była konstrukcja o schemacie statycznym bliskim belce swobodnie podpartej. Głównym elementem układu jest kształtownik stalowy o przekroju ceowym C40 i o długości 1.5m. Obiekt został opisany szerzej w punkcie 3.4.4). Model numeryczny wykonano w programie MES bazując na inwentaryzacji wymiarów obiektu laboratoryjnego. Założono, że głównym aspektem porównawczym z badaniami laboratoryjnymi mają być mody giętne pionowe. Z tego powodu znacznie uproszczono względem rzeczywistości strefy podporowe. Nie wykonano żadnej kalibracji modelu, aby odpowiadał lepiej strukturze rzeczywistej. Do budowy wykorzystano środowiska MES SOFiSTiK. Dla odwzorowania całego układu użyto jednowymiarowych elementów belkowych. Wizualizację oraz schemat statyczny pokazano

na rysunku 3.4.



Rysunek 3.4: Wizualizacja i schemat statyczny testowego modelu numerycznego

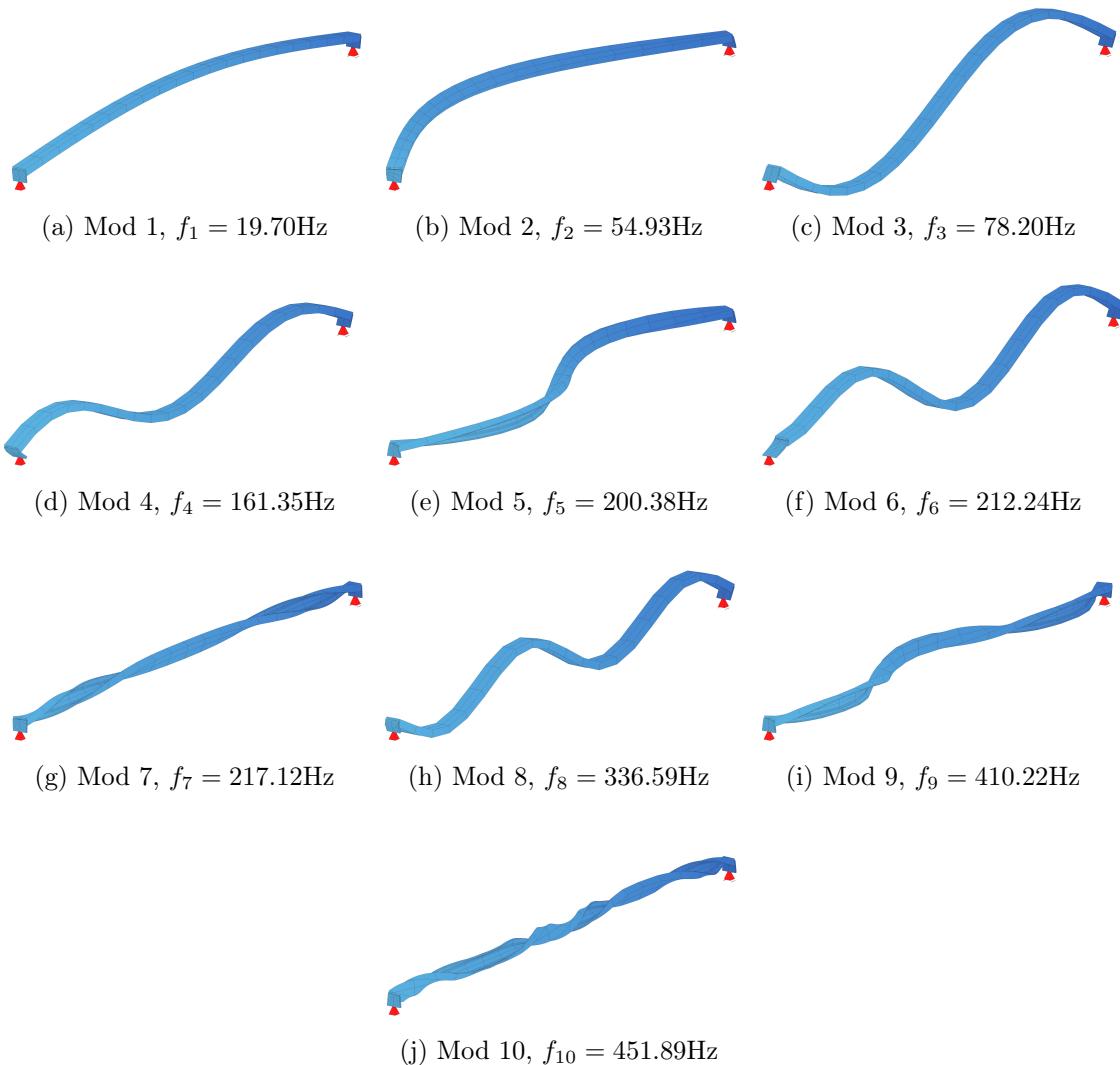
Przed przystąpieniem do analizy wygenerowano 5000 losowych przypadków obciążenia. Losowy charakter uzyskano za pomocą następujących założeń dla każdego przypadku obciążenia:

- w każdym węźle pośrednim może, ale nie musi, być przyłożona siła pionowa lub poprzeczna,
- jeśli siła została przyłożona, jej wartość jest losowana z zakresu od -3 do 3 N dla każdego węzła indywidualnie,
- w trakcie analizy, w każdym kroku czasowym losowany jest jeden przypadek obciążenia z wygenerowanych 5000.

Rozwiązano problem własny dynamiki przedmiotowego modelu i otrzymano rezultaty jak na rysunku 3.5.

Odpowiedź konstrukcji na wymuszenie losowe wyznaczono metodą time-step Newmarka-Wilsona. Zdecydowano o sprawdzeniu modów w zakresie do około 250Hz. Z tego względu przyjęto krok całkowania jako  $\Delta t = 1/2500s$ . Zgodnie z kryterium Nyquista taki krok pozwala identyfikować drgania teoretycznie do częstotliwości 1250 Hz. Niemniej jednak, sygnał wyjściowy powinien zostać nadpróbkowany znacznie bardziej niż dwukrotnie. Aby zapewnić dokładność rezultatu, odpowiedź z rozwiązania numerycznego powinna być wyznaczona z próbkowaniem ok 10-15 razy większym niż częstotliwość najwyższego, interesującego modu (Zoltowski, Binczyk i Kalitowski 2017). Większość modów odczytanych z analizy modalnej mieści się w zamierzonym zakresie do 250 Hz. Kilka modów powyżej 250 Hz zostanie również uwzględnione w analizie dla pokazania zmniejszenia dokładności z uwagi na zbyt rzadkie próbkowanie. W każdym kroku struktura była obciążana losowym przypadkiem obliczeniowym z bazy 5000 wcześniej wygenerowanych. Tłumienie konstrukcji przyjęto jako masowo-sztynnościami według metody Rayleigha (2.41). Współczynniki metody wyznaczono zakładając tłumienie LDT = 3% dla częstotliwości 20 Hz i 160 Hz. Chcąc sprawdzić charakter obciążenia wykonano analizę FFT sygnału złożonego z wartości obciążenia czterech węzłów w funkcji czasu. Widma częstotliwościowe przedstawiono na rysunku 3.6. Całkowity czas analizy przyjęto równy 25s ( $25 \cdot 2500 = 62500$  kroków czasowych). Widmo częstotliwościowe nie ujawnia żadnej dominującej częstotliwości i można uznać je za równe w całym zakresie.

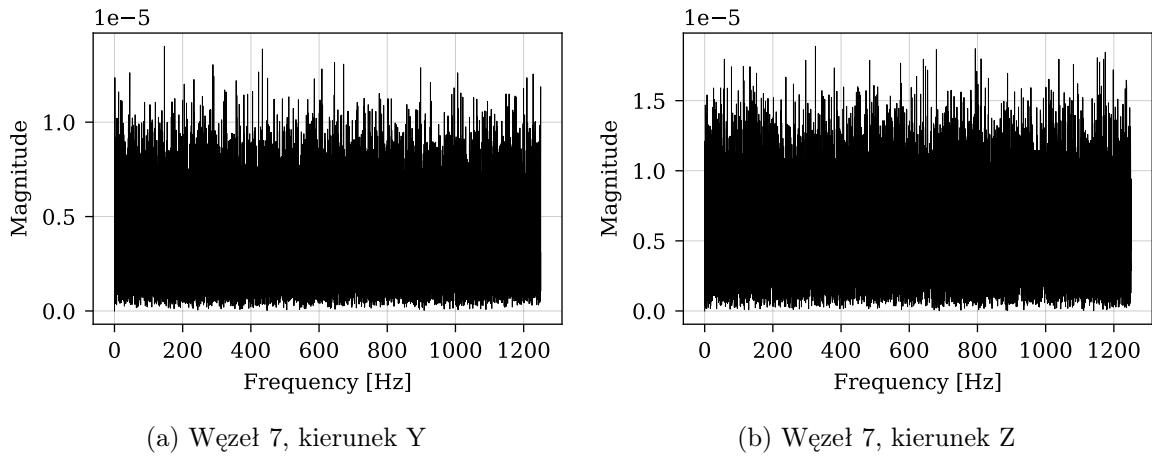
Dla obliczonego modelu odczytano przebieg przyspieszeń w dziewięciu węzłach pośrednich, na kierunku pionowym i poprzecznym. Do programu wprowadzono stworzone sygnały z informacją o lokalizacji punktów odczytu. Jako punkt referencyjny na kierunku Y wybrano punkt odległy o 0.3L od podpory, a na kierunku pionowym Z punkt odległy o 0.4L od podpory. O wyborze punktów referencyjnych decyduje



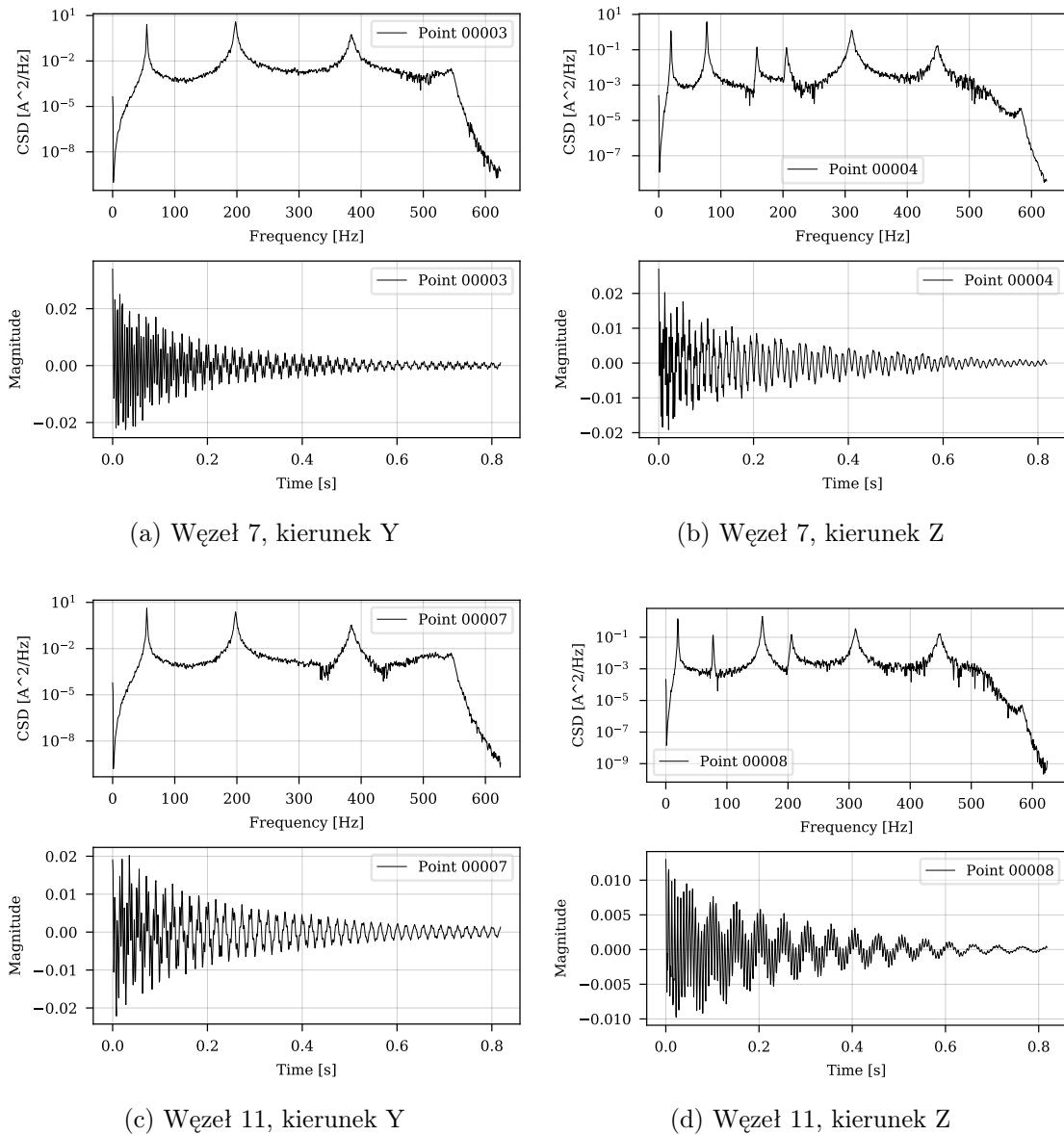
Rysunek 3.5: Rozwiążanie analizy modalnej modelu testowego

warunek, że nie mogą one znajdować się w węzłach żadnej analizowanej postaci drgań. Doboru parametrów identyfikacji dokonano przy pomocy diagramu stabilizacyjnego (Rys. 3.7). Na ostatecznym diagramie w wersji filtrowanej (Rys. 3.7b) wyraźnie widać 8 zidentyfikowanych, stabilnych modów. Odczytano minimalny rząd modelu zawierający wszystkie stabilne mody jako  $n = 20$ . Diagram tworzony iteracyjnie pozwolił ostatecznie wyznaczyć parametry metody, które przynoszą pewne, stabilne rozwiązanie. Dobrane parametry użyto w celu wyznaczenia ostatecznego rozwiązania identyfikacji.

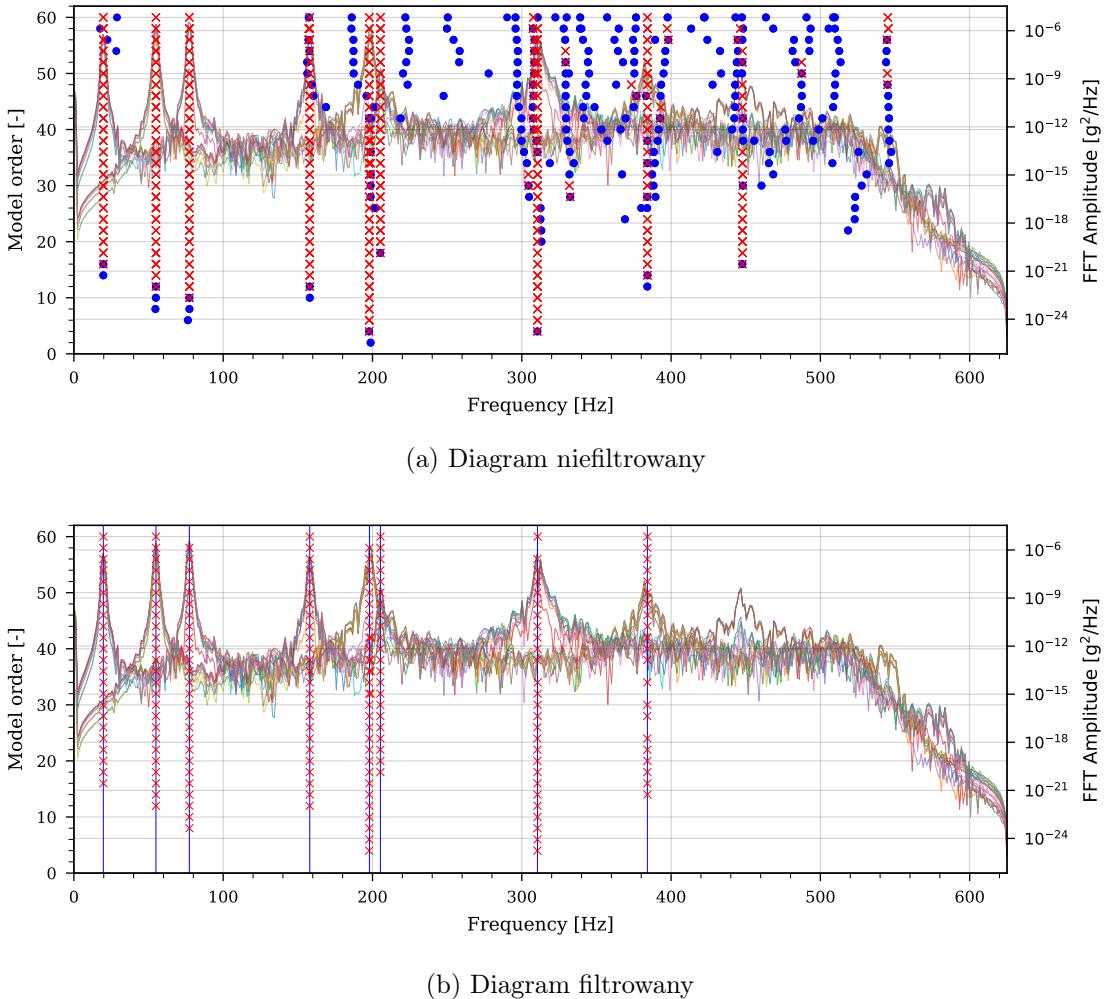
Wprowadzono wyznaczone parametry do programu. Uzyskano odpowiedzi impulsowe dla każdego punktu, których przykłady wraz z odpowiadającą im transformatą Fouriera przedstawiono na rysunku 3.8.



Rysunek 3.6: Transformaty Fouriera funkcji wymuszenia przykładowych węzłów w modelu testowym



Rysunek 3.8: Przykłady otrzymanych funkcji cross-korelacji w dziedzinie częstotliwości i dziedzinie czasu

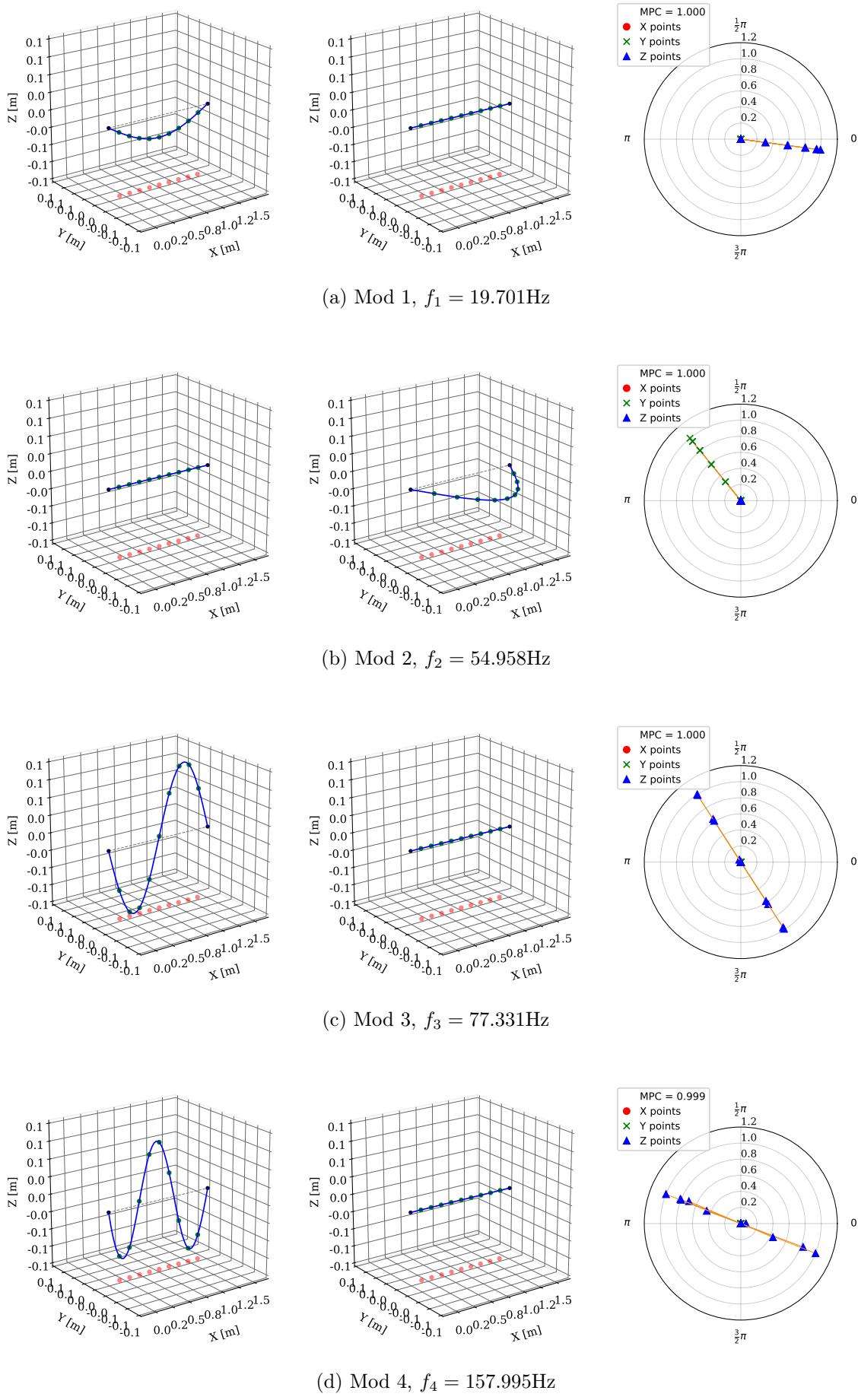


Rysunek 3.7: Diagram stabilizacyjny metody NExT-ERA testowego modelu numerycznego: (a) diagram niefiltrowany, (b) diagram filtrowany

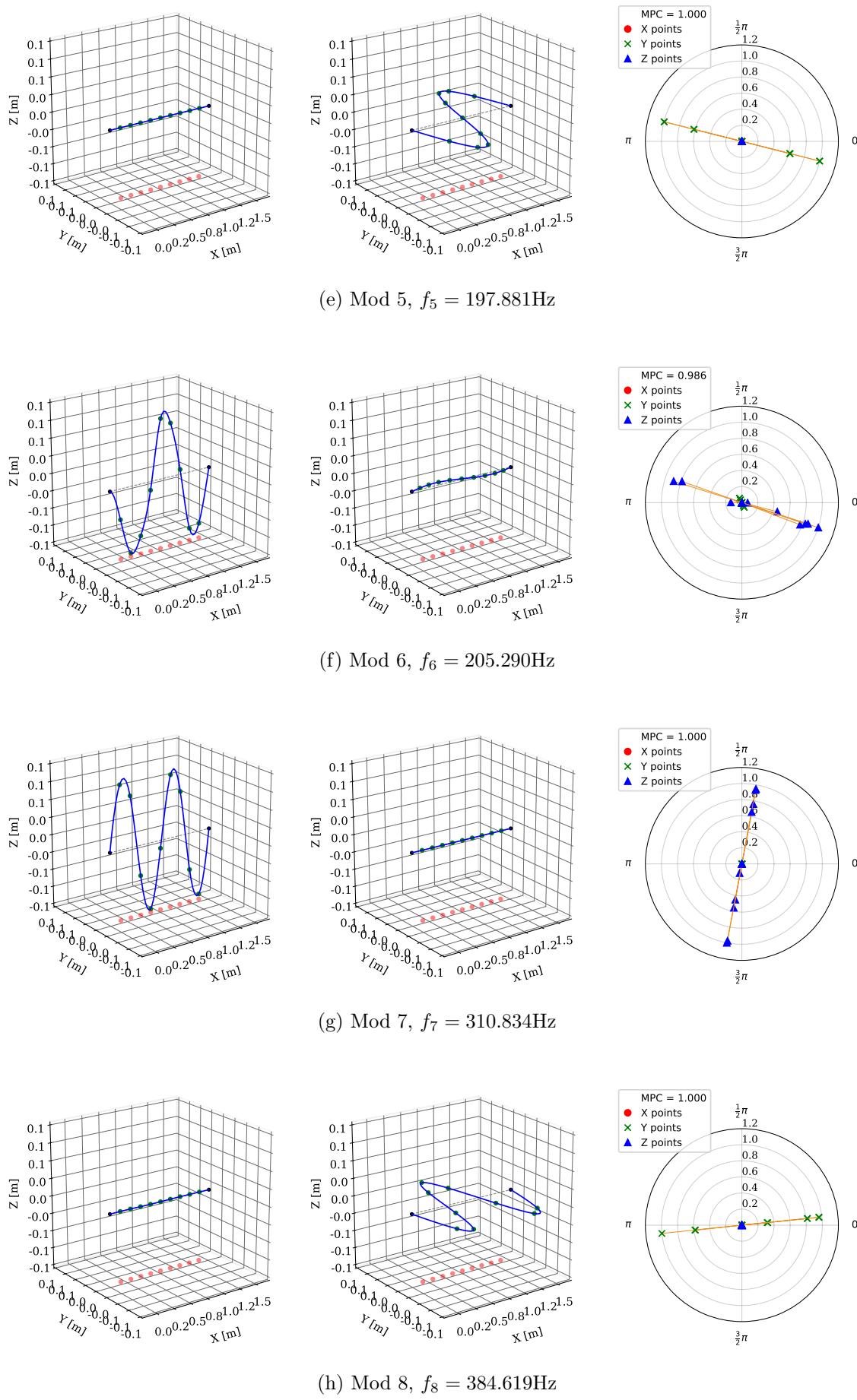
Funkcje posiadają wyraźnie gasnący, okresowy charakter. Na odpowiadających im widmach zaznaczają się wyraźnie dominujące częstotliwości. Wyznaczone funkcje IRF zostały wprowadzone do metody ERA. Wyniki obliczono dla minimalnego rzędu modelu równego  $n = 20$  zgodnie ze wskazaniami diagramu stabilizacyjnego (Rys. 3.7). Spośród wszystkich modów wybrano te, które na diagramie ujawniają się jako rzeczywiste i stabilne. Wyniki w formie postaci drgań własnych na kierunku pionowym  $Z$  i poprzecznym  $Y$  oraz dla obu kierunków w układzie biegunkowym przedstawiono na rysunku 3.9.

### 3.4.4 Testy eksperymentalne metody NEXT-ERA

W warunkach laboratoryjnych wykonano pomiary na belce rzeczywistej (Rys. ??). Belka została usytuowana na stabilnym podłożu. Aby ograniczyć możliwość przesuwu elementów podparcia w trakcie oddziaływanego, punkty podparcia zostały dociążone ciężkimi stalowymi elementami. System pomiarowy składał się z wzmacniacza pomiarowego PMX firmy HBM (Hottinger Baldwin Messtechnik GmbH, Darmstadt, Germany), kabli i niskoszumnych, piezorezystywnych czujników akcelerometrycznych firmy TE CONNECTIVITY. Do obsługi wzmacniacza i akwizycji danych



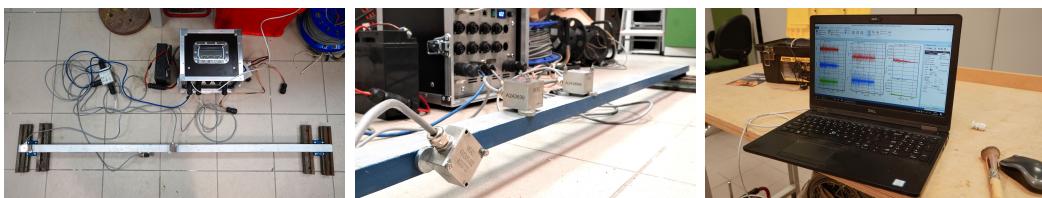
Rysunek 3.9: Zidentyfikowane charakterystyki modalne belki testowej



użyto program HBM Catman Easy. Czujniki przymocowano magnetycznie do belki. Zastosowano dwa czujniki 3-osiowe (traktowane jako 2-osiowe) i jeden 1-osiowy. Zakres pomiarowy akcelerometrów wynosi  $\pm 2g$ , a gwarantowane szумy są określone jako mniejsze niż  $25\mu g$  RMS. Stanowisko pomiarowe zostało zaprezentowane na rysunku 3.11, a szczegóły konstrukcyjne belki i jej podparcia na rysunku 3.10



Rysunek 3.10: Szczegóły konstrukcyjne belki testowej



Rysunek 3.11: Elementy aparatury pomiarowej

### Częstotliwość próbkowania

Częstotliwość próbkowania  $f_s$  określa jak często rejestrowana będzie wartość mierzona. Zwykle zakłada się równy odstęp pomiędzy próbkami  $\Delta t$ . W kontekście pomiarów dynamicznych konstrukcji ważne jest aby zarejestrować drgania o wszystkich interesujących częstotliwościach. Teoretycznie gwarantuje to przyjęcie dwukrotnie większej częstotliwości próbkowania  $f_s$  niż najwyższa interesująca częstotliwość odpowiedzi układu  $f_{max}$ . Graniczna częstotliwość nazywa się częstotliwością Nyquista i wynosi  $f_N = 0.5f_s$ . Jednakże systemy akwizycji danych najczęściej posiadają filtry antyaliasingowe, które mają swoje odbicie w pobliżu częstotliwości Nyquista. Brincker i C. E. Ventura 2015 podają, że z tego względu częstotliwość Nyquista musi o 20% większa niż wymagana teoretycznie. Podsumowując minimalna zaleca częstotliwość próbkowania powinna być równa:

$$f_s > 2.4f_{max} \quad (3.93)$$

Przyjmując założoną minimalną granicę interesujących modów jako 250Hz wyliczono częstotliwość próbkowania jako  $f_{s,min} = 2.4 \cdot 250\text{Hz} = 600\text{Hz}$ . W badaniach przyjęto znacznie wyższą częstotliwość równą  $f_s=2400\text{Hz}$  chcąc, podobnie jak w przypadku modelu teoretycznego, móc zidentyfikować również kilka wyższych modów.

### Długość pomiarów

Czas serii pomiarowej przyjęto zgodnie z zaleceniami opisanymi w Brincker i C. E. Ventura 2015. Według autorów minimalny czas gwarantujący poprawne określenie tłumienia, bez ryzyka negatywnego wpływu obciążen metody Welch'a, musi być

dłuższy niż 20 okien czasowych użytych przy wyznaczeniu funkcji korelacji. Z tego względu zalecana minimalna długość pomiaru dana jest nierównością ??.

$$T_{tot} > \frac{20}{2\xi f_{min}} = \frac{10}{\xi f_{min}} \quad (3.94)$$

gdzie  $f_{min}$  oznacza najniższą częstotliwość drgań własnych układu. Dla podanego układu minimalna częstotliwość drgań własnych wyznaczona teoretycznie wynosi  $f_{min} = 19.7\text{Hz}$ , a przewidywana minimalna liczba tłumienia wynosi  $\xi \approx 0.005$ . Minimalna długość serii pomiarowej wynosi więc  $T_{min} = \frac{10}{0.005 \cdot 19.7} = 101.5\text{s}$ .

### Stosunek sygnału do szumu pomiarowego

Wyznaczono również stosunek poziomu sygnału do szumu posługując się wzorem:

$$SN = 20 \log \frac{\sigma_s}{\sigma_n} \quad (3.95)$$

gdzie  $\sigma_s$  oznacza wartość RMS sygnału zmierzzonego, a  $\sigma_n$  jest wartością RMS szumu tła. Według zaleceń ANSI S2.47 wartość ta nie powinna być mniejsza niż 10 dB. Brincker i C. E. Ventura 2015 zalecają by w przypadku OMA stosunek sygnału do szumu nie był mniejszy niż 30-40 dB.

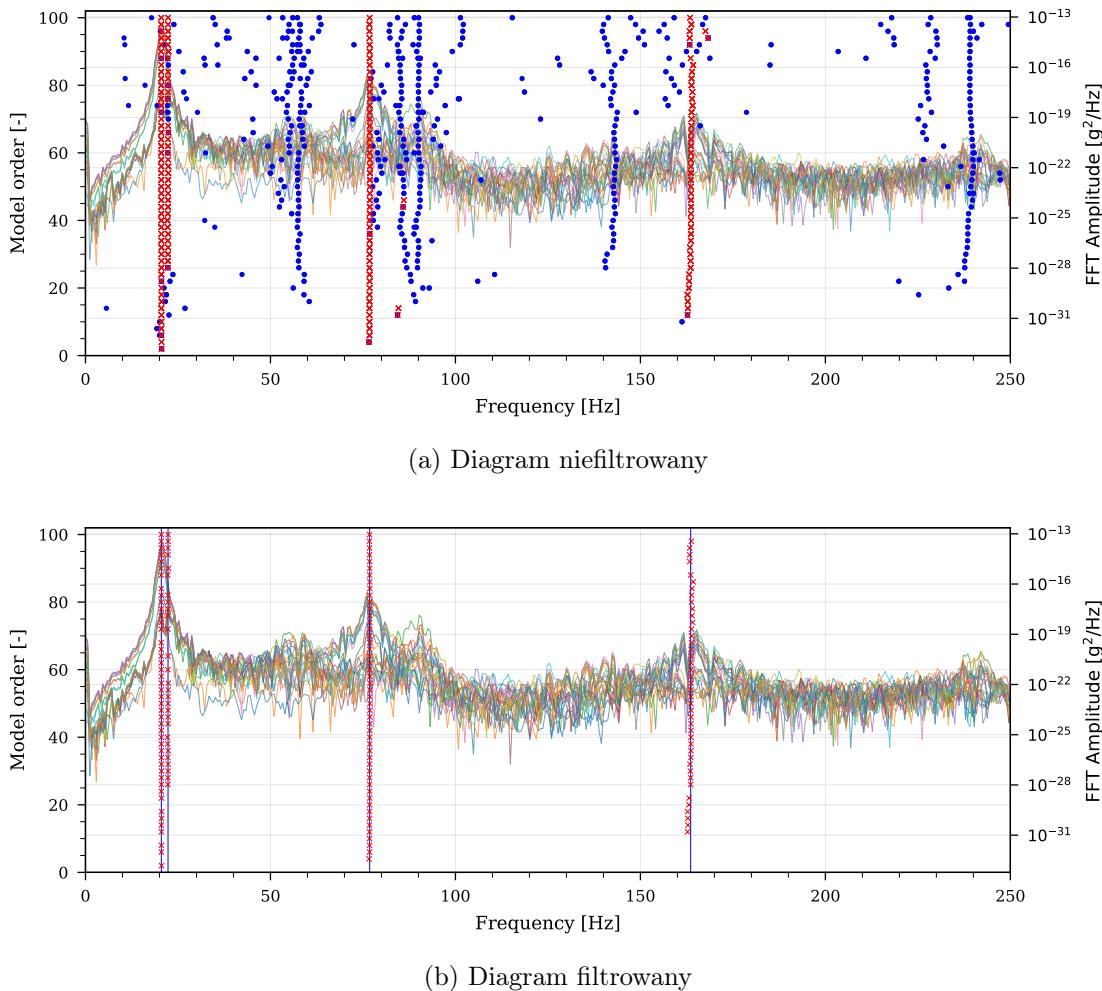
### Przebieg badań

Przeprowadzono analizę sygnałów NExT-ERA podobnie jak miało to miejsce dla modelu numerycznego. Zastosowano dwa czujniki referencyjne. Jeden, mierzący pionowe i poprzeczne przyspieszenia w ciągu całych badań znajdował się w odległości 0.4L od podpory. Drugi, mierzący jedynie przyspieszenia poziome znajdował się w odległości 0.3L od podpory. Zwiększenie liczby czujników referencyjnych pozwala uniknąć sytuacji, gdzie jedyny czujnik referencyjny będzie znajdował się w węźle jakiegoś modu, co nie pozwoli go później zidentyfikować (Caicedo 2011). W takiej sytuacji drugi czujnik może w innym wariancie identyfikacji posłużyć jako referencyjny, a wyniki z obu wariantów należy scalić. Trzeci, ruchomy czujnik był przedstawiany 10 razy tak, że ostatecznie zmierzono przyspieszenia na obu kierunkach w 11 punktach odpowiadających węzłom modelu numerycznego oraz punktom podporowym. .

Pomiary odbywały się w pomieszczeniu, w godzinach wieczornych. Z tego powodu amplitudy przyspieszeń wywołane oddziaływaniem otoczenia były znikome. Dla zastosowanego układu pomiarowego zmierzony w laboratorium szum charakteryzuje się wartością RMS  $\sigma_n = 0.00138 \text{m/s}^2$ . Sygnał nie zmieniał swojej mocy niezależnie od tego czy czujnik był umieszczony na obiekcie czy na stabilnym podłożu. Z tego względu w badaniach zastosowano sztuczne wymuszenie. Brincker i C. E. Ventura 2015 w przypadku badań laboratoryjnych zalecają szuranie lub gładzenie obiektu. W badaniach szurano po strukturze zgniecionym papierem pakowym. Wiotka struktura elementu wymuszającego nie powinna wpływać na dodatkowe tłumienie drgań. RMS jednominutowego sygnału pomierzonego ze sztucznym wymuszeniem wyniósł  $\sigma_n = 0.0539 \text{m/s}^2$ . Dla takich rezultatów obliczony wg formuły (3.95) stosunek sygnału do szumu jest równy  $SN = 20 \log \frac{0.0539}{0.0014} = 31.84 \text{dB}$ . Wyznaczona wartość jest większa niż zalecana.

## Rezultaty badań

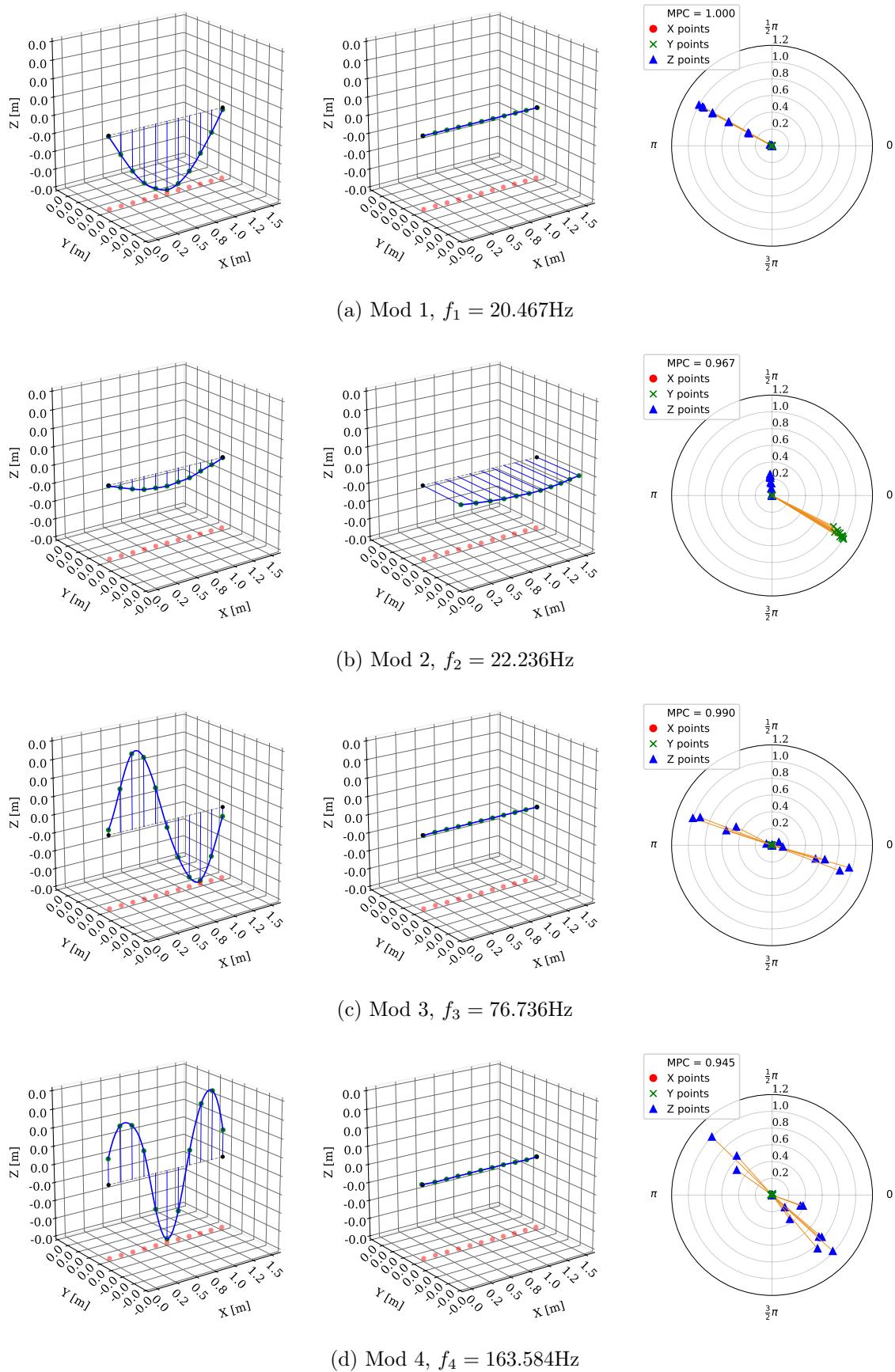
Diagramy stabilizacyjny metody NExT-ERA pokazano na rysunku 3.12. Zidentyfikowano 4 stabilne mody. Zidentyfikowane częstotliwości i postaci drgań zamieszczono na rysunku 3.13. Rezultaty porównano również z obliczeniami numerycznymi w tabeli 3.1.



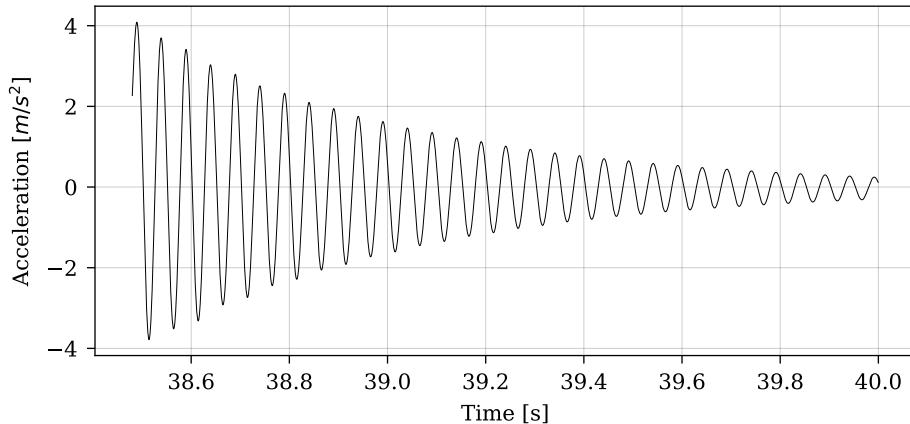
Rysunek 3.12: Diagram stabilizacyjny metody NExT-ERA rzeczywistej belki testowej:  
 (a) diagram niefiltrowany, (b) diagram filtrowany

Analizując rezultaty można zauważyc, że zidentyfikowano poprawnie 3 giętne pionowe postacie drgań. Pomimo bardzo dobrzej zgodności częstotliwości i formy drgań ich tłumienie jest jednak znaczaco większe niż zakladane LDT = 3% w modelu numerycznym. Z uwagi na dużą wartość tłumienia dokonano prostej weryfikacji. Na rysunku 3.14 pokazano przyspieszenia pionowe środkowego punktu belki, drgającego swobodnie po wymuszeniu siłą impulsową. Sygnał odfiltrowano do 25Hz uzyskując drgania w pierwszej postaci. Odczytano wartości kolejnych amplitud o numerach 1, 10 i 20. Dla obu przedziałów 1-10 i 10-20 wyznaczono logarytmiczny dekrement tłumienia:  $LDT_{1-10} = \frac{1}{10-1} \ln \frac{3.156}{1.378} = 0.092$     $LDT_{10-20} = \frac{1}{20-10} \ln \frac{1.378}{0.544} = 0.093$ . Wyznaczone tłumienia są zblizone do wartości wynikającej z analizy NExT-ERA.

Jedyna giętna postać poprzeczna nie odpowiada strukturalnie żadnej z wyznaczonych w analizach numerycznych. Mimo to sklasyfikowano ją jako mod 2 w tabeli



Rysunek 3.13: Zidentyfikowane charakterystyki modalne belki testowej



Rysunek 3.14: Odpowiedź swobodna belki testowej

3.1. Charakteryzuje się ona ruchem wszystkich punków pomiarowych, w jednym kierunku i o zbliżonej amplitudzie. Dotyczy to także punków nad miejscami podparcia. Mimo to mod został zidentyfikowany jako stabilny i charakteryzuje się bardzo wysokim tłumieniem ( $LDT = 0.44$ ). Istnieje kilka elementów, które mogły wpływać na brak spodziewanej identyfikacji poziomych modów giętnych belki. Głównym jest różniąca się struktura fragmentów podporowych. Podpora belki laboratoryjnej była złożona z połączenia śrubowego i nie była sztywno przyczepiona do podłoża. W modelu numerycznym w tym miejscu ustalono sztywne więzy w układzie belki swobodnie podpartej. Postać i wysokie tłumienie moda nr 2 może świadczyć, że belka wahala się na boki w całości i nie udało się wymusić drgań poprzecznych o bardzo wysokich częstotliwościach.

### 3.5 Podsumowanie testów metody NExT-ERA

Zidentyfikowane częstotliwości drgań własnych oraz tłumienia zestawiono w tabeli 3.1.

Częstotliwości wynikające z analizy modalnej i zidentyfikowane z odpowiedzi modelu numerycznego charakteryzują się bardzo dobrą zgodnością. Dla niskich częstotliwości różnice nie są większe niż 1%. Wraz ze wzrostem częstotliwości wzrastają również różnice do maksymalnie 8%. Jest to prawdopodobnie spowodowane zbyt niską częstotliwością próbkowania (zbyt dużym krokiem czasowym) dla modów o wysokich częstotliwościach. W takim przypadku różnica nie wynika z błędów identyfikacji tylko z błędów w wyznaczeniu odpowiedzi dynamicznej konstrukcji. Obserwując postaci uzyskane z analizy modalnej można zauważyć, że Mod 7 i Mod 10 mają charakter skrętny. Posługując się modelem belkowym i odczytując przyspieszenia węzłów wyłącznie na kierunku  $Y$  i  $Z$  nie ma możliwości zaobserwować tych postaci. Przeprowadzona identyfikacja potwierdza ten fakt, nie wskazując tych modów jako stabilnych rozwiązań. Z tego względu w tabeli zbiorczej zostały one oznaczone myślnikiem jako brakujące. Zidentyfikowane tłumienia różnią się do maksymalnie do 23% od zakładanych wartości wynikających z formuł teoretycznych. Uzyskanie dużej zgodności zidentyfikowanego tłumienia jest z reguły bardziej problematyczne niż ma to miejsce w przypadku częstotliwości. W przedmiotowym przypadku większość tłumień zidentyfikowanych nie różni się o więcej niż 10% od wartości teoretycznych.

Tablica 3.1: Porównanie zidentyfikowanych parametrów modalnych obiektu testowego

	Analiza modalna	Zakładane tłumienie	Model MES						Badania			
			Częst.	LDT	Częst.	Stosunek [%]	LDT	Stosunek [%]	Częst.	Stosunek [%]	LDT	Stosunek [%]
			[Hz]	[Hz]	[Hz]		[Hz]	[Hz]	[Hz]	[Hz]	[Hz]	[Hz]
Mod 1	19.77	0.0303	19.701	100%	0.0291	96%	20.467	104%	0.097	333%		
Mod 2	54.93	0.0189	54.958	100%	0.0232	123%	22.236	40%	0.440	2335%		
Mod 3	78.20	0.0199	77.331	99%	0.0190	96%	76.739	98%	0.151	760%		
Mod 4	161.35	0.0302	157.995	98%	0.0240	79%	163.584	101%	0.185	614%		
Mod 5	200.38	0.0361	197.881	99%	0.0325	90%	-	-	-	-		
Mod 6	212.24	0.0379	205.29	97%	0.0410	108%	-	-	-	-		
Mod 7	217.12	0.0386	-	-	-	-	-	-	-	-		
Mod 8	336.59	0.0577	310.834	92%	0.0473	82%	-	-	-	-		
Mod 9	410.22	0.0697	384.619	94%	0.0628	90%	-	-	-	-		
Mod 10	451.89	0.0765	-	-	-	-	-	-	-	-		

W badaniach laboratoryjnych zidentyfikowano 4 stabilne mody. Model numeryczny pomimo dobrego odwzorowania wymiarów geometrycznych konstrukcji nie był kalibrowany względem obiektu rzeczywistego. Niemniej, pomimo braku kalibracji modelu numerycznego, częstotliwości modów pionowych są bardzo bliskie wartościom z analizy modalnej. Maksymalna różnica wynosi 4%. Tłumienia modów pionowych są zdecydowanie większe niż zakładane teoretycznie. Ich porównanie jest podane orientacyjnie i nie ma daje podstaw do wyciągnięcia wniosków na temat identyfikacji. Dla sprawdzenia efektu identyfikacji tłumienia w warunkach rzeczywistych porównano Logarytmiczny Dekrement Tłumienia odpowiedzi swobodnej układu ze zidentyfikowanym tłumieniem pierwszego modu (Rys. 3.14). Stosunek obu wartości wynosi  $LDT_{\text{ident}}/LDT = 0.097/0.093 = 1.04$ . Zawarty w tabeli mod 2 nie ma odpowiednika w analizach teoretycznych co uzasadniono w punkcie 3.4.4 i jego wystąpienie uznano za efekt niedoskonałego eksperymentu. Warto zaznaczyć, że mod 1 i mod 2 są bliskie pod względem częstotliwości przy zastosowanym spektrum całkowitym, a ich identyfikacja i rozróżnienie nie sprawiło problemu. Podsumowując, na podstawie przytoczonych testów uznano zaimplementowany algorytm jako skuteczny i przystąpiono do badań właściwych. Identyfikacja modalna rzeczywistego obiektu mostowego została opisana w punkcie 5.3.

## Rozdział 4

# Optymalizacja metodą roju cząstek - Particle Swarm Optimizaton

### Wprowadzenie

Znalezienie najlepszej możliwej konfiguracji elementów konstrukcyjnych, zapewniającej poprawnie przeniesienie obciążen statycznych, zapewniającej komfort dynamiczny i najlepiej możliwie taniej jest zadaniem, które na co dzień towarzyszy projektantom mostów. Takie zadanie może kojarzyć się intuicyjnie z pojęciem optymalizacji, czyli wyborem najlepszego z wielu rozwiązań, pozwalającego osiągnąć cel lub cele. Szymczak 1995 określa następuje elementy, jakie powinno zawierać poprawnie sformułowane zadanie optymalizacji

- kryteria optymalizacji - miarę spełnienia danego celu,
- parametry optymalizacji - parametry systemu, które są stałe lub niezależne od projektanta,
- zmienne projektowe - parametrów systemu zależne od projektanta,
- ograniczenia - elementy określające zakres dopuszczalnych rozwiązań.

Kryterium optymalizacji powinno w sposób wymierny pozwolić na ocenę danego rozwiązania. Podstawowymi kryteriami stosowanymi w przypadku konstrukcji może być koszt jej wykonania, ilość materiału czy nakład pracy. Kryterium, które decyduje o wyborze najlepszego rozwiązania nazywane jest funkcją celu. W przypadku wielu kryteriów, jednym z rozwiązań upraszczających proces optymalizacji jest stworzenie jednej funkcji celu, łączącej wszystkie kryteria z zastosowaniem wag dla poszczególnych elementów. Odbywa się to zazwyczaj na zasadzie kombinacji liniowej:

$$F = \sum_{i=1}^n w_i F_i \quad (4.1)$$

gdzie  $w_i$  to współczynnik określający wagę kryterium  $F_i$ . W pracy został zastosowane rozwiązanie optymalizacji wielokryterialnej. W takim przypadku optymalizacja polega na minimalizowaniu lub maksymalizowaniu jednocześnie kilku funkcji celu. Zagadnienie zostanie omówione teoretycznie w punkcie 4.5.

W przypadku konstrukcji, parametry projektowe to założone wartości opisujące ustrój, które nie ulegają zmianie w procesie optymalizacji. Mogą być one narzucone przez wzgłydy technologiczne bądź normowe (Szymczak 1995), lub wynikać z innych założeń projektowych. Z kolei zmienne projektowe  $x_i$ , jak sama nazwa

wskazuje, mogą się zmieniać w procesie optymalizacji i zależą od projektanta. Wybór konkretnych  $m$  zmiennych projektowych tworzy rozwiązanie w postaci wektora  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$ , będącego punktem w przestrzeni  $m$ -wymiarowej.

Z reguły wartości zmiennych projektowych muszą spełniać szereg obostrzeń. Wynikają one ponownie ze względów technologicznych, normowych lub innych uznanych za istotne przez projektanta. Z tego powodu, na zmienne projektowe  $\mathbf{x}$  narzucone są ograniczenia. Wektor, który spełnia wszystkie ograniczenia nazywany jest dopuszczalnym. W analizie konstrukcji budowlanych ograniczeniami mogą być wymogi wytrzymałościowe, eksploatacyjne - zarówno statyczne jak i dynamiczne - czy też warunki stateczności.

## 4.1 Klasyfikacja problemów i metod optymalizacji

Wszystkie powyższe elementy definiują problem optymalizacji. Każdy z nich może przyjmować różne postaci co będzie miało znaczący wpływ przede wszystkim na wybór metody rozwiązania problemu. Tesch 2016 zaproponował następującą klasyfikację problemów optymalizacji zależnie od elementów charakterystycznych je definiujących:

- Liczba funkcji celu
  - pojedyncza funkcja celu,
  - wiele funkcji celu.
- Liczba ekstremów lokalnych
  - funkcja unimodalna - funkcja jest ciągła i posiada jedno ekstremum w rozpatrywanym przedziale,
  - funkcja multimodalna - problem posiada więcej niż jedno ekstremum lokalne w rozpatrywanym zakresie,
- Liniowość funkcji celu
  - problem programowania liniowego - funkcja celu i ograniczenia są liniowe,
  - problem programowania nieliniowego - funkcja celu lub ograniczenia nie są liniowe,
- Rodzaj zmiennych projektowych
  - ciągłe - zmienne projektowe są liczbami rzeczywistymi w zadanym przedziale,
  - dyskretne - zmienne projektowe są liczbami całkowitymi w zadanym przedziale,
  - mieszane - w problemie występują zarówno zmienne ciągłych jak i dyskretnych ,

Klasyfikacje zawarte w klasycznych pozycjach dotyczących optymalizacji podają również ogólny podział ze względu na to czy zmienne projektowe są liczbami czy funkcjami (Szymczak 1995; Findeisen, Szymanowski i Wierzbicki 1980).

Rodzaj problemu optymalizacji ogranicza wybór metody, którą można użyć do jego rozwiązania. W literaturze algorytmy tradycyjne dzielone są ze względu na sposób przeszukiwania na: analityczne, enumeratywne oraz losowe (David Edward

Goldberg 1995). W skrócie, pierwsze opierają się na stworzeniu i rozwiązaniu układu równań, powstałego przez przyrównanie gradientu funkcji celu do zera. Metody te wymagają obliczenia pochodnych funkcji i mają charakter lokalny, szukając optymalnego rozwiązania wokół punktu, a nie w całym dopuszczalnym obszarze. W realnych przypadkach są to trudne do zaakceptowania warunki i metody te mają raczej ograniczony zakres zastosowań. Metody enumeracyjne polegają na obliczaniu funkcji celu dla kolejnych rozwiązań dopuszczalnych. W literaturze przedmiotu inną spotykaną nazwą tej metody jest "systematyczne przeszukiwanie". Pomimo naturalności metody i jej prostoty jest to najmniej efektywna klasa metod, co jest jej główną wadą. Działanie metod losowych jest podobne do systematycznego przeszukiwania, z tą różnicą że kolejne rozwiązania są dobierane w sposób losowy, a nie uporządkowany. Metody losowe w ogólności nie pozwalają efektywniej uzyskać optymalnego rozwiązania niż enumeratywne. Przedstawione konwencjonalne metody są albo wysoce wyspecjalizowane i swoim zastosowaniem obejmują wąskie spektrum problemów, albo są mało efektywne w szerokim zakresie zastosowań. Znając ograniczenia metod tradycyjnych, poszukiwano innych, które dzięki wykorzystaniu maszyn cyfrowych mogą stać się jednocześnie znacznie bardziej efektywne niż metody enumeratywne oraz jednocześnie pozwalają na rozwiązanie znacznie bardziej różnorodnych zadań niż metody analityczne. W odpowiedzi powstały algorytmy, które doboru coraz lepszego rozwiązania dokonują wykorzystując zwykle randomizację, ale nie są w zupełności losowe. Są to tak zwane algorytmy heurystyczne i w rozwiniętej wersji metaheurystyczne (Blum i Roli 2003). Cechują się one konkretną strategią, która przewodzi przeszukiwaniu przestrzeni w poszukiwaniu rozwiązania optymalnego. Powinny być uniwersalne i nie nakierowane jedynie na konkretny typ problemu. Wykorzystują one doświadczenie powstałe na bazie przeprowadzonych prób i uczą się na ich podstawie szukając coraz lepszego wyniku. Ponadto, większość algorytmów metaheurystycznych ma charakter globalny i nie ogranicza się do funkcji unimodalnych. Niemniej jednak, pomimo niewątpliwych zalet, należy pamiętać że algorytmy metaheurystyczne są z natury przybliżone. W związku z tym nie gwarantują, że optymalny wynik zostanie w ogóle odnaleziony. Najbardziej popularne algorytmy metaheurystyczne są inspirowane zachowaniami zaobserwowanymi w naturze (Fister Jr. i in. 2013). Główne mechanizmy ich działania mogą być zaczerpnięte z praw fizyki (np. Algorytm Przeszukiwania Grawitacyjnego (Rashedi, Nezamabadi-pour i Saryazdi 2009)), biologii (np. Algorytmy Genetyczne (David Edward Goldberg 1995)) czy inteligencji stadnej (np. Optymalizacja Rojem Cząstek (Kennedy i Eberhart 1995; R. C. Eberhart, Y. Shi i James Kennedy 2001)). Podsumowując i odwołując się do wyżej przytoczonej klasyfikacji problemów optymalizacji, algorytmy ich rozwiązania Tesch 2016 podzielił według następujących kryteriów:

- Różniczkowalność funkcji celu
  - Wymagające pochodnej - algorytmy tej kategorii wymagają istnienia dwukrotnej pochodnej funkcji celu.
  - Niewymagające pochodnej - algorytmy tej klasy nie wymagają ciągłości funkcji celu oraz jej pochodnej.
- Liczba jednocześnie rozważanych rozwiązań
  - Jednopunktowe - w jednej chwili rozważane jest jedno rozwiązanie. W kolejnych krokach algorytmu jest ono modyfikowane w celu uzyskania lepszego rozwiązania.

- Wielopunktowe - jednocześnie odbywa się analiza wielu rozwiązań, które mają wpływ na wynik końcowy.
- Mechanizmy losowości
  - Deterministyczne - rozwiązania są wyznaczane jedynie na podstawie danych wejściowych i wyznaczonych parametrów.
  - Stochastyczne - zmienne projektowe są wybierane z uwzględnieniem czynnika losowego.
  - Hybrydowe - algorytm zawiera oba mechanizmy wyboru kolejnego rozwiązania.

## 4.2 Określenie funkcji celu i wybór metody optymalizacji

Wpływ poszczególnych rozwiązań konstrukcyjnych obiektu na jego odpowiedź dynamiczną zalicza się do zagadnień złożonych. Pierwszą funkcją celu postawionego problemu może być minimalizacja przyspieszeń pionowych pomostu w trakcie przejazdu. Jest to najbardziej najczęściej decydujący warunek eksploatacyjny mostu narzucony przez normę Europejską. Drugą pożądaną cechą może być poszukiwanie najtańszego obiektu (w uproszczeniu najmniejszej ilości materiału), przy spełnieniu wszystkich innych warunków wytrzymałościowych. Wybór metody optymalizacji, która została wykorzystana dokonano przez analizę rozpatrywanego zadania. Z uwagi na brak funkcyjnego opisu odpowiedzi dynamicznej modelu numerycznego zaniechano użycia metod analitycznych, wymagających obliczania pochodnych. Dodatkowo problem ma charakter globalny i nie wolno dopuścić do zakończenia poszukiwania w ekstremum lokalnym. Odrzucono również metody losowe i systematycznego przeszukiwania z uwagi na długotrwałe wyznaczanie funkcji celu i bardzo nieefektywny algorytm. Kolejnym kryterium była uniwersalność algorytmu, ponieważ zaplanowano użycie go w dwóch zupełnie różnych problemach: kalibracji modelu i optymalizacji konstrukcji z punktu widzenia zachowania dynamicznego. Ostatnim kryterium była udokumentowana w literaturze skuteczność metody, w tym wykorzystanie jej w przypadkach analizy i oceny konstrukcji. Powyższe warunki spełniają metody metaheurystyczne. Spośród opisanych w literaturze wybrano metodę optymalizacji rojem częstek.

## 4.3 Particle Swarm Optimization

Optymalizacja rojem częstek (*eng. Particle Swarm Optimization (PSO)*) jest metodaheurystycznym, inspirowanym naturą algorytmem optymalizacji. W bazowej wersji powstał w roku 1995 (James Kennedy i Russell Eberhart 1995; Russell Eberhart, Kennedy i James Kennedy 1995) i od tamtej pory ulegał wielu modyfikacjom, udoskonaleniom i rozszerzeniom. Metoda zakłada istnienie pewnej populacji - roju składającego się z  $M$  częstek. Każda częstka o indeksie  $i$  posiada trzy informacje ( $\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{p}_i$ ).  $\mathbf{x}_i$  i  $\mathbf{p}_i$  są wektorami o długości  $D$  oznaczającymi punkt w przeszukiwanej przestrzeni  $\mathbf{X}$ , gdzie  $D$  jest liczbą zmiennych projektowych problemu.  $\mathbf{x}_i$  oznacza aktualną pozycję częstki w przestrzeni  $\mathbf{X}$ . Z kolei  $\mathbf{p}_i$  określa najlepsze dotychczasowe położenie częstki  $i$  (*eng. personal best (pbest)*). Jakość położenia określana jest przez

wyznaczenie funkcji celu dla danej cząstki (np. zakładając minimalizację, mniejsza wartość funkcji celu jest lepsza od większej). Jeżeli funkcja celu dla nowego położenia cząstki jest lepsza niż zachowana w pamięci (pbest) to wektor  $\mathbf{p}_i$  jest aktualizowany do nowej wartości.  $\mathbf{v}_i$  jest również wektorem o długości  $D$  i oznacza różnicę pomiędzy nowym położeniem w chwili  $t + 1$  i poprzedzającym w chwili  $t$ :

$$\mathbf{x}_i^{t+1} = \mathbf{x}_i^t + \mathbf{v}_i^{t+1} \quad (4.2)$$

Jako że wektor  $\mathbf{v}_i$  decyduje o kolejnym położeniu cząstki nazywany jest również wektorem prędkości. Współrzędne wektora  $\mathbf{v}_i$  z kroku  $t$  uaktualniane są w kolejnej iteracji  $t + 1$  w następujący sposób:

$$\mathbf{v}_i^{t+1} = \theta \mathbf{v}_i^t + \alpha \mathbf{u}_1^t \circ (\mathbf{n}_i^t - \mathbf{x}_i^t) + \beta \mathbf{u}_2^t \circ (\mathbf{p}_i^t - \mathbf{x}_i^t) \quad (4.3)$$

gdzie wektory  $\mathbf{u}_1^t$  i  $\mathbf{u}_2^t$  zawierają zestawy losowych liczb o rozkładzie jednostajnym z zakresu  $[0,1]$ , ustalonych w chwili czasowej  $t$ . Symbol ( $\circ$ ) oznacza iloczyn skalarny. Parametry  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\theta$  w pierwotnej wersji algorytmu są stałymi. W zależności od zastosowanej topologii roju,  $\mathbf{n}_i$  oznacza najlepsze rozwiązanie  $\mathbf{p}_i$  spośród dostępnych sąsiadów. W jednej z najpopularniejszych i najbardziej intuicyjnych wersji stosowana jest topologia gbest, w której  $\mathbf{n}_i$  przyjmuje najlepszą wartość  $\mathbf{p}_i$  spośród wszystkich cząstek.

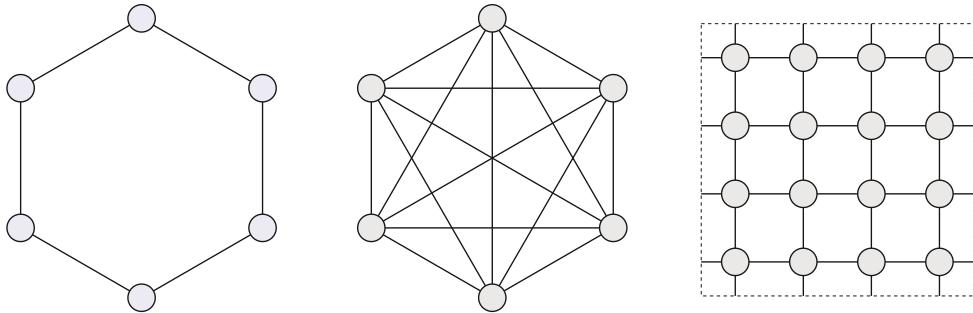
## Parametry algorytmu PSO

Każdy składnik prędkości spełnia określona rolę. Pierwszy jest związany z bezwładnością i utrzymuje on bieżącą trajektorię cząstki. Parametr  $\theta$  w ogólności zmniejsza prędkość, zapewniając lepszą zbieżność rozwiązania (Blackwell i James Kennedy 2019). Jego wartość może być stała lub zmienna w trakcie analizy. Współczynniki  $\alpha$  i  $\beta$  odpowiadają za przyspieszenie na bazie odpowiednio własnych i społecznych doświadczeń. Clerc i James Kennedy 2002 wyznaczyli wartości  $\theta = 0.7968$ ,  $\alpha = 1.4962$  i  $\beta = 1.4962$  jako optymalne z punktu widzenia działania algorytmu. Przyjęcie równości  $\alpha = \beta$  oznacza, że na prędkość cząstki równy wpływ mają doświadczenia własne i sąsiadów. Do podobnych rezultatów doszli Y. Shi i Russell Eberhart 1998. S. Xu i Rahmat-Samii 2007 podaje przykład zmiennego wariantu, gdzie  $\theta$  zmniejsza swoją wartość liniowo od 0.9 do 0.4, a parametry  $\alpha$  i  $\beta$  są stałe i równe 2.0. Poli, James Kennedy i Blackwell 2007 obszernie opisali metody wyznaczania wartości parametrów algorytmu.

## Topologie roju

Topologia roju odpowiada za zachowanie społeczne cząstek roju. Określa ona sąsiedztwo, z którym cząstka może się komunikować i wymieniać doświadczeniem. Definiuje również liderów, za którymi podążać będą pozostałe cząstki. Topologie dzielą się na dwie główne grupy: globalne (eng. *global best (gbest)*) i lokalne (eng. *local best (lbest)*). Schemat topologii można przedstawić za pomocą grafów, w których węzły oznaczają cząstki, a krawędzie możliwość komunikacji z inną cząstką. Trzy najczęściej występujące w literaturze przedmiotu topologie to:

- topologia pierścieniowa (Rys. 4.1a),
- topologia pełnego grafu (Rys. 4.1b),



(a) Topologia pierścieniowa (b) Topologia pełnego grafu (c) Topologia von Neumanna

Rysunek 4.1: Schematy wybranych topologii komunikacji pomiędzy częstkom w metodzie optymalizacji rojem cząstek

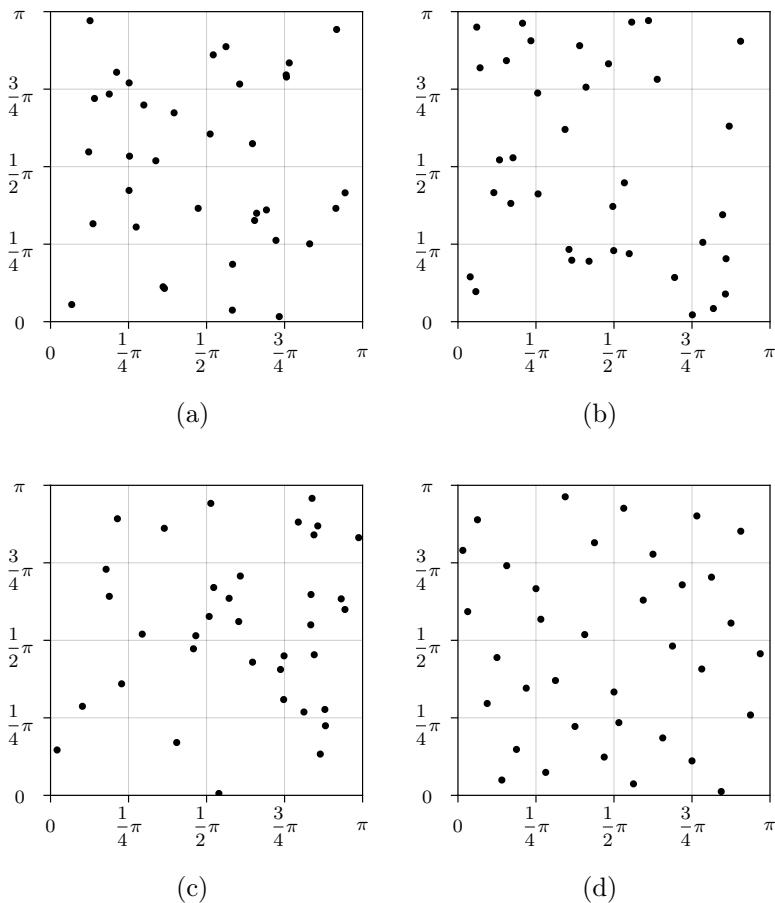
- topologia von Neumanna (Rys. 4.1c).

Przyjęta topologia roju ma istotny wpływ na zachowanie i efektywność algorytmu. Topologie należące do rodziny gbest osiągają szybciej zbieżność, ale istnieje większe ryzyko na utknięcie w minimum lokalnym gdy funkcja celu nie jest unimodalna. Innymi słowy przynosi ona precyzyjniejsze rozwiązanie, ale mniej dokładnie przeszukuje obszar. Przy wykorzystaniu rodziny lbest efekt jest odwrotny. Ograniczona jest komunikacja jedynie do wąskiego grona sąsiadów, przez co algorytm zbiega do rozwiązania wolniej. Zwiększa to szansę na dokładniejsze przeszukanie obszaru, ale zmniejsza precyzję ostatecznego wyniku. Topologie mogą być również podzielone na statyczne i dynamiczne. Pierwsze utrzymują swoją strukturę przez cały czas wykonywania algorytmu, drugie zmieniają swoje właściwości wraz z postępem obliczeń. Najczęściej topologią dynamiczną populacja rozpoczyna od małej liczby sąsiadów żeby w trakcie wykonywania algorytmu ich liczba stopniowo wzrastała (Poli, James Kennedy i Blackwell 2007). Warto podkreślić, że w klasycznej wersji algorytmu położenie cząstki w przestrzeni  $\mathbf{X}$  nie ma wpływu na początkowy wybór sąsiedztwa zgodnie z założoną topologią.

Jedyną topografią z rodziny gbest jest topografia pełnego grafu (Rys. 4.1b). Każda cząstka może przekazywać informację o najlepszym położeniu ze wszystkimi innymi. W tym wariantie wektor  $\mathbf{n}_i$  w formule (4.3) jest równy dla wszystkich cząstek i odpowiada najlepszemu dotychczasowemu położeniu całej populacji. Z kolei pierwszą i najprostszą topografią lbest jest topografia pierścieniowa (Rys. 4.1a). Komunikacja jest zapewniona jedynie pomiędzy najbliższymi sąsiadami: cząstka o indeksie  $i$  wymienia informację o najlepszym położeniu jedynie z cząstkom o indeksach  $i - 1$  i  $i + 1$ . Trzecia wymieniona topografia von Neumanna należy również do rodziny lbest, ale reprezentuje kompromis pomiędzy przypadkami skrajnymi: topografią pierścieniową i pełnego grafu (Rys. 4.1c). Pozwala ona na wymianę informacji z czterema sąsiadami. (James Kennedy i Mendes 2002) wykonali szereg testów obliczeniowych dla zróżnicowanych problemów dla wielu topologii. W tym teście topografia von Neumanna otrzymała najwyższą sumaryczną notę i jest opisana jako uniwersalna. Obszerne porównanie topologii wraz z historycznym opisem i powstania oraz efektywnością zostało zawarte w pracy (Blackwell i James Kennedy 2019).

## Generacja populacji

Początkowa populacja roju jest rozmieszczana w  $D$ -wymiarowej przestrzeni rozwiązań  $\mathbf{X}$ . Przyjęcie właściwej liczby cząstek nie jest kwestią ściśle określona. Piotrowski, Napiorkowski i Piotrowska 2020 przeprowadzili obszerne studium dotyczące przyjęcia wstępnej liczby populacji. Posłużyli się oni kilkudziesięcioma rzeczywistymi i testowymi problemami optymalizacji i ocenili 8 różnych wersji algorytmu. Na bazie analizy statystycznej stwierdzono, że klasycznie zalecane przyjęcie od 20 do 50 (Kennedy i Eberhart 1995; Liang i in. 2006; W.-N. Chen i in. 2012; Harrison, Engelbrecht i Ombuki-Berman 2018) cząstek jest w przypadku wielu rzeczywistych problemów niewystarczające. Taka liczba sprawdza się jedynie w przypadku stosunkowo prostych problemów unimodalnych. Dla złożonych zagadnień i wersji algorytmu opisanej w niniejszej pracy autorzy podali poprawny zakres od 70 do 500 cząstek. Jednocześnie sformułowano również generalną wskazówkę, że dla wszystkich wariantów algorytmu bezpiecznym rozwiązaniem jest przyjęcie od 70 do 100 cząstek. Liczebność populacji w trakcie całej analizy jest zazwyczaj stała, chociaż istnieją modyfikacje algorytmu, które pozwalają na dodawanie cząstek w trakcie działania algorytmu.



Rysunek 4.2: Przykłady rozkładu wygenerowanych populacji cząstek: (a)-(c) generacja losowa, (d) generacja z wykorzystaniem sekwencji Haltona

Rozwiązania realnych zagadnień inżynierskich zazwyczaj cechują pewne ograniczenia, które przekładają się na dopuszczalny zakres zmiennych projektowych. Jeżeli

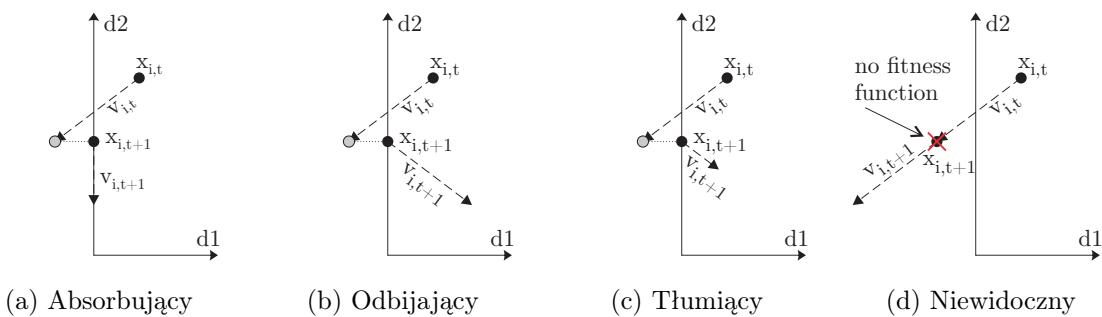
wektor minimalnych wartości dopuszczalnych zmiennych projektowych zebrany zostanie w wektorze  $x_{min}$ , a maksymalnych jako  $x_{max}$  to możliwe jest określenie hiperprostokąta o wierzchołkach  $(x_{min}, x_{max})$ . Początkowe położenie częstek odbywa się więc przez dobranie współrzędnych wektorów rozwiązań  $x_i$ , tak aby wszystkie częstki znalazły się wewnątrz hiperprostokąta  $(x_{min}, x_{max})$ . Pozycje początkowe mogą być wybierane przez użytkownika bądź losowane wewnątrz przestrzeni dopuszczalnych rozwiązań. Zakładając niewielką populację roju, istnieje spora szansa, że losowanie o jednorodnym rozkładzie nie zagwarantuje równomiernego pokrycia przestrzeni. Z tego powodu do generacji początkowej populacji niekiedy stosowane są deterministyczne algorytmy, które pozwalają uzyskać rozkład do złudzenia przypominający losowy, ale zapewniające jednocześnie równomierną dystrybucję w przestrzeni (Saliby i Pacheco 2002). Jedną z takich metod jest wykorzystanie sekwencji Haltona (Tesch 2016). Na rysunku 4.2 pokazano przykłady rozkładu 36 początkowych częstek w przestrzeni dwuwymiarowej. Trzykrotnie wylosowano populację za pomocą generatora pseudolosowego (4.2a–4.2c). Dla kontrastu przedstawiono punkty wygenerowane za pomocą sekwencji Haltona w takim samym zbiorze 4.2d. W każdej z losowo wybranych populacji widoczne są obszary, które są gęsto pokryte i takie, w którym nie znajduje się żadna częstka. Przy wykorzystaniu sekwencji Haltona przestrzeń jest pokryta znacznie bardziej równomiernie. Problem staje się tym bardziej istotny kiedy dotyczy małych populacji. Kiedy wyznaczenie funkcji celu jest bardzo kosztowne czasowo, a zadanie wielowymiarowe wykorzystanie sekwencji Haltona zwiększa pewność równomiernego rozkładu w całej przestrzeni.

### Warunki brzegowe

Początkowa populacja roju jest losowana wewnątrz przestrzeni dopuszczalnych rozwiązań. Następnie wykorzystana jest inteligencja roju do przeszukania przestrzeni w celu znalezienia globalnego ekstremum. W trakcie kolejnych iteracji położenie częstek zmieniane jest według wzorów (4.3) i (4.2). W trakcie obliczeń, w oryginalnej wersji algorytmu użytkownik nie ingeruje w proces przemieszczania się częstek. Istnieje więc możliwość że wyznaczona prędkość wyprowadzi częstkę poza obszar dopuszczalnych rozwiązań. Jest to szczególnie prawdopodobne kiedy ekstremum globalne znajduje się w pobliżu granicy rozwiązań dopuszczalnych (S. Xu i Rahmat-Samii 2007). Kiedy częstka wyjdzie poza zakres dopuszczalnych rozwiązań jej wartość jest nieistotna (błędna) dla projektanta i nie powinna wpływać negatywnie na wynik końcowy. Jednym z rozwiązań jest obciążenie takiej częstki karą. Do funkcji celu dodawana jest wartość, która drastycznie oddali wynik od najlepszego rezultatu (dla minimalizacji zwiększenie wyniku, a dla maksymalizacji pomniejszenie). Aby zniwelować efekt ucieczki z obszaru dopuszczalnego zastosowana może być prędkość maksymalna  $V_{max}$ , połączona ze współczynnikiem zaciskania (Russell Eberhart i Y. Shi 2001). Zalecana prędkość maksymalna może być powiązana z rozpiętością zakresu zmiennych projektowych  $V_{max} = X_{max} - X_{min}$ . Drugim stosowanym zabiegiem jest zdefiniowanie warunków brzegowych. Modyfikują one parametry częstki (położenie lub prędkość) jeżeli znajdzie się ona poza obszarem dopuszczalnych rozwiązań. W literaturze spotykane są cztery podstawowe rodzaje warunków brzegowych: absorbujący (*eng. absorbing wall*), odbijający (*eng. reflecting wall*), tłumiący (*eng. damping wall*) i niewidoczny (*eng. invisible wall*) (Robinson i Rahmat-Samii 2004; T. Huang i Mohan 2005). Efekt poszczególnych warunków brzegowych przy przekroczeniu przez częstkę granicy danego wymiaru jest następujący:

- absorbujący - cząstka jest zatrzymywana na granicy, a składowa wektora prędkości w danym wymiarze jest zerowana,
- odbijający - cząstka jest zatrzymywana na granicy, a znak składowej prędkości w danym wymiarze jest odwracany,
- tłumiący - cząstka jest zatrzymywana na granicy, a znak składowej prędkości w danym wymiarze jest odwracany i pomniejszany przez losowy mnożnik z zakresu  $(0, 1)$ ,
- niewidoczny - cząstka nie jest zatrzymywana na granicy, a wektor prędkości nie zmienia swojej definicji. Wartość funkcji celu nie jest wyznaczana.

Na rysunku pokazano efekt oddziaływania na cząstkę każdego z warunków brzegowych w przestrzeni 2D o zmiennych projektowych  $d_1$  i  $d_2$ . W swojej pracy, (S. Xu i Rahmat-Samii 2007) zbadali dodatkowe warianty warunków opierające się powyższych założeniach, ale bez wymuszonej zmiany położenia cząstki, jedynie modyfikując prędkość. Autorzy podanych prac zgodnie określają warunek tłumiący jako najbardziej uniwersalny, a warunek niewidoczny jako najwydajniejszy w większości problemów.



Rysunek 4.3: Rodzaje warunków brzegowych wpływające na zachowanie cząstki wychodzącej poza zakres rozwiązań dopuszczalnych

## Warunki zakończenia

Algorytm PSO z każdą kolejną iteracją aktualizuje położenie cząstek i pamięć roju. Warunek zakończenia przeszukiwania przestrzeni może odbyć się w różny sposób. Najprostszą metodą jest określenie maksymalnej liczby aktualizacji roju, po której poszukiwanie zostanie zakończone. W tym przypadku na wstępie wiadomym jest ile iteracji zostanie wykonanych i przy znajomości czasu potrzebnego na oszacowanie funkcji celu możliwe jest określenie długości całego procesu optymalizacji. Podstawową wadą tego kryterium jest, że nie odnosi się w żaden sposób do jakości rozwiązania w ciągu trwania obliczeń. (Zielinski i Laur 2007) przedstawili zestaw innych kryteriów, które uwzględniają zachowanie roju w trakcie poszukiwań. Wyróżniono następujące kryteria mogące wpływać na warunek zakończenie algorytmu:

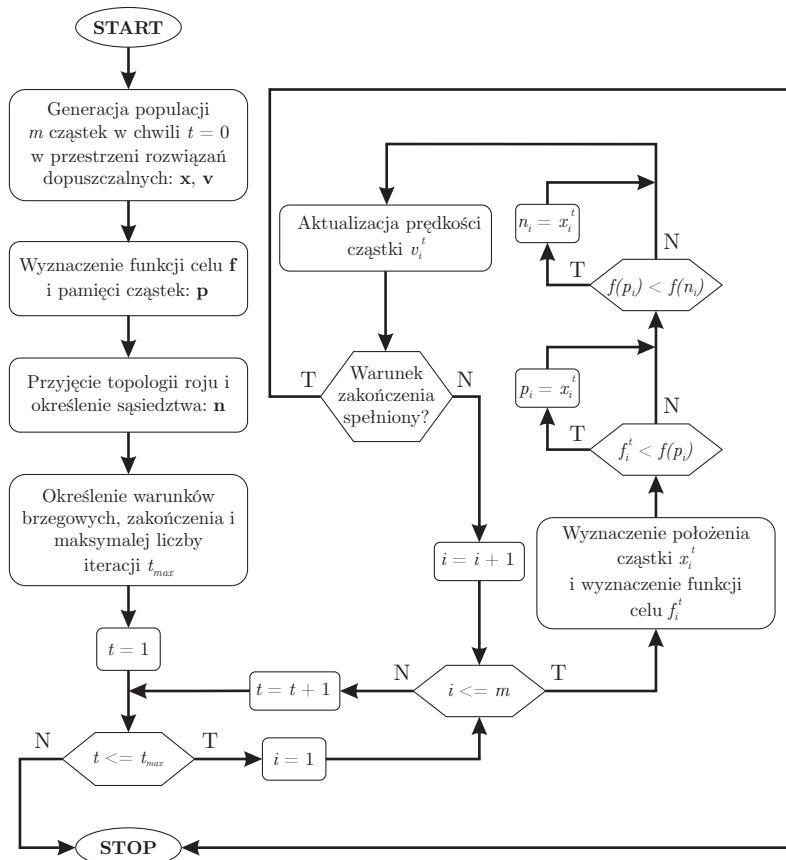
- kryterium postępu - optymalizacja jest zatrzymana kiedy w określonej liczbie kolejnych iteracji nie nastąpi znaczące polepszenie ekstremum globalnego,
- kryterium ruchu - optymalizacja jest zatrzymywana kiedy położenie bieżącego ekstremum globalnego nie zmienia się istotnie w określonej liczbie kolejnych iteracji,

- kryterium dystrybucji populacji - optymalizacja jest zatrzymywana kiedy cząstki zgrupują się w jednym miejscu. Dystrybucja może być mierzona m. in. przez odchylenie standardowe położenia populacji, maksymalny dystans między cząstkami lub rozmiar roju mierzony przez długość boków hiperprostokąta, w którym w całości się mieści.
- kryterium prędkości - optymalizacja jest zatrzymywana kiedy prędkość cząstek roju spadnie poniżej wartości minimalnej i nie wzrośnie przez określoną liczbę kolejnych iteracji.

Wszystkie powyższe warunki mogą być łączone i użyte wedle potrzeb w zależności od specyfiki problemu optymalizacji. Banach 2017 określił kryterium prędkości jako najbardziej uniwersalne, ponieważ nie dotyczy położenia cząstek roju i nie zależy od rozwiązywanego problemu optymalizacji. Uzasadnił, że nie wymaga ono znajomości wartości progowych najczęściej nieznanej funkcji celu oraz nie wymaga by wszystkie cząstki zbiegły w tym samym miejscu.

### Schemat blokowy algorytmu

Podsumowując, algorytm podstawowej wersji metody optymalizacji rojem cząstek (PSO) przedstawiono na rysunku 4.4.



Rysunek 4.4: Podstawowy algorytm optymalizacji jednokryterialnej metodą roju cząstek PSO. Przypadek minimalizacji

## 4.4 Zastosowania optymalizacji algorytmem PSO

W literaturze udokumentowano wiele zastosowań algorytmu PSO przy rozwiązywaniu rzeczywistych problemów optymalizacji. Dotyczą one różnych dziedzin nauki: inżynierii, informatyki i telekomunikacji, ekonomii czy medycyny. Przeglądowe prace podsumowujące prace związane z PSO takie jak: Atyabi i Samadzadegan 2011; Coello Coello i Reyes-Sierra 2006; Lalwani i in. 2013 wskazują ciągły wzrost liczby publikacji traktujących o wykorzystaniu algorytmów PSO. Nie sposób przytoczyć publikacje ze wszystkich wspomnianych dziedzin, dlatego wymieniono kilka dotyczących problemów inżynierii lądowej. J. E. Hughes i in. 2018 zastosowali PSO w procesie kalibracji urządzenia kontrolującego odpowiedź dynamiczną mostu autostradowego. Seyedpoor 2011; Kang, J.-j. J. Li i Q. Xu 2012; Wei, Liu i Lu 2018 wykorzystali optymalizację rojem częstek przy detekcji uszkodzeń konstrukcji. Ciekawe zastosowanie algorytmu przedstawili Tran-Ngoc i in. 2018; Qin i in. 2018, stosując algorytm optymalizacji przy kalibracji modelu numerycznego mostów, na podstawie badań in situ. Z kolei Dan, Y. Chen i B. Xu 2015 użyli PSO do identyfikacji siły w wantach mostu podwieszonego, przy braku możliwości stosowania klasycznych rozwiązań z uwagi na dołączone tłumiki.

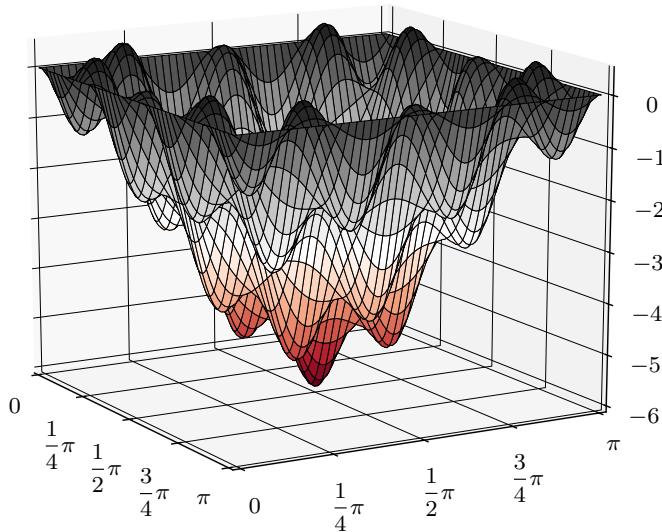
### 4.4.1 Przykład teoretyczny

W celu weryfikacji stosowanej metody przygotowano przykład teoretyczny. Zastosowano wariant minimalizacji funkcji celu za pomocą metody PSO. Zaimplementowano algorytm PSO w języku Python. Do testu wybrano funkcję multimodalną przedstawioną w pracy (Tesch 2016) i daną wzorem:

$$f(x, y) = -5 \sin x \sin y - 5 \sin 7x \sin 7y \quad (4.4)$$

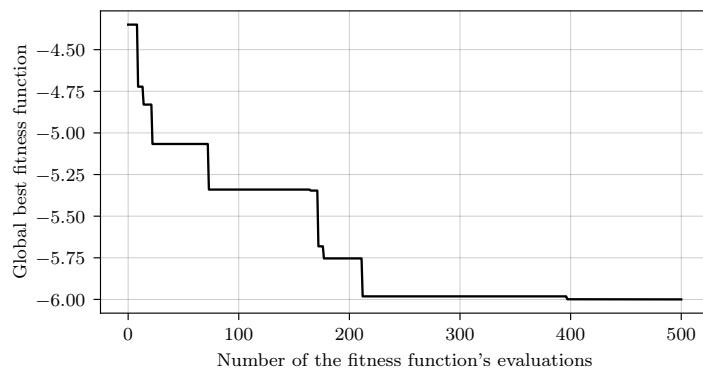
gdzie  $x, y$  tworzą wektor zmiennych projektowych, a wartość funkcji  $f(x, y)$  jest funkcją celu. Funkcję zwizualizowano w przestrzeni 3D na rysunku 4.5. Podobnie jak w pracy źródłowej przedział dopuszczalny dla każdej zmiennej projektowej to  $[0, \pi]$ . Wartość minimalna funkcji w tej dziedzinie jest znana i wynosi  $f_{\min} = -6$ , dla punktu  $(x, y) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

Wygenerowano populację złożoną z 20 częstek. Do generacji użyto wariant korzystający z sekwencji Haltona. Z uwagi na multimodalność funkcji celu zastosowano topologię z rodziny lbest - von Neumanna. Warunki brzegowe przyjęto typu niewidocznego. Parametry wektora prędkości (4.3) ustalono domyślnie równe:  $\theta = 0.7968$ ,  $\alpha = 1.4962$  oraz  $\beta = 1.4962$ . Zatrzymanie algorytmu nastąpiło po wykonaniu założonej liczby aktualizacji całego roju równej 25. W konsekwencji całkowita liczba ewaluacji funkcji celu przez częstki wynosi  $25 \cdot 20 = 500$ . Na rysunku 4.6 zaprezentowano diagram poprawy najlepszego rozwiązania znalezionego przez rój. Na rysunku 4.7 pokazano 6 etapów z procesu poszukiwania przez rój minimum funkcji. Ostateczna znaleziona wartość minimum globalnego wynosi  $f_{\min, 25} = -5.99$ . Wartość ta została osiągnięta po około 400 ewaluacjach funkcji i jest bardzo bliska znanemu minimum globalnemu. Warto nadmienić, że już po 215 ewaluacjach odnaleziona zostało rozwiązanie o funkcji celu wynoszącej  $f = -5.98$ . Wizualizacja położenia częstek roju w kolejnych iteracjach pokazuje, że wraz z postępem algorytmu, częstki z rozproszonego układu skupiają się konsekwentnie wokół lidera. Topologia von Neumanna spowalnia ten proces. Opóźnia to znalezienie precyzyjnego rozwiązania, ale obszar

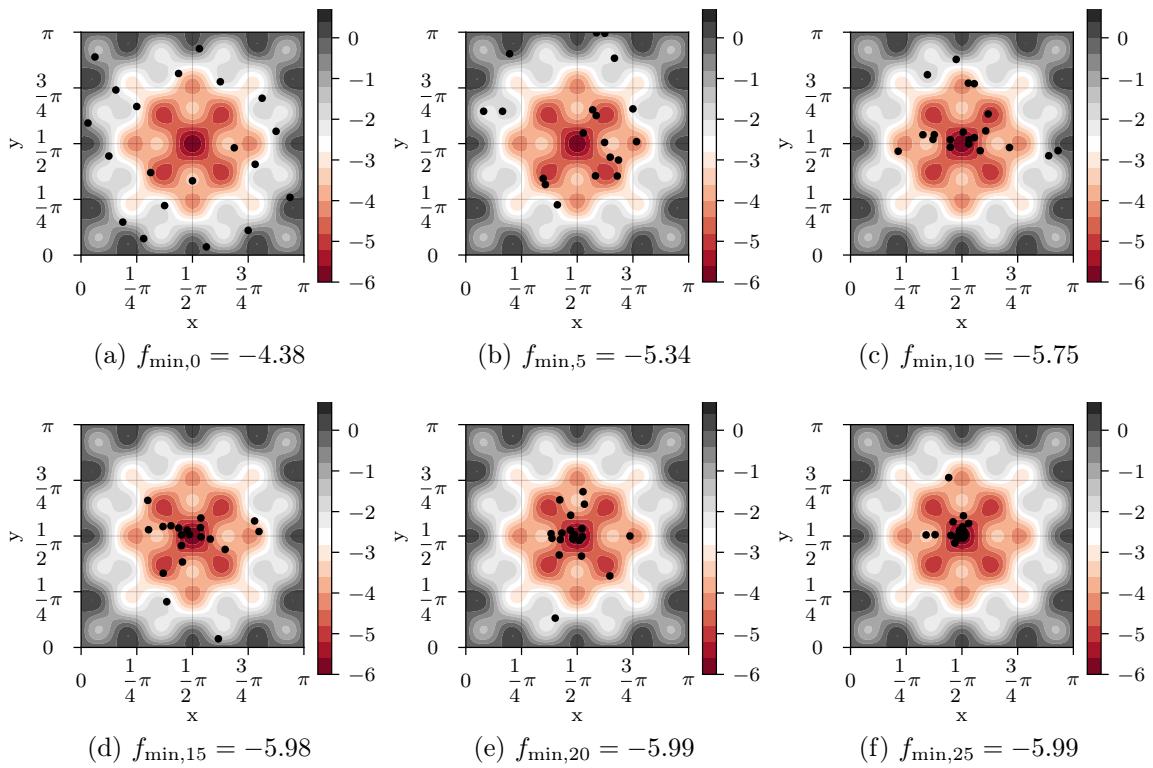


Rysunek 4.5: Wizualizacja funkcji testowej w przestrzeni trójwymiarowej

dopuszczalny jest przeszukany dokładniej. Na kolejnych grafikach widać, że pomimo znalezienia punktu bliskiego teoretycznego minimum globalnego (Rys. 4.7b) wciąż pozostają części, które eksplorują pozostały obszar. Na podstawie powyższego testu uznano, że zaimplementowany algorytm PSO działa poprawnie.



Rysunek 4.6: Diagram postępu roju cząstek w poszukiwaniu minimum globalnego funkcji testowej



Rysunek 4.7: Etapy rozwiązywania testowego problemu optymalizacji dwuwymiarowej za pomocą roju cząstek. Minimum globalne znalezione przez rój oznaczono przez  $f_{\min,t}$ , gdzie indeks  $t$  oznacza liczbę pełnych aktualizacji położenia roju. Za pomocą izomapy pokazano wartość funkcji celu na płaszczyźnie

## 4.5 Optymalizacja wielokryterialna

Jak wspomniano we wstępie rozdziału, rzeczywiste problemy inżynierskie rzadko sprowadzają się do jednego kryterium, którego optymalizacja dostarczy bezkompromisowo jedyne, idealne rozwiązanie. Najczęściej występuje kilka istotnych kryteriów stojących ze sobą w kontrze, które nie osiągają jednocześnie maksimum lub minimum dla tych samych wartości zmiennych projektowych. Przykładem dla konstrukcji budowlanych może być koszt i bezpieczeństwo. Pierwsze z kryteriów zazwyczaj jest minimalizowane, a drugie maksymalizowane. Niestety występuje między nimi konflikt. Z reguły prawidłowe zużycie większej ilości materiału zwiększa koszt i jednocześnie bezpieczeństwo. Przeciwnie mniejszy koszt poniesiony na budowę zmniejsza bezpieczeństwa. Osiągnięcie jednocześnie minimalnego kosztu i maksymalnego bezpieczeństwa jest więc niemożliwe i trzeba zgodzić się kompromis. Jedna z metod radzenia sobie w takich przypadkach została już opisana i polega na liniowej kombinacji kryteriów, sprowadzając problem optymalizacji de facto do jednej funkcji celu. Wadą tego rozwiązania jest konieczność ustalenia skali ważności poszczególnych kryteriów jeszcze przed rozpoczęciem optymalizacji. Poza koniecznością ustalenia wag składników sumy, niekiedy trudno ustalić związki między zmiennymi projektowymi i kryteriami, a następnie sprowadzić wszystkie kryteria do jednego porównawczego, jakim jest na przykład koszt wykonania lub ilość materiału (Szymczak 1995). Inną metodą jest rozwiązywanie problemu optymalizacji jako wielokryterialnego. Polega ona na jednoczesnej minimalizacji lub maksymalizacji więcej niż jednej funkcji celu. W

konsekwencji zamiast pojedynczego optymalnego rozwiązania - jak to ma miejsce w przypadku optymalizacji jednokryterialnej - otrzymywany jest zestaw wielu rozwiązań. Każde z tych rozwiązań jest optymalne, ponieważ nie jest możliwe polepszenie jednego z kryteriów, bez osłabienia pozostałych. Jest to tak zwany zbiór Pareto, zawierający rozwiązania niezdominowane. Do wytłumaczenia powyższego zdania niezbędne jest przytoczenie kilku formalnych definicji (Coello Coello i Reyes-Sierra 2006).

Rozpatrzmy problem minimalizacji zestawu  $k$  funkcji celu  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  zależnych od  $D$ -wymiarowego wektora zmiennych projektowych  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})] \quad f_i : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, k \quad (4.5)$$

Dodatkowo niech zbiór  $\mathcal{N}$  jest zbiorem liczb naturalnych takich, że  $\mathcal{N} = [1, \dots, D]$ .

### Definicja 1 (Dominacja Pareto)

Niech dwa wektory  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  są zdefiniowane w przestrzeni  $\mathbb{R}^D$ . W przypadku minimalizacji, wektor  $\mathbf{x}_1$  dominuje nad wektorem  $\mathbf{x}_2$ , jeżeli każdy element  $x_{1,i}$  jest nie większy niż  $x_{2,i}$  dla  $i \in \mathcal{N}$  i istnieje taki element  $x_{1,j}$ , że  $x_{1,j}$  jest mniejszy niż  $x_{2,j}$  dla  $j \in \mathcal{N}$ . Dominację wektora  $\mathbf{x}_1$  nad  $\mathbf{x}_2$  oznacza się przez  $\mathbf{x}_1 \prec \mathbf{x}_2$ .

$$\forall_{i \in \mathcal{N}} x_{1,i} \leqslant x_{2,i} \wedge \exists_{j \in \mathcal{N}} x_{1,j} < x_{2,j} \quad (4.6)$$

Należy jednak nadmienić, że w kontekście optymalizacji wielokryterialnej, pojęcie dominacji dotyczy przestrzeni funkcji celu, a nie przestrzeni rozwiązań. Optymalny zbiór Pareto zawiera wszystkie rozwiązania  $\mathbf{x}$  w przestrzeni  $\mathbb{R}^D$ , dla których nie istnieje inny punkt dominujący w przestrzeni funkcji celu  $\mathbb{R}^k$ . Graficzną prezentację dominacji w sensie Pareto i Frontu Pareto przedstawiono na rysunku 4.8 dla przestrzeni dwóch funkcji celu.

### Definicja 2 (Zbiór Pareto)

Zbiór Pareto  $\mathcal{PS}$  rozwiązania, jest zbiorem punktów  $\mathbf{x}$ , dla których wśród zestawu rozwiązań dopuszczalnych  $\Omega$  nie istnieje inny punkt dominujący ze względu na wartość funkcji  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ .

$$\mathcal{PS} = \left\{ \mathbf{x}_j \in \Omega : \forall_{x \in \Omega} \left( \exists_{i \in \mathcal{N}} f_i(\mathbf{x}) > f_i(\mathbf{x}_j) \vee \forall_{i \in \mathcal{N}} f_i(\mathbf{x}) \geqslant f_i(\mathbf{x}_j) \right) \right\} \quad (4.7)$$

### Definicja 3 (Front Pareto)

Front Pareto  $\mathcal{PF}$  jest zbiorem punktów  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  w przestrzeni funkcji celu, wyznaczonych dla punktów  $\mathbf{x}$  należących do Zbioru Pareto  $\mathcal{PS}$ .

$$\mathcal{PF} = \left\{ \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^k : \mathbf{x} \in \mathcal{PS} \right\} \quad (4.8)$$

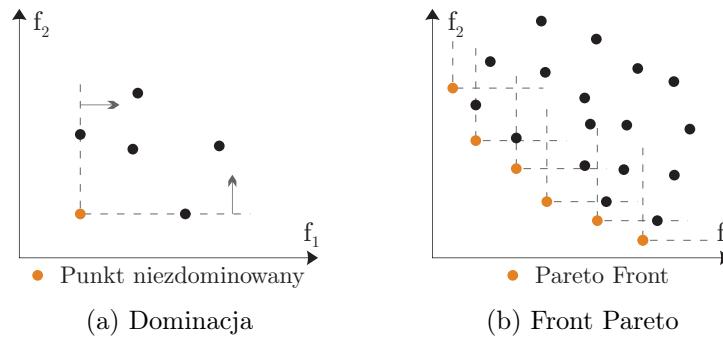
W literaturze znaleźć można również definicję  $\epsilon$ -dominacji w sensie Pareto (Zuluaga, Krause i Püschel 2016). Polega ona na rozluźnieniu warunku klasycznej dominacji przez dodatnie tolerancji. Akceptowalne różnice zdefiniowane są w wektorze tolerancji  $\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_k]$ , gdzie  $\epsilon_i > 0$  dla  $i = 1, 2, \dots, k$ .

### Definicja 4 ( $\epsilon$ -dominacja Pareto)

Niech dwa wektory  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  są zdefiniowane w przestrzeni  $\mathbb{R}^D$ . W przypadku minimalizacji, wektor  $\mathbf{x}_1$   $\epsilon$ -dominuje nad wektorem  $\mathbf{x}_2$ , jeżeli każdy element  $x_{1,i}$  pomniejszony

o tolerancję  $\epsilon_i$  jest nie większy niż  $x_{2,i}$  dla  $i \in \mathcal{N}$  i istnieje taki element  $x_{1,j}$ , że  $x_{1,j} - \epsilon_j$  jest mniejszy niż  $x_{2,j}$  dla  $j \in \mathcal{N}$ .  $\epsilon$ -dominację wektora  $\mathbf{x}_1$  nad  $\mathbf{x}_2$  oznacza się przez  $\mathbf{x}_1 \prec_\epsilon \mathbf{x}_2$ .

$$\bigvee_{i \in \mathcal{N}} x_{1,i} - \epsilon_i \leqslant x_{2,i} \wedge \bigvee_{j \in \mathcal{N}} x_{1,j} - \epsilon_j < x_{2,j} \quad (4.9)$$



Rysunek 4.8: Wizualizacja definicji dominacji i Frontu Pareto

Przyjmując powyższe definicje optymalizacja wielokryterialna sprowadza się więc do znalezienia wszystkich rozwiązań należących do Zbioru Pareto. W ogólności, rozwiązaniem problemów optymalizacji wielokryterialnej może być Front Pareto składający się z ogromnej lub nieskończonej liczby punktów. Algorytmy służące optymalizacji wielokryterialnej działają najczęściej iteracyjnie - jednym z przykładów będzie zastosowany w pracy zmodyfikowany algorytm PSO. Konsekwencją tego, w kolejnych iteracjach wyznaczane jest jedynie przybliżenie Frontu Pareto, reprezentowane przez skończony zestaw punktów niezdominowanych. Większość algorytmów wyposażonych jest w Archiwum, w którym przechowywane jest aktualne przybliżenie Frontu Pareto. Archiwum to ma najczęściej stałą, maksymalną objętość (Banach 2017). W trakcie działania algorytmu wyznaczane są wartości funkcji celu dla nowo wskazanych rozwiązań. Za wskazywanie kandydatów odpowiedzialny jest osobny mechanizm na przykład oparty na PSO. Następnie algorytm sprawdza wzajemną dominację między elementami Archiwum i nowym rozwiązaniem. W przypadku lepszego przybliżenia Frontu Pareto przez nowy punkt, archiwum jest aktualizowane. Jeśli zachodzi taka sytuacja, rozwiązania zdominowane przez nowy wynik są odrzucane, a nowy rezultat jest dodawany do Archiwum. Algorytm powinien gwarantować coraz lepszą jakość rozwiązania. W porównaniu do optymalizacji jednokryterialnej, określenie jakości rozwiązania optymalizacji wielokryterialnej jest znacznie bardziej złożone. Zitzler, Deb i Thiele 2000 podają następujące cele jakie powinny być postawione w problemie optymalizacji wielokryterialnej:

- odległość pomiędzy wyznaczonym rozwiązaniem przybliżonym, a rzeczywistym Frontem Pareto powinna być jak najmniejsza,
- dystrybucja wyznaczonych punktów Frontu Pareto powinna być odpowiednia - najczęściej równomierna,
- liczba wyznaczonych punktów Frontu Pareto powinna być jak największa.

Banach 2017 wskazuje, że warto by algorytm optymalizacji zwracał również uwagę na dobre rozmieszczenie rozwiązań w Zbiorze Pareto, a nie jedynie Frontie Pareto. Wynika to z tego, że wartość funkcji celu może być identyczna dla bardzo

oddalonych od siebie rozwiązań w przestrzeni rozwiązań. Taka sytuacja możliwa jest w przypadku okresowych funkcji celu.

Zwięzłe podsumowanie prac z zakresu wykorzystania optymalizacji wielokryterialnej metodami metaheurystycznymi w problemach strukturalnych przedstawili (Zavala i in. 2014). W niniejszej pracy zawarto jedynie podstawowe informacje dotyczące jednego z podejść do rozwiązywania problemów optymalizacji wielokryterialnej. Szerszy przegląd i porównanie metod dostępne jest w literaturze przedmiotu: (Miettinen 1999; Zitzler, Deb i Thiele 2000; Elbeltagi, Hegazy i Grierson 2005; Abido 2006; Coello, Lamont i Van Veldhuizen 2007; Lalwani i in. 2013; Zaman i in. 2019).

## 4.6 Optymalizacja wielokryterialna rojem częstek

Algorytm służący optymalizacji wielokryterialnej rojem częstek (*eng. Multi-Objective Particle Swarm Optimization (MOPSO)*) jest modyfikacją oryginalnego algorytmu PSO. Pierwsza publikacja przedstawiająca ten zamysł ukazała się w 1999 roku (Moore i Chapman 1999). Następnie nastąpił gwałtowny przyrost prac wprowadzających nowe strategie wyboru liderów, topologie, systemy sprawdzania jakości rozwiązania lub modyfikujące istniejące elementy algorytmu. Szczegółowe podsumowanie prac nad wielokryterialną wersją algorytmu PSO do 2006 przedstawił (Coello Coello i Reyes-Sierra 2006). Wedle najlepszej wiedzy autora Lalwani i in. 2013 prezentują najnowszy przegląd literatury dotyczący wielokryterialnej optymalizacji PSO. Przedstawili również szereg rzeczywistych problemów, które zostały rozwiązanie za pomocą metody MOPSO. Z punktu widzenia algorytmu PSO, występują dwa dodatkowe aspekty, które są wyzwaniem w przypadku wersji optymalizacji wielokryterialnej (Pulido 2005):

- wybór i aktualizacja lidera roju spośród wielu kandydatów,
- wskazanie nowych rozwiązań aby zachować dobrą dystrybucję Frontu Pareto.

Wybór lidera roju nie jest rzeczą oczywistą w kontekście wielokryterialnego algorytmu PSO i musi ulec modyfikacji. Wynika to z większej od jedności liczby równorzędnych optymalnych rozwiązań. Podstawowym i najprostszym podejściem przy doborze lidera roju jest wybór spośród wszystkich niezdominowanych rozwiązań. Jednakże zupełnie losowy wybór lidera z zestawu niezdominowanych rozwiązań może prowadzić do utraty odpowiedniej dystrybucji rozwiązań w Froncie Pareto. Istnieje wiele podejść pozwalających na ocenę jakości rozwiązania i w konsekwencji jego wyboru jako lidera. Popularnym jest ocena zagęszczenia rozwiązań niezdominowanych w przestrzeni funkcji celu. Aby zachować równomierność Frontu Pareto predestynowane do pozycji lidera są częstki, występujące w małym zagęszczeniu. Wśród najpopularniejszych metod, zaproponowano pomiar zagęszczenia wprost przez ocenę odległości między sąsiednimi częstkami (Deb, Pratap i in. 2002). Polega on na posortowaniu wszystkich rozwiązań Frontu Pareto osobno względem poszczególnych funkcji celu. Następnie dla każdej funkcji celu tworzona jest lista odległości pomiędzy sąsiadami danej częstki. Dla każdej częstki, sumowane są wyliczone znormalizowane odległości między sąsiadami. Ostatnie kandydatami na lidera są częstki charakteryzujące się największą sumą odległości, jako te, w których sąsiedztwo jest najmniej zagęszczone. Inną popularną metodą jest określenie zagęszczenia częstek

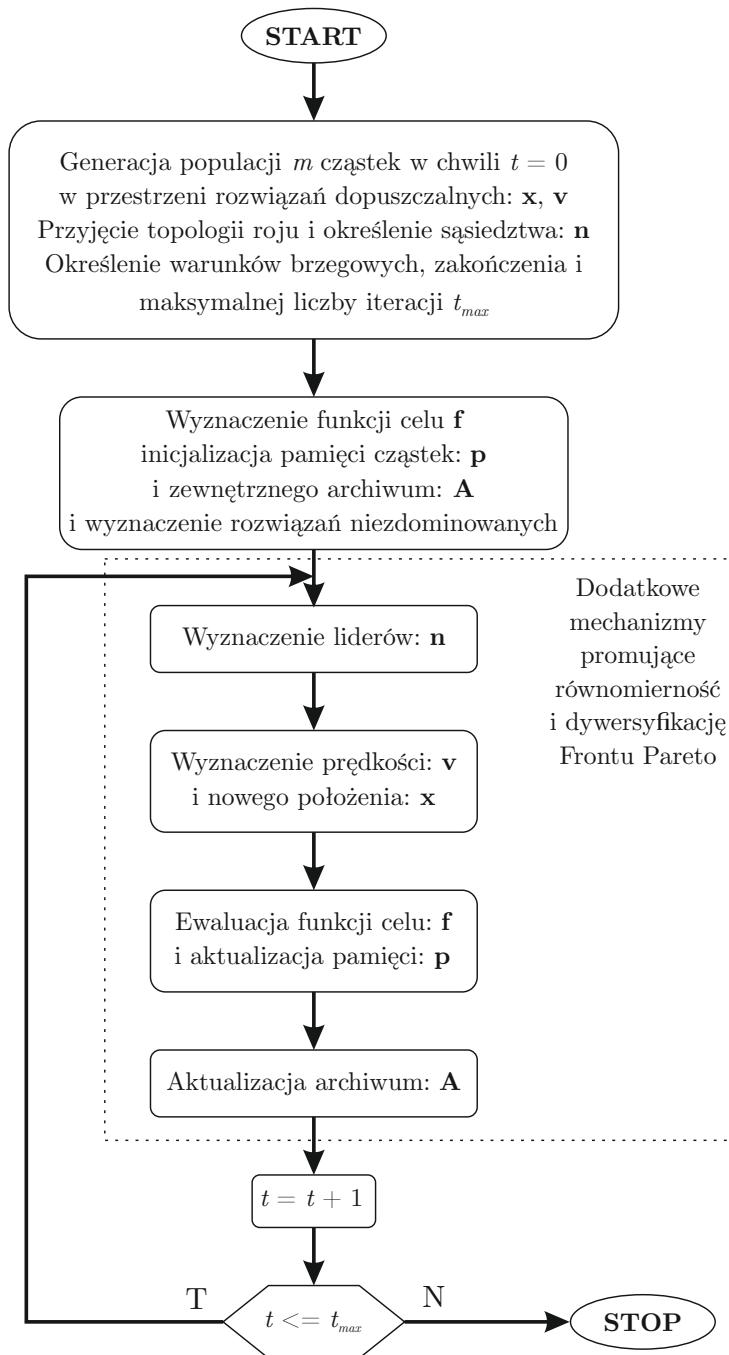
w przestrzeni przez funkcję rdzenia (Deb i David E Goldberg 1989). Istniejące rozwiązania zostały zebrane i szerzej opisane w pracy (Coello Coello i Reyes-Sierra 2006). Warto również zwrócić uwagę na wybór najlepszego położenia przechowywanego w pamięci cząstki. W odróżnieniu do algorytmu jednokryterialnego, nowy wynik może być nie tylko *lepszy* lub *gorszy*, ale również *nieokreślony*. Kiedy nowe położenie cząstki jest dominujące w sensie Pareto względem dotychczas zapamiętanego, następuje aktualizacja pamięci. Kiedy nowe położenie jest zdominowane przez zapamiętane, aktualizacja nie ma miejsca. W trzecim przypadku, kiedy żadne z rozwiązań nie dominuje drugiego, Coello Coello i Lechuga 2002 zaproponowali by wybrać losowo jedno z dwóch rozwiązań.

We ogólnym opisie podstaw optymalizacji wielokryterialnej nazwano zbiór przechowywanych rozwiązań niezdominowanych jako Archiwum. Ma ono za cel przechować niezdominowane rozwiązania w trakcie całego procesu optymalizacji i ostatecznie może służyć jako rezultat końcowy. Oczywistym rozwiązaniem jest przechowywanie wszystkich otrzymanych wyników niezdominowanych, aktualizując je w trakcie przebiegu algorytmu. Aktualizacja musi zapewnić uwzględnienie nowych niezdominowanych rozwiązań w archiwum i usunięcie tych, które zostały zdominowane przez nowe cząstki. Jednakże przechowywanie wszystkich wyników wiąże się z dużą złożonością obliczeniową aktualizacji. Aktualizacja musi być wykonywana po każdym przesunięciu wszystkich cząstek roju, a jej koszt rośnie kwadratowo wraz ze wzrostem liczliwości roju i liniowo z liczebnością zmiennych decyzyjnych. Jak zasugerowano wcześniej, z tego względu archiwum najczęściej jest ograniczane do stałej, maksymalnej objętości (Coello, Lamont i Van Veldhuizen 2007). Przykładowe metody pozwalające na selekcję odrzucanych z archiwum elementów zostały opisane w (Zitzler i Thiele 1999; Knowles i Corne 2000). Istnieją również inne, mniej popularne metody utrzymania i rozwoju dobrze rozłożonych rozwiązań niezdominowanych. Niemniej wśród wszystkich najbardziej popularne jest stosowanie zewnętrznego archiwum. Opis pozostałych wykracza poza zakres tej pracy.

Wyborem nowych kandydatów w MOPSO zajmuje się oczywiście algorytm PSO. Jego potwierdzoną właściwością jest szybka zbieżność do optimum globalnego, co z reguły jest pożądaną cechą. Jednakże w przypadku optymalizacji wielokryterialnej niebezpieczne może być przedwczesne utknięcie roju w minimum lokalnym. Z tego względu stosowane są dodatkowe mechanizmy zwiększące dywersyfikację cząstek w przestrzeni. Pierwszy z nich został już wspomniany i polega na odpowiednim doborze liderów. Drugi jest oparty na określeniu cech algorytmu PSO, takich jak parametry prędkości oraz topologia roju, sprzyjających dywersyfikacji frontu Pareto i opóźnieniu zbiegania roju. Trzecia metoda oparta jest na zewnętrznej ingerencji w lot cząstki. Mechanizm ten nazywany jest turbulencją (Fieldsend i Singh b.d.) i jest pewnego rodzaju odzwierciedleniem mutacji w algorytmach genetycznych. W ramach turbulencji do wzoru (4.3) dodawany jest składnik zupełnie losowy, niezależny od wcześniejszej trajektorii lotu cząstki. Takie działanie potrafi wyrwać zastały w minimum lokalny rój. Jeśli cząstka ulegająca turbulencji znajdzie w nowym położeniu lepsze rozwiązanie to zachęci resztę roju do podążania za nią. Dodatkowo, cały proces przeszukiwania przestrzeni z reguły odbywa się szybciej (Stacey, Jancic i Grundy 2003).

### Schemat blokowy algorytmu MOPSO

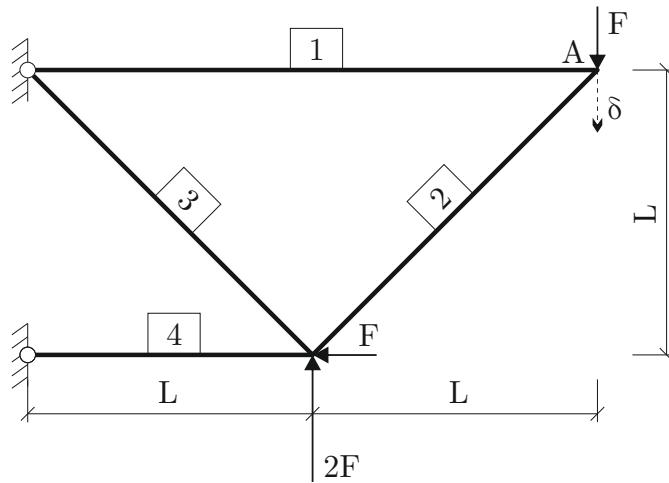
Na rysunku 4.9 pokazano algorytm MOPSO stworzony na podstawie pracy (Coello Coello i Lechuga 2002). Jest to jedna z pierwszych prac, gdzie autorzy dokonali próby dostosowania algorytmu PSO do rozwiązyania problemów wielokryterialnych. Jednakże rozważając kolejne prace powstające na temat algorytmu MOPSO, przedstawiony algorytm jest najpopularniejszą bazą do nieskończonych modyfikacji. Można więc wnioskować, że struktura algorytmu nie straciła na aktualności co świadczy o jej uniwersalności.



Rysunek 4.9: Bazowy algorytm wielokryterialnej optymalizacji rojem częstek (MOPSO)

### 4.6.1 Przykład teoretyczny

Podobnie jak w przypadku wersji jednokryterialnej optymalizacji, wykonano przykład teoretyczny sprawdzający działanie zaimplementowanego algorytmu MOPSO. Jako wzorzec zaczerpnięto rozwiązanie problemu optymalizacji z pracy (Zavala i in. 2014). Przedmiotem optymalizacji jest kratownica, składająca się z czterech prętów i obciążona jak na rysunku 4.10. Kratownica jest opisana na siatce kwadratowej o boku  $L$ . Problem optymalizacji opisany jest przez dwie funkcje celu:  $f_1(\mathbf{x})$  - objętość materiału zastosowanego do budowy kratownicy i  $f_2(\mathbf{x})$  - przemieszczenie węzła A kratownicy pod obciążeniem zewnętrznym. Obie funkcje celu są minimalizowane. Wektor zmiennych projektowych stanowią pola przekrojów poszczególnych prętów  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]$ . Parametry systemu stanowią: długość  $L = 200$  cm, wartość obciążenia zewnętrznego  $F = 10$  kN, moduł sprężystości materiału  $E = 2 \cdot 10^5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$  oraz maksymalne naprężenia dopuszczalne  $\sigma = 10 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$ .



Rysunek 4.10

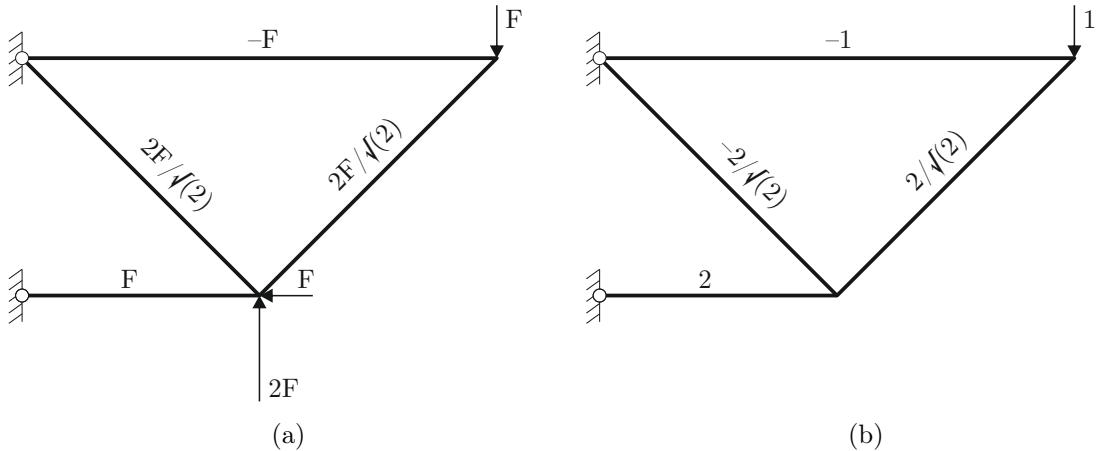
Wartość funkcji celu  $f_1$  została obliczona wprost przez iloczyn pól przekrojów i długości prętów:

$$f_1(\mathbf{x}) = L \cdot (2x_1 + \sqrt{2}x_2 + \sqrt{2}x_3 + x_4) \quad (4.10)$$

Aby uzależnić przemieszczenie węzła A od zmiennych projektowych posłużyono się zasadą prac wirtualnych. Wyznaczono rozkład sił wewnętrznych od obciążenia zewnętrznego i obciążenia wirtualnego w miejscu badania przemieszczeń (Rys. 4.11). Następnie wyznaczono wartość przemieszczeń zgodnie z wzorem (4.11).

$$\begin{aligned} f_2(\mathbf{x}) = \delta &= \sum_{i=1}^4 \frac{N_i \bar{N}_i}{EA_i} L_i = \frac{1}{E} \left( \frac{2FL}{x_1} + \frac{4\sqrt{2}FL}{2x_2} - \frac{4\sqrt{2}FL}{2x_3} + \frac{2FL}{x_4} \right) \\ &= \frac{2FL}{E} \left( \frac{1}{x_1} + \frac{\sqrt{2}}{x_2} - \frac{\sqrt{2}}{x_3} + \frac{1}{x_4} \right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Autorzy przykładu zaproponowali ograniczenie przestrzeni rozwiązań dopuszczalnych przez podanie dopuszczalnych maksymalnych i minimalnych naprężen w prętach. Po przekształceniach ograniczenia dla zmiennych projektowych podano nastę-



Rysunek 4.11: Wartości sił normalnych w prełach kratownicy: (a) od obciążen zewnętrznych, (b) od obciążenia wirtualnego

pujące:

$$\begin{aligned} \frac{F}{\sigma} &\leq x_1, x_4 \leq \frac{3F}{\sigma} \\ \frac{\sqrt{2}F}{\sigma} &\leq x_2, x_3 \leq \frac{3F}{\sigma} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Algorytm MOPSO oprogramowano w języku Python. Zastosowano wersję opisaną w punkcie ???. Parametry prędkości PSO zostały przyjęte tak samo jak w punkcie 4.4.1. Metodą z użyciem sekwencji Haltona wygenerowano populację 70 częstek i wykonano 40 iteracji aktualizacji całej populacji. Z uwagi na niewymagające obliczeniowo funkcje celu nie założono maksymalnej objętości zewnętrznego archiwum i zauważono potrzebną liczbę wszystkich iteracji. Dodatkowo wszystkie wyliczone rozwiązania zapisano w bazie rozwiązań (*eng. knowledgebase*). Wprowadzono modyfikację wyboru lidera roju, pozwalającą poprawić równomierność rozmieszczenia rozwiązań niezdominowanych. Mechanizm wzorowany był na pomiarze odległości pomiędzy częstkami niezdominowanymi w przestrzeni wartości (Deb, Pratap i in. 2002) i składał się z następujących kroków:

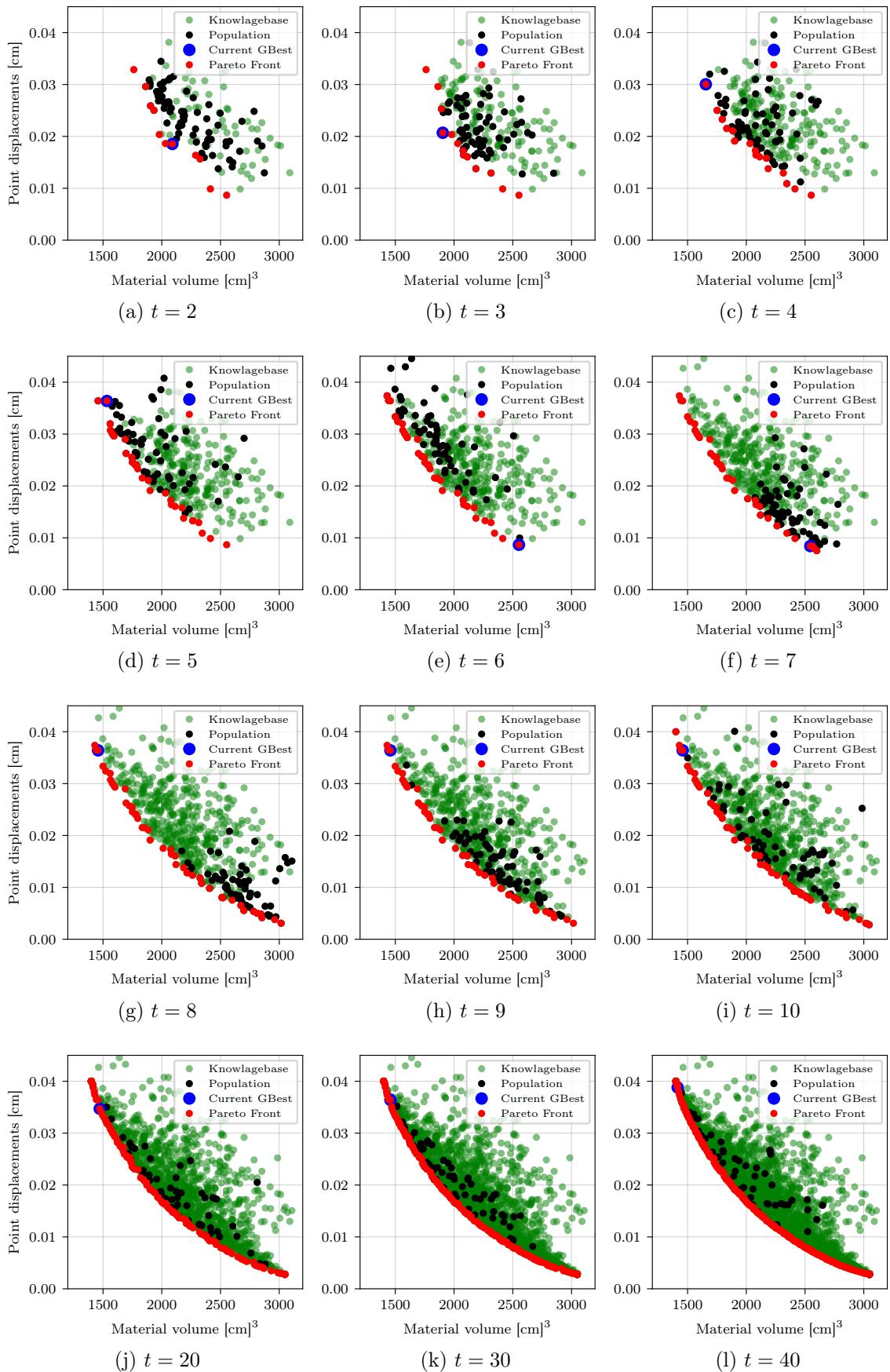
1. Posortowanie rozwiązań przechowywanych w archiwum według jednej z funkcji celu.
2. Normalizacja osi. Wyznaczenie różnicy pomiędzy największą, a najmniejszą wartością dla każdej funkcji celu oddzielnie. Następnie obliczenie ilorazu wartości danej funkcji celu przez odpowiadającą jej wyznaczoną w kroku 1. różnicę.
3. Wyznaczenie odległości w przestrzeni funkcji celu pomiędzy sąsiednimi, znormalizowanymi, posortowanymi według funkcji celu częstkami.
4. Losowy wybór pomiędzy częstkami cechującymi się największą wzajemną odlegością.

Normalizacja osi została dodana, ponieważ funkcje celu cechowały się innym rzędem wartości. Objętość materiału wyznaczana była w tysiącach, a przemieszczenie w dziesiątych częściach. Mimo zupełnie innego znaczenia powyższych liczb (inne jednostki), kiedy rozpatruje się odległości pomiędzy punktami wzdłuż Frontu Pareto,

wartości dużo większe dominują nad mniejszymi. Przy stosowaniu mechanizmów opartych na pomiarze zagięszczenia i odległości zalecane jest takie zmodyfikowanie funkcji celu by wyznaczone wartości wszystkich funkcji celu były tego samego rzędu. Na rysunku 4.12 zaprezentowano wizualizację przebiegu procesu optymalizacji MOPSO. Każdy z wykresów prezentuje stan rozwiązania po podanej pełnej iteracji  $t$  zmiany położenia cząstek. Kolorem czarnym oznaczono aktualne położenie roju. Kolor czerwony pokazuje dotychczas znalezione rozwiązania niezdominowane - przybliżenie Frontu Pareto. Niebieskim punktem zaznaczono aktualnie obowiązującego lidera roju. Dodatkowo kolorem zielonym oznaczono historię wszystkich dotychczasowych rozwiązań (knowlagebase). Rezultaty testu są zgodne z rozwiązaniem podanym w (Zavala i in. 2014). Można również stwierdzić, że Front Pareto został odwzorowany równomiernie oraz dokładnie.

## 4.7 Optymalizacja wspomagana uczeniem maszynowym

Optymalizacja wielokryterialna korzystająca nawet z szybko zbiegających algorytmów wymaga najczęściej wielokrotnych ewaluacji funkcji celu. W przypadku rzeczywistych problemów inżynierskich wyznaczanie wartości funkcji celu często jest złożonym procesem, który wymaga długotrwałych symulacji numerycznych. Ostatecznie otrzymanie dobrej jakości frontu Pareto może okazać się bardzo trudne, albo wręcz niemożliwe z uwagi na czas wymagany na rozwiązanie zadania. Generalnie stosowane są dwie ścieżki, które pozwalają poradzić sobie z tym problemem: zrównoleglenie obliczeń przez podział na podproblemy i zwiększenie efektywności algorytmu przez zatrudnienie surogatów (*eng. surrogates*) (Haftka, Villanueva i Chaudhuri 2016). Autorzy definiują surogatów jako proste modele algebraiczne dopasowane do dotychczas wyznaczonych wartości funkcji i ograniczeń. Do przewidywania przybliżonego rozwiązania wykorzystywane są metody aproksymacji bazujące na Procesach Gaussowskich (*eng. Gaussian Process (GP)*) (Rasmussen i Williams 2006; Rasmussen i Nickisch 2010). Opierają się one na zbudowaniu bazy rozwiązań, na podstawie której algorytm uczy się i jest w stanie przewidywać wyniki bez standardowej ewaluacji funkcji celu. Każda funkcja celu jest modelowana niezależnie, a algorytm dostarcza wartość funkcji oraz miarę niepewności tego rozwiązania dla nowych zmiennych projektowych. W kontekście optymalizacji rojem cząstek, przewidywane rozwiązania mogą być ocenione jako prawdopodobnie należące do frontu Pareto i zostać zaproponowane jako kandydaci do wyznaczenia funkcji celu w kolejnych iteracjach. Przykłady takiego podejścia pokazują metody: Pareto Active Learning (PAL) (Zuluaga, Krause, Sergent i in. 2013) i w wersji rozbudowanej  $\epsilon$ -Pareto Active Learning ( $\epsilon$ -PAL) (Zuluaga, Krause i Püschel 2016) oraz Active Learning of Pareto Front (ALP) (Campigotto, Passerini i Battiti 2013). Lv, Zhao i W. Wang 2017; Lv, L. Wang i in. 2019 zaproponowali algorytm optymalizacji wielokryterialnej oparty na PSO i technice  $\epsilon$ -PAL: Multi-Objective Particle Swarm Algorithm (MOPSAL). Takie podejście potrafi znacząco ograniczyć liczbę obliczeń funkcji celu i przyspieszyć optymalizację wymagających problemów nawet o 70% (Zuluaga, Krause i Püschel 2016).



Rysunek 4.12: Etapy rozwiązywania testowego problemu optymalizacji wielokryterialnej metodą roju cząstek

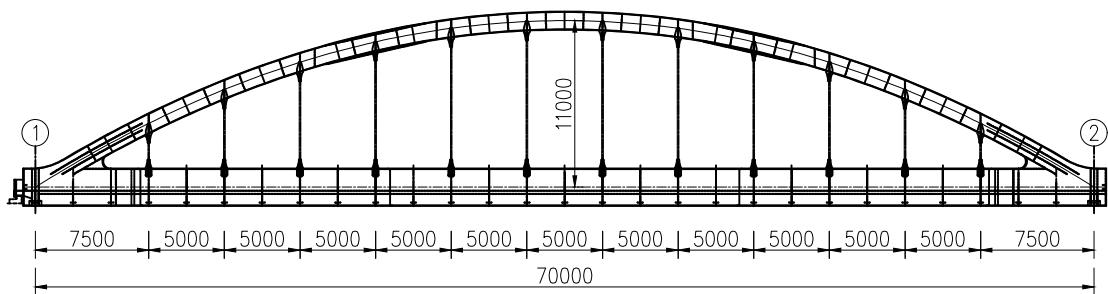
## Rozdział 5

# Wiadukt WK2 w ciągu Pomorskiej Kolei Metropolitalnej

### 5.1 Charakterystyka obiektu

Obiekt badawczy stanowi kolejowy wiadukt łukowy w ciągu linii Pomorskiej Kolei Metropolitalnej w km 1+696,02. Przęsło wiaduktu stanowi stalowy ustój łukowy z jazdą dołem. Widok z boku na konstrukcję stalową wiaduktu pokazano na rysunkach 5.1. Główne wymiary charakteryzujące konstrukcję to:

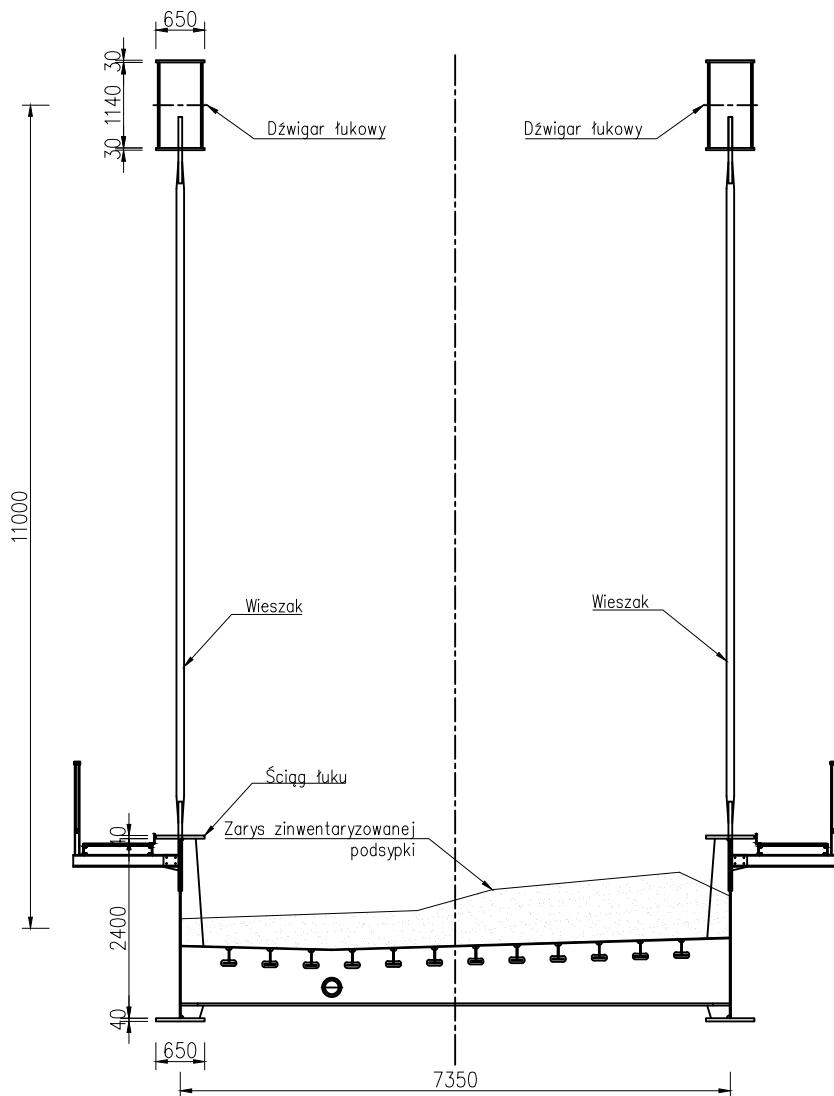
- rozpiętość teoretyczna:  $L_t = 70.00\text{m}$ ,
- długość całkowita:  $L_c = 71,60\text{m}$ ,
- wysokość w kluczu:  $H = 11.00\text{m}$ ,
- rozstaw osiowy dźwigarów:  $B_t = 7.35\text{m}$ ,
- szerokość całkowita:  $B_c = 10.21\text{m}$ .



Rysunek 5.1: Widok z boku na konstrukcję stalową dźwigara łukowego wiaduktu WK3

Przekrój poprzeczny dźwigarów łukowych zaprojektowano jako skrzynkowy (rys. 5.2). Pomost wykonano jako ortotropowy, z blachy wzmocnionej żebrami podłużnymi i poprzecznymi o przekroju teowym. Poprzecznice rozmieszczone w rozstawie 2.5 m. Ściąg łuku stanowią belki dwuteowe, po jednej dla każdego dźwigara łukowego. Przekrój ściągu zmienia się z dwuteowego na skrzynkowy w strefie podporowej. Na rysunku 5.3 przedstawiono przekrój poprzeczny pomostu i ściągu w strefie podporowej.

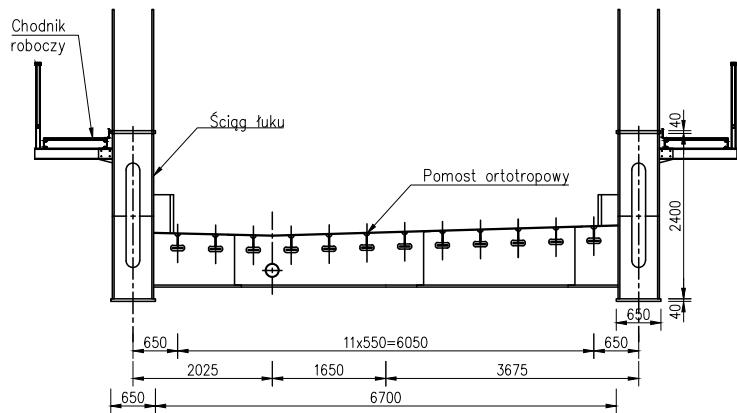
W zrealizowanym wariantie pomost został podwieszony do łuku za pomocą prętów, prostych wieszaków o średnicy 100 mm. Po każdej ze stron zamontowano 12



Rysunek 5.2: Przekrój poprzeczny konstrukcji stalowej wiaduktu WK2 w środku rozpiętości

wieszaków w rozstawie co 5 m. Wieszaki zostały połączone z dźwigarem i ściągiem sztywnym połączeniem spawanym. Rzeczywisty widok zrealizowanego przęsła pokazano na rysunku 5.4, detale konstrukcyjne w obrębie strefy podporowej na rysunku 5.5, a połączenie wieszaka ze ściągiem na rysunku 5.6.

Na obiekcie po wybudowaniu przeprowadzono badania odbiorcze. Próbne obciążenia odbyły się w dniu 14.04.2015 i zostały przeprowadzone przez zespół naukowców z Politechniki Śląskiej i Politechniki Gdańskiej (Łaziński i in. 2015). Wykonano badania statyczne i dynamiczne. Wyniki jednych i drugich pomiarów posłużą jako elementy kalibracji modelu lub spełnią rolę punktu odniesienia dla wyników badań zrealizowanych w ramach tej pracy. W ramach pomiarów statycznych zrealizowano dwa interesujące, z punktu widzenia tej pracy, ustawienia obciążenia. Ustawienie U1 z obciążeniem zorientowanym symetrycznie na obiekcie oraz ustawienie U2 z obciążeniem wywołującym maksymalne ugięcia w 1/4 rozpiętości przęsła. Pomiary przemieszczeń wykonywano w 6 punktach zlokalizowanych w 1/4, 1/2 i 3/4 rozpiętości przęsła, po obu jego stronach. Czujniki zamocowano do konstrukcji w osiach



Rysunek 5.3: Przekrój poprzeczny przez pomost w strefie podporowej wiaduktu WK2



Rysunek 5.4: Widok od strony lotniska na wiadukt WK2

ściagów, na dolnych lub górnych pasach. Obciążenie statyczne stanowiły dwie lokomotywy spalinowe typu: SM-48 i BR232. Pomierzone ugięcia statyczne zostaną użyte jako dodatkowe kryterium kalibracji modelu numerycznego. W ramach badań dynamicznych mierzono przyspieszenia konstrukcji po wymuszeniu obciążeniem impulsowym. Impuls generowano przez upadek jednej osi koparki dwudrogowej i zeskóków drezyny z progu. Na postawie przebiegów drgań swobodnych zidentyfikowano częstotliwości drgań własnych przęsła i towarzyszące im tłumienia. Do identyfikacji użyto algorytmu ERA. Zidentyfikowane częstotliwości drgań i tłumienia przęsła posłużą do porównania z wynikami badań przeprowadzonymi w ramach tej pracy.

## 5.2 Budowa modelu numerycznego

Na potrzeby analiz numerycznych zbudowano model MES w środowisku SOFiSTiK (rys. 5.7). Model przestrzenny składa się kilku rodzajów elementów skończonych. Z jednowymiarowych elementów belkowych wykonano łuki, stężenia, belki ściągu, wzmocnienia wezgłowii i żebra pomostu ortotropowego. Z elementów kratowych



(a) Widok z góry

(b) Widok z dołu

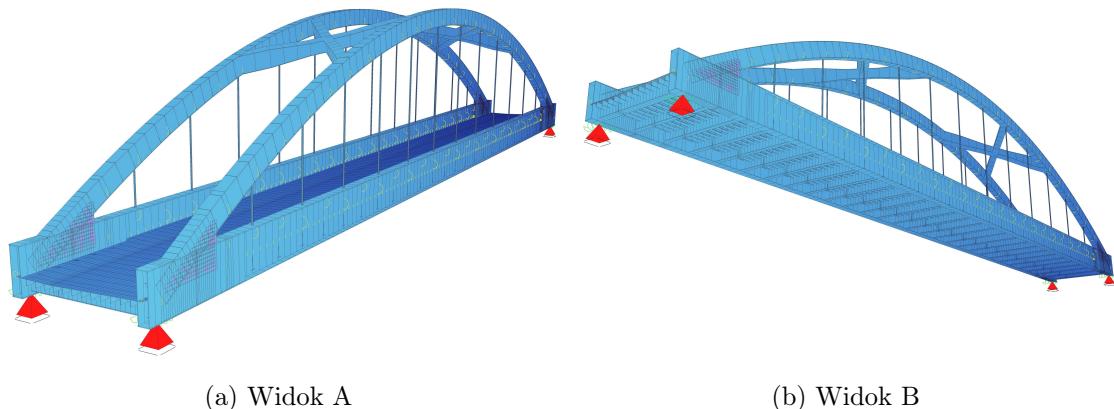
Rysunek 5.5: Szczegóły konstrukcyjne w obrębie połączenia łuku ze ściągiem



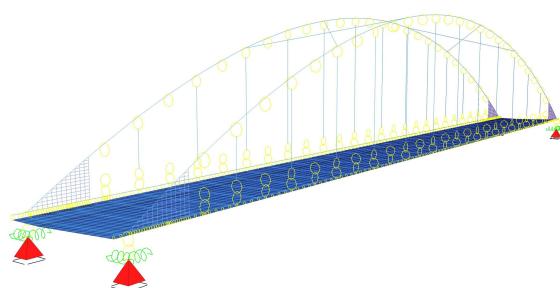
Rysunek 5.6: Detal połączenia wieszaka łuku z pomostem

stworzono wieszaki. Blachę pomostu wykonano z czterowęzłowych elementów powłokowych. Połączenia pomiędzy końcami wieszaków i osiami łuku oraz ściągu zrealizowano przez połączenia kinematyczne translacji i rotacji węzłów. Podparcia pionowe w miejscach łożysk mostu zrealizowano za pomocą sztywnych wież węzłów. Nie zablokowano przesuwów podłużnych i poprzecznych za pomocą blokady przemieszczeń. Zamiast tego na obu kierunkach zamocowano elastyczne elementy o bardzo dużej sztywności. Dostosowanie do istniejących warunków łożyskowania opisane zostało w dalszej części rozdziału. Usztywnienia wezgłowii zamodelowano za pomocą rusztu elementów belkowych o przekroju składającym się z dwóch blach odsuniętych od siebie na szerokość przekroju skrzynkowego łuku. Elementy strukturalne konstrukcji (takie jak ściągi, pomost, dźwigary łukowe, elementy podparcia itd.) podzielono w modelu na grupy pozwalające odnosić się do nich jako całości. Przekroje elementów belkowych przyjęto zgodnie z dostępną dokumentacją (!!!). Wymiary przekrojów zmiennych po długości zostały interpolowane liniowo. Widoczne na rysunku (5.8) dodatkowe połączenia kinematyczne są przygotowaniem dla możliwości podłączenia innych konfiguracji wieszaków.

Obciążenie ciężarem własnym konstrukcji zostało wygenerowane na podstawie ciężarów wprowadzonych przekrojów elementów liniowych bądź grubości elementów powłokowych. Dodatkowe elementy takie jak przepony i zakotwienia wieszaków dodane zostały jako obciążenia węzlowe. Osobny przypadek obciążenia stanowi pomost roboczy dodany jako ekwiwalentne obciążenie węzlowe i momenty zginające. Ostatnim obciążeniem stałym jest ciężar tłucznia. Z uwagi na ułożenie toru po łuku w

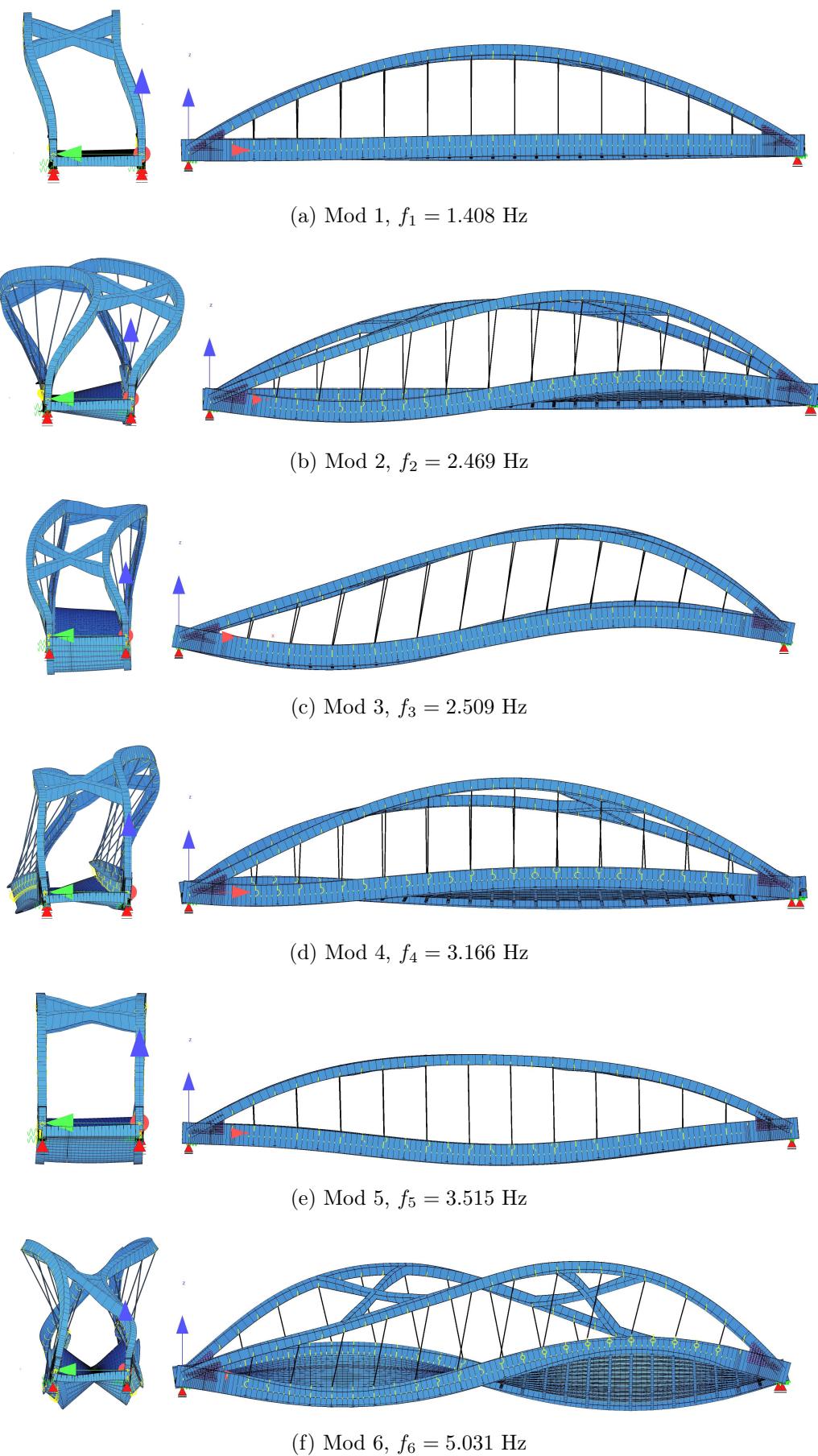


Rysunek 5.7: Wizualizacja przestrzennego modelu numerycznego wiaduktu WK2 Pomorskiej Kolei Metropolitalnej

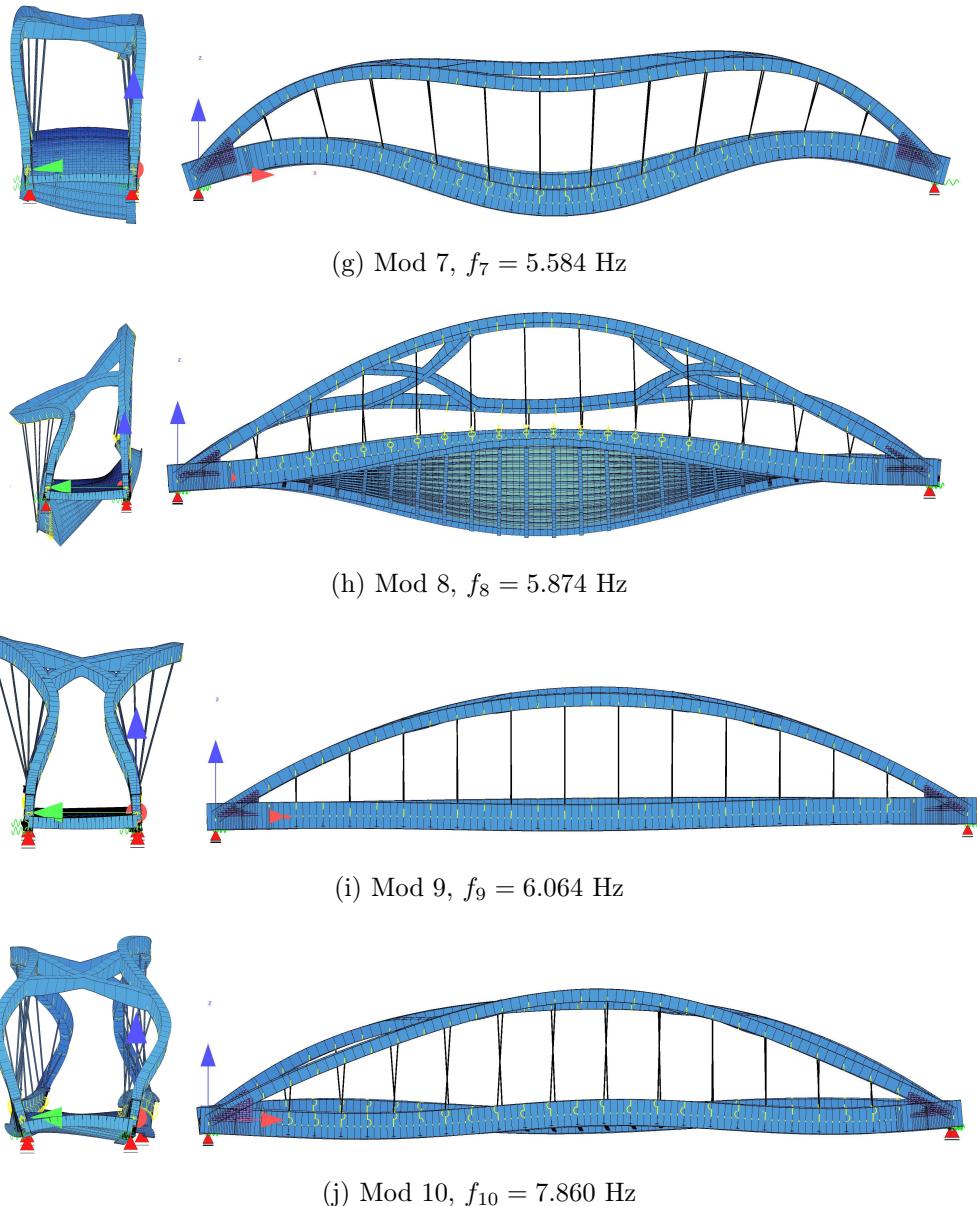


Rysunek 5.8: Schemat statyczny modelu numerycznego wiaduktu WK2 Pomorskiej Kolei Metropolitalnej

planie, rozkład tłucznia na obiekcie nie jest regularną, symetryczną bryłą. Dostępna dokumentacja obiektu nie dostarcza dokładnych informacji o ułożeniu podsypki na pomoście. Podsypka została w prosty sposób zinwentaryzowana przez pomiar grubości w niektórych punktach charakterystycznych. Na rysunku 5.2 zaprezentowano zinwentaryzowany układ tłucznia w przekroju przesłowym. Zastosowana metoda pomiaru objętości tłucznia nie jest dokładna i na pewno nie odzwierciedla realnego rozkładu ciężaru podsypki na obiekcie. Z tego względu podzielono obciążenie tłucznem na dwa osobne przypadki: równomiernie rozłożone obciążenie na całym pomoście i obciążenie równomierne o szerokości (!!!) usytuowane wzduż osi toru. Wartość obciążenia tłucznem przyjęto z normy (!!!).



Rysunek 5.9: Postaci i częstotliwości drgań własnych wiaduktu WK2 - Model wstępny



Rysunek 5.9: Postaci i częstotliwości drgań własnych wiaduktu WK2 - Model wstępny.  
Kont.

### 5.3 Identyfikacja modalna wiaduktu WK2

Przed przystąpieniem do procesu optymalizacji układu statycznego dźwigara łukowego model należało skalibrować. Z uwagi na zakres planowanych analiz kluczowe dla analizy dynamicznej jest aby model w odpowiedni sposób odzwierciedlał rzeczywistość w zakresie parametrów modalnych. Mając do dyspozycji rzeczywisty obiekt, zdecydowano o wykonaniu badań terenowych, które pozwolą na identyfikację częstotliwości i postaci drgań własnych oraz towarzyszącego im tłumienia. Obiekt jest w ciągłej eksploatacji. Z tych względów zdecydowano o wykorzystaniu Operacyjnej Analizy Modalnej do identyfikacji parametrów modalnych przesła. Przed przystąpieniem do badań przygotowano plan zawierający kluczowe punkty, bez których spełnienia badania mogą zakończyć się niepowodzeniem lub wyniki mogą być trudne

w interpretacji. Brincker i C. E. Ventura 2015 sporządzili listę zaleceń, które należy wypełnić w trakcie przygotowań eksperymentu OMA aby zakończył się on powodziem. Podobne zalecenia w swojej pracy sformułował Poprawa 2018. W kontekście założonych celów i wybranego obiektu badawczego główne z nich to:

- opracowanie strategii prowadzenia badań i akwizycji danych,
- uzgodnienia administracyjne - wstęp na obiekt i możliwość prowadzenia badań pod ruchem,
- dobranie sprzętu pomiarowego.

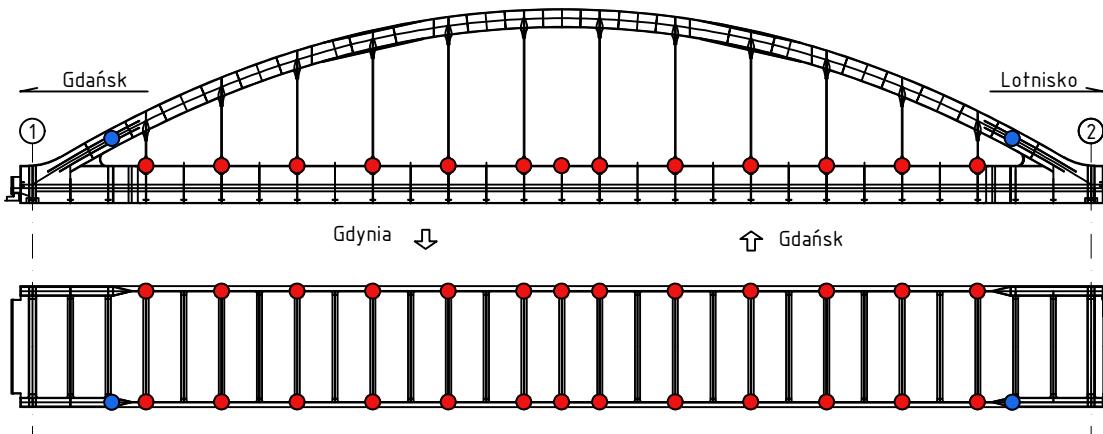
Zarządca obiektu zezwolił na prowadzenie badań pod ruchem w towarzystwie sygnalisty. Średnie natężenie ruchu na obiekcie w trakcie badań to około 1 przejazd na 30 min. Wybór sprzętu pomiarowego ograniczał się do zastosowania posiadanego sprzętu do akwizycji przyspieszeń opisanego w punkcie (!!). Najistotniejszym punktem przygotowania badań było opracowanie strategii badań. Według Brincker i C. E. Ventura 2015 plan badań OMA powinien zawierać następujące punkty:

- sporządzoną siatkę pomiarową,
- kolejność ustawień czujników w seriach pomiarowych,
- określenie liczby osób potrzebnych do przeprowadzenia eksperymentu,
- zapewnienie bezpieczeństwa w trakcie badań,
- określenie parametrów akwizycji danych (częstotliwość próbkowania, długość pomiarów, liczba powtórzeń serii pomiarowych itd.)

## Wybór punktów pomiarowych

Dostępny system pomiarowy składał się z dwóch akcelerometrów 3-osiowych i z dwóch czujników 1-osiowych. Mając do dyspozycji ograniczoną liczbę jednocześnie mierzonych punktów należało przeprowadzić symulację najlepszego rozmieszczenia punktów pomiarowych na obiekcie. Przykłady metod pozwalających na optymalne rozmieszczenie punktów pomiarowych w analizach dynamicznych zaprezentowano w literaturze i najczęściej opierają się one na wyznaczeniu reprezentatywnego wskaźnika, dzięki któremu da się porównać różne ustawienia. Między innymi Kammer 1991; Papadopoulos i Garcia 1998 zaproponowali użycie Modalnej Energii Kinetycznej (*eng. Modal Kinetic Energy*), Udwadia 1994 macierzy informacyjnej Fishera (*eng. Fisher Information Matrix*), a Penny, Friswell i Garvey 1994; Randall J. Allemann 2003 macierzy MAC dla zestawu modów. J. Zhang i in. 2017 przedstawili zwięzłe zestawienie powyższych metod i zaproponowali opcję optymalizującą lokalizację punktów pomiarowych przy wielu ustawieniach pomiarowych, zarówno dla punktów pomiarowych jak i punktów referencyjnych. Autorzy zwracają również uwagę, że przy wielu punktach pomiaru scisła ocena wszystkich możliwych ustawień jest wymagająca obliczeniowo bądź niemożliwa. Z tego względu stosowane są algorytmy heurystyczne bądź meta-heurystyczne.

W niniejszej pracy zastosowano metodę wykorzystującą kryterium MAC (Penny, Friswell i Garvey 1994). Podobne postępowanie przedstawił w swojej pracy Poprawa 2018. Polega ono na wyznaczeniu teoretycznych postaci drgań własnych z dostępnego modelu MES. Dla zbioru wszystkich możliwych położen czujników odczytywane są przemieszczenia znormalizowane danej postaci drgań. Ze zbioru możliwych położień wybierane są punkty, gdzie umieszczone mają zostać czujniki. Posiłkując się opisem postaci drgań w wybranych punktach tworzona jest macierz MAC. Każdą postać

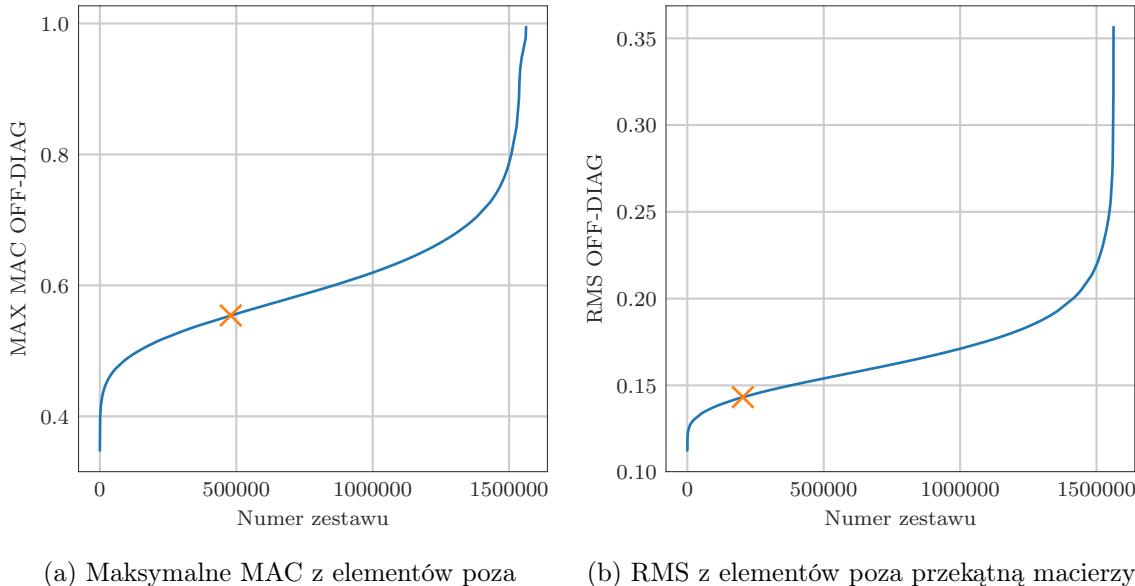


Rysunek 5.10: Lokalizacje dozwolone przy doborze punktów pomiarowych

porównuje się ze wszystkimi innymi i z samą sobą. W ten sposób na przekątnej macierzy pojawiają się wartości równe 1 co oznacza oczywiste, idealne dopasowanie według kryterium MAC dla równych wektorów. Poza przekątną, wartości MAC mieszczą się w przedziale 0 - 1. Celem analizy jest dobór punktów pomiarowych tak by poza przekątną wartości były możliwie małe. Przy małym dopasowaniu, postaci będą miały szanse być zidentyfikowane jednoznacznie przy mocno ograniczonej liczbie punktów pomiarowych i bliskim położeniu modów w dziedzinie częstotliwości. Dla każdego rozwiązania należy wyznaczyć wskaźnik, który pozwala ocenić zbiór punktów względem innych. Penny, Friswell i Garvey 1994 zaproponowali w jednym z wariantów maksymalną wartość MAC wśród elementów poza przekątną macierzy oraz średnią kwadratową (RMS)<sup>1</sup> ze wszystkich elementów powyżej przekątnej macierzy MAC. Im niższa wartość maksymalna i im niższa średnia kwadratowa tym lepiej.

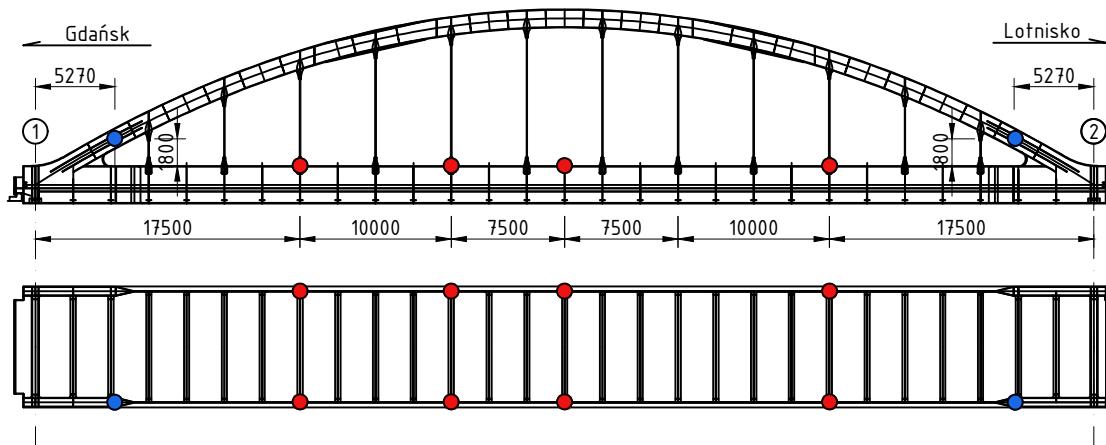
Z uwagi na ograniczony czas dostępu do obiektu ustalonono, że całość badań musi być zrealizowana w 3 ustawieniach dostępnych czujników. W przypadku wiaduktu, akcelerometry 3-osiowe potraktowano jako 2-osiowe. Odrzucono pomiar wzdłuż osi podłużnej obiektu jako nieistotny. W tej sytuacji jeden czujnik 2-osiowy posłużył jako punkt referencyjny mierzący drgania pionowe i poprzeczne. Pozostałe 4 punkty pomiarowe mogły być zmieniane w poszczególnych ustawieniach. Ostatecznie przy trzech ustawieniach możliwy był pomiar w 14 punktach pomiarowych (6 + 4 + 4) w tym 10 na kierunku pionowym  $Z$  i 4 na kierunku poprzecznym  $Y$ . Kolejnym koniecznym przy doborze siatki pomiarowej ograniczeniem było to, że dostęp do konstrukcji był możliwy jedynie z pomostu. Z uwagi na występowanie modów związanych głównie z bocznym ruchem łuków (rys. 5.9) narzucono, że 4 punkty pomiarowe  $2Y$  i  $2Z$  zostaną zamocowane bezpośrednio na łuku. Uwzględniając powyższe założenia pozostało do dyspozycji 8 punktów pomiarowych  $Z$  i 2 punkty pomiarowe  $Y$ . Punkty  $Y$  są związane z  $Z$  w ramach obudowy czujnika 2-osiowego, zaniechano więc doboru lokalizacji z uwagi na punkty  $Y$  i skupiono się tylko na kierunku  $Z$ . Na rysunku 5.10 kolorem czerwonym zaznaczono zbiór wszystkich dozwolonych do wyboru punktów. Kolorem niebieskim zaznaczono punkty zarezerwowane dla czujników mocowanych do łuku. Punktów czerwonych jest 26 i należy z nich wybrać 8. Wykonano kombina-

<sup>1</sup>Średnią kwadratową wyznaczono zgodnie z definicją z równania:  $x_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2}{n}}$



Rysunek 5.11: Wskaźniki oceniające jakość wyboru zestawu punktów pomiarowych dla wszystkich analizowanych kombinacji

cję bez powtórzeń i uzyskano 1562275 zestawów lokalizacji czujników. Dla każdego zestawu wyznaczono macierz MAC uwzględniając 10 pierwszych modów z modelu MES, a następnie RMS i maksymalny element każdej macierzy. Zestawy posortowano względem każdego parametru i wyniki przedstawiono graficznie na rysunku 5.11. Logicznym wyborem punktów byłoby wzięcie pod uwagę ustawień charakteryzujących się minimalną wartością jednego z parametrów. Jednakże prowadząc badania terenowe należy brać pod uwagę czynniki takie jak ułożenie kabli, możliwości systemu pomiarowego do łączenia punktów pomiarowych, przejście przez czynną linię kolejową. Z tego powodu zaproponowano układ czujników intuicyjnie pozwalających na dobrą identyfikację modalną, a jednocześnie gwarantujący komfort w montażu i kontroli przez jedną osobę. Wybrane punkty pokazano na rysunku 5.12. Dla wybranego zestawu punktów wyznaczono macierz MAC (Rys. 5.13) i wskaźniki: RMS i maksymalną wartość MAC. Wskaźniki zaznaczono na rysunku 5.11 pomarańczowym krzyżykiem, pokazując jakość dokonanego wyboru wśród wszystkich możliwych. Na podstawie wartości RMS można stwierdzić, że narzucony wariant charakteryzuje się niską wartością parametru i jego dalsze optymalizowanie kosztem utrudnień w trakcie pomiarów, oceniono jako nieopłacalne. Należy również zaznaczyć, że wartość RMS elementów poza przekątną macierzy MAC mierzy jedynie średnią zależność wszystkich par wektorów. Nie uwzględnia wielkości amplitud poszczególnych modów w punktach i ich znaczenia na ostateczne zachowanie dynamiczne kładki. W przedmiotowym przypadku zamocowano punkty pomiarowe w miejscach, gdzie kryterium RMS jest jednocześnie niskie (Rys. 5.11) i przemieszczenia modalne dla głównych modów giętnych i skrętnych pomostu są bliskie ekstremalnym (Rys. 5.9).



Rysunek 5.12: Wybrane do badań punkty pomiarowe



Rysunek 5.13: Macierz MAC dla pierwszych dziesięciu wektorów postaci drgań własnych, odczytanych z modelu dla wybranych punktów pomiarowych

### Parametry akwizycji danych

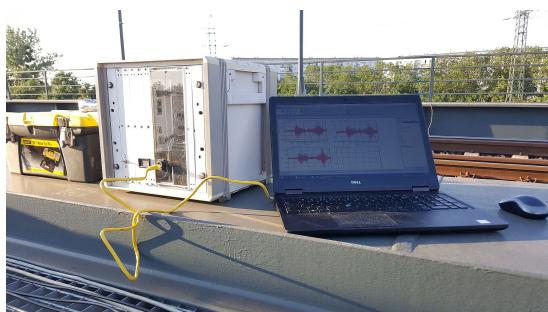
Przed przystąpieniem do badań wyznaczono podstawowe parametry pozwalające na przeprowadzenie poprawnego eksperymentu OMA. Posługując się formułami (3.93 - 3.93) określono minimalną częstotliwość próbkowania jako  $f_{s,min} = 2.4 \cdot 8 = 19.2\text{Hz}$  i minimalny czas prowadzenia pomiarów w jednym ustawieniu jako  $T_{min} = \frac{10}{0.005 \cdot 1.4} = 1429\text{s} = 23.8\text{min}$ . Ostatecznie zdecydowano o prowadzeniu pomiarów ze znacznym nadpróbkowaniem o częstotliwości  $f_s = 300\text{Hz}$  i w seriach czasowych 20 do 30 min.

## Przebieg badań

Badania na obiekcie przeprowadzone zostały w dniu 17 czerwca 2019 r. Wykorzystano zestaw pomiarowy opisany w rozdziale 3.4.4. Zestaw w trakcie badań pokazano na rysunku 5.14. Pomiary wykonano zgodnie z planem. Akwizycję danych podzielono na 3 ustawienia. Akwizycja danych w każdym ustawieniu wynosiła od 20 do 30 min. Punkty pomiarowe w poszczególnych ustawieniach oznaczono na rysunku 5.12. Warunki atmosferyczne były stabilne: brak odczuwalnych podmuchów wiatru, silne operowanie słońca.

## Środki obciążeniowe

W trakcie badań na obiekcie odbywał się standardowy dla PKM ruch pociągów pasażerskich. Pomiędzy przejazdami, w asyście sygnalisty eksperymentator przemieszczał się biegając i podskakując po obiekcie. 5.15. Porównanie amplitud drgań bez wymuszenia i z dodatkowym wymuszeniem pokazano na rysunku ???. Z punktu widzenia pomiaru drgań środowiskowych należy zwrócić uwagę na pomniejsze oddziaływanie występujące przy braku obciążen kolejowych na obiekcie. Pod obiektem odbywał się ruch w ciągu magistralnej linii kolejowej nr 202. W odległości około 150 m od wiaduktu, niemal równolegle przebiega główna arteria Gdańska - aleja Grunwaldzka, na której ciągu dnia panuje stały, znaczny ruch samochodowy. W podobnej odległości od obiektu panowały prace budowlane z wykorzystaniem ciężkiego sprzętu.

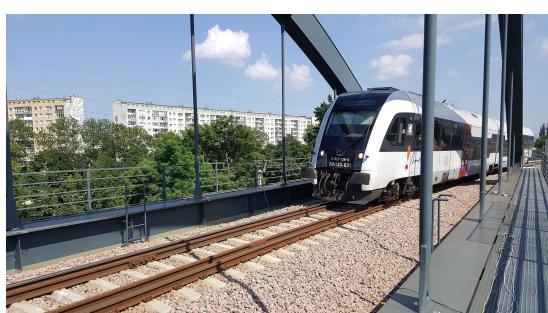


(a) System akwizycji danych: komputer i wzmacniacz pomiarowy HBM PMX

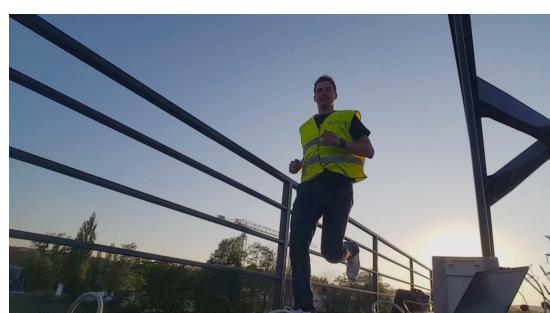


(b) 3 osiowy akcelerometr piezorezystancyjny

Rysunek 5.14: System pomiarowy użyty do identyfikacji modalnej wiaduktu WK2



(a) Pojazd SA133-031 wjeżdżający na obiekt



(b) Eksperymentator poruszający się po obiekcie

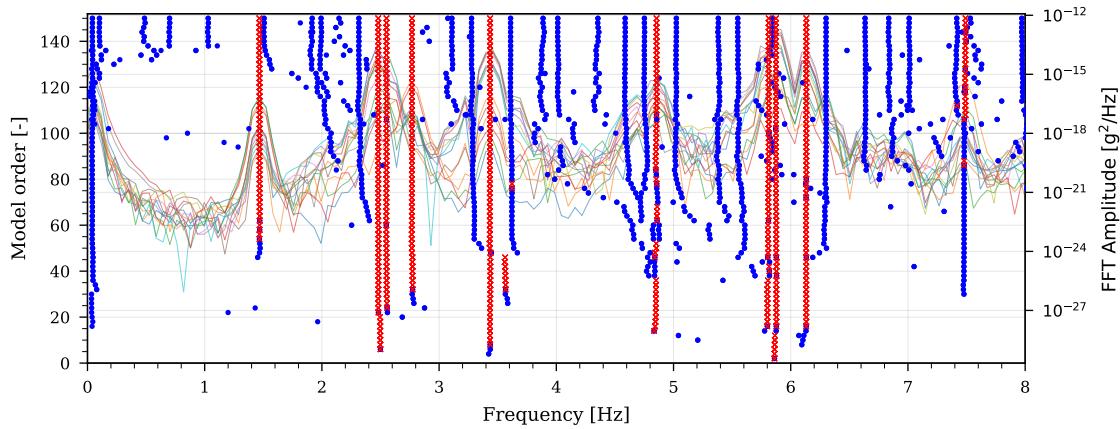
Rysunek 5.15: Obciążenia w trakcie badań obiektu WK-2

## Analiza i rezultaty badań

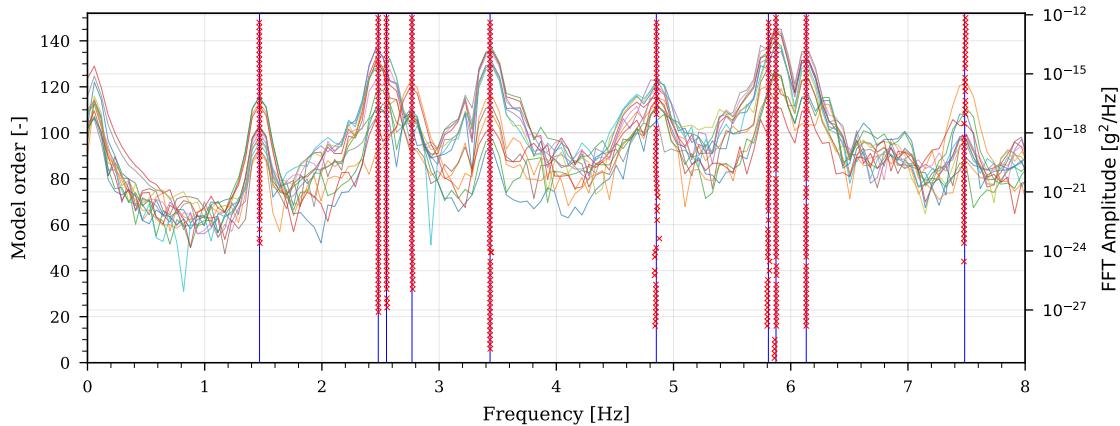
Zarejestrowane sygnały poddano analizie OMA metodą NExT-ERA. W procesie iteracyjnym przyjęto parametry metody pozwalające uzyskać stabilne rozwiązania. Uwzględniając wyniki z analizy modalnej modelu teoretycznego (rys. 5.9), stwierdzono że niektóre częstotliwości drgań własnych są bardzo bliskie. Caicedo 2011 w takiej sytuacji proponuje obniżenie częstotliwości próbkowania sygnału. Zabieg ten zwiększa szansę na zidentyfikowanie blisko położonych modów przez uwzględnienie w analizie mniejszego, całkowitego zakresu częstotliwości. Zastosowano resampling do próbkowania 30Hz. Szerokość okna FFT przy obliczaniu funkcji korelacji przyjęto jako 1024. Wybrane okno przy zmniejszonej częstotliwości próbkowania pozwoliło uzyskać funkcje korelacji o długości około 17s. Wymiary macierzy Hankela przyjęto jako  $r = 110$  i  $s = 150$ . Uwzględniono w ten sposób w macierzy Hankela niespełna 9s odpowiedzi impulsowej konstrukcji danej funkcjami korelacji. Taki czas pozwala na uwzględnienie kilkunastu okresów drgań modu o najniższej częstotliwości. Na rysunku 5.16 przedstawiono diagramy stabilizacyjne metody w wersji filtrowanej i niefiltrowanej dla rzędu maksymalnego równego  $n = 150$ . Przy tworzeniu diagramów zastosowano następujące kryteria poprawności rozwiązania:

- maksymalna różnica częstotliwości (3.84):  $\Delta f \leq 0.005$ ,
- maksymalny tłumienia (3.85):  $\Delta \xi \leq 0.03$ ,
- minimalne kryterium MAC i MPC (3.86):  $MPC \geq 0.95$      $MAC \geq 0.95$

Zidentyfikowano 10 pierwszych modów o częstotliwościach mniejszych niż 8 Hz. Pomimo zidentyfikowania również modów o wyższych częstotliwościach dalsze rozważania ograniczono do pierwszych dziesięciu. Z praktycznego punktu widzenia, dla obiektów mostowych jedynie kilka najniższych modów ma znaczący wpływ na odpowiedź dynamiczną konstrukcji. Charakterystyki zidentyfikowanych modów przedstawiono na wykresach 5.17 i w tabeli 5.1. Pierwszych 10 zidentyfikowanych częstotliwości drgań własnych jest zbliżonych do wyznaczonych analitycznie ze wstępnego modelu MES (Rys. 5.9). Wartości Logarytmicznego Dekrementu Tłumienia wahają się od 1.3% do 7.7%. Biorąc pod uwagę, że Wiadukt WK2 jest konstrukcją stalową z korytem wypełnionym podsypką, rezultaty te nie wzbudzają zastrzeżeń. Zidentyfikowane postaci drgań pozwalają odróżnić od siebie mody, ale wyraźnie cierpią z uwagi na zbyt słabe odwzorowanie postaci. Postaci związane z drganiami poprzecznymi łuków identyfikowane są przez węzły zlokalizowane blisko wezgłowii i przez przemieszczenia pomostu realizujące się przez połączenie łuków ze ściągiem za pomocą wieszaków. Pomimo wspólnej normalizacji przemieszczeń modalnych pionowych i poprzecznych, wartości dla punktów na łukach nie są znacznie większe niż przemieszczenia pomostu. Utrudnia to jednoznaczne powiązanie dla bliskich sobie modów z postaciami uzyskanymi w modelu teoretycznym. Gdyby to było możliwe, zamocowanie punktów pomiarowych na łuku w większej liczbie i w wyższych partiach mogłoby istotnie ułatwić identyfikację postaci i dalsze działania związane z kalibracją modelu. Podsumowując, identyfikację uznano za udaną i pozwalającą na ocenę konstrukcji i kalibrację modelu numerycznego.



(a) Diagram niefiltrowany

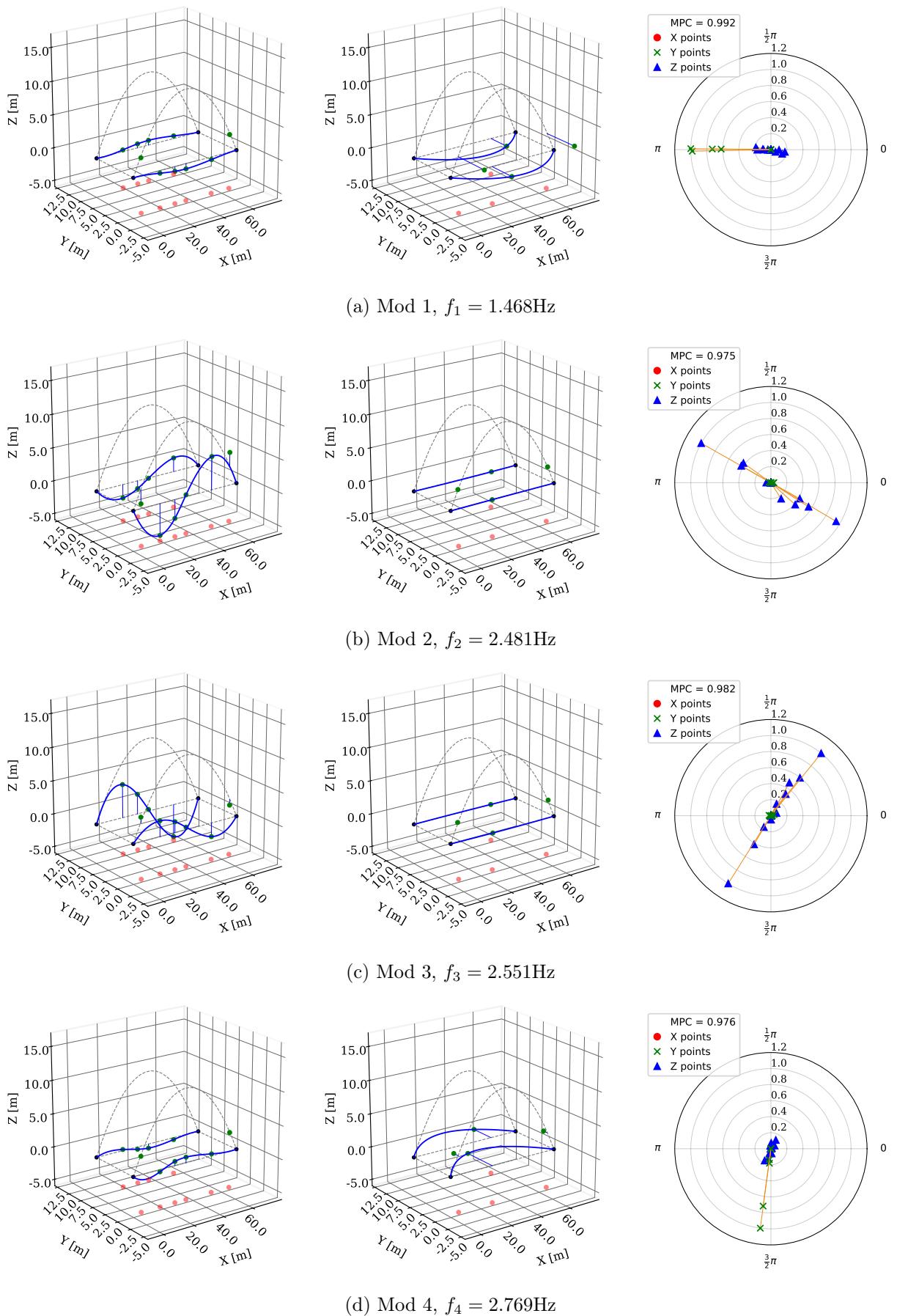


(b) Diagram filtrowany

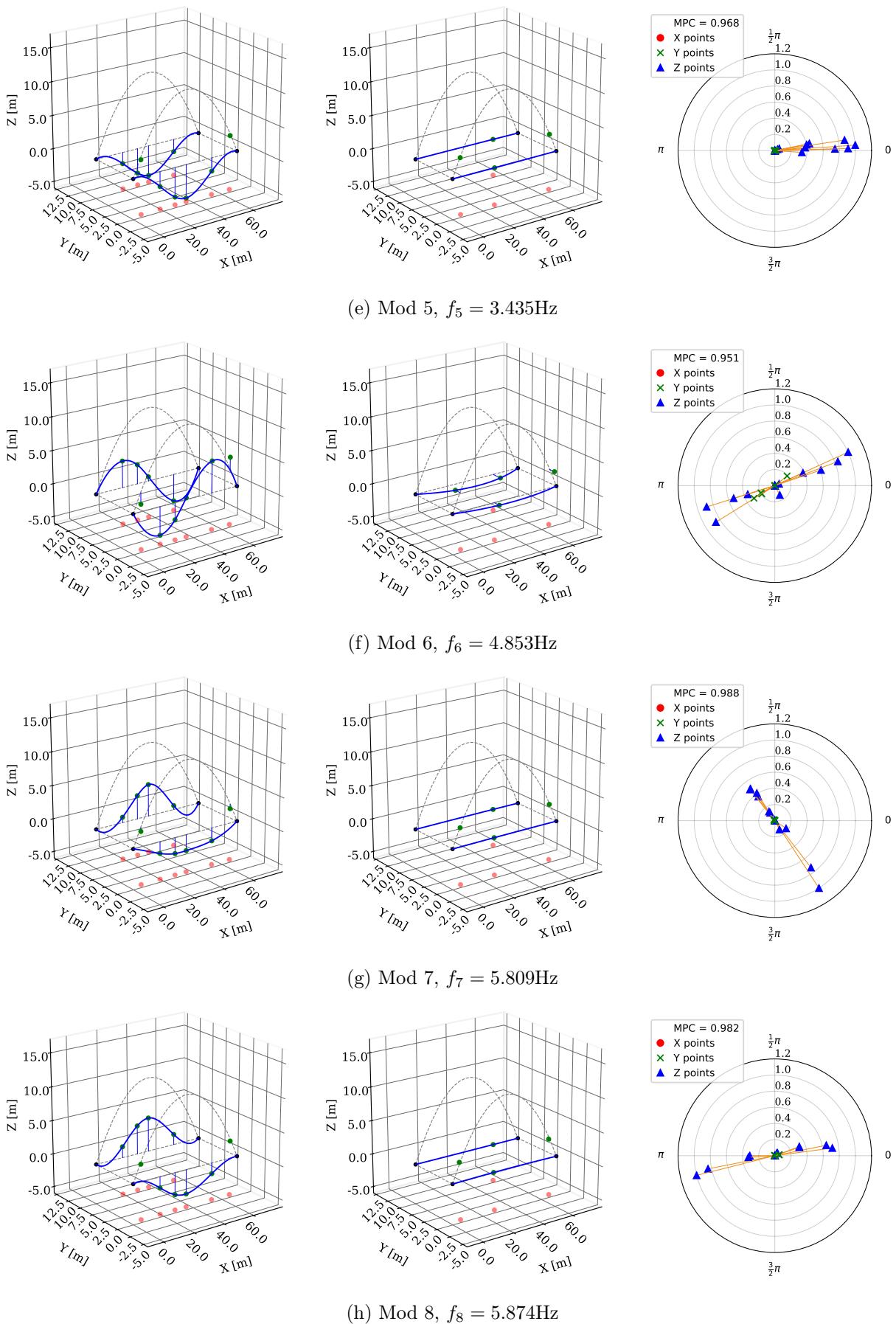
Rysunek 5.16: Diagramy stabilizacyjne metody NExT-ERA w badaniach wiaduktu WK2

Tablica 5.1: Zidentyfikowane charakterystyki modalne wiaduktu WK2

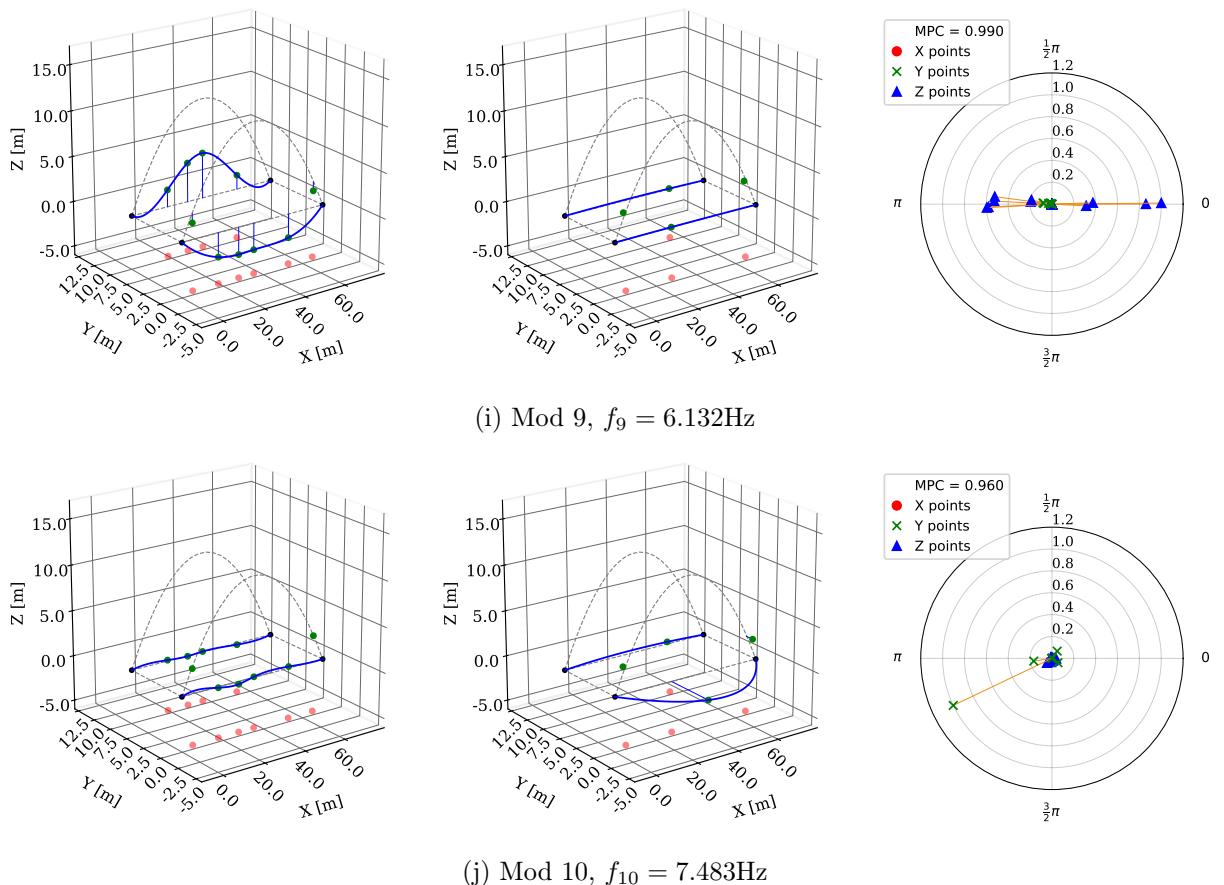
	Mod 1	Mod 2	Mod 3	Mod 4	Mod 5	Mod 6	Mod 7	Mod 8	Mod 9	Mod 10
Częstotliwość [Hz]	1.468	2.481	2.551	2.769	3.435	4.853	5.809	5.874	6.132	7.483
Liczba tłumienia [-]	0.007	0.009	0.006	0.011	0.012	0.012	0.005	0.005	0.002	0.004
LDT [-]	0.043	0.053	0.037	0.070	0.077	0.077	0.028	0.031	0.013	0.024



Rysunek 5.17: Zidentyfikowane charakterystyki modalne wiaduktu WK2



Rysunek 5.17: Zidentyfikowane charakterystyki modalne wiaduktu WK2 kont.



Rysunek 5.17: Zidentyfikowane charakterystyki modalne wiaduktu WK2 kont.

## 5.4 Kalibracja modelu numerycznego z wykorzystaniem PSO

Stworzony model numeryczny powstał na podstawie założeń projektowych. Wykonana identyfikacja parametrów dynamicznych i przeprowadzone badania odbiorcze pod próbnym obciążeniem dostarczyły szereg informacji o obiekcie rzeczywistym. Dzięki dostarczonym danym możliwe jest przeprowadzenie kalibracji, która sprawi, że model będzie wierniej odzwierciedlał rzeczywistą konstrukcję. Podsumowując wyznaczone i zdobyte wyniki, kalibracja opierać będzie się na następujących danych wyjściowych:

- przemieszczenia statyczne konstrukcji pod próbnym obciążeniem: 2 ustawienia po 6 punktów pomiarowych umiejscowionych na ściągach dźwigarów łukowych,
- zidentyfikowane parametry modalne konstrukcji: 10 pierwszych częstotliwości i postaci drgań własnych oraz odpowiadające im tłumienia modalne. Postaci drgań opisane zostały za pomocą 14 współrzędnych modalnych (p. 5.3)

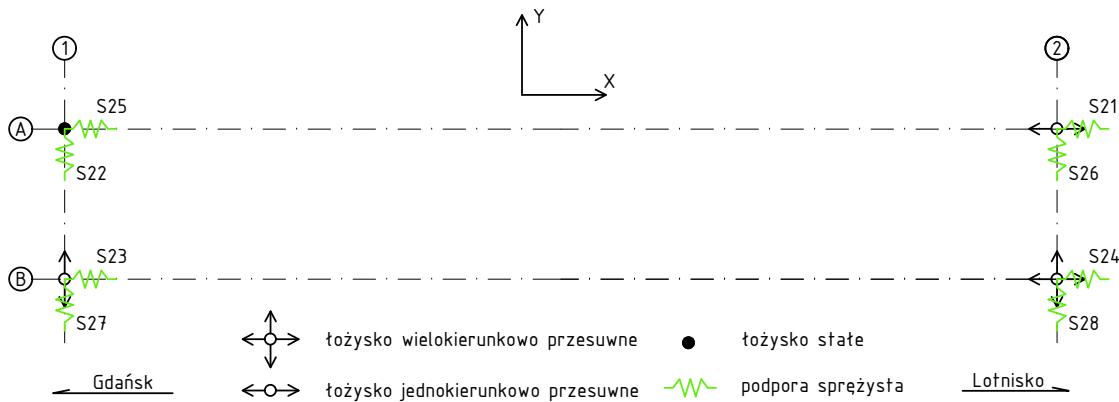
Zestaw danych zmierzonych w ramach obciążień statycznych pozwoli skalibrować głównie sztywność poszczególnych elementów konstrukcji. Z kolei charakterystyki modalne, jako wartości odnoszące się do zachowania dynamicznego, związane są ze sztywnością konstrukcji, jak i masą konstrukcyjną i niekonstrukcyjną. Obiekty

łukowe, podobnie jak kratownicowe są relatywnie złożonymi obiektami. Na ich charakterystykę dynamiczną wpływa wiele czynników, które mniej lub bardziej potrafią wpływać na jego parametry. Różni to je od statycznie nieskomplikowanych obiektów belkowych czy płytowych oraz od dużych obiektów wiszących i podwieszonych gdzie rozwiązania i szczegóły konstrukcyjne nie wpływają aż tak istotnie na globalne zachowanie dynamiczne konstrukcji. Dla łukowego wiaduktu WK2 wyodrębniono 22 czynniki, które będą podlegać modyfikacji w trakcie kalibracji. Podzielono je na trzy rodzaje: sztywności elementów konstrukcyjnych, sztywności warunków brzegowych oraz masy konstrukcyjne i niekonstrukcyjne. Poniżej zestawiono symbole zmiennych wraz z ich opisem:

- Sztywności elementów konstrukcyjnych:
  - S1 - łuku,
  - S2 - ściągu,
  - S3 - poprzecznik,
  - S4 - żeber płyty ortotropowej,
  - S5 - blachy płyty ortotropowej,
  - S6 - stężeń górnych,
  - S7 - wieszaków,
  - S8 - elementów stanowiących usztywniających wezgławie łuku,
- Sztywność warunków brzegowych (Rys. 5.18):
  - S21 - Oś 2, podpora A, kierunek X,
  - S22 - Oś 1, podpora A, kierunek Y,
  - S23 - Oś 1, podpora B, kierunek X,
  - S24 - Oś 2, podpora B, kierunek X,
  - S25 - Oś 1, podpora A, kierunek X,
  - S26 - Oś 2, podpora A, kierunek Y,
  - S27 - Oś 1, podpora B, kierunek Y,
  - S28 - Oś 2, podpora B, kierunek Y,
- Masa elementów konstrukcyjnych i niekonstrukcyjnych:
  - M1 - łuku,
  - M2 - ściągu,
  - M3 - tarczni - część wzdłuż osi toru,
  - M4 - tarczni - część równomiernie rozłożona,
  - M5 - pomostu roboczego,
  - M6 - stężeń górnych.

Niektóre z wymienionych elementów intuicyjnie nie wpływają znacząco na globalne charakterystyki modalne konstrukcji. Dotyczy to między innymi sztywności elementów pomostu czy warunków brzegowych w przypadku zastosowania łożysk mostowych. Zostały one jednak uwzględnione w niniejszej pracy jako zmienne, żeby mieć pełną kontrolę nad modyfikacjami modelu oraz żeby uwidoczyć zalety zastosowanej metody kalibracji.

Kalibrację modelu postanowiono potraktować jako problem optymalizacji. Problem zdefiniowano klasycznie przez wybór funkcji celu, parametrów i zmiennych



Rysunek 5.18: Schemat łożyskowania i rozmieszczenia podpór sprężystych, modyfikowanych w procesie kalibracji

projektowych oraz ograniczeń. Funkcją celu jest miara dopasowania modelu do konstrukcji rzeczywistej pod względem odpowiedzi statycznej i charakterystyk dynamicznych. Parametry projektowe definiują model numeryczny poddawany kalibracji i zostały przyjęte na podstawie dokumentacji powykonawczej. Zmienne projektowe stanowią wymienione wyżej 22 parametry: sztywności elementów konstrukcji, warunków brzegowych i masy znajdującej się na obiekcie. Jako metodę optymalizacji przyjęto metodę roju częstek PSO.

#### 5.4.1 Funkcja celu

Funkcja celu w zdefiniowanym problemie w założeniu powinna być miarą dopasowania modelu do konstrukcji rzeczywistej. W literaturze do kalibracji najczęściej stosowane są jednokryterialne algorytmy, w których miara dopasowania wyrażona jest jedną wartością liczbową. Wynikowa wartość jest więc najczęściej liniową kombinacją kryteriów dopasowania. W idealnym przypadku gdzie wszystkie kryteria zbiegają do najlepszego rozwiązania jednocześnie byłoby to w zupełności wystarczające podejście. Jednakże w rzeczywistości kryteria obarczone są nieuchronnym błędem. Błędy te wynikają z samej definicji modelu (uproszczeń strukturalnych i materiałowych) oraz zawarte są w wynikach identyfikacji będących wynikiem eksperymentu. Aktualnie nie jest możliwe kontrolowanie wszystkich różnic między modelem, a rzeczywistością, ponieważ wymagałoby to ogromnie liczby zmiennych. W efekcie nie wszystkie kryteria dopasowania osiągają minimalną wartość dla jednego rozwiązania. Chcąc uniknąć narzucania skali ważności na poszczególne kryteria, optymalizację wykonano w wariancie wielokryterialnym. Zbiorem funkcji celu, z których każda jest minimalizowana i opisuje dopasowanie modelu do obiektu jest wektor  $\mathbf{F} = [f_{freq}, f_{disp}, f_{MAC}]$ . Na wartość funkcji  $f_{freq}$  wpływ ma  $N$  pierwszych częstotliwości drgań własnych modelu  $f_i^n$  i zidentyfikowanych na konstrukcji rzeczywistej  $f_i^r$ . Wyznaczana jest ona następująco:

$$f_{freq} = \sum_{i=1}^N (f_i^n - f_i^r)^2 \quad (5.1)$$

Funkcja celu  $f_{disp}$  związana jest z przemieszczeniami uzyskiwanymi pod działaniem obciążenia statycznego. W rozważanym przypadku wykorzystano pomiar wykonany

w trakcie próbnego obciążenia. Dla dwóch ustawień, po sześć punktów pomiarowych w każdym, porównano przemieszczenia pionowe zmierzone na konstrukcji rzeczywistej  $d_i^r$  z wyznaczonymi w modelu numerycznym  $d_i^n$ . Wartość funkcji celu związanej z przemieszczeniami konstrukcji sformułowano jako:

$$f_{disp} = \sum_{i=1}^{12} |d_i^n - d_i^r| \quad (5.2)$$

Ostatnia funkcja celu jest miarą dopasowania pierwszych  $N$  postaci drgań własnych zidentyfikowanych na konstrukcji  $\phi_i^r$  oraz wyznaczonych w modelu  $\phi_i^n$ . Do liczbowego porównania postaci użyto kryterium MAC. Wartość funkcji  $f_{MAC}$  opisano następującym równaniem:

$$f_{MAC} = \sum_{i=1}^N (1 - \text{MAC}(\phi_i^n, \phi_i^r))^2 \quad (5.3)$$

gdzie  $\text{MAC}(\cdot)$  oznacza kryterium MAC dwóch wektorów. Zasadniczo kryterium MAC dwóch wektorów powinno być maksymalizowane. Wszakże, dla idealnego dopasowania wektorów równe jest jedności, a dla zupełnego braku dopasowania -零. Jednakże, znając wartość maksymalną kryterium  $\text{MAC} = 1$  i stosując odejmowanie przemianowano naturalnie maksymalizowaną funkcję celu na minimalizowaną. Dzięki temu wszystkie funkcje celu będą podlegać minimalizacji - co nie jest wymagane - ale uprasza interpretację wyników oraz zmniejsza stopień komplikacji algorytmu obliczeniowego.

#### 5.4.2 Zmienne projektowe

Zmienne projektowe w procesie kalibracji przedstawiono w punkcie 5.4. Ścisłe mówiąc, po zbudowaniu modelu numerycznego nie ulegał on modyfikacjom strukturalnym w procesie optymalizacji. Wszystkie zmienne były sterowane za pomocą mnożników nakładanych na sztywności i masy zamodelowanych elementów już na etapie obliczeń. Bazowe sztywności elementów i masy wynikają z modelu i przyjęto je na podstawie dokumentacji projektowej. Z kolei sztywności podpór sprężystych początkowo ustalonio jako stosunkowo sztywne, o stałej sprężystości równej  $k = 1E6\text{kN/m}$ . Ograniczenia dla zmiennych projektowych stanowią wartości skrajne, podyktowane doświadczeniem i zdrowym rozsądkiem. Przykładowe niepewności dla różnych elementów modelu numerycznego przedstawiono w tabeli 2.1. W tabelach 5.2 - 5.4 przedstawiono wszystkie zmienne projektowe (mnożniki) oraz ich zakresy dopuszczalne. Podejmując decyzję o możliwej odchyłce danej wartości wzięto pod uwagę typ elementu wykorzystanego w modelowaniu, ilość detali konstrukcyjnych pomijanych w modelu, możliwe niedokładności przy wykonaniu rzeczywistej konstrukcji oraz dokładność opisu elementu w dokumentacji projektowej. Przyjęte wartości skrajne można uznać za zawyżone, ale dzięki temu rozwiązania optymalne nie powinny być zlokalizowane blisko granicy zakresu dopuszczalnego. Zmniejsza to liczbę wymuszonych zmian położenia częstek w trakcie optymalizacji.

#### 5.4.3 Algorytm kalibracji

Zaproponowane rozwiązanie kalibracji opiera się na podziale całego procesu na dwa obszary obliczeń. Pierwszy związany jest z wykorzystaniem komercyjnego oprogra-

Tablica 5.2: Zakres dopuszczalnych zmian sztywności elementów konstrukcyjnych

Element	Łuk	Ściąg	Poprzecznica	Żebra	Płyta	Stężenia	Wieszak	Wezglowie
Oznaczenie	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8
Zakres	0.85 – 1.15	0.85 – 1.15	0.85 – 1.15	0.80 – 1.2	0.85 – 1.15	0.7 – 1.3	0.9 – 1.1	1.0 – 6.0

Tablica 5.3: Zakresy dopuszczalnych zmian sztywności warunków brzegowych

Podpora	2AX	1AY	1BX	2BX	1AX	2AY	1BY	2BY
Oznaczenie	S21	S22	S23	S24	S25	S26	S27	S28
Zakres	1E–8 – 1E3							

mowania MES SOFiSTiK. Drugi to autorskie oprogramowanie umożliwiające optymalizację rojem częstek. Oba obszary były połączone i zarządzane przez algorytm zapisany w języku Python.

### Analizy statyczna i modalna

Przed przystąpieniem do optymalizacji, model numeryczny przęsła (Fig. 5.7) przystosowano do kalibracji. Do obliczeń wykorzystano środowisko MES SOFiSTiK. Bazę danych zawierającą model MES powielono, aby stanowiła kopię zapasową w trakcie obliczeń. Do zdefiniowania obliczeń użyto program do preprocessingu tekstopowego TEDDY i zapisano w nim wymagane w procesie kalibracji analizy i modyfikacje modelu. Uruchomienie instrukcji z pliku tekstopowego wywoływało następujące obliczenia wykonywane przez moduł ASE (SOFiSTiK 2018a):

- analizę statyczną pod obciążeniem dwóch ustawień próbnego obciążenia,
- analizę statyczną pod obciążeniem wszystkich dodatkowych, nieujętych w modelu detali konstrukcyjnych i wyposażenia obiektu,
- analizę modalną wyznaczającą 10 pierwszych postaci drgań własnych, przy dodaniu mas od wszystkich obciążeń stałych nieujętych w ciężarze własnym modelu konstrukcji.

W każdej z analiz zastosowane zostały mnożniki zmiennych projektowych. Uruchomienie następowało w odpowiednim momencie z poziomu programu optymalizacyjnego.

### Optymalizacja

Jedną z cech algorytmów metaheurystycznych jest to, że są bardzo uniwersalne. Przystosowanie zapisanego w języku programowania algorytmu do danego problemu optymalizacji zazwyczaj nie wymaga wielu modyfikacji. W kalibracji modelu wykorzystano algorytm optymalizacji wielokryterialnej rojem częstek MOPSO (4.6). Współczynniki sterujące prędkością roju przyjęto jak w domyślnej wersji algorytmu:  $\theta = 0.7968$ ,  $\alpha = 1.4962$  oraz  $\beta = 1.4962$ . Populację stanowił zbiór 20 częstek, wygenerowanych w przestrzeni rozwiązań za pomocą sekwencji Haltona. Zastosowano topologię GBEST zapewniającą pełną wymianę informacji między częstkami na temat najlepszego rozwiązania. Wybór najlepszego rozwiązania odbywał się przez losowanie spośród częstek budujących aktualnie Front Pareto i znajdujących się w

Tablica 5.4: Zakresy dopuszczalnych zmian mass konstrukcyjnych i niekonstrukcyjnych

Element	Łuk	Ściag	Tłuczeń 1	Tłuczeń 2	Pomost	Stężenia
Oznaczenie	M1	M2	M3	M4	M5	M6
Zakres	0.9 – 1.1	0.9 – 1.1	0.5 – 0.8	0.3 – 0.8	0.7 – 1.3	0.8 – 1.2

archiwum zewnętrznego. Dodatkowo wszystkie wyznaczone rezultaty ulegały archiwizacji w bazie wiedzy (*eng. knowledge base*). Dzięki temu możliwe było przerwanie obliczeń i rozpoczęcie od stanu zarchiwizowanego. Ma to istotne znaczenie w problemach o kosztownych czasowo obliczeniach funkcji celu.

W celu zapewnienia dobrej dystrybucji rozwiązań Frontu Pareto zastosowano algorytm wyznaczania odległości pomiędzy częstками (Deb, Pratap i in. 2002). Dodatkowo wprowadzono możliwość kontroli algorytmu przez użytkownika. Zagwarantowano w trakcie prowadzenia obliczeń możliwość wstrzymania algorytmu, tymczasowego zwężenia lub poszerzenia przestrzeni rozwiązań dopuszczalnych oraz zdefiniowanie przestrzeni funkcji celu, z której musi być wybrany lider roju. Półautomatyczny system nie wymaga stałego zaangażowania użytkownika, a jednocześnie pozostawia możliwość zagęszczania wybranych fragmentów Frontu Pareto w trakcie trwania procesu optymalizacji.

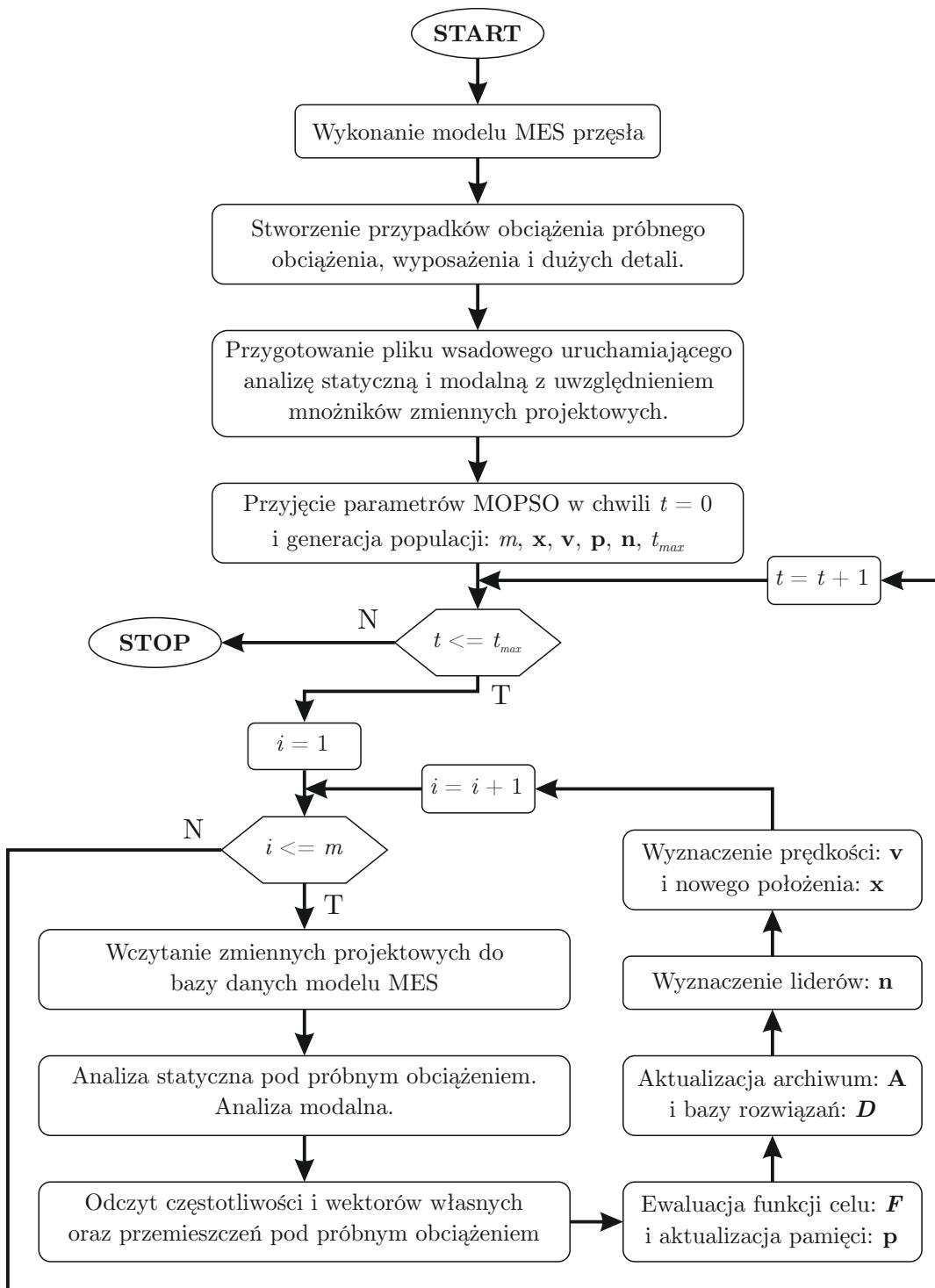
Do wyznaczania funkcji celu dla danego rozwiązania  $\mathbf{F} = [f_{freq}, f_{disp}, f_{MAC}]$  wymagana była komunikacja pomiędzy autorskim programem, a bazą danych modelu MES. W każdej iteracji optymalizacji potrzebne jest przekazanie do modelu MES zestawu mnożników będących aktualnie rozpatrywanym rozwiązaniem. Następnie po uruchomieniu i zakończeniu obliczeń przez program MES konieczne jest odczytanie częstotliwości drgań własnych, postaci drgań własnych w wybranych punktach i przemieszczeń konstrukcji pod obciążeniem próbny. Do wczytywania 'do modelu' i odczytywania 'z modelu' potrzebnych informacji użyto interfejsu dostarczonego przez producenta SOFiSTiK AG (SOFiSTiK 2018b). Bazując na odczytanych danych i wprowadzonych wynikach identyfikacji modalnej i próbnego obciążenia program wyznaczał funkcje celu według formuł (5.1), (5.2) i (5.3). Wektor funkcji celu oraz przypisane mu rozwiązanie przekazywane były do algorytmu optymalizacyjnego i zarchiwizowane w bazie wiedzy.

Schemat blokowy algorytmu kalibracji przedstawiono na rysunku 5.19.

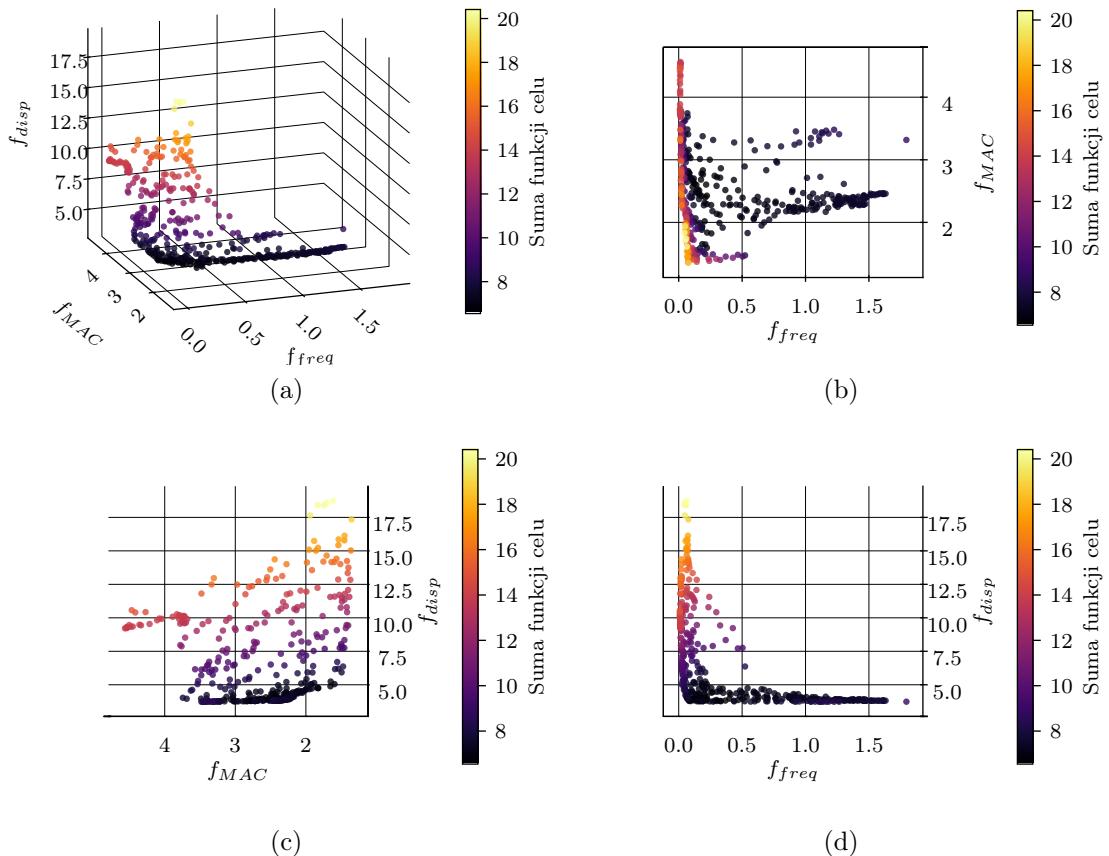
#### 5.4.4 Rezultaty kalibracji

W trakcie kalibracji wyznaczono funkcję celu dla 57 551 położeń częstek. Wszystkie wyniki zachowano w bazie wiedzy. Front Pareto po ostatniej iteracji złożony był z 802 częstek. Na rysunku 5.20 pokazano Front Pareto w widoku przestrzennym i w rzutach na wszystkie płaszczyzny. Kolor częstek oznacza sumę algebraiczną wszystkich funkcji celu  $\mathbf{F}$ . Innymi słowy oznacza on wartość funkcji  $f_c$  jak dla optymalizacji jednokryterialnej  $f_c = f_{freq} + f_{disp} + f_{MAC}$ . Gdyby wykonać optymalizację jednokryterialną, przy osiągnięciu dokładnie tych samych położień częstek byłby to jedyny wynik i oznaczałby minimum globalne. Dzięki wykonaniu optymalizacji wielokryterialnej możliwy jest wybór różnych wag dla poszczególnych kryteriów oraz ocena wybranego kompromisu wśród całego zbioru równorzędnych rozwiązań.

W tabeli 5.5 pokazano otrzymane w optymalizacji minimalne wartości poszczególnych funkcji celu wraz z odpowiadającymi im wartościami pozostałych funkcji.



Rysunek 5.19: Schemat blokowy algorytmu kalibracji modelu MES wiaduktu WK2



Rysunek 5.20: Ostateczny Front Pareto procesu optymalizacji w problemie kalibracji modelu numerycznego wiaduktu WK2: (a) widok przestrzenny, (b) rzut na płaszczyznę  $f_{freq}f_{disp}$ , (c) rzut na płaszczyznę  $f_{disp}f_{MAC}$ , (d) rzut na płaszczyznę  $f_{freq}f_{MAC}$ . Kolor wyraża wartość sumy:  $f_c = f_{freq} + f_{disp} + f_{MAC}$

Pogrubiona liczba oznacza decydującą o wyborze zestawu, minimalną wartość danej funkcji celu wśród wszystkich obliczonych wariantów. Aby posiadać punkt odniesienia wyznaczono również wartości wszystkich funkcji celu dla modelu bazowego opisanego w punkcie 5.2 (Zestaw 0). Najmniejszą wartość sumy uzyskano równą  $f_c = 6.5440$  (Zestaw 4). Wartości w tabeli wyraźnie wskazują na kompromisowość tego rozwiązania. W porównaniu do wartości zestawów 1-3 wszystkie wartości każdej z funkcji celu mieszczą się bliżej wartości minimalnych, niż maksymalnych z wartości odpowiadających. Bazując jedynie na przedstawionych w tabeli punktach o minimalnych funkcjach celu (zestawy 1-3) wybór jakiegokolwiek z nich wiązałby się z akceptacją dużej wartości któregoś z pozostałych kryteriów. Widoczne jest to również na rysunkach 5.20a-5.20b. Z tego powodu, spośród przedstawionych w tabeli wyników kompromisowe rozwiązanie wydaje się być słusznym wyborem.

Opierając swój ostateczny wybór rozwiązania na podstawie wyłącznie wartości sumy funkcji celu należy zwrócić uwagę na ryzyka z tym związane. Wartości funkcji celu nie są znormalizowane oraz w ogólnością są trudno porównywalne, ponieważ wybrane są w różnych jednostkach. Dodatkowo w przedmiotowym przypadku wszystkie funkcje celu opierają się na porównaniu rozwiązania teoretycznego z wynikiem rzeczywistego eksperymentu. Prawdopodobieństwo i skala błędnego określenia

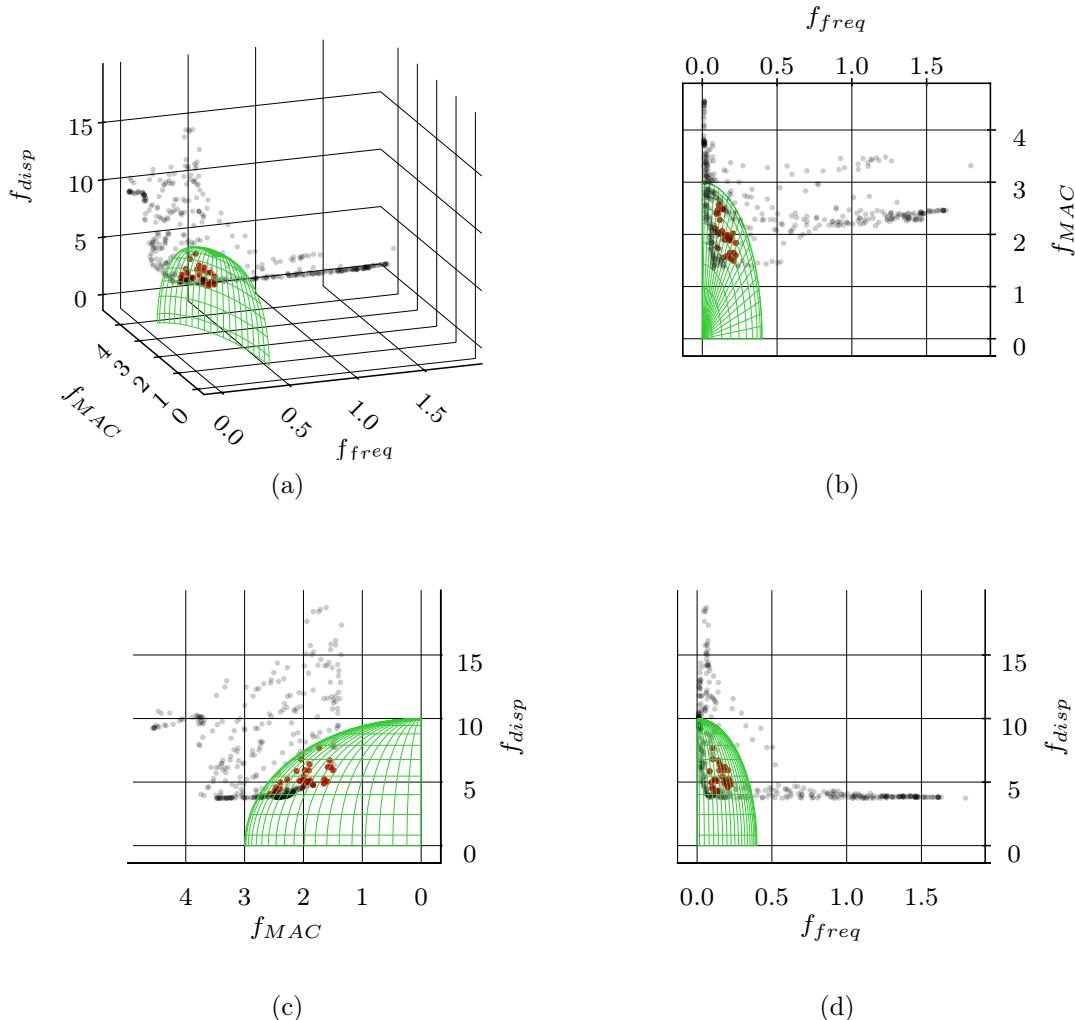
Tablica 5.5: Zestawienie minimalnych i odpowiadających funkcji celu uzyskanych w optymalizacji wielokryterialnej problemu kalibracji

Zestaw	$f_{freq}$	$f_{MAC}$	$f_{disp}$	$f_c$
0	0.4075	2.5891	5.8437	8.8403
1	<b>0.0088</b>	4.4674	10.5679	15.0441
2	0.0758	<b>1.3533</b>	17.3502	18.7793
3	1.2252	3.4805	<b>3.7310</b>	8.4366
4	0.2223	2.4267	3.8950	<b>6.5440</b>

różnych parametrów w trakcie pomiarów jest również istotnie różna. Na przykład identyfikacja częstotliwości drgań własnych zazwyczaj sprawia najmniejsze trudności i ryzyko wystąpienia błędu jest relatywnie małe. Z kolei w przedmiotowym przypadku występuje duże ryzyko wystąpienia istotnych błędów w wyznaczonych postaciach drgań własnych. Spowodowane jest to stosunkowo niewielką liczbą punktów pomiarowych i brakiem punków w wyższych partiach dźwigarów łukowych. Oba te czynniki wpływają negatywnie na decydujące o jednej z funkcji celu kryterium MAC. Ostatnia z funkcji celu opiera się wynikach pomiaru przemieszczeń w trakcie próbnych obciążień. Autorzy raportu ?? na bazie długoletniego doświadczenia w pomiarach obiektów kolejowych wspominają, że wyniki mogą być obciążone istotnym błędem w punkach, które uległy uniesieniu od niesymetrycznego obciążenia. Powyższe błędy wynikają z niedoskonałości eksperymentów. Z drugiej strony istnieje ryzyko popełnienia błędu w trakcie modelowania numerycznego. Dla tak skomplikowanej struktury przestrzennej jak konstrukcja łukowa występuje olbrzymia liczba parametrów wpływających na rezultaty analizy modalnej. W kalibracji uwzględniono 22 zmienne, obejmujące bardzo znaczące dla parametrów dynamicznych elementy, jak również intuicyjnie mało znaczące. Pomimo użycia relatywnie wielu zmiennych, wciąż nie uwzględniono szerokiego spektrum zmiennych mogących wpływać na sztywność i dynamikę obiektu. Dla elementów konstrukcyjnych są to między innymi sztywności połączeń, trudne do określenia odchyłki od wymiarów czy zmienność sztywności wskutek lokalnych wzmacnianień. Jeszcze większe wątpliwości budzi rozkład masy i wymiarów elementów wyposażenia - zwłaszcza podszypki. Z punktu widzenia porównania ugęć, tor umiejscowiony na obiekcie w łuku poziomym może nie przystawać idealnie do osi projektowanej użytej w modelu. Również ustalenie pojazdów w trakcie obciążenia oraz ich masa mogą nieznacznie różnić się od modelowanego obciążenia. Biorąc pod uwagę możliwe wystąpienia błędów w każdym kryterium, nieustępstwe dążenie do minimalizacji jednego z nich bez uwzględniania pozostałych, może skutkować błędnymi rezultatami. Ostatecznie idealne dopasowanie do obarczonych błędem wartości prowadzi do błędnych rezultatów.

Z wyżej wymienionych powodów skupiono się na wynikach pośrednich odrzucając skrajne wartości występujące wśród rozwiązań Frontu Pareto. Przeanalizowano wybrane punkty pod względem rozwiązań w przestrzeni zmiennych projektowych. Analizując kształt Frontu Pareto wybrano punkty znajdujące się w jego , które pozwalają na wybór akceptowalnych rezultatów. Ostatecznie przyjęto następujące przedziały:  $f_{freq} \in (0, 0.2)$ ,  $f_{disp} \in (0, 1.8)$  i  $f_{MAC} \in (0, 4.5)$ . Na rysunku 5.21 pokazano wybrane punkty. Zaznaczono je kolorem czerwonym. Zielonym prostopadło-

ścianem zakreślono przestrzeń zawierającą wszystkie wybrane punkty. W zadanym zakresie znalazły się 22 punkty Frontu Pareto. Dla wybranych punktów odczytano wartości zmiennych projektowych z zestawu Pareto. Następnie wyznaczono średnie wartości oraz odchylenie standardowe dla zmiennych projektowych wybranych punków.



Rysunek 5.21: Ostateczny Front Pareto procesu optymalizacji w problemie kalibracji modelu numerycznego wiaduktu WK2: (a) widok przestrzenny, (b) rzut na płaszczyznę  $f_{freq}f_{disp}$ , (c) rzut na płaszczyznę  $f_{disp}f_{MAC}$ , (d) rzut na płaszczyznę  $f_{freq}f_{MAC}$ . Czerwone punkty zostały wybrane do analizy jako kompromisowe.

## 5.5 Wpływ wymiarów elementów konstrukcyjnych na odpowiedź dynamiczną przesła

Celem pracy jest określenie wpływu poszczególnych elementów konstrukcyjnych na zachowanie dynamiczne przesła. Analizę przeprowadzono na przykładzie zidentyfikowanego dynamicznie wiaduktu łukowego WK2 w ciągu Pomorskiej Kolei Metropolitalnej. Przyjęto że zmianie mogą ulegać jedynie wymiary elementów konstrukcyj-

nych, a nie topologia całego ustroju. Dla przedmiotowego obiektu wyszczególniono 3 główne cechy, które wynikają z wymiarów elementów i wpływają na zachowanie struktury. Są to sztywność giętna dźwigara łukowego, sztywność giętna ściągu, a także sztywność podłużna wieszaków. Uwzględniając złożoność rzeczywistej konstrukcji połączoną z szeregiem wymagań stawianych przez zapisy normowe rozwiązywanie analityczne problemu wydaje się być karkołomnym zadaniem. Postanowiono wyznaczyć wpływ poszczególnych elementów w procesie optymalizacji wielokryterialnej. Zdefiniowano dwie funkcje celu zestawione w wektor  $\mathbf{F} = [f_s, f_a]$  gdzie:

- $f_s$  - oznacza masę konstrukcji stalowej, w przybliżeniu tożsamą z kosztem wykonania konstrukcji,
- $f_a$  - oznacza maksymalne przyspieszenia pomostu pod normowym obciążeniem dynamicznym.

Tak zdefiniowane funkcje pozwalają uzyskać zestaw najlepszych rozwiązań (Front Pareto), będący przybliżeniem funkcji najlepszego możliwego rozwiązania pod względem dynamiki konstrukcji, w zależności od kosztu wykonania konstrukcji. Jakość rozwiązania konstrukcyjnego pod względem dynamiki przeszła określono przez maksymalne przyspieszenie występujące w pomoście pod dynamicznym obciążeniem normowym. Aspekt ekonomiczny odzwierciedla masa zużytego materiału. Dzięki procesowi optymalizacji maksymalne przyspieszenia wyznaczone przy przejazdach dynamicznych będą posiadały najmniejsze możliwe wartości przy zastosowanej objętości materiału. Do zmiany głównych elementów konstrukcyjnych użyto trzy parametry:

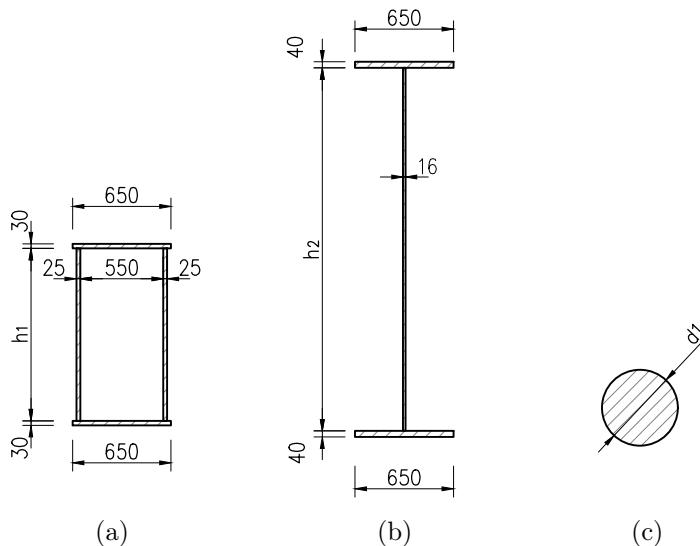
- wysokość przekroju poprzecznego dźwigara łukowego:  $h_1$ ,
- wysokość przekroju poprzecznego dźwigara ściągu  $h_2$ ,
- średnica wieszaka:  $d_1$ .

które stanowią zmienne projektowe problemu optymalizacji  $\mathbf{X} = [h_1, h_2, d_1]$ . Zmienne zaznaczono na przekrojach poprzecznych przedstawionych na rysunku 5.22.

Poza wymienionymi zmiennymi projektowymi analizy przeprowadzono w kilku wariantach. Warianty zróżnicowano ze względu na dwa aspekty:

- rozmieszczenie wieszaków:
  - wieszaki proste,
  - wieszaki ukośne (system Nielsena),
  - wieszaki w układzie siatki (Network),
- maksymalna dozwolona prędkość taboru pasażerskiego:
  - do 160 km/h,
  - do 200 km/h,
  - do 300 km/h.

Dla każdej kombinacji rozmieszczenia wieszaków i prędkości (9 wariantów) przeprowadzono oddzielną optymalizację. Istnieje ryzyko, że jeden z wariantów może dominować nad innymi pod względem odporności dynamicznej i przysłoni interesujące



Rysunek 5.22: Przekroje poprzeczne elementów konstrukcji wiaduktu łukowego z zaznaczonymi zmiennymi projektowymi: (a) przekrój dźwigara łukowego, (b) przekrój ściągu, (c) przekrój wieszaka.

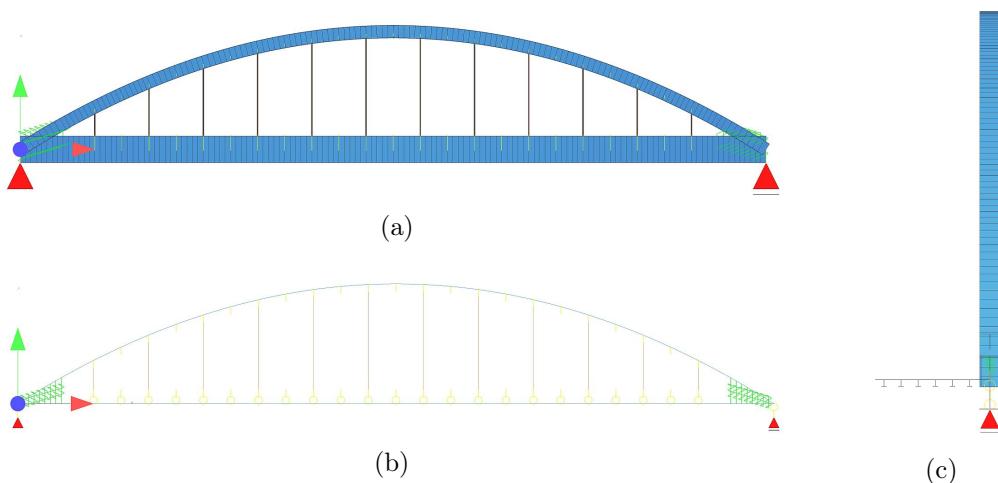
rezultaty. W rzeczywistych konstrukcjach stosowane są wszystkie trzy warianty rozkładu wieszaków i istnieje zapotrzebowanie na różne maksymalne dozwolone prędkości taboru. Z tego względu informacja na temat wpływu elementów konstrukcyjnych dla każdego z wariantów jest pożądana i przeanalizowana oddzielnie.

W procesie optymalizacji uwzględniono również ograniczenia i wymagania jakie musi spełnić rozwiązanie, aby zostało uznane jako poprawne. Wartości podlegające ograniczeniom zestawione w wektorze  $\mathbf{C} = [c_{sa}, c_{sg}, c_{sh}, c_d]$ . Bazując na obowiązujących przepisach wyznaczono dla każdego przypadku:

- maksymalne normowe naprężenia obliczeniowe w dźwigarze łukowym  $c_{sa}$ , w ściągu  $c_{sg}$  i w wieszakach  $c_{sh}$  pod obciążeniem statycznym,
- normowe maksymalnych ugięcia statyczne przęsła  $c_d$ .

### 5.5.1 Model uproszczony do analizy dynamicznej

Model numeryczny wiaduktu przedstawiony w punkcie 5.2 jest przestrzennym modelem o relatywnie rozbudowanej strukturze. W przedstawionej wersji siatki elementów skończonych składa się z 4602 węzłów, 3468 elementów belkowych, 3404 elementów powłokowych i 24 elementów kratowych. Wykorzystanie złożonych modeli MES w analizie dynamicznej jest wymagające czasowo. W przypadku optymalizacji analizy dynamiczne muszą być przeprowadzone wielokrotnie. Przy wykorzystaniu złożonego modelu numerycznego byłoby to niezwykle trudne lub wręcz niemożliwe zadanie (Zoltowski, Binczyk i Kalitowski 2017). W takim przypadku należy zadać sobie pytanie czy jest możliwa redukcja modelu bez utraty potrzebnych rezultatów i obniżenia ich dokładności. Z punktu widzenia dynamiki przęsła kolejowego, obciążonego głównie siłami pionowymi najistotniejszą rolę pełni sprawdzenie drgań pionowych. Model płaski jest w stanie odwzorować kluczowe pionowe postaci drgań własnych obiektu, a jednocześnie jest znacznie mniej rozbudowany. Z powyższych względów postanowiono zredukować skalibrowany model przestrzenny belkowo-powłokowy do



Rysunek 5.23: Uproszczony model wiaduktu WK2: (a) wizualizacja modelu, (b) schemat statyczny modelu, (c) widok w płaszczyźnie na wizualizację modelu

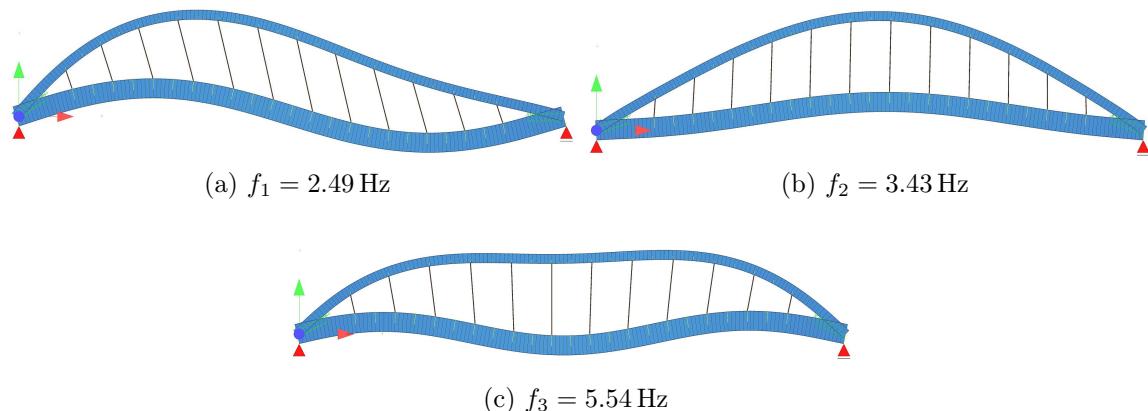
modelu wyłącznie belkowego zdefiniowanego na płaszczyźnie. Obiekt WK2 jest niemal symetryczny konstrukcyjnie, ale posiada cechy, które teoretycznie nie pozwalają na uwzględnienie symetrii w redukcji modelu. Pierwszym powodem jest to, że oś toru usytuowana jest w łuku poziomym co sprawia, że obciążenie ruchome i obciążenie tłuczniem nie posiada osi symetrii zgodnej z osią obiektu. Drugim elementem są warunki brzegowe, ponieważ zgodnie z klasycznymi zasadami łożyskowania obiekt tego typu posiada jedno łożysko stałe. Drugi z czynników może być bez konsekwencji pominięty, ponieważ podparcie wzdłuż osi obiektu i w osi pionowej jest identyczne dla obu dźwigarów łukowych. Różnica w poprzecznych warunkach brzegowych nie ma istotnego znaczenia na globalną pracę przesła w kierunku pionowym. Kolejny z czynników - brak symetrii osi toru - nie byłby pomijalny jeśli analiza dotyczyłaby wyłącznie poszukiwania odpowiedzi obiektu WK2 w obecnej formie. Niemniej jednak celem pracy nie jest przetestowanie jednostkowego przypadku, a raczej całej klasy mostów. Z tego powodu uogólniono problem do znacznie częściej spotykanych obiektów z prostą osią toru, umiejscowioną symetrycznie na obiekcie. Takie założenie eliminuje przeszkodę asymetrii obciążenia przy uproszczeniu modelu numerycznego. Pozwala również odrzucić potencjalne nieporządne komplikacje w interpretacji wyników obliczeń, obarczonych nieokreślonym wpływem asymetrii rozkładu masy i obciążenia. Uproszczony model pokazano na rysunku 5.23.

Model przestrzenny sprowadzono do płaszczyzny przyjmując niezmieniony dźwigar łukowy i rozbudowany ściąg. Przekrój poprzeczny elementów belkowych budujących ściąg rozszerzono o połowę pomostu ortotropowego (Rys. 5.23c). Model numeryczny po uproszczeniu składał się z 334 węzłów, 286 elementów belkowych i liczby elementów kratowych zależnej od wariantu rozkładów wieszaków. W stosunku do modelu przestrzennego znacznie ograniczono wielkość zadania. Modyfikatory sztywności i ciężaru elementów modelu płaskiego oraz mas wyposażenia przyjęto jak w modelu przestrzennym po kalibracji. Postaci i częstotliwości drgań własnych pokazano na rysunku 5.24. W tabeli 5.6 porównano zidentyfikowane charakterystyki modalne konstrukcji rzeczywistej i odczytane z modelu uproszczonego. Porównano również ugięcia pod statycznym obciążeniem próbny. Dla porównania, częstotliwości zidentyfikowanych bliskich sobie modów giętnych pionowych (1 i 3) zostały uśrednione. Podobnie ugięcia z próbnego obciążenia zostały uśrednione w poprzek

wiaduktu. Przedstawione w tabeli zgodności są zadowalające i model został użyty w dalszych analizach.

Tablica 5.6: Porównanie częstotliwości drgań własnych i ugięć uproszczonego modelu 2D i konstrukcji rzeczywistej

Źródło	Częstotliwości			Próbne obciążenie U1			Próbne obciążenie U2		
	$f_1$	$f_2$	$f_3$	P1/4	P2/4	P3/4	P1/4	P2/4	P3/4
Model 2D	2.49	3.43	5.54	-16.20	-7.86	6.51	-2.49	-11.68	-8.30
Konstrukcja rzeczywista	2.52	3.43	5.84	-16.30	-8.26	5.83	-2.66	-11.49	-8.06
Porównanie	99%	100%	95%	100%	95%	112%	94%	102%	103%



Rysunek 5.24: Postaci drgań własnych uproszczonego modelu 2D: (a) mod 1, (b) mod 2, (c) mod 3

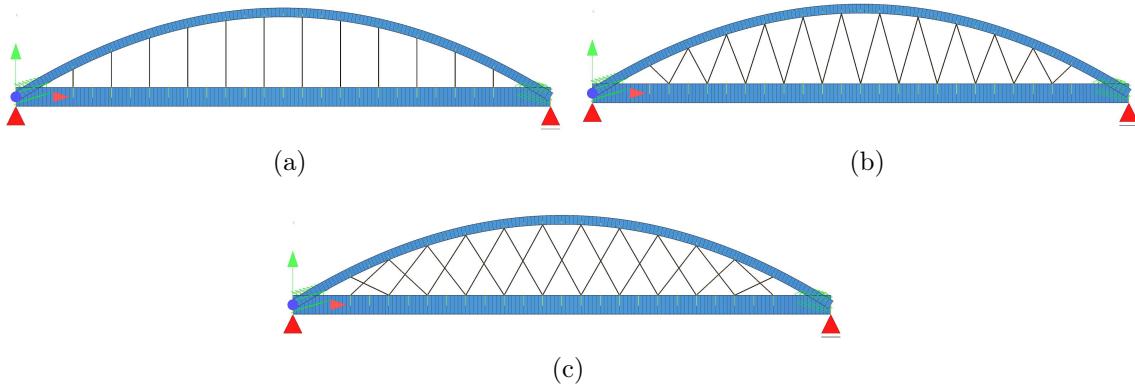
Model uproszczony stworzono w trzech wariantach różniących się rozmieszczeniem wieszaków. Przyjęte układy podwieszenia pomostu do łuku pokazano na rysunku 5.25. Zgodnie z wcześniej przytoczonymi założeniami przygotowano wariant z wieszakami prostymi, wariant z wieszakami ukośnymi (Nielsena) i wariant z przecinającymi się wieszakami ukośnymi (Network).

### 5.5.2 Założenia do optymalizacji

W procesie poczyniono szereg założeń związanych z wytrzymałością materiałów, uwarunkowaniami normowymi i ogólnymi warunkami wykonalności. Zakresy możliwych wartości zmiennych projektowych określonych na rysunku 5.22 przedstawiono w tabeli 5.7.

#### Stan Graniczny Nośności

W trakcie optymalizacji, dla każdego rozwiązania sprawdzone zostały warunki Stanu Granicznego Nośności wg PN-EN 1990 i PN-EN 1991-2. Do modelu wiaduktu przyłożono obciążenia stałe od ciężaru własnego konstrukcji i wyposażenia oraz ruchome w postaci Modelu Obciążenia 71. Współczynnik klasy obciążenia ustalono jako



Rysunek 5.25: Przyjęte warianty układu wieszaków: (a) wieszaki proste, (b) wieszaki ukośne, (c) Network

Tablica 5.7: Zakresy zmiennych projektowych zastosowane w optymalizacji

Element	Łuk	Ściąg	Wieszak
Zmienna	$h_1$	$h_2$	$d_1$
Zakres dopuszczalny [mm]	150 – 2500	1000 – 4500	10 – 200

$\alpha = 1.21$ , a współczynnik przewyższenia dynamicznego (WPD) równy  $\phi = 1.072$ . Obliczając WPD przyjęto przypadek starannie utrzymywane toru i długość miarodajną dla obiektu łukowego jako  $L_\phi = 0.5L_t = 35$  m. W analizie statycznej i kombinacyjnej wyznaczono obwiednie obliczeniowych wartości sił normalnych i momentów zginających. Następnie dla każdego elementu konstrukcyjnego (łuku, ściągu i wieszaków) obliczono maksymalne naprężenia zredukowane H-M-H. Konstrukcję wiaduktu WK2 wykonano ze stali S355, a wieszaki prętowe ze stali S460. Wyznaczono dopuszczalne wartości naprężen obliczeniowych. Dla stali S355 uzyskano wartość  $\sigma_{355}^d = 355/1.0 = 355$  MPa, a dla stali S460  $\sigma_{460}^d = 460/1.0 = 460$  MPa.

### Stan Graniczny Użytowania

Każdy z rezultatów oceniono również w Stanie Granicznym Użytowania przez wyznaczenie maksymalnego przemieszczenia przęsła od obciążen ruchomych o wartościach charakterystycznych. Wartość graniczną przyjęto zgodnie z zaleceniem PN-EN 1990 2004a jako  $L/600 = 70000/600 = 116$  mm. Spośród przedstawionych w punkcie 1.4.3 kryteriów bezpieczeństwa do oceny rozwiązań wybrały jedynie ugięcia przęsła. Często decydujące o poprawności rozwiązania przyspieszenia maksymalne pomostu są funkcją celu optymalizacji więc nie są ograniczane jej jedynie do poprawnych rozwiązań. Zaniechano również sprawdzenia skręcenia przęsła i obrotów na podporach. Nie rozpatrywano kryterium komfortu pasażerów z uwagi na brak uwzględnienia wpływu interakcji pomiędzy pojazdem, a konstrukcją.

### Analiza dynamiczna

Analizę dynamiczną przeprowadzano w module DYNA środowiska MES SOFiSTiK. Wykorzystano metodę bezpośredniego całkowania równań ruchu Newmarka. Ana-

lizę przeprowadzono jako liniową. Zgodnie z zaleceniami PN-EN 1990 2004b należy uwzględnić odpowiedź dynamiczną w zakresie częstotliwości do 30Hz. Aby zapewnić poprawne odwzorowanie przyspieszeń i częstotliwości w zadanym zakresie przyjęto krok czasowy równy  $\Delta t = 0.005\text{ s}$  (próbkowanie 200 Hz). Analizę dynamiczną przeprowadzono dla wszystkich dziesięciu modeli obciążen pociągami uniwersalnymi HSLM-A wg PN-EN 1991-2 (p. 1.4.3). Prędkości pociągów przyjmowano zgodnie z zaleceniem w zakresie od 40 km/h do maksymalnej prędkości obliczeniowej ( $1.2 \times$  nominalna prędkość maksymalna). Jednakże odstępując od zaleceń nie przyjmowano stałego przyrostu prędkości. Wybrano jedynie prędkości które mieszczą się w powyższym zakresie oraz są prędkościami krytycznymi wyznaczonymi dla pierwszych dwóch częstotliwości drgań własnych. Prędkości krytyczne obliczano na podstawie wzoru 1.3. Założono, że odpowiedź obiektu osiąga swoją maksymalną wartość dla prędkości krytycznej i przy zwiększeniu prędkości nie przekracza tej wartości (J.M.Goicolea-Ruigomez2008). Potrzebne częstotliwości drgań własnych odczytywano z modelu numerycznego po przeprowadzeniu analizy modalnej. Dla każdego rodzaju pociągu HSLM-A indywidualnie wyznaczano prędkość na bazie typowego dla pociągu HSLM-A rozstawu osi  $d$ , odczytanych częstotliwości drgań własnych  $\phi_i$  oraz przyjmując wartość  $n = 1, 2 \dots 10$ . Wybierano taką wartość dzielnika  $n$ , aby prędkość krytyczna związana z częstotliwością  $\phi_i$  była jak najwyższa i mieściła się w dopuszczalnym zakresie. Dodatkowo dla każdego pociągu dodano maksymalną dozwoloną prędkość pociągu na linii. Podsumowując dla danego wariantu zmiennych projektowych analizę prowadzono dla 10 różnych pociągów HSLM-A, po 3 prędkości przejazdu (2 krytyczne i maksymalna). Sumarycznie daje to 30 przejazdów dynamicznych na wariant.

Tłumienie uwzględniono jako masowo-sztywnościowe. Współczynniki Rayleigha (2.43) wyznaczano za każdym razem tak, aby liczba tłumienia dla dwóch pierwszych modów była równa  $\xi = 0.006$ . Wartość została przyjęta na podstawie przeprowadzonej identyfikacji realnego obiektu (Tab. 5.1) dla dwóch pierwszych giętnych, pionowych postaci drgań własnych. Wymagane częstotliwości drgań własnych dla każdego nowego wariantu zmiennych projektowych wyznaczane były w analizie modalnej.

### 5.5.3 Algorytm rozwiązania problemu

Optymalizację przeprowadzono ponownie za pomocą dostosowanego algorytmu MOPSO. Ze względu na uniwersalność algorytmów metaheurystycznych, również w tym przypadku w wielu aspektach tok postępowania jest zbliżony do zastosowanego w procesie kalibracji. Wyróżniono następujące główne kroki wykonywane dla każdego nowego położenia części:

1. Generacja modelu uproszczonego (płaskiego) o wymiarach przekrojów poprzecznych zgodnych ze zmiennymi projektowymi.
2. Wprowadzenie obciążień stałych i ruchomych do obliczeń statycznych.
3. Analiza statyczna, kombinatoryka i obliczenia wytrzymałościowe od obliczeniowych wartości obciążeń statycznych. Wyznaczenie maksymalnych naprężeń H-M-H dla każdego elementu konstrukcyjnego osobno. Wyznaczenie maksymalnych ugięć.
4. Ocena rozwiązania w SGN i SGU na podstawie obliczonych naprężeń i ugięć.

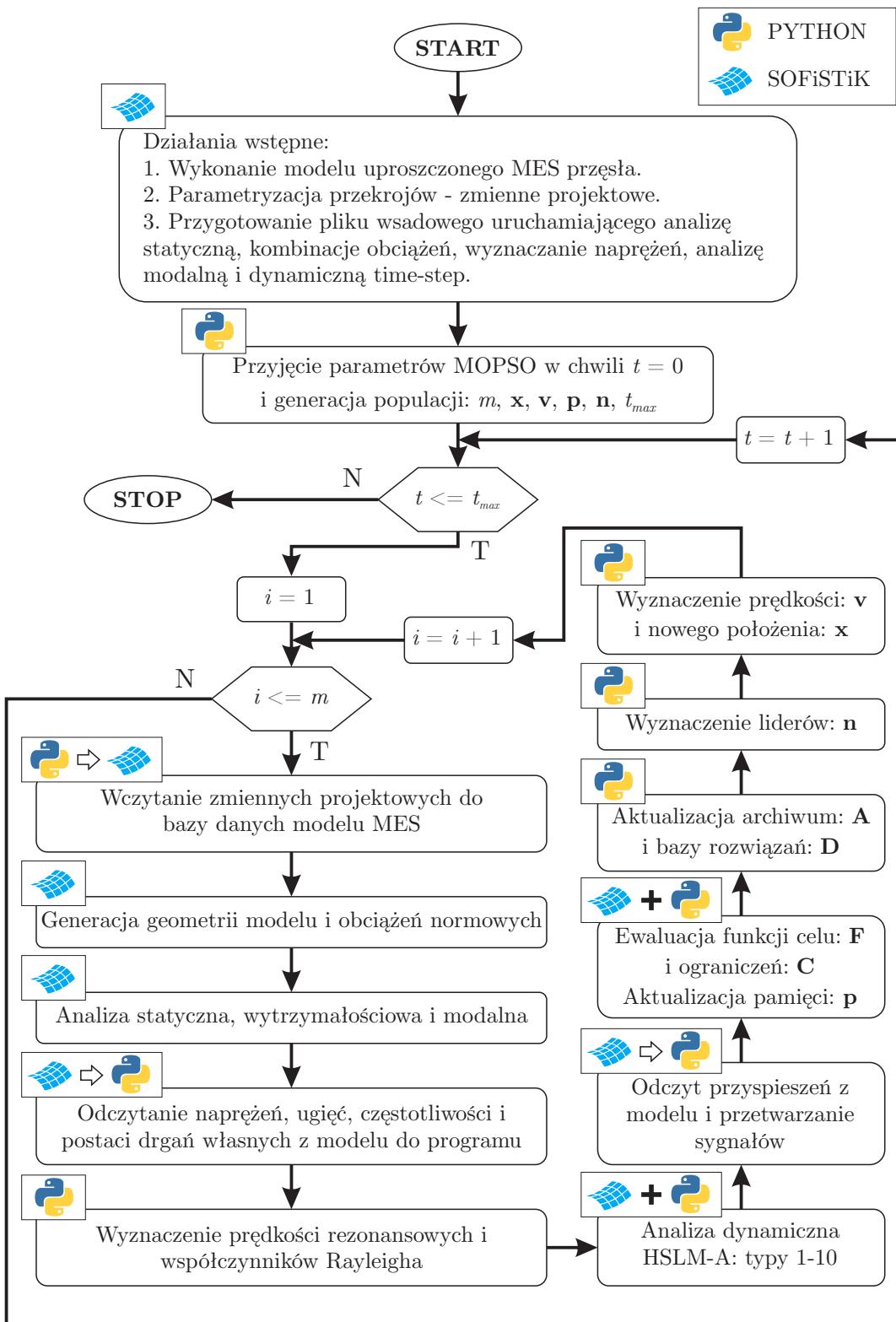
5. Analiza modalna. Wyznaczenie pierwszych trzech zestawów parametrów modalnych: częstotliwości i postaci drgań własnych.
6. Wyznaczenie prędkości rezonansowych i współczynników Rayleigha. Wczytanie danych do bazy danych modelu.
7. Generacja obciążenia pociągiem HSLS-A. Analiza dynamiczna przejazdu pociągu po obiekcie. Odczytanie przebiegu przyspieszeń w czasie dla trzech punktów zlokalizowanych na dźwigarze-ściągu w  $1/4L$ ,  $1/2L$  i  $3/4L$  od podpory. Punkt wykonywany jest dla wszystkich dziesięciu pociągów HSLS-A i wyznaczonych prędkości. Łącznie 30 analiz dynamicznych.
8. Przetworzenie sygnałów przyspieszeń: filtrowanie dolnoprzepustowe w zakresie do 30 Hz i usunięcie składowej stałej. Wyznaczenie wartości maksymalnej przyspieszeń ze wszystkich przebiegów dla wszystkich punktów.
9. Odczytanie objętości konstrukcji stalowej na podstawie przekrojów poprzecznych łuku, ściągu i wieszaków.
10. Zestawienie wektora funkcji celu  $\mathbf{F} = [f_s, f_a]$  oraz wektora ograniczeń  $\mathbf{C} = [c_{sa}, c_{sg}, c_{sh}, c_d]$ . Przekazanie wyznaczonych rezultatów do algorytmu optymalizacyjnego MOPSO.

Na rysunku 5.26 przedstawiono schemat blokowy algorytmu. Logami SOFiSTiK oraz Python oznaczono w jakim środowisku wykonywane są dane kroki oraz kierunek przepływu informacji lub współpracy obu środowisk.

## 5.6 Rezultaty optymalizacji

Optymalizację konstrukcji przeprowadzono dla dwóch funkcji celu  $\mathbf{F} = [f_s, f_a]$ , trzech wariantów rozkładu wieszaków i trzech dozwolonych prędkości maksymalnych pociągu na linii co daje łącznie 9 odrewnnych procesów optymalizacji. Dla każdego z nich zaprezentowano wyniki w postaci graficznej o powtarzalnej strukturze.

Jako pierwszy zaprezentowany jest zbiór wszystkich rozwiązań w dziedzinie funkcji celu  $\mathbf{F}$  dla danego wariantu wieszaków i prędkości maksymalnej (na przykład rys. 5.27). Czerwonym kolorem zaznaczono uzyskane przybliżenie Frontu Pareto wyznaczonego dla ostatecznego zbioru rozwiązań z użyciem luźniejszego kryterium  $\epsilon$ -dominacji. Tolerancję dla poszczególnych funkcji celu przyjęto o wartościach [0.5 t, 0.1 m/s<sup>2</sup>]. Zielony kolor oznacza wszystkie dopuszczalne rozwiązania (OK), to znaczy takie dla których spełnione są ograniczenia SGN i SGU zebrane w wektorze  $\mathbf{C}$ . Dodatkowo wykres podzielono na trzy warianty a-c, wynikające z dodania ograniczenia również na minimalny stopień wytyżenia łuku oraz ściągu. Każdy z wariantów wykresu wynika z innej wartości progowej wytyżenia minimalnego: (a) 0.0, (b) 0.3 oraz (c) 0.5. Punkty niebieskie (NOK-H) niespełniają ograniczeń z góry, a pomarańczowe (NOK-L) niespełniają wymogu minimalnego wytyżenia elementów konstrukcyjnych - z dołu. Czarną przerywaną liniową zaznaczono przyspieszenie 3.5 m/s<sup>2</sup>, czyli wartość dopuszczalną przyspieszeń pomostu wg PN-EN 1990 2004b. Wyświetlanie wyników ograniczono do punktów w obszarze maksymalnych przyspieszeń do 15 m/s<sup>2</sup> i masy konstrukcji do 200 t.



Rysunek 5.26: Schemat blokowy algorytmu optymalizacji wielokryterialnej konstrukcji ze względu na jej zachowanie dynamiczne

Druga grafika określa wartości zmiennych projektowych zaprezentowanych w przestrzeni funkcji celu (na przykład rys. 5.28). Do sporządzenia grafiki użyto jedynie punkty, które spełniają warunki ograniczeń od góry. W każdym wariantie (a-c) za pomocą mapy kolorów określono wartość innej zmiennej: (a) wysokości ściągu, (b) - wysokości łuku i (c) średnicy wieszaka. Czarną przerywaną liniową ponownie zaznaczono przyspieszenie  $3.5 \text{ m/s}^2$ . Wyświetlanie wyników ograniczono do punktów w obszarze maksymalnych przyspieszeń do  $10 \text{ m/s}^2$  i masy konstrukcji do 200 t.

Kolejny rysunek (na przykład rys. 5.29) obrazuje zbiór wszystkich rozwiązań w przestrzeni zmiennych projektowych. Kolor punktu oznacza maksymalne przyspieszenia uzyskane w danym rozwiązaniu. Symbolem trójkąta oznaczono rozwiązania charakteryzujące się maksymalnymi przyspieszeniami mniejszymi niż  $3.5 \text{ m/s}^2$ . Rysunek ma za zadanie pokazać tendencję zmiany jednej z funkcji celu w obszarze zmiennych projektowych.

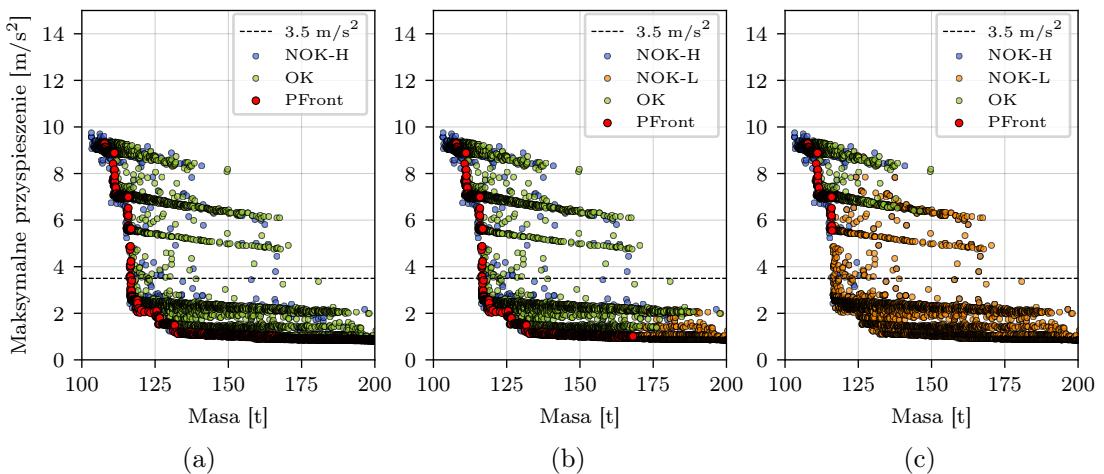
Czwarta wizualizacja wyników pokazuje Zestaw Pareto czyli uzyskane przybliżenie Frontu Pareto w dziedzinie zmiennych projektowych (na przykład rys. 5.30). Kolorem punktu oznaczono maksymalne przyspieszenia. Rysunek pokazano w widoku aksonometrycznym (a) oraz trzech rzutach na poszczególne płaszczyzny (b-d). Punkty oznaczone trójkątem charakteryzują się maksymalnymi przyspieszeniami mniejszymi niż  $3.5 \text{ m/s}^2$ .

Piąty zestaw prezentuje zależność między wartością zmiennej projektowej rozwiązania, a uzyskanymi maksymalnymi wartościami przyspieszeń dla rozwiązań należących do Frontu Pareto. Dla prezentowanych zależności wyznaczono wartości funkcji korelacji (*eng. correlation*), cząstkowej korelacji (*eng. partial correlation*) i semi-cząstkowej korelacji (*eng. semi-partial correlation*).

Dla każdego wariantu optymalizacji oceniono wyniki i wyciągnięto następujące wnioski dotyczące rozwiązania:

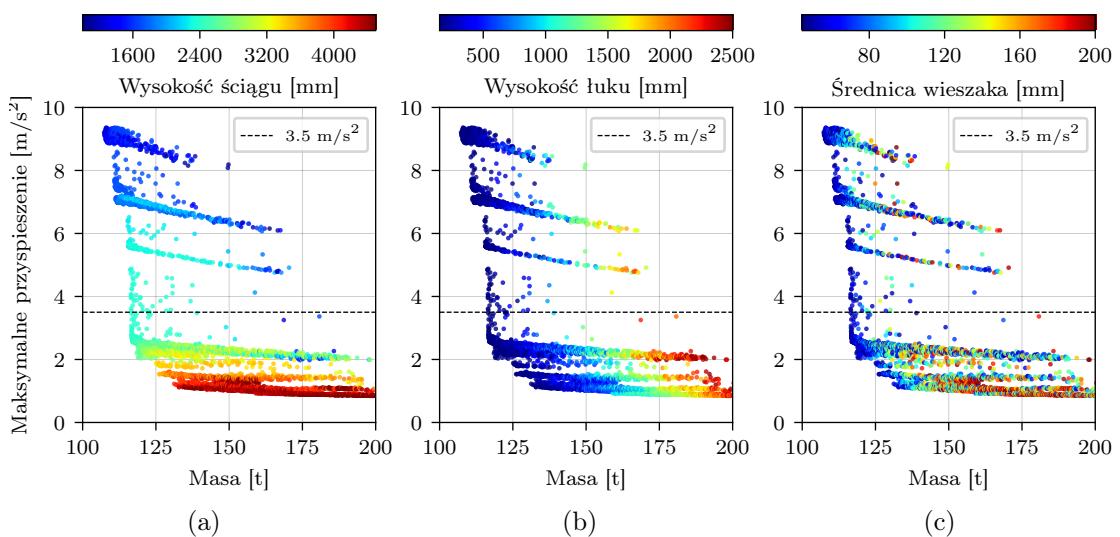
- możliwość wykorzystania układu w danym wariantie wieszaków i przy danej prędkości maksymalnej, przy spełnieniu kryterium bezpieczeństwa  $3.5 \text{ m/s}^2$ ,
- zakresy zmiennych projektowych, pozwalających na optymalne i bezpieczne zaprojektowanie danego typu konstrukcji,
- wpływ poszczególnych zmiennych projektowych na maksymalne przyspieszenia obiektu,

Poniżej zaprezentowano i omówiono wyniki dla każdego z wariantów.

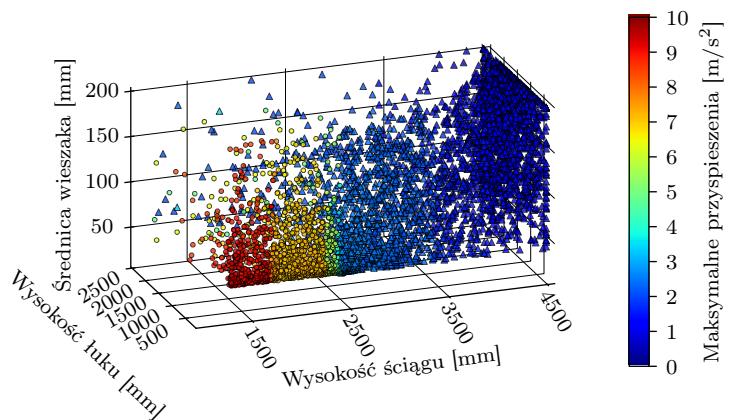


Rysunek 5.27: Maksymalne przyspieszenia pomostu i masa przesła mostu łukowego z wieszakami prostymi przy przejeździe z maksymalną prędkością 160 km/h

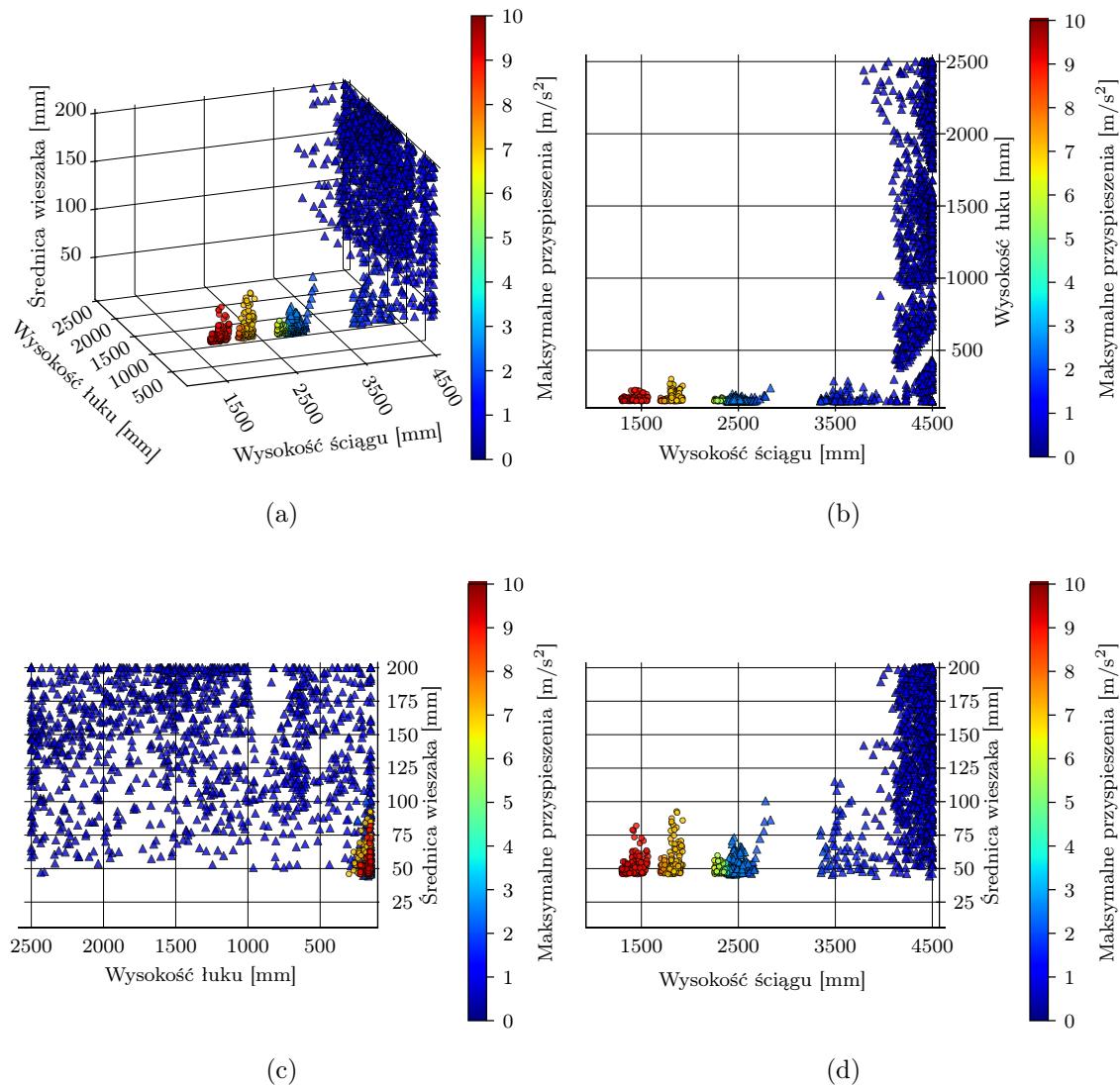
### 5.6.1 Wieszaki Proste - prędkość maksymalna 160 km/h



Rysunek 5.28: Maksymalne przyspieszenia pomostu i masa przesła mostu łukowego z wieszakami prostymi przy przejeździe z maksymalną prędkością 160 km/h

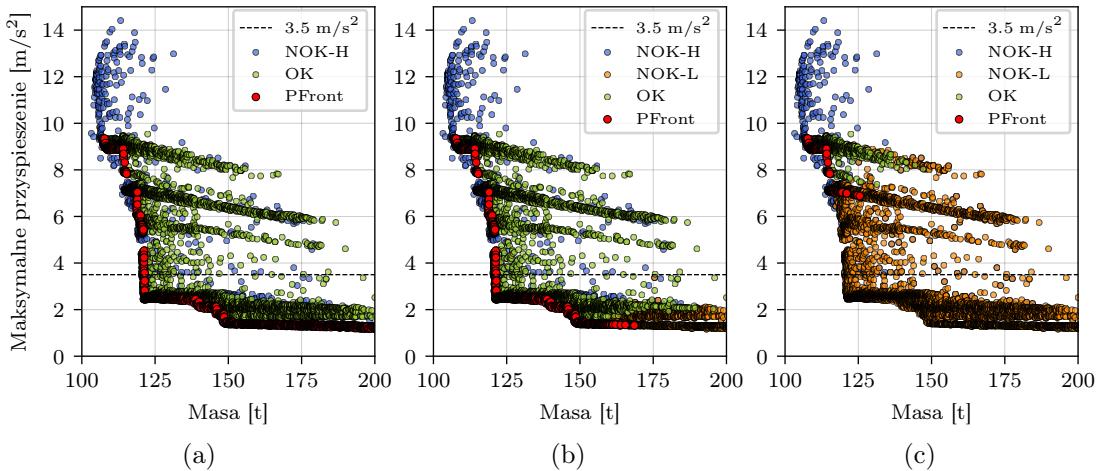


Rysunek 5.29: Maksymalne przyspieszenia pomostu i masa przęsła mostu łukowego

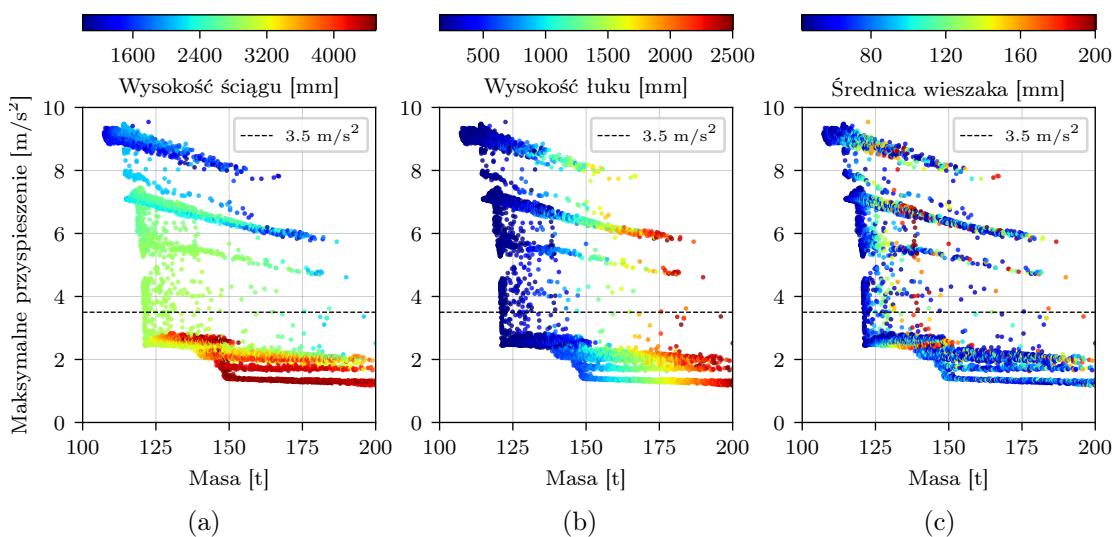


Rysunek 5.30: Maksymalne przyspieszenia pomostu i masa przęsła mostu łukowego z wieszakami prostymi przy przejeździe z maksymalną prędkością 160 km/h

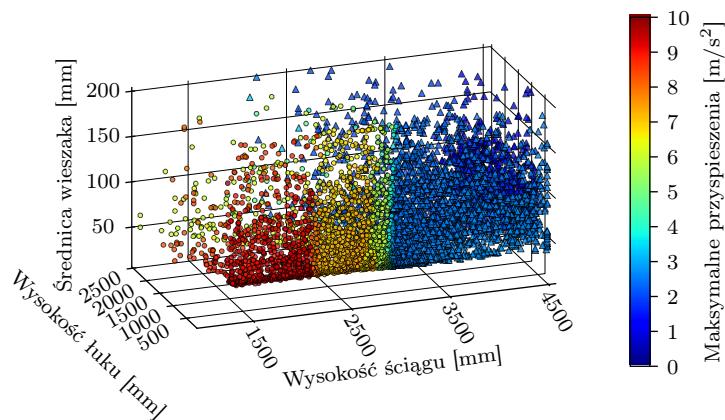
### 5.6.2 Wieszaki Proste - prędkość maksymalna 200 km/h



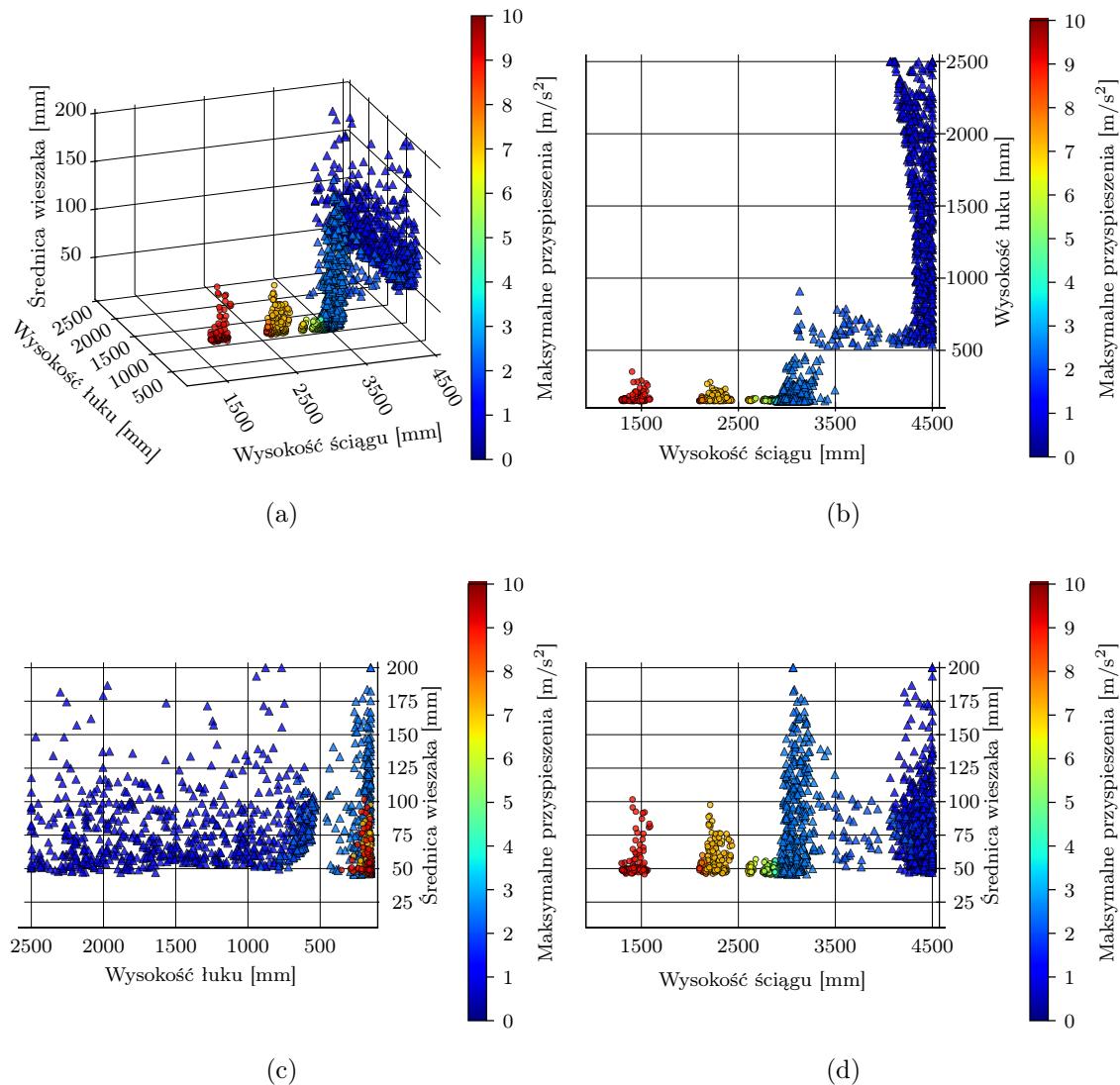
Rysunek 5.31: Maksymalne przyspieszenia pomostu i masa przęsła mostu łukowego z wieszakami prostymi przy przejeździe z maksymalną prędkością 200 km/h



Rysunek 5.32: Maksymalne przyspieszenia pomostu i masa przęsła mostu łukowego z wieszakami prostymi przy przejeździe z maksymalną prędkością 200 km/h

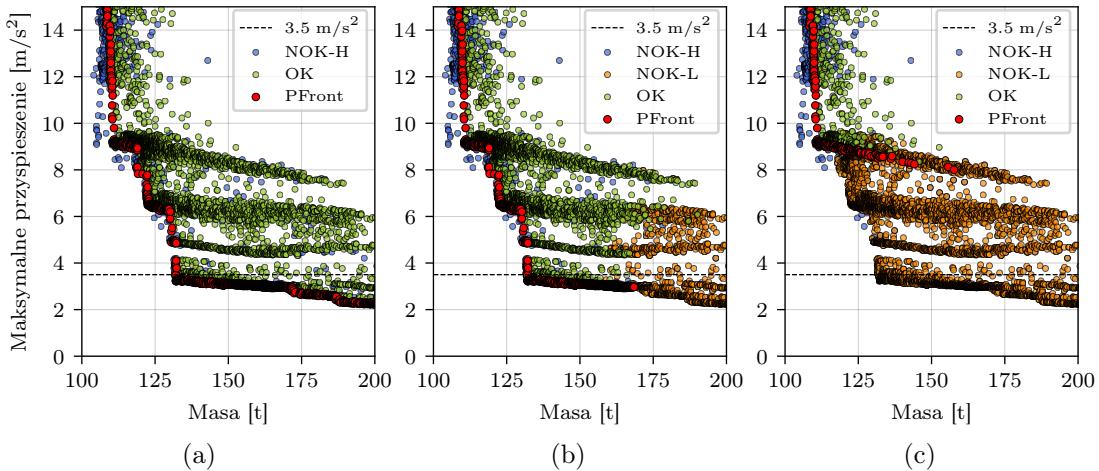


Rysunek 5.33: Maksymalne przyspieszenia pomostu i masa przęsła mostu łukowego

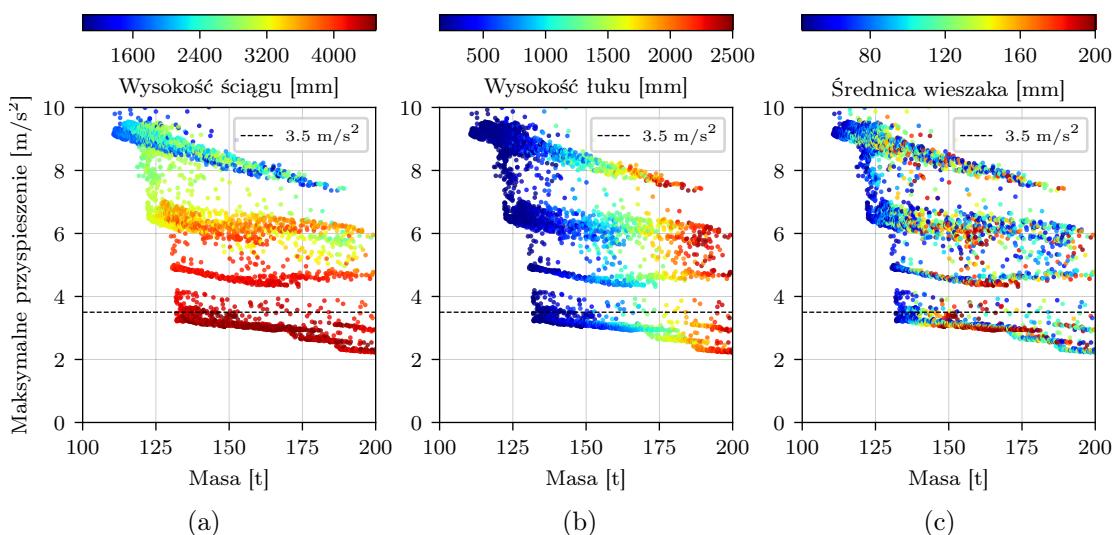


Rysunek 5.34: Maksymalne przyspieszenia pomostu i masa przęsła mostu łukowego z wieszakami prostymi przy przejeździe z maksymalną prędkością 200 km/h

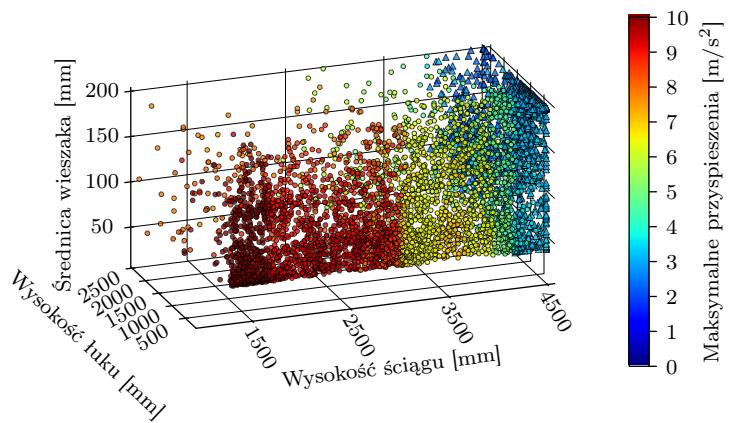
### 5.6.3 Wieszaki Proste - prędkość maksymalna 300 km/h



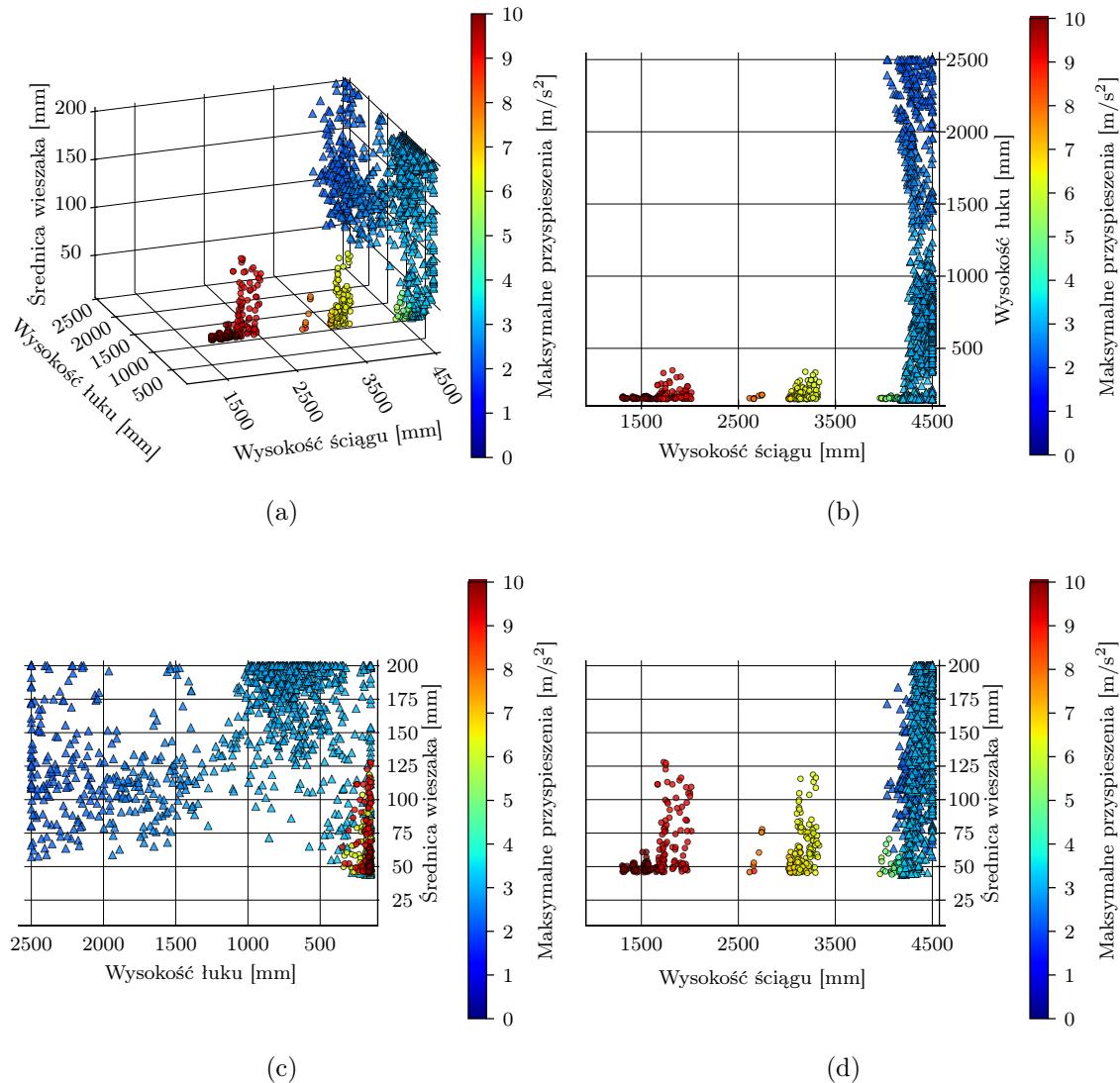
Rysunek 5.35: Maksymalne przyspieszenia pomostu i masa przęsła mostu łukowego z wieszakami prostymi przy przejeździe z maksymalną prędkością 300 km/h



Rysunek 5.36: Maksymalne przyspieszenia pomostu i masa przęsła mostu łukowego z wieszakami prostymi przy przejeździe z maksymalną prędkością 200 km/h

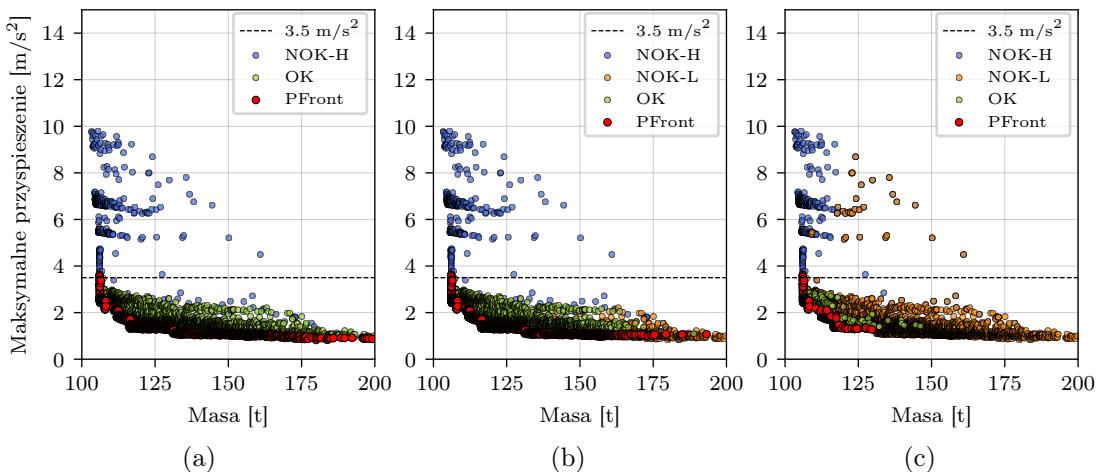


Rysunek 5.37: Maksymalne przyspieszenia pomostu i masa przęsła mostu łukowego

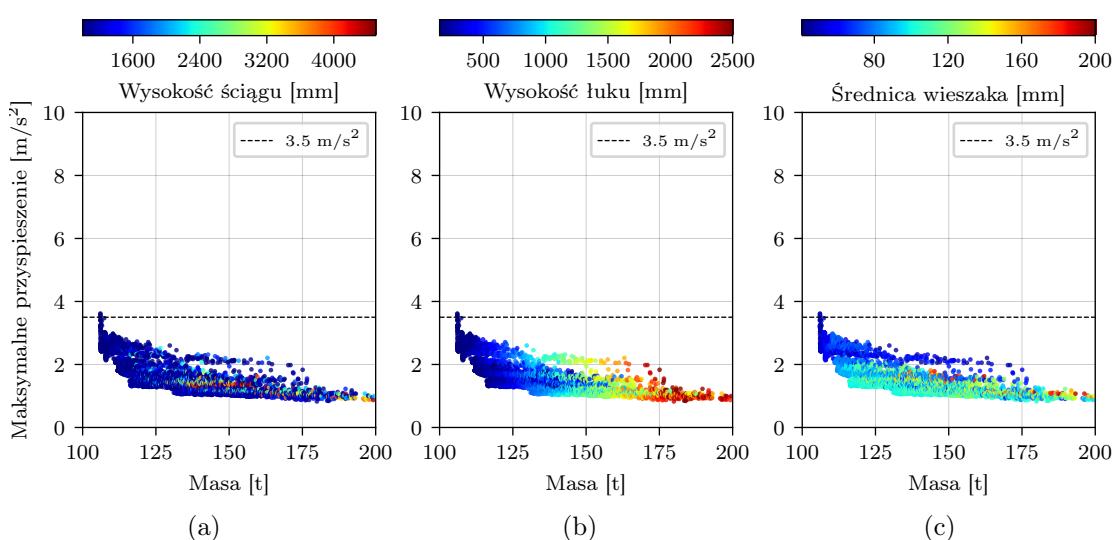


Rysunek 5.38: Maksymalne przyspieszenia pomostu i masa przęsła mostu łukowego z wieszakami prostymi przy przejeździe z maksymalną prędkością 300 km/h

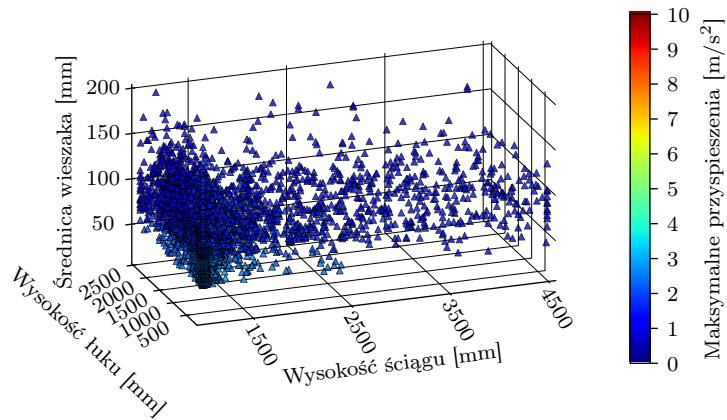
#### 5.6.4 Wieszaki Ukośne - prędkość maksymalna 160 km/h



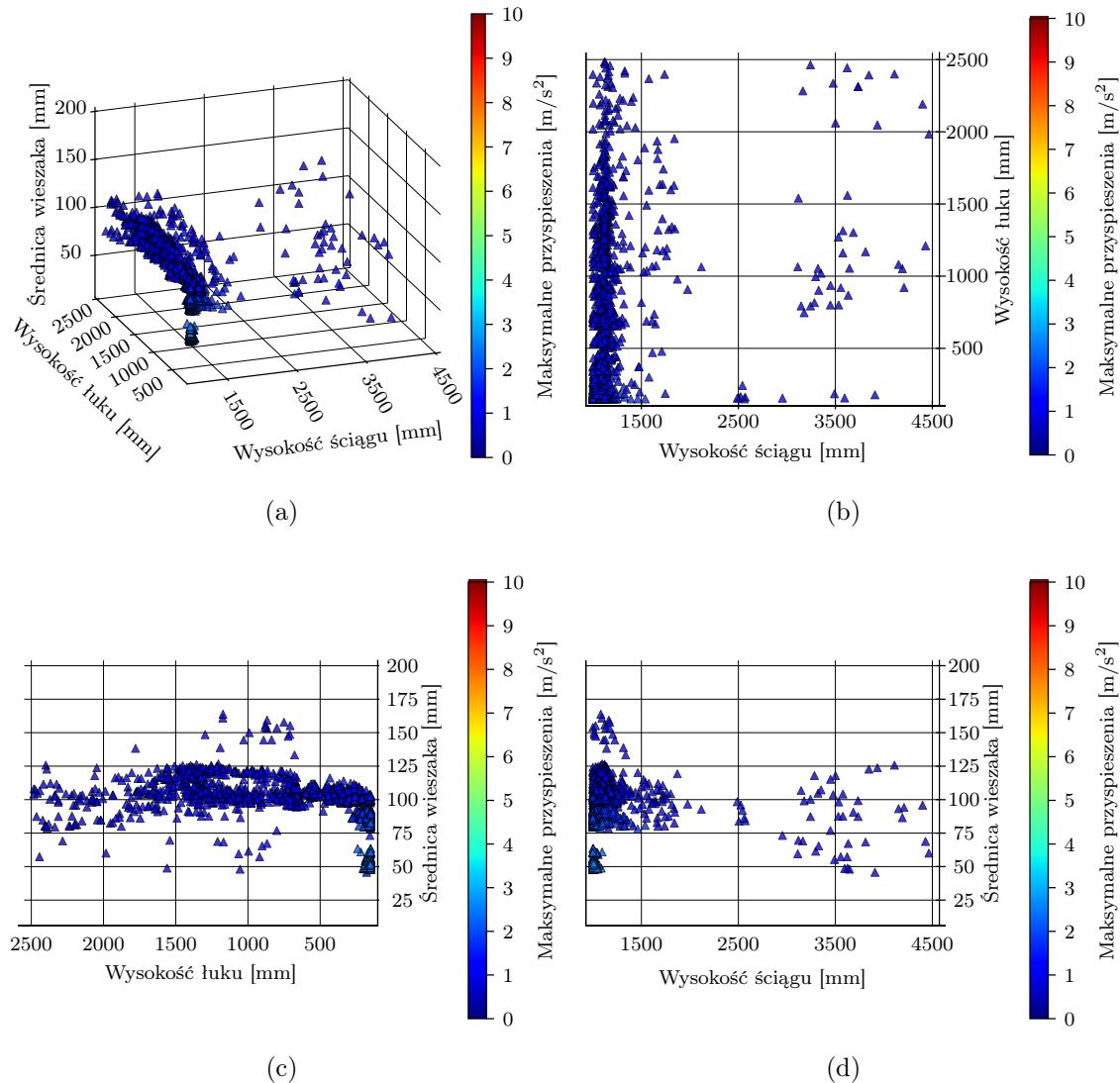
Rysunek 5.39: Maksymalne przyspieszenia pomostu i masa przęsła mostu łukowego z wieszakami ukośnymi przy przejeździe z maksymalną prędkością 160 km/h



Rysunek 5.40: Maksymalne przyspieszenia pomostu i masa przęsła mostu łukowego z wieszakami ukośnymi przy przejeździe z maksymalną prędkością 160 km/h

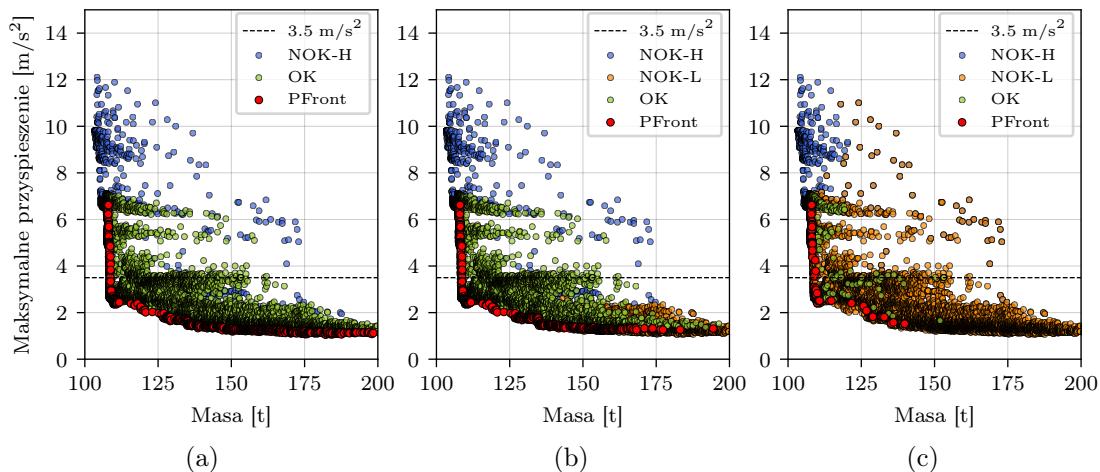


Rysunek 5.41: Maksymalne przyspieszenia pomostu i masa przęsła mostu łukowego

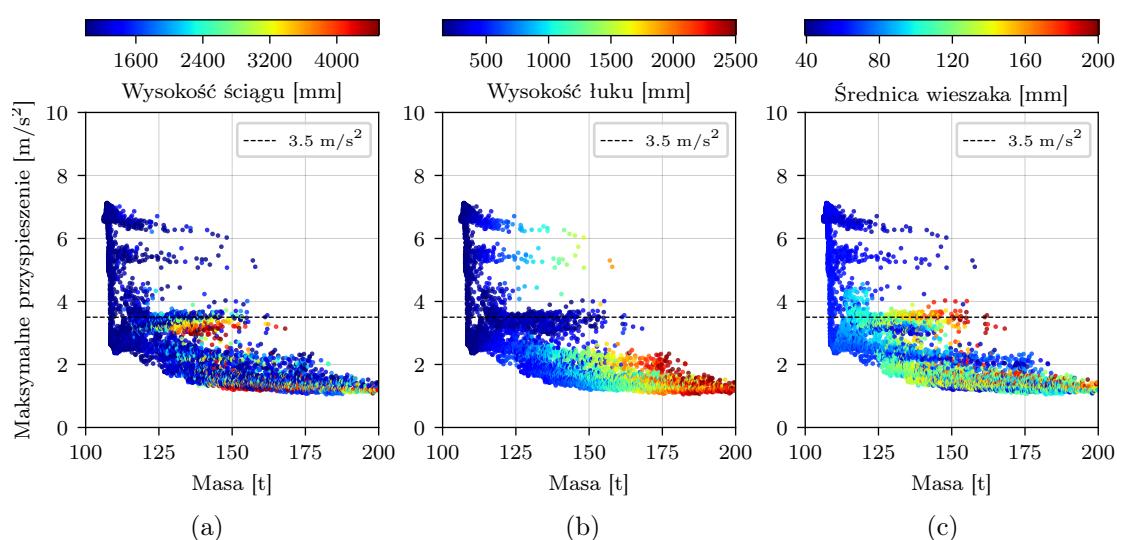


Rysunek 5.42: Maksymalne przyspieszenia pomostu i masa przęsła mostu łukowego z wieszakami prostymi przy przejeździe z maksymalną prędkością 300 km/h

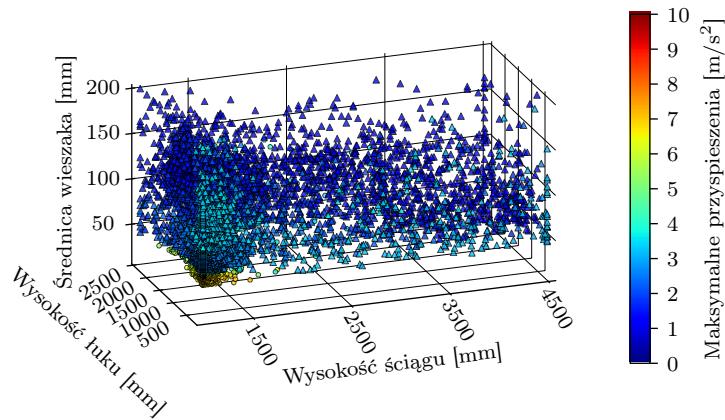
### 5.6.5 Wieszaki Ukośne - prędkość maksymalna 200 km/h



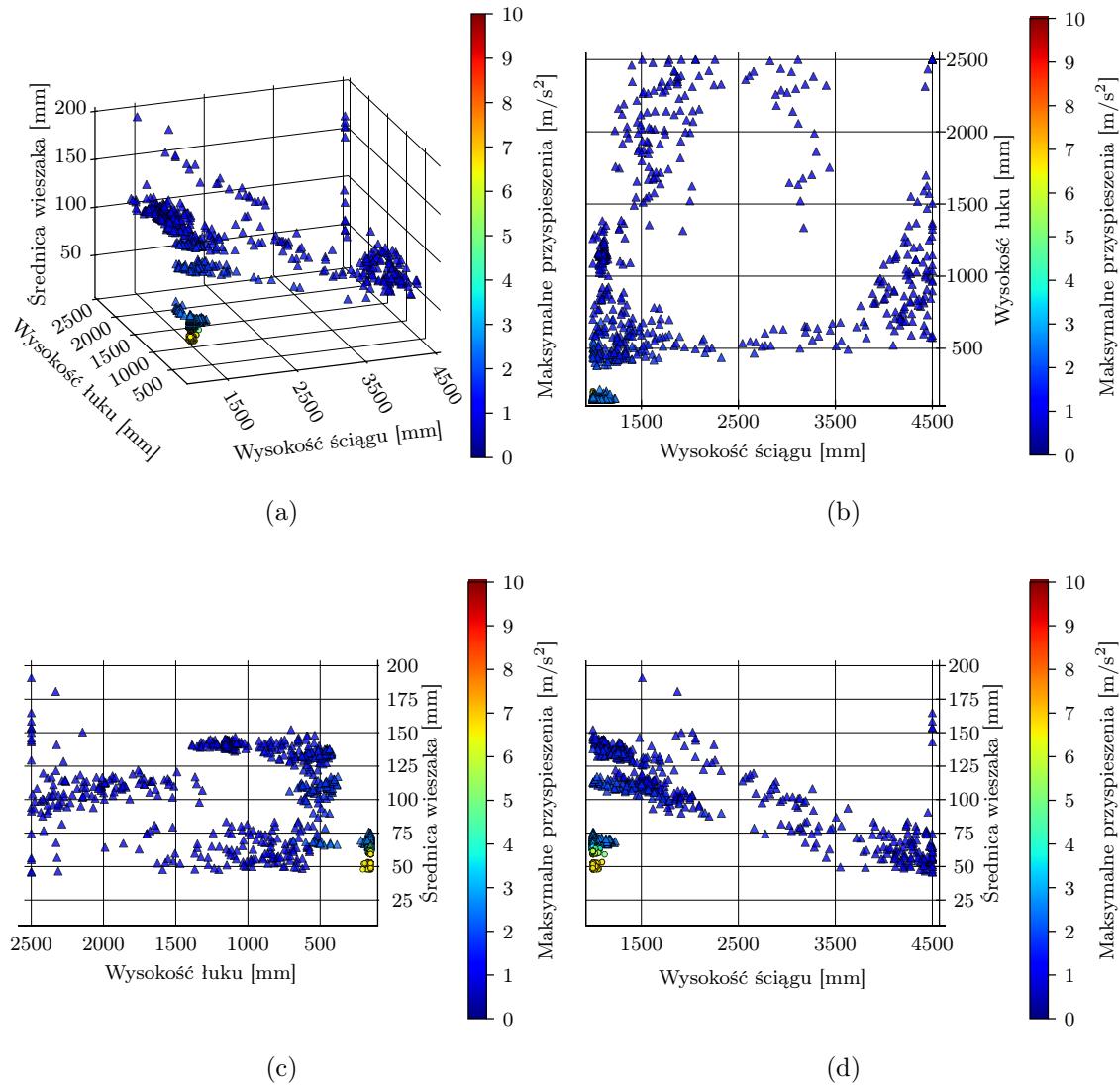
Rysunek 5.43: Maksymalne przyspieszenia pomostu i masa przęsła mostu łukowego z wieszakami ukośnymi przy przejeździe z maksymalną prędkością 200 km/h



Rysunek 5.44: Maksymalne przyspieszenia pomostu i masa przęsła mostu łukowego z wieszakami ukośnymi przy przejeździe z maksymalną prędkością 200 km/h

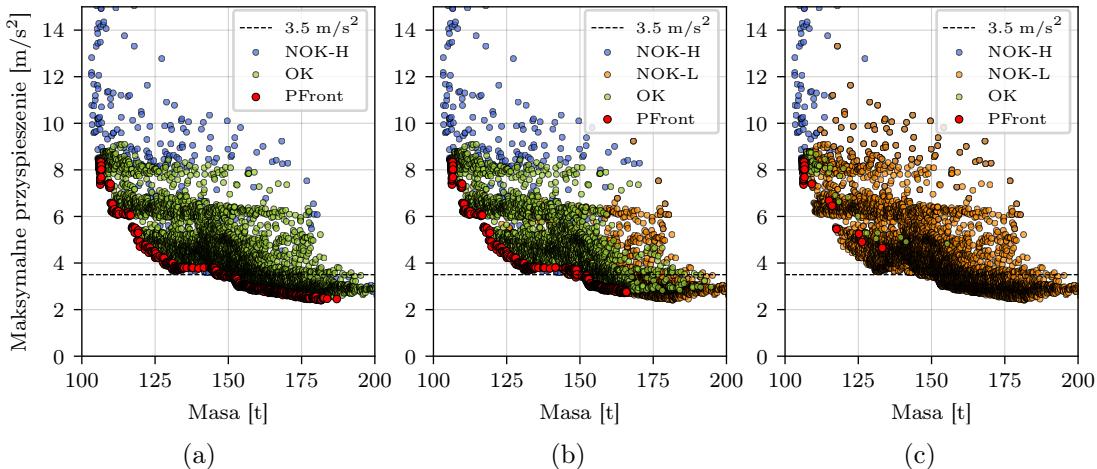


Rysunek 5.45: Maksymalne przyspieszenia pomostu i masa przęsła mostu łukowego

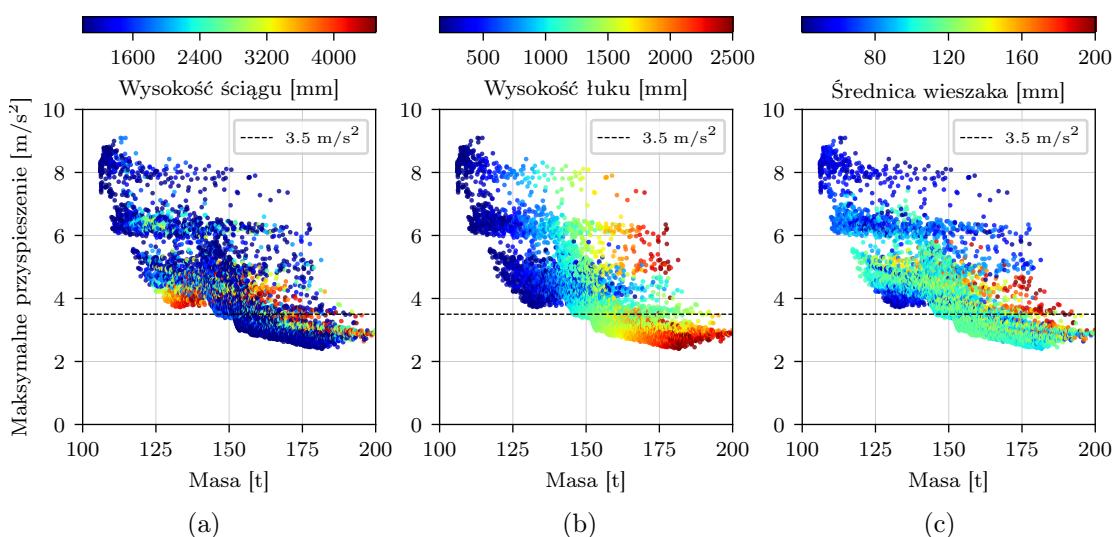


Rysunek 5.46: Maksymalne przyspieszenia pomostu i masa przęsła mostu łukowego z wieszakami prostymi przy przejeździe z maksymalną prędkością 300 km/h

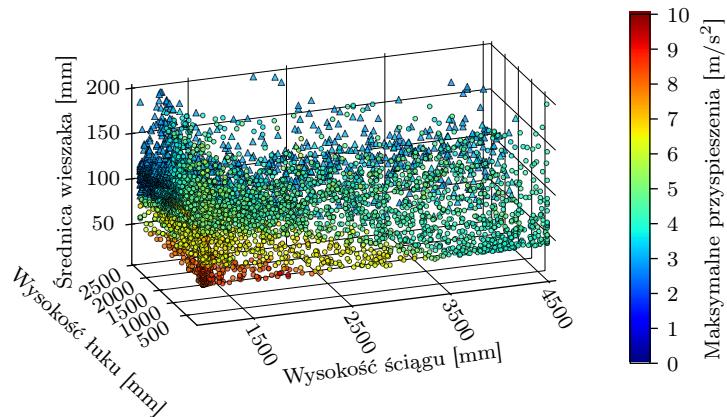
### 5.6.6 Wieszaki Ukośne - prędkość maksymalna 300 km/h



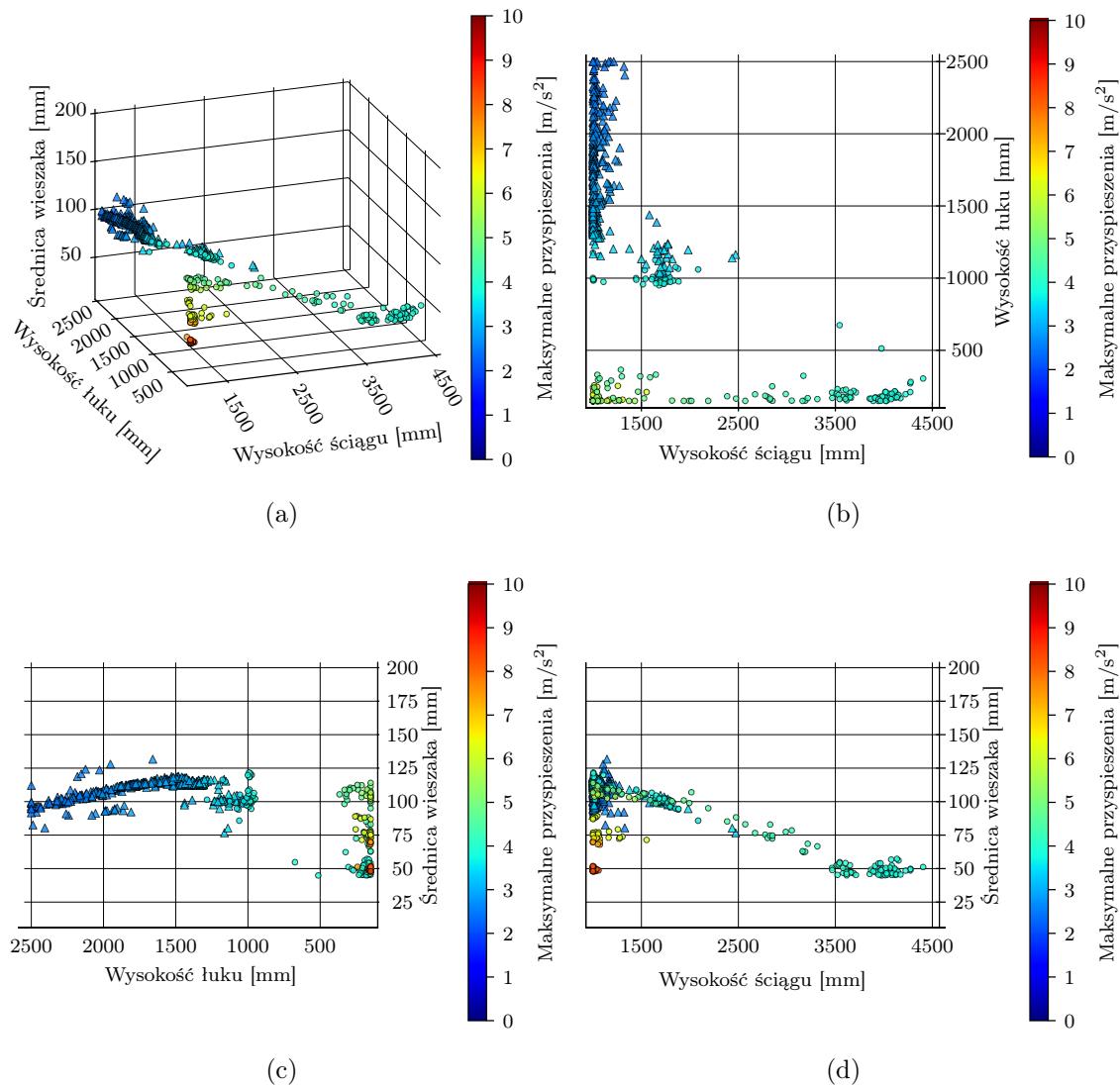
Rysunek 5.47: Maksymalne przyspieszenia pomostu i masa przęsła mostu łukowego z wieszakami ukośnymi przy przejeździe z maksymalną prędkością 300 km/h



Rysunek 5.48: Maksymalne przyspieszenia pomostu i masa przęsła mostu łukowego z wieszakami ukośnymi przy przejeździe z maksymalną prędkością 300 km/h

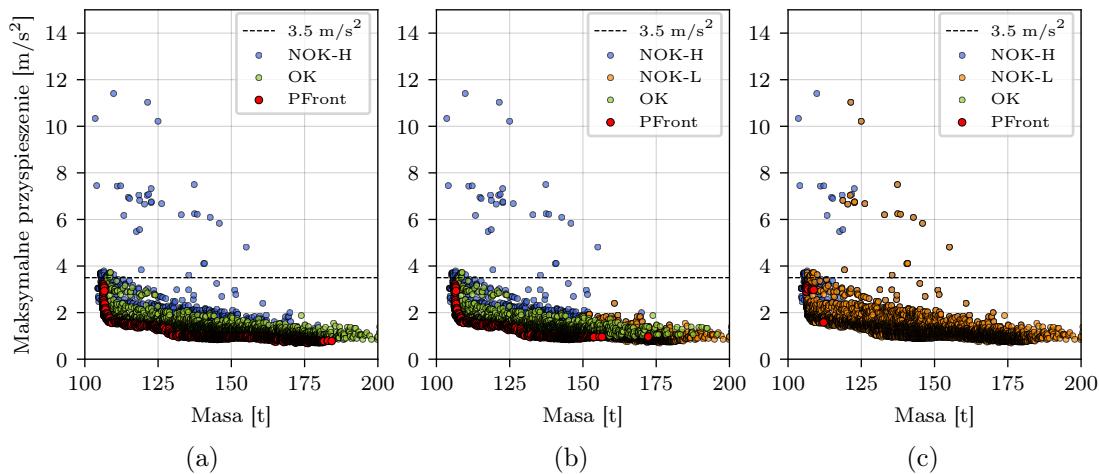


Rysunek 5.49: Maksymalne przyspieszenia pomostu i masa przęsła mostu łukowego

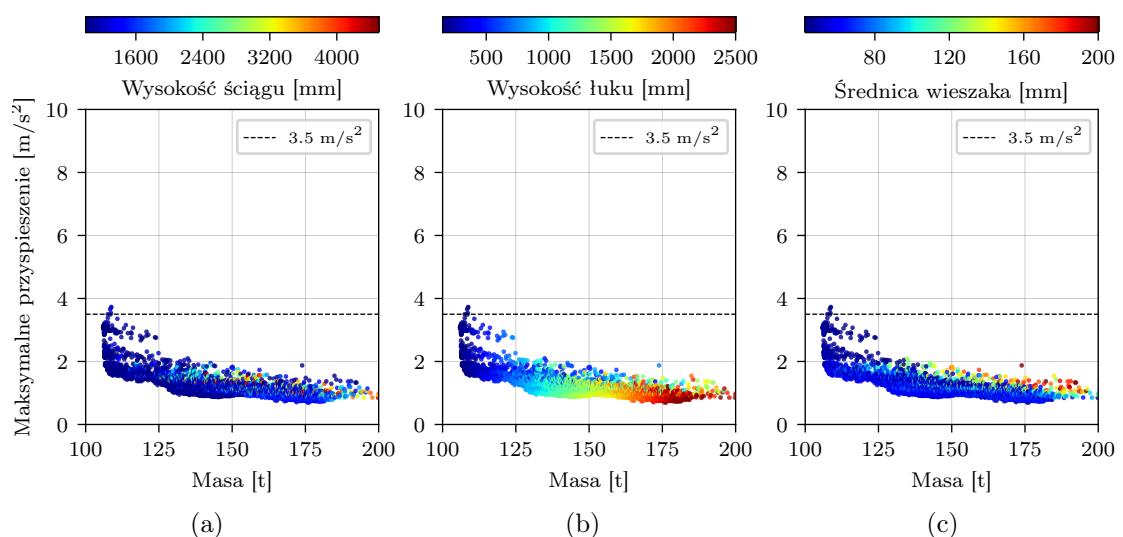


Rysunek 5.50: Maksymalne przyspieszenia pomostu i masa przęsła mostu łukowego z wieszakami prostymi przy przejeździe z maksymalną prędkością 300 km/h

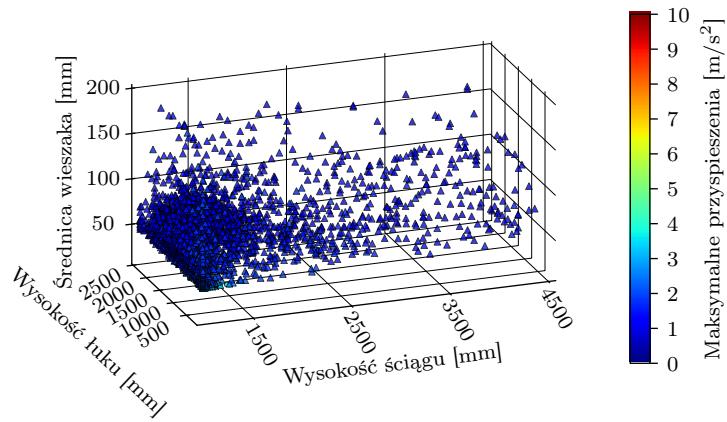
### 5.6.7 Wieszaki Network - prędkość maksymalna 160 km/h



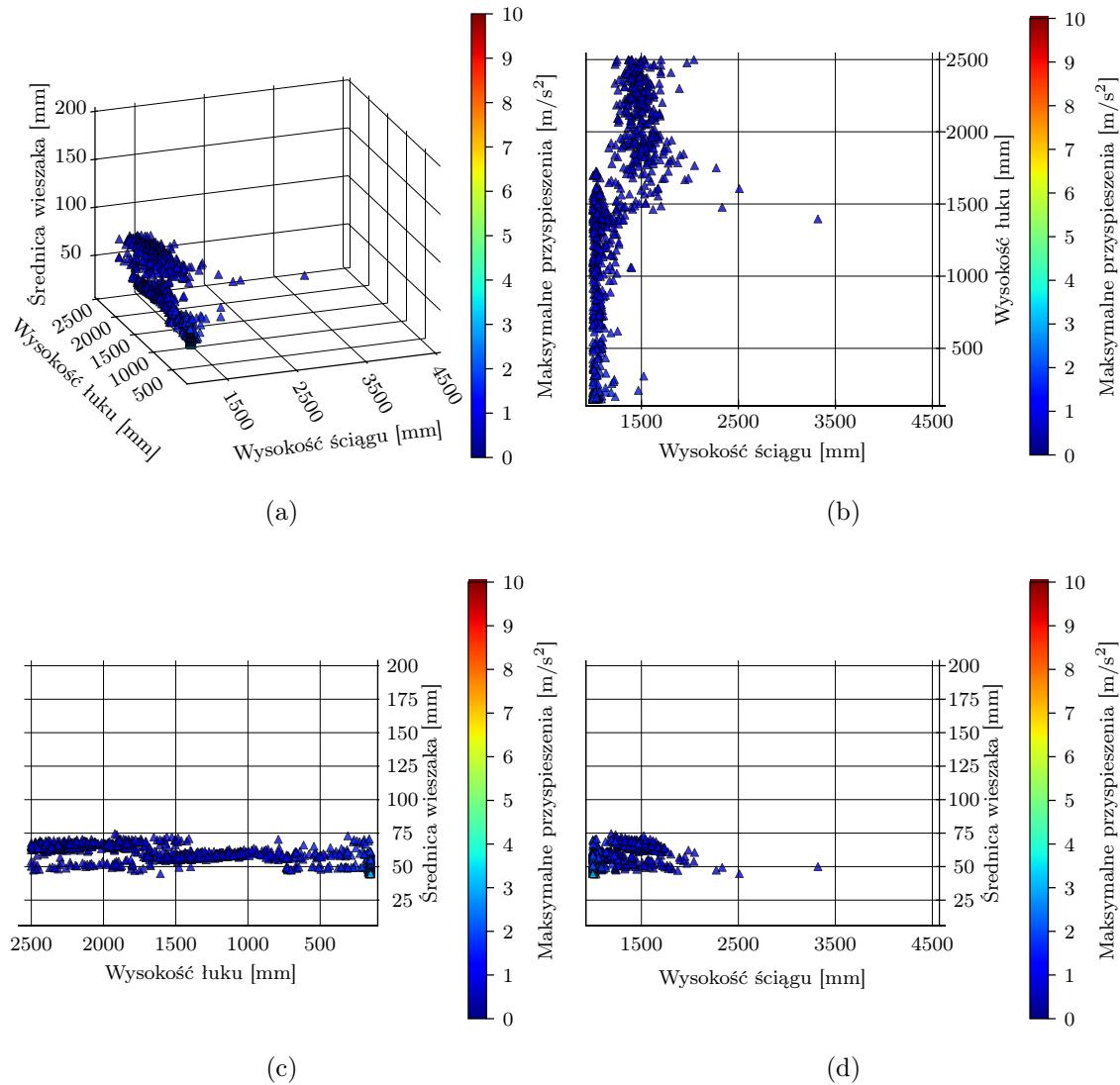
Rysunek 5.51: Maksymalne przyspieszenia pomostu i masa przęsła mostu łukowego z wieszakami typu network przy przejeździe z maksymalną prędkością 160 km/h



Rysunek 5.52: Maksymalne przyspieszenia pomostu i masa przęsła mostu łukowego z wieszakami typu network przy przejeździe z maksymalną prędkością 160 km/h

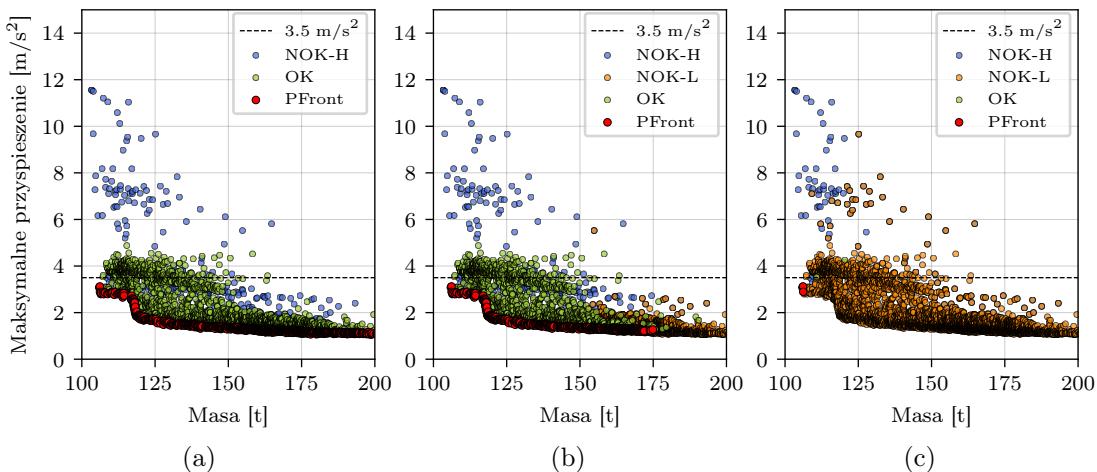


Rysunek 5.53: Maksymalne przyspieszenia pomostu i masa przęsła mostu łukowego

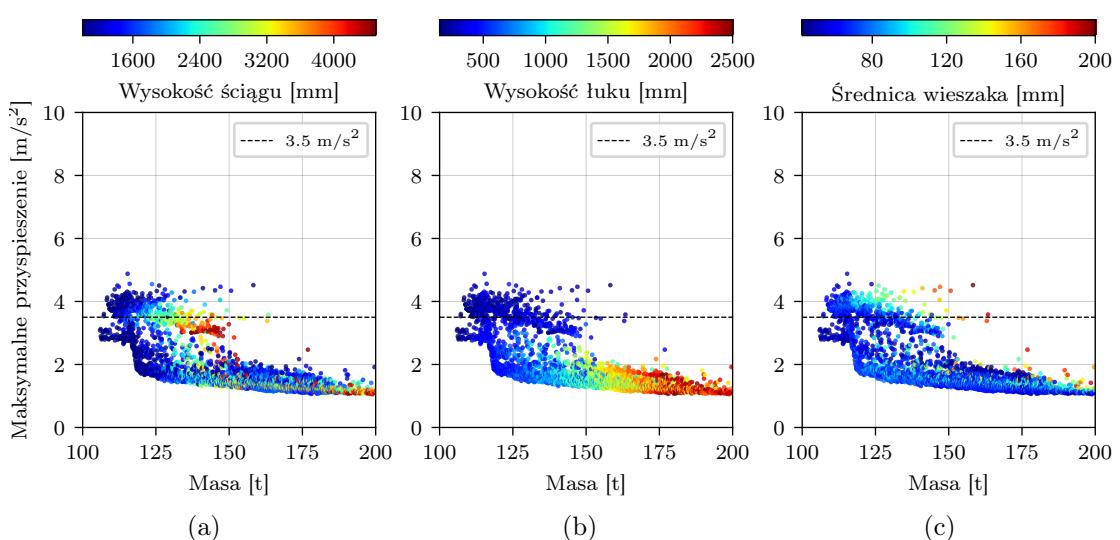


Rysunek 5.54: Maksymalne przyspieszenia pomostu i masa przęsła mostu łukowego z wieszakami prostymi przy przejeździe z maksymalną prędkością 300 km/h

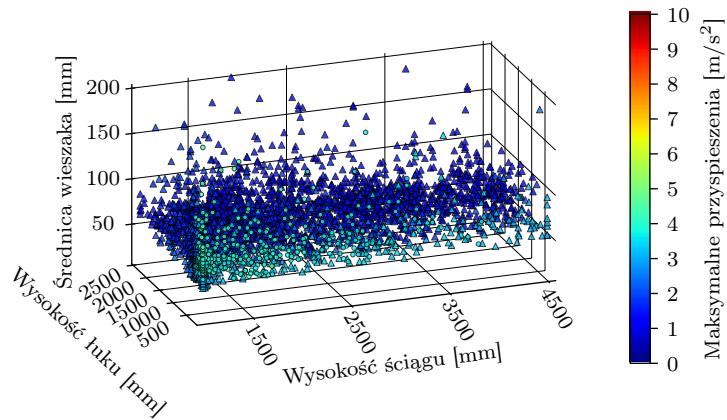
### 5.6.8 Wieszaki Network - prędkość maksymalna 200 km/h



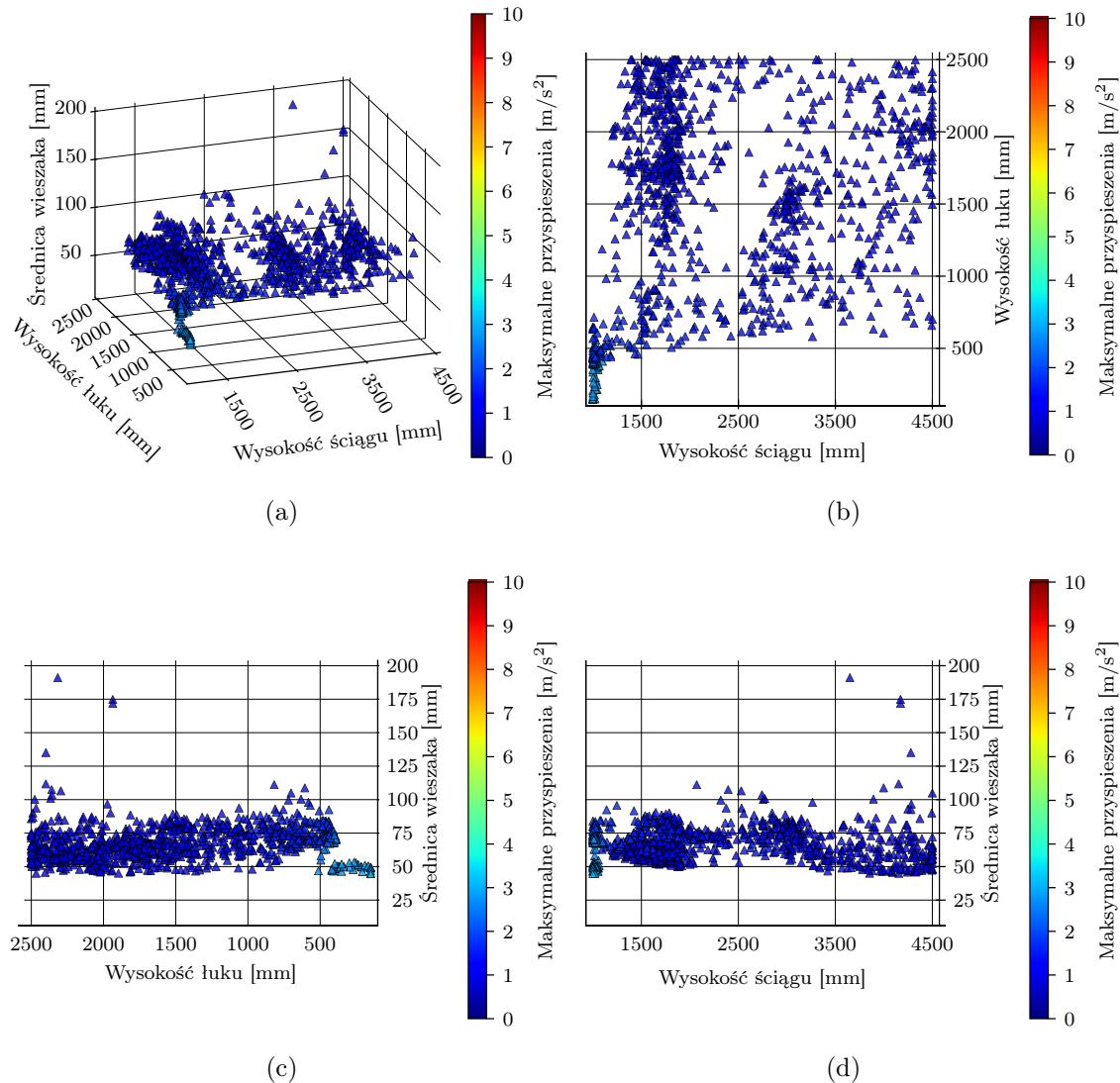
Rysunek 5.55: Maksymalne przyspieszenia pomostu i masa przesła mostu łukowego z wieszakami typu network przy przejeździe z maksymalną prędkością 200 km/h



Rysunek 5.56: Maksymalne przyspieszenia pomostu i masa przesła mostu łukowego z wieszakami typu network przy przejeździe z maksymalną prędkością 200 km/h

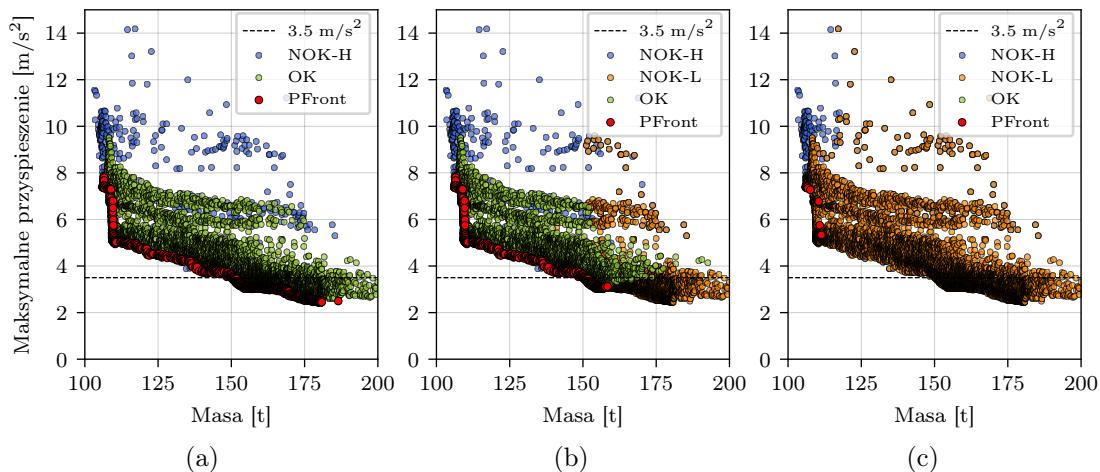


Rysunek 5.57: Maksymalne przyspieszenia pomostu i masa przęsła mostu łukowego

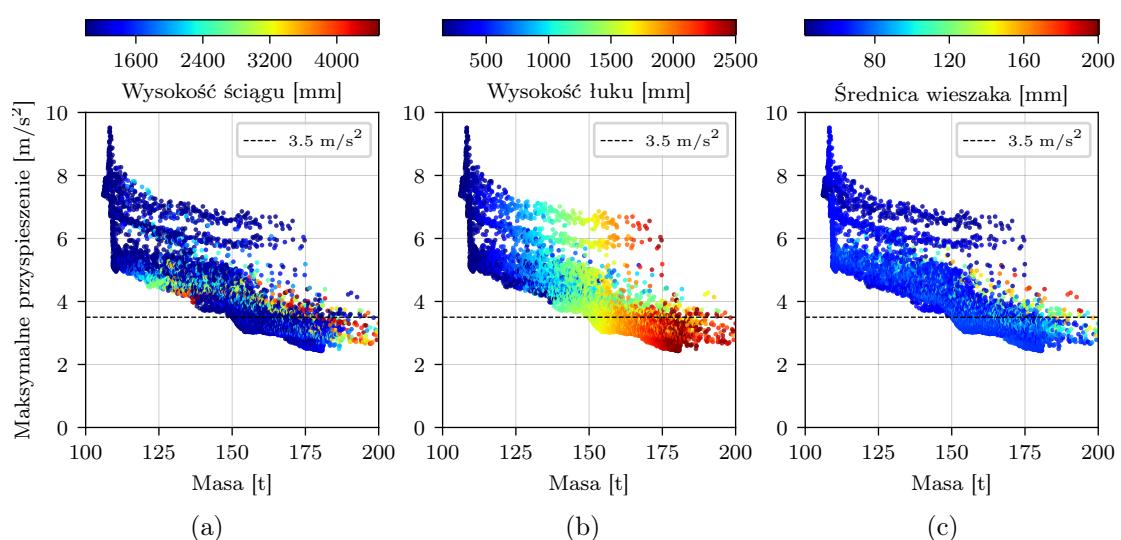


Rysunek 5.58: Maksymalne przyspieszenia pomostu i masa przęsła mostu łukowego z wieszakami prostymi przy przejeździe z maksymalną prędkością 300 km/h

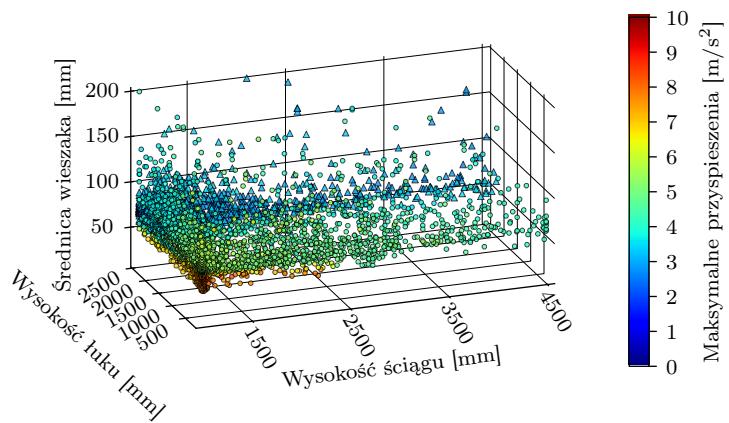
### 5.6.9 Wieszaki Network - prędkość maksymalna 300 km/h



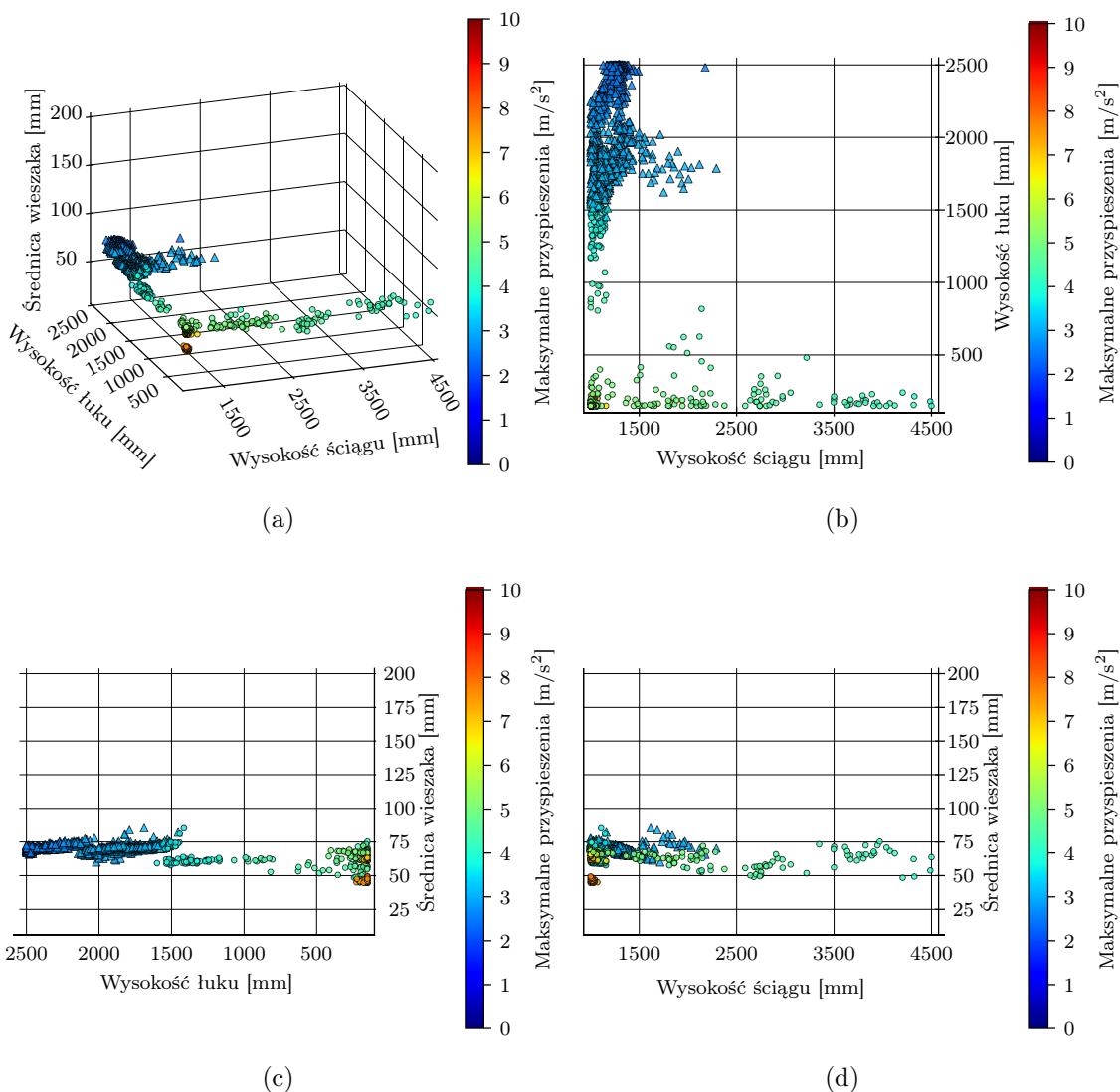
Rysunek 5.59: Maksymalne przyspieszenia pomostu i masa przesła mostu łukowego z wieszakami typu network przy przejeździe z maksymalną prędkością 300 km/h



Rysunek 5.60: Maksymalne przyspieszenia pomostu i masa przesła mostu łukowego z wieszakami typu network przy przejeździe z maksymalną prędkością 300 km/h



Rysunek 5.61: Maksymalne przyspieszenia pomostu i masa przęsła mostu łukowego



Rysunek 5.62: Maksymalne przyspieszenia pomostu i masa przęsła mostu łukowego z wieszakami prostymi przy przejeździe z maksymalną prędkością 300 km/h

## Rozdział 6

### Podsumowanie i wnioski

Podsumowania wnioski

# Bibliografia

- PN-85/S-10030 (1985). *Obiekty mostowe. Obcia?????żenia.*
- Abido, Mohammad Ali (2006). „Multiobjective evolutionary algorithms for electric power dispatch problem”. W: *IEEE transactions on evolutionary computation* 10.3, s. 315–329. ISSN: 1089-778X.
- Allemang, Randall J i David L. Brown (1982). „A correlation coefficient for modal vector analysis”. W: *Proceedings of the 1st international modal analysis conference. Vol. 1.* SEM Orlando, s. 110–116.
- Allemang, Randall J. (2003). „The Modal Assurance Criterion—Twenty Years of Use and Abuse.” W: *Sound \& Vibration* 37.8, s. 14–23. ISSN: 15410161.
- Atyabi, Adham i Sepideh Samadzadegan (2011). „Particle Swarm Optimization : A Survey”. en. W: *Applications of Swarm Intelligence*, s. 14.
- Babeł, Marek i Jacek Gardas (2016). „Ograniczenie węzykowania wózków pojazdów szybowych”. W: *TTS Technika Transportu Szynowego* 23. ISSN: 1232-3829.
- Bachmann, Hugo i in. (2012). *Vibration Problems in Structures: Practical Guidelines*. en. Birkhäuser, s. 248. ISBN: 978-3-0348-9231-5.
- Banach, Mateusz (2017). „Metody obliczeniowe jedno- i wielokryterialnej optymalizacji rojem cząstek. Zastosowanie w bioinformatyce.” pl. Prac. dokt. Instytut Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk w Warszawie, s. 310.
- Bathe, Klaus-Jürgen (2006). *Finite element procedures*. Prentice Hall. ISBN: 978-0-9790049-5-7.
- Blackwell, Tim i James Kennedy (2019). „Impact of Communication Topology in Particle Swarm Optimization”. W: *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* 23.4, s. 689–702. ISSN: 19410026. DOI: 10.1109/TEVC.2018.2880894.
- Blum, Christian i Andrea Roli (2003). „Metaheuristics in combinatorial optimization: Overview and conceptual comparison”. W: *ACM computing surveys (CSUR)* 35.3, s. 268–308. ISSN: 0360-0300.
- Boashash, Boualem (2015). *Time-frequency signal analysis and processing: a comprehensive reference*. Academic Press. ISBN: 0123985250.
- Brincker, Rune, C Ventura i Palle Andersen (2001). „Damping estimation by frequency domain decomposition”. W: *Proceedings of the 19th international modal analysis conference (IMAC)*. T. 1. Orlando, FL, USA, s. 698–703.
- Brincker, Rune i Carlos E. Ventura (2015). *Introduction to Operational Modal Analysis*. English. Chichester, West Sussex: Wiley, s. 1–360. ISBN: 978-1-119-96315-8. DOI: 10.1002/9781118535141.
- Brincker, Rune, Lingmi Zhang i P Andersen (2000). „Modal identification from ambient responses using frequency domain decomposition”. W: *Proc. of the 18\*‘International Modal Analysis Conference (IMAC), San Antonio, Texas.*
- Brincker, Rune, Lingmi Zhang i Palle Andersen (2001). „Modal identification of output-only systems using frequency domain decomposition”. W: *Smart materials and structures* 10.3, s. 441. ISSN: 0964-1726.

- Brownjohn, J. M.W. W i in. (sierp. 2010). „Ambient vibration re-testing and operational modal analysis of the Humber Bridge”. en. W: *Engineering Structures* 32.8, s. 2003–2018. ISSN: 01410296. DOI: 10.1016/j.engstruct.2010.02.034.
- Caicedo, Juan M. (2011). „Practical guidelines for the natural excitation technique (NExT) and the eigensystem realization algorithm (ERA) for modal identification using ambient vibration”. W: *Experimental Techniques* 35.4, s. 52–58. ISSN: 0732-8818. DOI: 10.1111/j.1747-1567.2010.00643.x.
- Calçada, Rui i in. (2008). *Track-Bridge Interaction on High-Speed Railways: Selected and revised papers from the Workshop on Track-Bridge Interaction on High-Speed Railways, Porto, Portugal, 15-16 October, 2007*. CRC Press. ISBN: 0203895398.
- Campigotto, Paolo, Andrea Passerini i Roberto Battiti (2013). „Active learning of Pareto fronts”. W: *IEEE transactions on neural networks and learning systems* 25.3, s. 506–519. ISSN: 2162-237X.
- Caughey, T K i M E J O'kelly (1961). „Effect of damping on the natural frequencies of linear dynamic systems”. W: *The Journal of the Acoustical Society of America* 33.11, s. 1458–1461. ISSN: 0001-4966.
- Chen, Wei-Neng i in. (2012). „Particle swarm optimization with an aging leader and challengers”. W: *IEEE transactions on evolutionary computation* 17.2, s. 241–258. ISSN: 1089-778X.
- Chmielewski, Tadeusz i Zbigniew Zembaty (1998). *Podstawy dynamiki budowli*. Arkady". ISBN: 83-213-4072-5.
- Chopra, Anil K (2012). *Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering*. en. 4th ed. Upper Saddle River, N.J: Prentice Hall, s. 944. ISBN: 978-0-13-285803-8.
- Claus, H. i W. Schiehlen (1998). „Modeling and simulation of railway bogie structural vibrations”. W: *Vehicle System Dynamics* 29.SUPPL. S. 538–552. ISSN: 00423114. DOI: 10.1080/00423119808969585.
- Clerc, Maurice i James Kennedy (2002). „The particle swarm-explosion, stability, and convergence in a multidimensional complex space”. W: *IEEE transactions on Evolutionary Computation* 6.1, s. 58–73. ISSN: 1089-778X.
- Clough, Ray W i Joseph Penzien (1975). *Dynamics of structures*. New York: McGraw-Hill, s. 634. ISBN: 978-0-07-011392-3.
- Coello, Carlos A Coello, Gary B Lamont i David A Van Veldhuizen (2007). *Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems*. Second Edi. Springer, Boston, MA, s. 800. ISBN: 978-0-387-36797-2. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-36797-2>.
- Coello Coello, Carlos A. i Maximino Salazar Lechuga (wrz. 2002). „MOPSO: a proposal for multiple objective particle swarm optimization”. en. W: *2002 World Congress on Computational Intelligence - WCCI'02*. T. 2. IEEE, s. 1051–1056. ISBN: 978-0-7803-7282-5. DOI: 10.1109/CEC.2002.1004388.
- Coello Coello, Carlos A. i Margarita Reyes-Sierra (wrz. 2006). „Multi-Objective Particle Swarm Optimizers: A Survey of the State-of-the-Art”. en. W: *International Journal of Computational Intelligence Research* 2.3, s. 287–308. ISSN: 09741259. DOI: 10.5019/j.ijcir.2006.68.
- Dan, Danhui, Yanyang Chen i Bin Xu (2015). „A PSO driven intelligent model updating and parameter identification scheme for cable-damper system”. W: *Shock and Vibration* 2015. ISSN: 1070-9622.
- Deb, Kalyanmoy i David E Goldberg (1989). „An investigation of niche and species formation in genetic function optimization”. W: *Proceedings of the third international conference on Genetic algorithms*, s. 42–50.

- Deb, Kalyanmoy, Amrit Pratap i in. (2002). „A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II”. W: *IEEE transactions on evolutionary computation* 6.2, s. 182–197. ISSN: 1089-778X.
- Dias, Rui i in. (2008). „A study of the lateral dynamic behaviour of high speed railway viaducts and its effect on vehicle ride comfort and stability”. W: *Bridge Maintenance, Safety, Management, Health Monitoring and Informatics - Proceedings of the 4th International Conference on Bridge Maintenance, Safety and Management*, s. 184. DOI: 10.1201/9781439828434.ch82.
- Dias, Rui Filipe da Silva (2007). „Dynamic Behaviour of High Speed Railway Bridges. Vehicles Lateral Dynamic Behaviour”. Prac. dokt. Universidade Técnica de Lisboa.
- Dudek, Marcin (2008). „Identyfikacja parametrów dynamicznych konstrukcji mostowych na bazie drgań wywołanych obciążeniem środowiskowym : [rozprawa doktorska]”. Prac. dokt.
- Eberhart, Russell, J Kennedy i James Kennedy (lip. 1995). „A new optimizer using particle swarm theory”. en. W: *MHS'95. Proceedings of the Sixth International Symposium on Micro Machine and Human Science*. T. 0-7803-267. IEEE, s. 39–43. ISBN: 978-0-7803-2676-7. DOI: 10.1109/MHS.1995.494215.
- Eberhart, Russell i Yuhui Shi (2001). „Particle swarm optimization: developments, applications and resources”. W: *Proceedings of the 2001 congress on evolutionary computation (IEEE Cat. No. 01TH8546)*. T. 1. IEEE, s. 81–86. ISBN: 0780366573.
- Eberhart, Russell C, Yuhui Shi i James Kennedy (2001). *Swarm intelligence*. Elsevier. ISBN: 0080518265.
- Elbeltagi, Emad, Tarek Hegazy i Donald Grierson (lip. 2005). „Comparison among five evolutionary-based optimization algorithms”. en. W: *Advanced Engineering Informatics* 19.1, s. 43–53. ISSN: 14740346. DOI: 10.1016/j.aei.2005.01.004.
- PN-EN 15528 (2015). *Kolejnictwo – Klasyfikacja linii w odniesieniu do oddziaływań pomiędzy obciążeniami granicznymi pojazdów szynowych a infrastruktura*.
- PN-EN 1990 (2004a). *Eurokod - podstawy projektowania konstrukcji*. Warszawa.
- (2004b). *Podstawy projektowania konstrukcji*.
- PN-EN 1991-1-1 (2004). *Eurokod 1: Oddziaływanie na konstrukcje Część 1-1: Oddziaływanie ogólne*.
- PN-EN 1991-2 (2007). *Eurokod 1: Oddziaływanie na konstrukcje Część 2: Obciążenia ruchome mostów*.
- ERRI (1996). *D 181 - Lateral forces on railway bridges*. Spraw. tech.
- ERRI D214 (1998). *Design of Railway Bridges for Speed up to 350 km/h; Dynamic loading effects including resonance; Final report. Draft C*. Spraw. tech.
- Ewins, David J. (2000). *Modal testing: theory, practice and application*. Baldock: RESEARCH STUDIES PRESS LTD. ISBN: 0863802184.
- Extractor ARTeMIS (1999). „Structural vibration solutions”. W: *Aalborg, Denmark*.
- Felber, Andreas Johann (1994). „Development of a hybrid bridge evaluation system”. en. Prac. dokt. THE UNIVERSITY OF BRITISH COLUMBIA, s. 297.
- Fialko, Sergey (2000). „High-preformance aggregation element-by-element Ritz-gradient method for structure dynamic response analysis”. W: *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences* 7.4, s. 537–550. ISSN: 1232-308X.
- Fieldsend, Jonathan E i Sameer Singh (b.d.). „A multi-objective algorithm based upon particle swarm optimisation, an efficient data structure and turbulence”. W: *Proceedings of the 2002 U.K. Workshop on Computational Intelligence*. Birmingham, UK, s. 37–44.
- Findeisen, Władysław, Jacek Szymanowski i Andrzej Wierzbicki (1980). *Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji*. Wydanie dr. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.

- Fister Jr., Iztok i in. (2013). „A brief review of nature-inspired algorithms for optimization”. W: *Elektrotehniski Vestnik/Electrotechnical Review* 80.3, s. 116–122. ISSN: 00135852. arXiv: 1307.4186.
- Frýba, L (lut. 2001). „A rough assessment of railway bridges for high speed trains”. en. W: *Engineering Structures* 23.5, s. 548–556. ISSN: 01410296. DOI: 10.1016/S0141-0296(00)00057-2.
- Frýba, Ladislav (lut. 1999). *Vibration of Solids and Structures under Moving Loads*. en. Third edit. T. 23. Thomas Telford Publishing, s. 548–556. ISBN: 978-0-7277-3996-4. DOI: 10.1680/vosasuml.35393.
- (2008). „Dynamics of bridges under moving loads (past, present and future)”. W: *Dynamics of High-Speed Railway Bridges*. Red. Raimundo Delgado i in. CRC Press Taylor & Francis/Balkema. Rozd. 3.
- Giorcelli, E i in. (1994). „Modal Analysis and system identification using ARMAV models”. W: *SPIE*. T. 2251, s. 676.
- Goicolea, J. M. i in. (2002). „New dynamic analysis methods for railway bridges in codes IAPF and Eurocode 1”. W: *Railway Bridges Design, Construction and Maintenance*. June. Madrid, s. 1–43.
- Goicolea, J.M. i in. (2008). „Dynamic loads in new engineering codes for railway bridges in Europe and Spain”. W: *Bridges for High-Speed Railways*. CRC Press Taylor & Francis/Balkema. Rozd. 4, s. 16.
- Goicolea, José M i Pablo Antolin (2003). „Dynamic of High-speed Railway Bridges: review of Design Issues and New research for Lateral Dynamics”. W: 1, s. 6–8. DOI: 10.16309/j.cnki.issn.1007-1776.2003.03.004.
- Goicolea, Jose M. i Felipe Gabaldón (2008). „Design issues related to dynamic effects for high speed railway bridges in Spain”. W: *Dynamics of High-Speed Railway Bridges*. Red. Raimundo Delgado i in. Rozd. 2, s. 10.
- Goldberg, David Edward (1995). *Algorytmy genetyczne i ich zastosowania*. Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, s. 408. ISBN: 8320418526.
- Golub, Gene H i Charles F Van Loan (2013). „Matrix computations, 4th”. W: *Johns Hopkins*.
- Haftka, Raphael T, Diane Villanueva i Anirban Chaudhuri (2016). „Parallel surrogate-assisted global optimization with expensive functions—a survey”. W: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 54.1, s. 3–13. ISSN: 1615-1488.
- Harrison, Kyle Robert, Andries P Engelbrecht i Beatrice M Ombuki-Berman (2018). „Self-adaptive particle swarm optimization: a review and analysis of convergence”. W: *Swarm Intelligence* 12.3, s. 187–226. ISSN: 1935-3820.
- Hartmann, Friedel i Casimir Katz (lip. 2007). *Structural Analysis with Finite Elements*. en. 2 wyd. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag. ISBN: 978-3-540-49698-4.
- Ho, B L i Rudolf E Kálmán (1966). „Effective construction of linear state-variable models from input/output functions”. W: *at-Automatisierungstechnik* 14.1-12, s. 545–548. ISSN: 2196-677X.
- Hollkamp, J. J. i R. W. Gordon (2001). „Modal test experiences with a jet engine fan model”. W: *Journal of Sound and Vibration* 248.1, s. 151–165. ISSN: 0022-460X. DOI: 10.1006/jsvi.2001.3758.
- Huang, C S (2000). „Modal identification of structures using ARMAV model for ambient vibration measurement”. W: *12th World Conference on Earthquake Engineering, Auckland, New Zealand, paper*. 1702.
- Huang, Tony i Ananda Sanagavarapu Mohan (2005). „A hybrid boundary condition for robust particle swarm optimization”. W: *IEEE antennas and wireless propagation letters* 4, s. 112–117. ISSN: 1536-1225.

- Hughes, Jake Edmond i in. (lip. 2018). „Particle Swarm Optimization for Active Structural Control of Highway Bridges Subjected to Impact Loading”. en. W: *Shock and Vibration* 2018, s. 1–12. ISSN: 1070-9622, 1875-9203. DOI: 10.1155/2018/4932870.
- Hughes, Thomas (1987). *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.
- Hunt, David L (1992). „Application of an enhanced coordinate modal assurance criterion”. W: *Proc 10th international modal analysis conference*. T. 1. San Diego, CA, s. 66–71.
- Ibrahim, Samir R. (1983). „TIME DOMAIN MODAL PARAMETER IDENTIFICATION AND MODELING OF STRUCTURES.” W: *Proceedings of the American Control Conference*. T. 3. IEEE, s. 989–996. DOI: 10.23919/acc.1983.4788259.
- Inglis, Charles Edward (1934). *A mathematical treatise on vibrations in railway bridges*. Cambridge University Press. ISBN: 1107536529.
- Inman, Daniel J i Gerard Lallement (1995). „A TUTORIAL ON COMPLEX EIGENVALUES”. en. W: *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*. January 1995, s. 7.
- James, G H, Thomas G Carne i James P Lauffer (1995). „The natural excitation technique (NExT) for modal parameter extraction from operating structures”. W: *Modal Analysis-the International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis* 10.4, s. 260. ISSN: 1055-0763.
- James, Gerard (2003). „Analysis of Traffic Load Effects on Railway Bridges”. Prac. dokt. Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden.
- James, GH H, Thomas G Carne i James P Lauffer (1993). „The Natural Excitation Technique (NExT) for Modal Parameter Extraction From Operating Wind Turbines”. W: *NASA STI/Rec on Technical Report N 93.4*, s. 260–277. ISSN: 1055-0763.
- Juang, J-N i Hideto Suzuki (1988). „An eigensystem realization algorithm in frequency domain for modal parameter identification”. W: *Journal of vibration, acoustics, stress, and reliability in design* 110.1, s. 24–29. ISSN: 0739-3717.
- Juang, J. N. i R. S. Pappa (1986). „Effects of noise on modal parameters identified by the eigensystem realization algorithm”. W: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 9.3, s. 294–303. ISSN: 07315090. DOI: 10.2514/3.20106.
- Juang, Jer-Nan (1994). *Applied system identification*. Prentice-Hall, Inc. ISBN: 013079211X.
- Juang, Jer-Nan i Richard S Pappa (1985). „An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction”. W: *Journal of guidance, control, and dynamics* 8.5, s. 620–627. ISSN: 0731-5090.
- Kaczorek, Tadeusz i in. (2016). *Podstawy teorii sterowania*. Wydawnictwo WNT. ISBN: 8301185910.
- Kalman, Rudolf Emil (1963). „Mathematical description of linear dynamical systems”. W: *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series A: Control* 1.2, s. 152–192. ISSN: 0887-4603.
- Kammer, Daniel C (1991). „Sensor placement for on-orbit modal identification and correlation of large space structures”. W: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 14.2, s. 251–259. ISSN: 0731-5090.
- Kang, Fei, Jun-jie Jie Li i Qing Xu (lip. 2012). „Damage detection based on improved particle swarm optimization using vibration data”. en. W: *Applied Soft Computing* 12.8, s. 2329–2335. ISSN: 1568-4946. DOI: 10.1016/j.asoc.2012.03.050.
- Karaś, SŁAWOMIR (2011a). „O metodzie Courbona”. W: *Drogownictwo* 5, s. 172–176. ISSN: 0012-6357.
- (2011b). „Współczynniki dynamiczne obcia?????żen kolejowych w PN-EN 1991-2”. W: *Drogownictwo* 4, s. 135–140.

- Kennedy, J i R Eberhart (lip. 1995). „Particle swarm optimization”. en. W: *ICNN'95 - International Conference on Neural Networks*. T. 4. IEEE, s. 1942–1948. ISBN: 978-0-7803-2768-9. DOI: 10.1109/ICNN.1995.488968.
- Kennedy, James i Russell Eberhart (1995). „47-Particle Swarm Optimization Proceedings., IEEE International Conference”. W: *Proceedings of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks* 11.1, s. 111–117. ISSN: 1598-8619.
- Kennedy, James i Rui Mendes (2002). „Population structure and particle swarm performance”. W: *Proceedings of the 2002 Congress on Evolutionary Computation. CEC'02 (Cat. No. 02TH8600)*. T. 2. IEEE, s. 1671–1676. ISBN: 0780372824.
- Klasztorny, Marian (2005). *Dynamika mostów belkowych obciażonych pociażonymi*. Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne. ISBN: 8320431174.
- Kleiber, Michał (1985). *Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum*. Biblioteka Mechaniki Stosowanej. Państwowe Wydawnictwo Naukowe. ISBN: 8301050519.
- Knowles, Joshua D i David W Corne (2000). „Approximating the nondominated front using the Pareto archived evolution strategy”. W: *Evolutionary computation* 8.2, s. 149–172. ISSN: 1063-6560.
- Kocańda, Stanisław i Józef Szala (1985). *Podstawy obliczeń zmęczeniowych*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe. ISBN: 8301058897.
- Kolousek, Vladimir (1973). *Dynamics in engineering structures*. Red. Reuben Fraser McLean, John Smith Fleming i Doubravka Hajsmanova. London: Butterworths. ISBN: 0408701609.
- Ladislav, Frýba (1996). *Dynamics of Railway Bridges*. Thomas Telford Publishing.
- Lalwani, Soniya i in. (2013). „A comprehensive survey: Applications of multi-objective particle swarm optimization (MOPSO) algorithm”. W: *Transactions on Combinatorics* 2.1, s. 39–101. ISSN: 2251-8657.
- Langtangen, Hans Petter i Kent-Andre Mardal (2019). „Quick Overview of the Finite Element Method”. W: *Introduction to Numerical Methods for Variational Problems*. Red. Hans Petter Langtangen i Kent-Andre Mardal. Cham: Springer International Publishing, s. 1–6. ISBN: 978-3-030-23788-2.
- Lengvarský, Pavol i Jozef Bocko (2013). „Theoretical basis of modal analysis”. W: *American Journal of Mechanical Engineering* 1.7, s. 173–179.
- Li, P., S. L.J. J Hu i H. J. Li (2011). „Noise issues of modal identification using eigensystem realization algorithm”. W: *Procedia engineering* 14, s. 1681–1689. ISSN: 1877-7058. DOI: 10.1016/j.proeng.2011.07.211.
- Liang, Jing J i in. (2006). „Comprehensive learning particle swarm optimizer for global optimization of multimodal functions”. W: *IEEE transactions on evolutionary computation* 10.3, s. 281–295. ISSN: 1089-778X.
- Lv, Zhiming, Linqing Wang i in. (wrz. 2019). „Surrogate-assisted particle swarm optimization algorithm with Pareto active learning for expensive multi-objective optimization”. en. W: *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica* 6.3, s. 838–849. ISSN: 2329-9266, 2329-9274. DOI: 10.1109/JAS.2019.1911450.
- Lv, Zhiming, Jun Zhao i Wei Wang (wrz. 2017). „A multi-objective particle swarm algorithm based on the active learning approach”. en. W: *IECON 2017 - 43rd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*. T. 2017-Janua. IEEE, s. 8716–8720. ISBN: 978-1-5386-1127-2. DOI: 10.1109/IECON.2017.8217532.
- Laziński, Piotr i in. (2015). *Raport z próbnego obciążenia statycznego i dynamicznego Wiadukt Kolejowy WK-2 w ciągu projektowej linii PKM w Gdańsku*. Spraw. tech. Gliwice: Politechnika Ślaska, Zespół Badań Terenowych.
- Łuszczki, Michał (2015). „Różnice między „starymi” a „nowymi” TSI Infrastruktura na przykładzie wymagań stawianych obiektom inżynierijnym”. W: *Przegląd Komunikacyjny* 9, s. 136–139.

- Maia, Nuno Manuel Mendes i Julio Martins Montalvao Silva (1997). *Theoretical and Experimental Modal Analysis*. Research Studies Press, s. 488. ISBN: 978-0-863-80208-9.
- Malm, Richard i Andreas Andersson (2006). „Field testing and simulation of dynamic properties of a tied arch railway bridge”. W: *Engineering Structures* 28.1, s. 143–152. ISSN: 01410296. DOI: 10.1016/j.engstruct.2005.07.011.
- Miettinen, Kaisa (sty. 1999). *Nonlinear multiobjective optimization*. English. Red. Ignacy Kaliszewski. International Series in Operations Research \& Management Science, 12. Kluwer Academic Publishers, Boston, MA. ISBN: 0-7923-8278-1.
- MITCHELL, L. (1998). *Increasing the sensitivity of the modal assurance criteria (MAC) to small mode shape changes : The IMAC*. Santa Barbara CA.
- Moore, Jacqueline i Richard Chapman (1999). *Application of particle swarm to multiobjective optimization*. Spraw. tech.
- Muncke, M. (2008). „The effects on the interoperability of the European Railway Traffic of European Standards”. W: *Bridges for High-Speed Railways*. CRC Press Taylor & Francis/Balkema. Rozd. 2.
- Nayeri, Reza D. i in. (2009). „Study of time-domain techniques for modal parameter identification of a long suspension bridge with dense sensor arrays”. W: *Journal of engineering mechanics* 135.7, s. 669–683. ISSN: 0733-9399. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(2009)135:7(669).
- Newmark, Nathan M (1959). „A method of computation for structural dynamics”. W: *Journal of the engineering mechanics division* 85.3, s. 67–94.
- Niemierko, Andrzej (2012). „Projektowanie mostów kolejowych na liniach dużej prędkości – cz. I”. pl. W: *Inżynier Budownictwa*, s. 5.
- Norton, John P (2009). *An introduction to identification*. Courier Corporation. ISBN: 0486469352.
- Oleszek, Radosław (2015). „Analiza dynamiczna mostów kolejowych w świetle współczesnych przepisów”. W: *Theoretical Foundations of Civil Engineering Polish-Ukrainian Transactions* 23, s. 135–160.
- Oleszek, Radosław i Wojciech Radomski (list. 2015). „Niektóre aspekty analizy dynamicznej mostu łukowego w świetle wymagań PN-EN”. W: *Wrocławskie Dni Mostowe Mosty łukowe - dzieła kultury. Projektowanie, budowa, utrzymanie*. Wrocław.
- (kw. 2016). „Dynamic Analysis of an Existing Arch Railway Bridge According to Eu-rocodes”. en. W: *Archives of Civil Engineering* LXII.4, s. 99–117. ISSN: 1230-2945. DOI: 10.1515/ace-2015-0100.
- Papadopoulos, Michael i Ephraim Garcia (1998). „Sensor placement methodologies for dynamic testing”. W: *AIAA journal* 36.2, s. 256–263. ISSN: 0001-1452.
- Papadrakakis, Manolis (1993). *Solving large-scale problems in mechanics*. Wiley.
- Pappa, R S i J N Juang (1985). „An Eigensystem Realization Algorithm (ERA) for modal parameter identification and model reduction”. W: JPL Proc. of the Workshop on Identification i Control of Flexible Space Struct., Vol. 3.
- Pappa, Richard S, Kenny B Elliott i Axel Schenk (1992). *A consistent-mode indicator for the Eigensystem Realization Algorithm*. Hampton, Va. : [Springfield, Va. : National Aeronautics i Space Administration, Langley Research Center ; For sale by the National Technical Information Service, 1992.
- Pappa, Richard S i Samir R Ibrahim (1985). „A parametric study of the Ibrahim time domain modal identification algorithm”. W.
- Peeters, Bart (2000). „System Identification and Damage Detection in Civil Engineering”. Prac. dokt.
- Peeters, Bart i Guido De Roeck (1999). „Reference-based stochastic subspace identification for output-only modal analysis”. W: *Mechanical systems and signal processing* 13.6, s. 855–878. ISSN: 0888-3270. DOI: 10.1006/mssp.1999.1249.

- Peeters, Bart i Herman Van der Auweraer (2005). „PolyMAX: a revolution in operational modal analysis”. W: *Proceedings of the 1st International Operational Modal Analysis Conference, Copenhagen, Denmark*.
- Penny, J E T, M I Friswell i S D Garvey (1994). „Automatic choice of measurement locations for dynamic testing”. W: *AIAA journal* 32.2, s. 407–414.
- Phan, Minh, Jer-Nan Juang i Richard W Longman (1991). *On Markov parameters in system identification*. Spraw. tech. Hampton, Virginia: NASA Langley Research Center.
- Piotrowski, Adam P, Jarosław J Napiorkowski i Agnieszka E Piotrowska (2020). „Population size in particle swarm optimization”. W: *Swarm and Evolutionary Computation* 58, s. 100718. ISSN: 2210-6502.
- Poli, Riccardo, James Kennedy i Tim Blackwell (lip. 2007). „Particle swarm optimization: An overview”. en. W: *Swarm Intelligence* 1.1, s. 33–57. ISSN: 1935-3812, 1935-3820. DOI: 10.1007/s11721-007-0002-0.
- Polskie Linie Kolejowe S.A. (2005). *Warunki techniczne dla kolejowych obiektów inżynierijnych Id-2*. Warszawa.
- Polskie Linie Kolejowe S.A. i Centrum Naukowo-Techniczne Kolejnictwa (2009). *STANDARDY TECHNICZNE szczegółowe warunki techniczne dla modernizacji lub budowy linii kolejowych do prędkości  $V_{max} \geq 200 \text{ km/h}$  (dla taboru konwencjonalnego) /  $250 \text{ km/h}$  (dla taboru z wychylnym pudłem)*. Warszawa.
- Poprawa, Grzegorz (2018). „Operacyjna analiza modalna w badaniach kratowych mostów kolejowych pod próbnym obciążeniem dynamicznym”. Prac. dokt.
- Pulido, G T (2005). „On the use of self-adaptation and elitism for multiobjetive particle swarm optimization”. PhD Disertation. National Polytechnic Institute, Mexico City.
- Qin, Shiqiang i in. (2018). „Dynamic model updating for bridge structures using the kriging model and PSO algorithm ensemble with higher vibration modes”. W: *Sensors* 18.6, s. 1879.
- Rainieri, C i G Fabbrocino (2014). *Operational Modal Analysis of Civil Engineering Structures: An Introduction and Guide for Applications*. Italy, Europe: Springer-Verlag. ISBN: 9781493907670.
- Rakowski, Gustaw i Zbigniew Kacprzyk (2016). *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji*. Wyd. 3 pop. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej. ISBN: 9788378144717.
- Ramondenc, Philippe (sierp. 1998). „Vom Einfluß hoher Geschwindigkeiten auf den Entwurf von Eisenbahnbrücken am Beispiel der Stahlbrücken auf der Hochgeschwindigkeitsstrecke (HGS) des TGV Méditerranée”. W: *Stahlbau* 67.8, s. 652–658. ISSN: 00389145.
- (2008). „Dynamic behaviour of rail bridges: The train excitation”. W: *Dynamics of High-Speed Railway Bridges*. Red. Raimundo Delgado i in. CRC Press Taylor & Francis/Balkema. Rozdz. 1, s. 8.
- Rashedi, Esmat, Hossein Nezamabadi-pour i Saeid Saryazdi (maj 2009). „GSA: A Gravitational Search Algorithm”. en. W: *Information Sciences* 179.13, s. 2232–2248. ISSN: 00200255. DOI: 10.1016/j.ins.2009.03.004.
- Rasmussen, Carl Edward i Hannes Nickisch (2010). „Gaussian Processes for Machine Learning (GPML) Toolbox”. en. W: *Journal of Machine Learning Research* 11, s. 5. ISSN: 15324435.
- Rasmussen, Carl Edward i Christopher K I Williams (2006). *Gaussian processes for machine learning*. en. Cambridge, Mass: MIT Press, s. 248. ISBN: 978-0-262-18253-9.
- Reynders, Edwin, Mattias Schevenels i Guido De Roeck (2014). „MACEC 3.2: A Matlab toolbox for experimental and operational modal analysis”. W: *Department of Civil Engineering, KU Leuven*.

- RMTiGM (1998). *Rozporządzenie Ministra Transportu i Gospodarki Morskiej z dnia 10 września 1998 r. w sprawie warunków technicznych, jakim powinny odpowiadać budowle kolejowe i ich usytuowanie. Dz. U. 1998 nr 151 poz. 987.*
- Robinson, Jacob i Yahya Rahmat-Samii (2004). „Particle swarm optimization in electromagnetics”. W: *IEEE transactions on antennas and propagation* 52.2, s. 397–407. ISSN: 0018-926X.
- Rucka, Magdalena i Krzysztof Wilde (2014). *Dynamika budowli : z przykładami w środowisku MATLAB®*. Gdańsk : Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, 2014. ISBN: 978-83-7348-588-4.
- Salamak, Marek (2003). „Doświadczalne metody określania poziomu tłumienia drgań w kładkach dla pieszych”. Prac. dokt.
- Saliby, Eduardo i Flavio Pacheco (2002). „An empirical evaluation of sampling methods in risk analysis simulation: quasi-Monte Carlo, descriptive sampling, and Latin hypercube sampling”. W: *Proceedings of the winter simulation conference*. T. 2. IEEE, s. 1606–1610. ISBN: 0780376145.
- Saller, Heinrich (1921). *Einfluss bewegter Last auf Eisenbahnoberbau und Brücken*. Berlin: Kreidels Verlag.
- Schijve, Jaap (2001). *Fatigue of structures and materials*. Springer Science & Business Media. ISBN: 0792370147.
- Schutter, B.De i Bart De Schutter (kw. 2000). „Minimal state-space realization in linear system theory: an overview”. en. W: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 121.1-2, s. 331–354. ISSN: 03770427. DOI: 10.1016/S0377-0427(00)00341-1.
- Seyedpoor, S M (2011). „Structural damage detection using a multi-stage particle swarm optimization”. W: *Advances in Structural Engineering* 14.3, s. 533–549. ISSN: 1369-4332.
- SHEN, F i in. (2003). „USING THE CROSS-CORRELATION TECHNIQUE TO EXTRACT MODAL PARAMETERS ON RESPONSE-ONLY DATA”. W: *Journal of Sound and Vibration* 259.5, s. 1163. ISSN: 0022460X.
- Shi, D i W Stühler (1987). „Modal analysis with AR (ARMA) model and unknown excitation”. W: *International Modal Analysis Conference, 5 th, London, England*, s. 1171–1176.
- Shi, Yuhui i Russell Eberhart (1998). „A modified particle swarm optimizer”. W: *1998 IEEE international conference on evolutionary computation proceedings. IEEE world congress on computational intelligence (Cat. No. 98TH8360)*. IEEE, s. 69–73. ISBN: 0780348699.
- Siwowski, Tomasz (2012). „Procedura oceny zmęczenia pomostów metalowych w obiektach mostowych”. W: *Drogi i mosty* 11.1, s. 5–31.
- Siwowski, Tomasz i Maciej Kulpa (2014). „Ocena trwałości zmęczeniowej istnieja?????cego mostu stalowego według eurokodów”. W: *Czasopismo Inżynierii La?????dowej, Środowiska i Architektury* 61, nr 1, s. 269–285. ISSN: 2300-5130.
- SOFiSTiK (2018a). *ASE General Static Analysis of Finite Element Structures; ASE Manual, Version 2018-8 Software Version SOFiSTiK 2018*.
- (2018b). *CDB Interfaces SOFiSTiK Interface for VBA, Visual Basic .NET, C#, C++, Python, Fortran and CADiNP; CDB Interfaces Manual, Version 2018-15.1 Software Version SOFiSTiK 2018*.
- Stacey, Andrew, Mirjana Jancic i Ian Grundy (2003). „Particle swarm optimization with mutation”. W: *The 2003 Congress on Evolutionary Computation, 2003. CEC'03*. T. 2. Canberra, ACT, Australia: IEEE, s. 1425–1430. ISBN: 0780378040.
- Stokes, Sir George Gabriel (1849). „Discussion of a differential equation relating to the breaking of railway bridges”. W: *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 8.5, s. 707–735.

- Szafranski, M, T Galewski i R Łapigrowski (2017). „Stress analysis of the bridge hangers in terms of the fatigue verification”. W: *Shell Structures: Theory and Applications Volume 4: Proceedings of the 11th International Conference Shell Structures: Theory and Applications, (SSTA 2017), October 11-13, 2017, Gdańsk, Poland*. CRC Press, s. 473. ISBN: 135168048X.
- Szafrański, Marek (2013). „Odziaływanie taboru na mosty kolejowe przy zmiennych parametrach ruchu”. Prac. dokt.
- (sty. 2021). „A dynamic vehicle-bridge model based on the modal identification results of an existing EN57 train and bridge spans with non-ballasted tracks”. W: *Mechanical Systems and Signal Processing* 146, s. 107039. ISSN: 10961216. DOI: 10.1016/j.ymssp.2020.107039.
- Szcześniak, Wacław i Magdalena Ataman (lut. 2018). „Survey of publications by Polish authors in the field of moving loads on engineering structures”. pl. W: *AUTOBUSY – Technika, Eksplotacja, Systemy Transportowe* 19.12, s. 667–674. ISSN: 2450-7725, 1509-5878. DOI: 10.24136/atest.2018.475.
- Szymczak, Czesław (1995). *Elementy teorii projektowania*. Gdańsk: Politechnika Gdańsk, s. 231.
- Tesch, Krzysztof (2016). *Continuous optimisation algorithms*. en. Gdańsk University of Technology Publishers. ISBN: 978-83-7348-680-5.
- Timoshenko, S P (maj 1922). „On the forced vibrations of bridges”. W: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 43.257, s. 1018–1019. ISSN: 1941-5982. DOI: 10.1080/14786442208633953.
- Tran-Ngoc, H. i in. (lip. 2018). „Model updating for nam O bridge using particle swarm optimization algorithm and genetic algorithm”. en. W: *Sensors (Switzerland)* 18.12, s. 4131. ISSN: 14248220. DOI: 10.3390/s18124131.
- Udwadia, Firdaus E (1994). „Methodology for optimum sensor locations for parameter identification in dynamic systems”. W: *Journal of engineering mechanics* 120.2, s. 368–390. ISSN: 0733-9399.
- Ülker-Kaustell, Mahir i Raid Karoumi (2012). „Influence of non-linear stiffness and damping on the train-bridge resonance of a simply supported railway bridge”. W: *Engineering Structures* 41.January 2021, s. 350–355. ISSN: 01410296. DOI: 10.1016/j.engstruct.2012.03.060.
- Union Internationale Des Chemins De Fer (2006). *UIC Leaflet 776-1. Loads to be considered in railway bridge design*.
- (2009). *UIC Leaflet 776-2. Design requirements for rail-bridges based on interaction phenomena between train, track and bridge*. Spraw. tech. June.
- Van Overschee, P i Bart De Moor (1996). *Subspace Identification for Linear Systems: Theory, Implementation, Applications*.
- Verboven, P i in. (2005). „A comparison of frequency-domain transfer function model estimator formulations for structural dynamics modelling”. W: *Journal of sound and vibration* 279.3-5, s. 775–798. ISSN: 0022-460X.
- Vold, Harvard i in. (1982). „A multi-input modal estimation algorithm for mini-computers”. W: *SAE Transactions*, s. 815–821. ISSN: 0096-736X.
- Wei, Zitian, Jike Liu i Zhongrong Lu (2018). „Structural damage detection using improved particle swarm optimization”. W: *Inverse Problems in Science and Engineering* 26.6, s. 792–810. ISSN: 1741-5977.
- Welch, Peter (1967). „The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra: a method based on time averaging over short, modified periodograms”. W: *IEEE Transactions on audio and electroacoustics* 15.2, s. 70–73. ISSN: 0018-9278.

- Willis, Robert (1849). „An essay on the effects produced by causing weights to travel over elastic bars”. W: *Appendix to the Report of the Commissioners appointed to inquire into the Application of Iron to Railway Structures*. London: W. Clows i Sons.
- Wilson, Edward L (1997). *Three dimensional dynamic analysis of structures: with emphasis on earthquake engineering*. Computers i Structures Incorporated.
- Wilson, Edward L i Tetsuji Itoh (1983). „An eigensolution strategy for large systems”. W: *Computers \& structures* 16.1-4, s. 259–265. ISSN: 0045-7949.
- Xu, Shenheng i Yahya Rahmat-Samii (lip. 2007). „Boundary Conditions in Particle Swarm Optimization Revisited”. en. W: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 55.3, s. 760–765. ISSN: 0018-926X. DOI: 10.1109/TAP.2007.891562.
- Yamaguchi, Hiroki i Manabu Ito (1997). „Mode-dependence of structural damping in cable-stayed bridges”. W: *Journal of wind engineering and industrial aerodynamics* 72, s. 289–300. ISSN: 0167-6105.
- Zacher, M. i M. Baefslér (2008). „Dynamic behaviour of ballast on railway bridges”. W: *Dynamics of High-Speed Railway Bridges*. Red. Raimundo Delgado i in. CRC Press Taylor & Francis/Balkema. Rozd. 7, s. 14.
- Zaman, Forhad i in. (wrz. 2019). „Multi-method based algorithm for multi-objective problems under uncertainty”. en. W: *Information Sciences* 481, s. 81–109. ISSN: 00200255. DOI: 10.1016/j.ins.2018.12.072.
- Zavala, Gustavo R. i in. (wrz. 2014). „A survey of multi-objective metaheuristics applied to structural optimization”. en. W: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 49.4, s. 537–558. ISSN: 1615-147X, 1615-1488. DOI: 10.1007/s00158-013-0996-4.
- Zhang, Jie i in. (2017). „Optimal sensor placement for multi-setup modal analysis of structures”. W: *Journal of Sound and Vibration* 401, s. 214–232. ISSN: 0022-460X.
- Zhang, Lingmi, Rune Brincker i Palle Andersen (2004). „An overview of major developments and issues in modal identification”. W: *Proceeding of the 22nd IMAC* 1, s. 1–8. ISSN: 0888-3270.
- Zhou, Chenyi i in. (2020). „Railway wheel flat recognition and precise positioning method based on multisensor arrays”. W: *Applied Sciences (Switzerland)* 10.4. ISSN: 20763417. DOI: 10.3390/app10041297.
- Zielinski, Karin i Rainer Laur (2007). „Stopping criteria for a constrained single-objective particle swarm optimization algorithm”. W: *Informatica* 31.1. ISSN: 1854-3871.
- Zieliński, Tomasz Piotr (2002). *Od teorii do cyfrowego przetwarzania sygnałów*. Wydział EAiE AGH. ISBN: 978-83-88309-55-7.
- Zienkiewicz, Olek C, Robert L Taylor i Jian Z Zhu (2005). *The finite element method: its basis and fundamentals*. Elsevier Butterworth-Heinemann. ISBN: 0-08-047277-X.
- Zitzler, Eckart, Kalyanmoy Deb i Lothar Thiele (2000). „Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: Empirical results”. W: *Evolutionary computation* 8.2, s. 173–195. ISSN: 1063-6560.
- Zitzler, Eckart i Lothar Thiele (1999). „Multiobjective evolutionary algorithms: a comparative case study and the strength Pareto approach”. W: *IEEE transactions on Evolutionary Computation* 3.4, s. 257–271. ISSN: 1089-778X.
- Zoltowski, Krzysztof, Mikołaj Binczyk i Przemysław Kalitowski (mar. 2017). „Footbridges. Dynamic Design–Selected Problems”. en. W: *Footbridge 2017 Berlin September 2017*, s. 7–9. ISSN: 3981896807. DOI: 10.24904/footbridge2017.09357.
- Zuluaga, Marcela, Andreas Krause i Markus Püschel (2016). „e-PAL: An active learning approach to the multi-objective optimization problem”. W: *Journal of Machine Learning Research* 17, s. 1–32. ISSN: 15337928.
- Zuluaga, Marcela, Andreas Krause, Guillaume Sergent i in. (2013). „Active Learning for Multi-Objective Optimization”. en. W: *Proceedings of the 30th International Conference on Machine Learning*. T. 28. Atlanta, s. 12.