

Przęsło łukowe wiaduktu kolejowego. Wpływ
schematu statycznego i rozwiązań konstrukcyjnych
na własności dynamiczne.

Przemysław Kalitowski

19 lutego 2021

Spis treści

Wprowadzenie	5
1 Kolejowe, łukowe przęsła mostowe	6
1.1 Przegląd	6
1.2 Układy statyczne (pomosty,wieszaki,łuki,ściągi)	6
1.3 Zachowanie dynamiczne, problemy, unormowania	6
2 Dynamiczna analiza konstrukcji	7
2.1 Wiadomości wstępne	7
2.2 Klasyfikacja metod analizy modalnej	9
2.3 Modele teoretyczne układów dynamicznych	11
2.3.1 Zagadnienie własne	12
2.3.2 Transformacja do współrzędnych normalnych	15
2.3.3 Odpowiedź systemów dynamicznych o jednym stopniu swobody	15
2.3.4 Odpowiedź systemów dynamicznych o skończonej liczbie stopni swobody (MDOF)	18
2.3.5 Mała dawka tłumienia	21
2.4 Dynamiczne obciążenie kolejowe	23
2.4.1 Realne obciążenia - tabor	23
2.4.2 Modele obciążenia	23
2.4.3 Przepisy normowe i wytyczne.	23
2.5 Analiza dynamiczna w Metodzie Elementów Skończonych	23
2.5.1 Analiza modalna	23
2.5.2 Odpowiedź konstrukcji	23
2.5.3 Kalibracja modeli numerycznych	23
3 Identyfikacja cech dynamicznych konstrukcji	24
3.1 Operacyjna analiza modalna (OMA)	24
3.1.1 Koncepcja OMA	24
3.1.2 Metody operacyjnej analizy modalnej	25
3.2 Przykłady zastosowań (literatura i własne)	28
3.3 Metoda NExT-ERA	28
3.3.1 Funkcje korelacji, a odpowiedź swobodna układu	28
3.3.2 Eigenystem Realization Algorithm	35
3.4 Aplikacja do identyfikacji modalnej OMA	43
3.4.1 Algorytm programu	43
3.4.2 Elementy oceny poprawności rozwiązania	45
3.4.3 Testy numeryczne metody NEXT-ERA	48
3.4.4 Testy eksperymentalne metody NEXT-ERA	52

3.5	Podsumowanie testów metody NExT-ERA	59
4	Optymalizacja metodą roju cząstek - Particle Swarm Optimizaton	61
4.1	Klasyfikacja problemów i metod optymalizacji	62
4.2	Określenie funkcji celu i wybór metody optymalizacji	64
4.3	Opis algorytmu	64
4.3.1	Generacja populacji	67
4.3.2	Przykład teoretyczny	71
4.4	Optymalizacja wielokryterialna	73
4.5	Optymalizacja wielokryterialna rojem cząstek	75
4.5.1	Przykład teoretyczny	76
5	Wiadukt WK2 w ciągu Pomorskiej Kolei Metropolitalnej	77
5.1	Charakterystyka obiektu	77
5.2	Budowa modelu numerycznego	80
5.3	Identyfikacja modalna wiaduktu WK2	83
5.4	Kalibracja modelu numerycznego z wykorzystaniem PSO	93
5.5	Wielokryterialna optymalizacja modelu: opis + wyniki	93
6	Podsumowanie i wnioski	97

Symbole i oznaczenia

Wprowadzenie

Rozdział 1

Kolejowe, łukowe przęsła mostowe

1.1 Przegląd

1.2 Układy statyczne (pomosty, wieszaki, łuki, ściągi)

1.3 Zachowanie dynamiczne, problemy, unormowania

Rozdział 2

Dynamiczna analiza konstrukcji

2.1 Wiadomości wstępne

Podstawowym celem pracy jest określenie zależności pomiędzy przyjętymi rozwiązaniami konstrukcyjnymi mostów kolejowych, a ich zachowaniem dynamicznym. Prädycja odpowiedzi, jak wspomniano wcześniej, możliwa jest dzięki rozwiązaniom numerycznym modeli MES poddanych odpowiednim obciążeniom. Na każdym etapie analiz trzeba zdawać sobie sprawę z niepewności, które mogą wystąpić przy konstruowaniu założeń. Brincker i C. E. Ventura 2015 zestawili różnego rodzaju parametry występujące w modelu i stopień niepewności, który im towarzyszy na etapie modelowania. Niepewności te przytoczono w tabeli ???. Wyraźnie widać, że przyjęcie niektórych parametrów modelu w sposób bezkrytyczny może prowadzić do zupełnie nieodpowiednich rezultatów. Niektóre, związane np ze sztywnością szeroko rozumianych podpór czy połączeń śrubowych, mogą wypaczyć rezultaty i wprowadzić badacza w błąd na temat stanu i zachowania konstrukcji. Aby zbudować model, który będzie efektywnie odwzorowywał rzeczywiste zachowanie należy dołożyć wszelkich starań aby wyeliminować możliwe niepewności. Model taki może zostać poddany walidacji i kalibracji. Oba te pojęcia zostaną rozwinięte w następnych rozdziałach. Niemniej, aby model dostosować do rzeczywistych warunków należy mieć punkt odniesienia. W przypadku analizy statycznej takim odniesieniem mogą być pomiary statyczne ugięć, np. w trakcie próbnego obciążenia. W przypadku analizy dynamicznej, do porównania będą służyć charakterystyki modalne: częstotliwości i postaci drgań własnych oraz tłumienia. Parametry te można zaczerpnąć z literatury i doświadczenia na etapie projektowania. Na etapie badania rzeczywistej konstrukcji warto sięgnąć po narzędzie zwane identyfikacją modalną. Poniższy rozdział przytoczy podstawowe zagadnienia związane z analizą modalną, obliczeniami odpowiedzi dynamicznej i identyfikacją charakterystyk modalnych układu. Informacje te zostaną w dalszej części pracy zastosowane w obliczeniach numerycznych i optymalizacyjnych.

GDZIEŚ DO WSTĘPU: Drgania towarzyszą ludzkości od zawsze. Jakkolwiek trywialnie nie brzmiałoby to zdanie, wibracje występują w naszym otoczeniu przejawiając się często w sposób niepożądany: wywołują dyskomfort użytkowania, są odbierane jako hałas, powodują zjawiska zmęczeniowe czy w skrajnej sytuacji wywołują uszkodzenia i zniszczenia (Maia i Silva 1997). Wciąż postępujący rozwój nauki połączony z komputeryzacją i informatyzacją sprawiają, że używane materiały są coraz wytrzymalsze. Jednocześnie rośnie zapotrzebowanie na coraz większe, spekta-

Tablica 2.1: Niepewności najistotniejszych parametrów modeli numerycznych i modalnych na podstawie Brincker i C. E. Ventura 2015

Własność fizyczna	Poziom niepewności
Moduł sprężystości i gęstość masy dla stali i innych metali	1-5
Moduł sprężystości i gęstość masy dla betonu, drewna i zbrojonych włóknami materiałów	5-20
Warunki brzegowe z podłożem	10-nieskończoność
Połączenia śrubowe	10-nieskończoność
Połączenia spawane	2-10
Masa całkowita	1-5
Określana częstotliwość drgań własnych	0.1-0.05
Pomierzona odpowiedź	0.2-2
Określone postaci drgań własnych	2-5
Określone tłumienie	5-20
Współczynnik skalujący postaci drgań własnych	5-30

kularne konstrukcje. Te dwa czynniki połączone ze sobą sprawiają, że zachowanie dynamiczne struktury często decyduje o właściwościach użytkowych i wytrzymałościowych konstrukcji.

W odpowiedzi na zapotrzebowanie, w sposób naturalny rozwinięła się dziedzina nauki zajmująca się opisem i modelowaniem zjawisk dynamicznych. Podstawowym narzędziem służącym identyfikacji parametrów modalnych i zachowania dynamicznego jest analiza modalna (*eng. modal analysis*). Często Analiza modalna bywa określana jako identyfikacja modalna (*eng. modal identification*). (L. Zhang, Brincker i Palle Andersen 2004) w pracy definiuje identyfikację modalną jako gałąź szerszego pojęcia identyfikacji systemów, a jej celem jest budowa modelu matematycznego systemu dynamicznego poprzez pomiar i analizę zestawu danych wejściowych i wyjściowych. Z kolei Chmielewski i Zembaty 1998 zwięzle preczyzuje pojęcie modelu matematycznego dla zagadnień dynamiki budowli jako żównianie lub zbiór równań, które opisują ruch modelu obliczeniowego". Ewins 2000 podaje trzy główne cele przeprowadzania analizy modalnej:

- ocena źródła drgań i ich przebiegu,
- weryfikacja modeli teoretycznych i przewidywanie zjawisk dynamicznych,
- identyfikacja charakterystyk materiałowych ciała poddanego wymuszeniu dynamicznemu (np. tłumienie, tarcie, wytrzymałość zmęczeniowa).

Każdy z powyższych celów może być jedynie środkiem do osiągnięcia zupełnie innego celu. W rzeczywistości tak właśnie jest najczęściej o czym świadczy mnogość aplikacji analizy modalnej w bardzo różnych zagadnieniach dotyczących konstrukcji.

W poniższej pracy, tak jak w zdecydowanej większości innych opracowań, modele matematyczne będą oparte na trzech głównych zasadach (Maia i Silva 1997):

- system jest liniowy,
- obowiązuje zasada wzajemności Maxwell'a,
- system jest niezależny od czasu.

2.2 Klasyfikacja metod analizy modalnej

Identyfikacja modalna jest zbiorem technik, które są rozwijane dynamicznie od lat 60' XX w. Gwałtowny przyrost zainteresowania tym tematem wywołał głównie rozwój technik cyfrowych (Ewins 2000). Do tej pory powstało wiele różnych technik, których krótką klasyfikację z podziałem na główne kryteria podano w tym podrozdziale.

Matematyczne modele modalne mogą charakteryzować się różnym stopniem skomplikowania. Parametrami, które mogą opisywać model są postaci drgań własnych oraz powiązane z nimi częstotliwości i tłumienia modalne, a także masa i sztywność modalna. Z kolei metody analizy modalnej również różnią się pod względem informacji, którą mogą dostarczyć. Z tego względu wybór odpowiedniej metody powinien być świadomy i poparty przeglądem wielu technik, z których wybrana zostanie ta optymalna. Aspektami mogącymi wpływać na wybór metody są m.in.: czas potrzebny do implementacji (pierwszego użycia), informacje możliwe do uzyskania z modelu, możliwy wpływ założeń i uproszczeń, liczba parametrów potrzebnych do stworzenia modelu czy też stabilność rozwiązania. Przedstawiony podział opiera się na klasycznych kryteriach stosowanych przy klasyfikacji metod analizy modalnej. Istnieje wiele pozycji literaturowych, w których zainteresowany znajdzie dokładny opis wielu metod ze wskazówkami do ich użycia (Ewins 2000; Maia i Silva 1997; L. Zhang, Brincker i Palle Andersen 2004; Brincker i C. E. Ventura 2015; Rainieri i Fabbrocino 2014).

Najogólniej analizę modalną można podzielić na dwie główne gałęzie zależne od typu stosowanej procedury, jej danych wejściowych i rezultatów: teoretyczną i eksperymentalną (Lengvarský i Bocko 2013). W niniejszej pracy wielokrotnie używane będą oba podejścia, dlatego autor zdecydował się na krótki ich opis. Ogólny schemat procedur teoretycznej i doświadczalnej analizy modalnej pokazano na rysunku 2.1.



Rysunek 2.1: Porównanie procedur teoretycznej i doświadczalnej analizy modalnej

Metody teoretyczne opierają się na rozwiązańach analitycznych lub numerycznych (rys. 2.1a). Badanie zachowania dynamicznego rozpoczyna się od definicji struktury, najczęściej za pomocą modelu dyskretnego opisanego macierzami M , C' , K oznaczającymi odpowiednio macierz mas, tłumienia i sztywności. Macierz tłumienia, w przypadku metod teoretycznych, jest to niewyznaczalna analitycznie macierz bazująca na doświadczeniach i rezultatach badań, stąd została oznaczona apostrofem C' . Za pomocą przekształceń matematycznych (skrótnie opisanych w dalszej

części tekstu) tworzony jest model matematyczny we współrzędnych modalnych. Uzyskiwane są charakterystyki modalne układu Λ i Ψ odpowiednio częstości drgań własnych, postaci drgań własnych i dodatkowo parametry opisujące przyjęty model tłumienia. Po uzyskaniu modelu matematycznego opisanego współrzędnymi modalnymi możliwe jest wyznaczenie odpowiedzi konstrukcji w czasie przy jej znanym wymuszeniu. Powyższy opis przedstawia pełną procedurę teoretyczną zakończoną wyznaczeniem odpowiedzi układu. Jednakże, jak wspomniano wcześniej, analiza modalna oraz jej metody są zróżnicowane z punktu widzenia skomplikowania. Zazwyczaj wybór metody zależy od zapotrzebowania na rezultaty. Zwłaszcza w przypadkach obliczeń inżynierskich często poprzestaje się na wyznaczeniu charakterystyk modalnych, które są następnie oceniane z punktu widzenia zagrożenia nadmiernymi efektami dynamicznymi. Metody analityczne znajdują realne zastosowanie w przypadku obiektów, których opis ciągły nie jest złożony, a dyskretny ograniczony jedynie do niewielkiej liczby stopni swobody. Rzeczywiste konstrukcje są układami o nieskończonej liczbie stopni swobody. Niemniej, sprowadzenie ich do skończonej (choć zazwyczaj bardzo dużej) liczby stopni swobody pozwala otrzymać zadowalająco poprawne rezultaty. W przypadku dużej liczby stopni swobody najszerzej stosowane są metody przybliżone opierające się obliczeniach numerycznych, takie jak: metoda różnic skończonych (MRS) czy metoda elementów skończonych (MES). Teoretyczna analiza modalna ma wiele zalet. Pozwala uzyskać rezultaty relatywnie szybko i tanio. Wynika to z powszechności narzędzi do modelowania i obliczania konstrukcji. W obrębie modelowania realnych struktur współczesne oprogramowanie pozwala budować modele numeryczne praktycznie bez ograniczeń. Stosowane preprocesory graficzne pozwalają użytkownikowi na odwzorowanie nawet skomplikowanych kształtów geometrycznych. Rosnąca moc obliczeniowa komputerów przestaje być ograniczeniem, zwłaszcza przy obliczeniach statycznych modeli o znaczającej liczbie stopni swobody. Niepodważalną zaletą jest również dowolność sposobów obciążania i modyfikacji modelu numerycznego. Pomimo wielu niewątpliwych zalet, teoretyczna analiza modalna posiada ograniczenia, z których należy zdawać sobie sprawę. Przede wszystkim jakość rezultatów zależy wprost od jakości wprowadzonych przez użytkownika danych. (Potrzebne przykłady). W przypadku zagadnień dynamicznych kolejnym bardzo ważnym ograniczeniem jest brak analitycznej możliwości określenia tłumienia konstrukcji. Taką możliwość daje jedynie badanie doświadczalne na rzeczywistej konstrukcji. Metody analityczne i numeryczne są obszernie opisane w wielu publikacjach (Chmielewski i Zembaty 1998; Chopra 2012; Rucka i Wilde 2014). W dalszej części rozdziału zaprezentowano absolutne podstawy i założenia analitycznej analizy dynamicznej.

Doświadczalna analiza w odróżnieniu od wersji teoretycznej angażuje do identyfikacji warsztat badawczy. Ewins 2000 definiuje ją jako zespół procesów związanych z badaniem elementów konstrukcji w celu uzyskania matematycznego opisu ich zachowania dynamicznego. Jest to definicja zbliżona do ogólniejszej podanej przez L. Zhang, Brincker i Palle Andersen 2004, ale stawia szczególnie mocny akcent na aspekt badawczy. Jak przedstawiono na rysunku (rys. 2.1b) ten typ analizy ma niejako odwrotny kierunek niż teoretyczna analiza modalna. W tym przypadku odpowiedź konstrukcji jest mierzona i na jej podstawie wyznaczane są wielkości opisujące model matematyczny: Λ i Ψ . Następnie na dopiero ich podstawie możliwe jest przekształcenie na model matematyczny wyrażony we współrzędnych fizycznych: \mathbf{M} , \mathbf{C}' , \mathbf{K} . Doświadczalna analiza modalna dzieli się na dwie główne odnogi

związane z zakresem rejestrowanych danych w trakcie wykonywania eksperymentu. Pierwsza z nich to Eksperimentalna Analiza Modalna (EMA) (*eng. Experimental Modal Analysis*) wymaga pomiaru sił wymuszających oraz odpowiedzi konstrukcji na to wymuszenie. Druga to Operacyjna Analiza Modalna (OMA) (*eng. Operational Modal Analysis*), która estymuje parametry modalne wyłącznie na podstawie pomierzonych efektów nieznanego wymuszenia. Wymuszenie to jednak nie może być dowolne, a ograniczenia przedstawione zostaną w dalszej części pracy.

Kwestia pomiaru sił wymuszających wpływa na podstawowe różnice pomiędzy dwoma rodzinami metod: EMA i OMA. EMA najczęściej prowadzona jest w kontrolowanych warunkach i przez to pozwala dostarczyć bardziej szczegółowych i dokładniejszych informacji na temat zachowania dynamicznego konstrukcji. Jednakże w przypadku rzeczywistych konstrukcji inżynierskich (np. mosty) trudno jest stworzyć takie kontrolowane warunki. Obiekt musi zostać na czas pomiarów wyłączony z eksploatacji. Okazuje się to często niemożliwe z przyczyn proceduralnych, a na pewno kosztowne. Drugim zasadniczym ryzykiem jest potrzeba stworzenia takiego systemu wymuszenia, które wywoła mierzoną odpowiedź konstrukcji. W przypadku dużych konstrukcji inżynierskich może okazać się to trudne do zrealizowania ponieważ oddziaływanie środowiskowe mogą wywoływać efekty oddziaływań porównywalne z kontrolowanym wymuszeniem. OMA praktycznie pozbywa się negatywnych skutków potrzeby kontroli wymuszenia. Badania prowadzone mogą być przy normalnej eksploatacji, a losowe oddziaływanie środowiskowe zazwyczaj polepszają jakość wyników. Oczywiście odbywa się to kosztem dokładności rezultatów. Teoretyczne założenia metody są spełnione tylko w sposób przybliżony. Z tego względu serie pomiarowe zwykle muszą trwać znacznie dłużej, a interpretacja wyników wymaga większego doświadczenia.

Połączenie obu typów analiz

Obszerność zagadnień dotyczących analizy teoretycznej i identyfikacji modalnej wypełnia wiele tomów specjalistycznej literatury. Mimo chęci nie sposób przytoczyć je wszystkie z zadowalającą dokładnością. W rozdziale opisano najważniejsze według autora pojęcia których zrozumienie było kluczowe do przeprowadzenia badań i analiz numerycznych.

2.3 Modele teoretyczne układów dynamicznych

Metody teoretycznej analizy modalnej są obszernie opisane w literaturze przedmiotu (cytowania). Ze względu na złożoność rzeczywistych konstrukcji, w praktyce mają one zastosowanie głównie w formie rozwiązań numerycznych. Według przedstawionej na rysunku 2.1a procedury metody teoretycznej analizy modalnej służą głównie dwóm celom: identyfikacji charakterystyk modalnych (częstotliwości i postaci drgań własnych) i wyznaczaniu odpowiedzi układu. Dla zrozumienia zagadnienia, metody analityczne najczęściej przedstawione są dla najprostszego przypadku układu z jednym stopniem swobody. Układ ten z reguły łatwo daje się uogólnić do układu o wielu stopniach swobody. Macierzowe równanie drgań wymuszonych dla tłumionego układu o skończonej liczbie stopni swobody przedstawiono we wzorze 2.1.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (2.1)$$

gdzie \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} to odpowiednio macierze mass, tłumienia i sztywności, \mathbf{x} to wektor współrzędnych uogólnionych (przemieszczeń lub obrotów punktu), $\mathbf{F}(t)$ to wektor

uogólnionych sił wymuszających. Wzór 2.1 odpowiadający formule 2.2 pozbawionej składnika reprezentującego opory ruchu opisuje ruch nietłumiony układu.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (2.2)$$

Drgania swobodne są procesem fizycznym spowodowanym zaburzeniem stanu równowagi, przez zaistnienie warunków początkowych. Macierzowe równanie ruchu drgań swobodnych, tłumionych opisane jest wzorem 2.3, a nietłumionych wzorem 2.4. Od równań ruchu drgań wymuszonych, równania te różnią się brakiem składnika sił wymuszających.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

Okazuje się, że parametry modalne systemu są ścisłe powiązane z rozwiązaniem algebraicznego problemu własnego równań drgań własnych.

2.3.1 Zagadnienie własne

Identyfikacja modalna modelu matematycznego polegająca na wyznaczeniu częstotliwości i postaci drgań własnych najczęściej sprawdza się do rozwiązywania zagadnienia własnego. Bardzo pozytywnym aspektem tej zależności jest to, że istnieje wiele prostych w aplikacji, wydajnych i dokładnych algorytmów pozwalających rozwiązać numerycznie zagadnienie własne (Golub i Van Loan 2013). Dzięki temu, właśnie ta metoda identyfikacji modalnej cieszy się największą popularnością wśród producentów oprogramowania do obliczania konstrukcji. Użytkownicy oprogramowania mogą bez większego wysiłku dokonać identyfikacji parametrów modalnych nawet złożonych modeli matematycznych.

Układ nietłumiony

Z reguły przyjmuje się, że rozwiązywanie zagadnienia własnego wykorzystuje równanie drgań swobodnych nietłumionych (2.4). Należy zaznaczyć, że drgania własne nie opisują procesu fizycznego, a są jedynie matematyczną idealizacją drgań układu. W przypadku nietłumionym, dla każdego z modów, układ oscyluje wokół położenia równowagi z częstotliwością drgań własnych, a wszystkie stopnie swobody drgają w tej samej fazie. Oznacza to, że każdy z punktów osiąga swoje ekstremalne położenie w tej samej chwili. Podobnie wszystkie punkty znajdują się w położeniu równowagi w tym samym czasie. Poniżej przedstawiono rozwiązanie dla nietłumionego układu N dynamicznych stopni swobody.

Założono rozwiązanie 2.4 w postaci $\mathbf{x}(t) = \psi e^{j\omega t}$ gdzie ω to częstotliwość drgań własnych, $j = \sqrt{-1}$, a ψ to niezerowy wektor postaci drgań własnych. Po podstawieniu rozwiązania i jego drugiej pochodnej ($\ddot{\mathbf{x}}(t) = -\psi\omega^2 e^{j\omega t}$) do równia 2.4 otrzymamy równanie 2.5.

$$-\mathbf{M}\psi\omega^2 e^{j\omega t} + \mathbf{K}\psi e^{j\omega t} = \mathbf{0} \quad (2.5)$$

Dzieląc strony równania przez niezerową wartość $e^{j\omega t}$ otrzymujemy układ liniowych równań algebraicznych:

$$-\mathbf{M}\omega^2\psi + \mathbf{K}\psi = \mathbf{0} \quad (2.6)$$

w którym dwie niewiadome do ustalenia to: ψ - niezerowy wektor postaci drgań własnych oraz ω - częstość drgań własnych. Równanie to można zapisać w formie 2.7 z indeksami określającymi poszczególne mody drgań własnych. Liczba par odpowiadających sobie częstości ω_i i postaci drgań własnych ψ_i jest równa liczbie N stopni swobody.

$$\omega_i^2 \mathbf{M} \psi_i = \mathbf{K} \psi_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.7)$$

Z kolei równanie 2.8 to reprezentacja uogólnionego problemu własnego, w którym λ_i to wartość własna, a u_i to wektor własny. Z porównania wzorów 2.7 i 2.8 wyraźnie widać powiązanie $\lambda_i = \omega_i^2$. Wynika z tego, że rozwiązanie numeryczne uogólnionego problemu własnego pozwala wprost uzyskać częstości ($\lambda_i = \omega_i^2$) i postaci drgań własnych (ψ_i).

$$\lambda_i \mathbf{A} u_i = \mathbf{B} u_i \quad (2.8)$$

Układ równań (2.7) ma nietrywialne rozwiązania tylko jeśli

$$\det[\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}] = 0 \quad (2.9)$$

Formuła 2.9 jest znana jako równanie charakterystyczne zagadnienia własnego. Jeśli rozwiniąć wyznacznik, otrzymamy wielomian stopnia N względem ω_i^2 . Pierwiastkami równania 2.9 są częstości drgań własnych ω_i . Znając częstości własne ω_i z równania 2.7 można obliczyć odpowiadające wektory własne ψ_i z dokładnością do stałego czynnika. Taki wynik bywa nieprzystępny w ocenie więc wektory poddawane mogą być normalizacji. Do najczęściej stosowanych metod normalizacji należy taka modyfikacja wektora tak aby maksymalna wartość bezwzględna spośród wszystkich elementu była równa jedności. Innym przykładem może być normalizacja wektorów tak aby wartość elementu dla danego stopnia swobody, we wszystkich wektorach była równa jedności.

Jeżeli macierze \mathbf{M} i \mathbf{K} (\mathbf{A} i \mathbf{B} wg 2.6) są symetryczne i dodatnio określone o wartościach rzeczywistych to wartości oraz wektory własne są również rzeczywiste. W przypadku konstrukcji budowlanych macierz \mathbf{K} jest zawsze dodatnio określona ponieważ warunki brzegowe zapewniają brak ruchu ciała jako bryły sztywnej. Nie jest to oczywiste dla innych niż budowlane struktur, takich jak np. samolot w locie (Chopra 2012).

Postaci drgań własnych (wektory własne) odpowiadające różnym częstościom własnym spełniają warunki ortogonalności. W przypadku gdy $\omega_i \neq \omega_j$ prawdziwe są zależności 2.10. Ortogonalność wektorów własnych może być wykorzystana do weryfikacji obliczonych wektorów.

$$\psi_i^T \mathbf{K} \psi_j = 0 \quad \psi_i^T \mathbf{M} \psi_j = 0 \quad (2.10)$$

Obliczone z równania 2.9 wartości oraz wektory własne możemy przedstawić w postaci dwóch specjalnych macierzy. N obliczonych wartości własnych zestawionych w macierz diagonalną tworzy tak zwaną macierz widmową (2.11). Z kolei N wektorów własnych zestawionych kolumnowo nazywamy macierzą modalną (2.12).

$$\Omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_N^2 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$\Psi = [\psi_{i,j}] = \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \dots & \psi_{1N} \\ \psi_{12} & \psi_{22} & \dots & \psi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{N1} & \psi_{N2} & \dots & \psi_{NN} \end{bmatrix} \quad 1 \leq i, j \leq N. \quad (2.12)$$

Dla układu o N stopniach swobody możemy wyznaczyć N par częstotliwości i postaci drgań własnych. Jednak w rzeczywistości rozwiążanie ogranicza się do wyznaczenia jedynie ograniczonej do kilkunastu (maksymalnie kilkuset) pierwszych par. Określenie "pierwszych" właściwe jest w przypadku kiedy wyznaczone częstotliwości uporządkujemy w szeregu rosnącym

$$0 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \dots \omega_{N-1} \leq \omega_N \quad (2.13)$$

W większości przypadków zagadnienie własne jest rozwiązywane numerycznie za pomocą maszyn cyfrowych. Metody numeryczne wykorzystują iteracyjne algorytmy do rozwiązywania zagadnienia własnego. Chopra 2012 definiuje trzy główne kategorie algorytmów:

- Metody iteracji wektora wykorzystujące właściwości równania (2.7),
- Metody transformacyjne korzystające z ortogonalności wektorów własnych,
- Metody iteracyjne wykorzystujące równanie charakterystyczne (2.9).

Dla dużych systemów korzystne okazuje się łączenie algorytmów z tej samej bądź różnych kategorii co podnosi wydajność metody rozwiązywania. W oprogramowaniu komercyjnym stosowane są złożone algorytmy takie jak metoda iteracji podprzestrzeni, metoda Lanczosa czy metoda gradientów Ritz'a. Wybór metody zależy również od wybranego solvera (silnika programu rozwiązywającego równania). Algorytmy te różnią się pod względem wydajności, maksymalnej dokładności rozwiązywania czy zbieżności. Ich wydajność może zależeć od liczby zadanych do wyznaczenia wartości własnych czy wielkości zadania. Więcej szczegółów odnośnie stosowanych metod rozwiązywania zagadnienia własnego można odnaleźć w literaturze (Bathe 2006; Wilson i Itoh 1983; Wilson 1997; Fialko 2000; Papadrakakis 1993; Hughes 1987; Chopra 2012). W przypadku dobrej jakości oprogramowania komercyjnego informacje na temat używanych algorytmów powinny dostępne w pomocy do programu.

Układ tłumiony

Drgania swobodne tłumione układu określone są równaniem (2.3), które przytoczono ponownie poniżej:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

Rozwiążanie tego równania jest uzależnione od postaci tłumienia: klasycznego lub nieklasycznego. Tłumienie klasyczne zwane również proporcjonalnym (*eng. classical damping, proportional damping*) występuje w przypadku kiedy spełnione jest równanie (2.15).

$$\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = \mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \quad (2.15)$$

Kiedy macierz \mathbf{C} jest diagonalna to warunek (2.15) jest spełniony. W takim przypadku wszystkie częstotliwości drgań własnych są rzeczywiste i identyczne do tych wyznaczonych dla układu nietłumionego. W przypadku przeciwnym mamy do czynienia

z tłumieniem nieklasycznym bądź nieproporcjonalnym (*eng. nonclassical damping, nonproportional damping*). Dla tej sytuacji macierz \mathbf{C} nie jest diagonalna, a wartości własne są zespółone. Szczegółowe informacje oraz metody rozwiązywania przypadków dynamiki konstrukcji nieklasycznie tłumionych podano w (Caughey i O'Kelly 1961; Chopra 2012). Inman i Lallement 1995 na przykładzie pokazali, że obliczanie struktur charakteryzujących się tłumieniem nieklasycznym za pomocą zagadnienia własnego bez uwzględnienia macierzy tłumienia możliwe prowadzić do błędnych rezultatów. Tak wyznaczone częstotliwości drgań będą różnić się od rzeczywistych, co może pociągnąć za sobą błędne wnioski odnośnie zakresu częstotliwości grożących rezonansem.

2.3.2 Transformacja do współrzędnych normalnych

Rozważmy ponownie równanie ruchu układu MDOF (2.14). Wiemy, że każdy wektor o długości N może być przedstawiony jako kombinacja liniowa N liniowo niezależnych wektorów. Przedstawmy zatem wektor przemieszczeń \mathbf{x} jako kombinację wektorów własnych ψ .

$$\mathbf{x} = \sum_{r=1}^N \psi_r q_r = \Psi \mathbf{q} \quad (2.16)$$

gdzie współczynniki q_r nazywane są współrzędnymi normalnymi (*eng. modal coordinates, normal coordinates*) i $\mathbf{q} = \langle q_1 \ q_2 \ \dots \ q_N \rangle^T$. Założymy, że zagadnienie własne zostało rozstrzygnięte i wyznaczylismy macierz modalną Ψ (2.12). Aby uzyskać wartości współczynników q_n dla danego \mathbf{x} , przemnożmy obie strony równania 2.16 przez $\psi_n^T \mathbf{M}$:

$$\psi_n^T \mathbf{M} \mathbf{x} = \sum_{r=1}^N (\psi_n^T \mathbf{M} \psi_r) q_r \quad (2.17)$$

Ortogonalność wektorów własnych (2.10) sprawia, że wszystkie składniki powyżej sumy są równe 0 poza tymi, w których $r = n$. Pomińmy więc znak sumy i zapiszmy

$$\psi_n^T \mathbf{M} \mathbf{x} = (\psi_n^T \mathbf{M} \psi_n) q_n \quad (2.18)$$

$$q_n = \frac{\psi_n^T \mathbf{M} \mathbf{x}}{\psi_n^T \mathbf{M} \psi_n} \quad (2.19)$$

Transformacja do współrzędnych normalnych jest istotnym elementem przewidywania odpowiedzi wymuszonych, liniowych układów MDOF z tłumieniem proporcjonalnym (p. 2.3.4).

2.3.3 Odpowiedź systemów dynamicznych o jednym stopniu swobody

Przegląd metod pozwalających wyznaczyć odpowiedź konstrukcji poddanej wymuszeniu wypada zacząć klasycznie od układu z jednym stopniem swobody. W przypadku liniowego układu SDOF obciążonego siłą zewnętrzną, równanie ruchu jest liniowym równaniem różniczkowym drugiego rzędu (2.20). Znając warunki początkowe $x(0)$ i $\dot{x}(0)$ możemy traktować zadanie jako w pełni sformułowane. Dla konstrukcji wstępnie nieobciążonej dynamicznie przemieszczenie i prędkość początkowe

można przyjąć jako równe zeru.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (2.20)$$

Dla tak sformułowanego problemu istnieją cztery podstawowe metody wyznaczenia odpowiedzi dynamicznej:

- klasyczne rozwiązywanie równań różniczkowych,
- wykorzystanie całki Duhamela,
- rozwiązywanie w dziedzinie częstotliwości,
- wykorzystanie metod numerycznych.

Dla porządku powyższe metody zostaną w dalszej części krótko opisane. Dokładny opis metod jest przedstawiony w wielu podstawowych pozycjach literaturowych dotyczących dynamiki budowli (Clough i Penzien 1975; Chmielewski i Zembaty 1998; Chopra 2012).

Metoda klasyczna

Rozwiązywanie liniowego równania różniczkowego o stałych współczynnikach jakim jest równanie ruchu składa się z rozwiązywania całki ogólnej i szczególnej, a następnie zsumowania ich. Równanie ruchu jest rzędu drugiego stąd do wyznaczenia pozostają dwie zmienne całkowania. Z kolei do ich wyznaczenia wykorzystane są warunki początkowe. **OGRANICZENIA**

Całka Duhamela

Metoda rozwiązywania równania ruchu układu SDOF za pomocą całki Duhamela polega na przekształceniu funkcji obciążenia $f(t)$ na sekwencję nieskończonie krótkich impulsów. Przykładając impulsowe, jednostkowe wymuszenie (delta Diraca) do układu (2.20), dla odpowiednich warunków początkowych otrzymuje się rozwiązanie w postaci odpowiedzi impulsowej, inaczej zwanej impulsową funkcją przejścia (*eng. unit response function*). Aby uzyskać odpowiedź układu w czasie t sumuje się wszystkie odpowiedzi impulsowe do chwili czasowej t . W przypadku całkowalnej funkcji wymuszenia, całka Duhamela może być alternatywą do rozwiązywania metodą klasyczną. Dla eksperymentalnych funkcji wymuszenia, całkę Duhamela można wyznaczyć metodami numerycznymi. W tym przypadku odpowiedź będzie wyznaczona w dyskretnych chwilach czasowych. Należy jednak wspomnieć, w przypadku angażowania metod numerycznych całka Duhamela nie jest najwydajniejszym rozwiązaniem. Dodatkowo, ze względu na wykorzystywaną superpozycję, rozwiązanie to jest ograniczone wyłącznie do układów liniowych.

Metoda przejścia do dziedziny częstotliwości

Metoda przejścia do dziedziny częstotliwości (*eng. frequency-domain method*) wykorzystuje właściwości przekształceń Laplace'a lub Fourier'a. Dla układu SDOF (2.20) wykonuje się wybrane przekształcenie funkcji wymuszenia $f(t)$ uzyskując $F(\omega)$. $F(\omega)$ można określić jako amplitudy wszystkich składników harmonicznych, które składają się na wymuszenie $f(t)$. Przekształcenie $X(\omega)$ rozwiązania równania różniczkowego $x(t)$ można z kolei opisać następująco

$$X(\omega) = H(\omega)F(\omega) \quad (2.21)$$

gdzie $H(\omega)$ to odpowiedź zespolona w dziedzinie częstotliwości nazywana też funkcją przenoszenia lub transmitancją (*eng. complex frequency-response function (FRF)*). Funkcja przenoszenia $H(\omega)$ opisuje odpowiedź układu w dziedzinie częstotliwości przy wymuszeniu harmonicznym. Ostatnim krokiem metody jest wyznaczenie rozwiązania $x(t)$ podając $X(\omega)$ odwrotnemu przekształceniu (Fourier'a bądź Laplace'a). Tak uzyskany rezultat $x(t)$ można traktować jako określenie odpowiedzi harmonicznych układu na każdy z składników wymuszenia. Te cząstkowego odpowiedzi te są następnie sumowane w celu uzyskania całkowitej odpowiedzi $x(t)$. Ponownie, metoda ta bezpośrednio może być stosowana tylko dla prostych funkcji wymuszenia $f(t)$. Jeżeli funkcja wymuszenia jest określona numerycznie, odpowiednie przekształcenia można przeprowadzić np. z użyciem algorytmu dyskretnej transformaty Fouriera w wariantie szybkiej transformaty Fourier'a (*eng. Fast Fourier Transform (FFT)*).

Metody numeryczne

Zastosowanie powyższych trzech metody wyznaczania odpowiedzi dynamicznej ograniczone jest tylko do układów liniowych. Wspomniano również, że stają się niepraktyczne lub wręcz niemożliwe do zastosowania w przypadku skomplikowanych, zmiennych w czasie funkcji wymuszenia $f(t)$. W takich niekorzystnych okolicznościach z pomocą przychodzą metody numeryczne. Co więcej, okazuje się, że w przypadkach liniowych układów metody te są również konkurencyjne dla metod analitycznych.

Stworzono wiele metod i algorytmów numerycznych służących skutecznemu rozwiązaniu równań ruchu. Powstało również wiele pozycji traktujących o tym zagadnieniu (LITERATRA). Z tego względu przytoczono tylko podstawowe pojęcia i założenia dotyczące istoty rozwiązań numerycznych.

Metody numeryczne w głównej mierze opierają się na mechanizmie kroku czasowego (*eng. time-step*) (p. 2.3.4). Zwykle nie jest to rozwiązanie ścisłe. Metody dostarczają jedynie przybliżonych rozwiązań, dlatego też muszą spełniać następujące kryteria:

- zbieżności (*eng. convergence*) - wraz ze zmniejszeniem kroku czasowego, rozwiązanie powinno zmierzać do rozwiązania dokładnego,
- stabilności (*eng. stability*) - rozwiązanie powinno być stabilne pomimo występowania błędów zaokrągleń,
- dokładności (*eng. accuracy*) - rozwiązanie powinno być dostatecznie bliskie rozwiązanie dokładnego.

Wśród metod numerycznych, które okazały się skuteczne w rozwiązaniach problemów możemy wyróżnić trzy główne:

- metoda interpolacji funkcji wymuszającej,
- metoda różnic skończonych,
- metoda średniego lub liniowego przyspieszenia w przedziale różnicowym, oparte na metodzie Newmark'a.

Pomimo, że powyższe metody są opisane dla układu SDOF, są łatwo uogólniane i praktycznie wykorzystywane do obliczania układów MDOF. Algorytm metody Newmark'a jest najpowszechniej używany w obliczeniach konstrukcji inżynierskich oraz został wykorzystany w niniejszej pracy. Stąd w następnym podrozdziale zawarto zwięzły opis jego działania.

2.3.4 Odpowiedź systemów dynamicznych o skończonej liczbie stopni swobody (MDOF)

Systemy o skończonej liczbie stopni swobody mogą charakteryzować się tłumieniem klasycznym (proporcjonalnym) bądź nieklasycznym (nieproporcjonalnym). Mogą być liniowe lub nieliniowe geometrycznie lub materiałowo. Czynniki te mają wpływ na wybór metody przewidywania odpowiedzi takiego układu. Macierzowe równanie ruchu dla układu o N stopniach swobody możemy zapisać jako N równań różniczkowych w formie (2.22)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (2.22)$$

Modelem z tłumieniem proporcjonalnym, z wystarczającym przybliżeniem, można opisać większość badanych struktur. Odpowiedź układów ograniczonych do kilku stopni swobody może być wyznaczana przez rozwiązywanie równania różniczkowego 2.22. W przypadku większej liczby stopni swobody zwykle wykorzystuje się metody numeryczne. Jak wiemy z rozdziału 2.3, dla takich układów zawsze możliwe jest wyznaczenie częstotliwości i postaci drgań własnych. Co więcej, opisujące je macierzowe równanie ruchu można przekształcić za pomocą metody transformacji własnej do postaci zależnej od współrzędnych modalnych. W takiej formie równanie to jest zbiorem równań rozwikłanych. Z tego względu można wyznaczyć odpowiedź dla każdego modu (zestawu jednej częstotliwości i postaci własnej oraz towarzyszącego tłumienia) osobno, a następnie złożyć ją w celu wyznaczenia odpowiedzi całkowitej. Dodatkowo, każda odpowiedź modalna może być wyznaczona jako funkcja czasu przez analizę układu SDOF. Równania SDF mogą być oczywiście rozwiązane wszystkimi przytoczonymi wcześniej wymienionymi metodami - w tym numerycznymi.

W przypadku kiedy mamy do czynienia z układem o tłumieniu nieproporcjonalnym, klasyczne parametry modalne nie mogą być wyznaczone, a równania ruchu nie mogą być rozwikłane. Takie systemy można analizować dwiema metodami: poprzez przekształcenie równań ruchu na wektory własne obliczone w zespołolonym zagadnieniu własnym lub poprzez bezpośrednie całkowanie nierożwikłanych równań różniczkowych. Druga metoda wykorzystuje metody numeryczne co wynika z braku zamkniętych rozwiązań analitycznych nawet dla analitycznie opisanych funkcji obciążenia. Metody numeryczne muszą być stosowane również w przypadku kiedy układ jest nieliniowy (niezależnie czy materiałowo, czy geometrycznie). W przypadku braku założenia o liniowości wybór metody nie jest uzależniony od tego, czy tłumienie jest proporcjonalne, czy też nie jest.

Zachowując porządek i kompletność wynodu poniżej przedstawiono krótki zarys dwóch podstawowych metod wyznaczania odpowiedzi układów dyskretnych o skończonej liczbie stopni swobody.

Metoda superpozycji modalnej

Rozpatrzmy układ MDOF, liniowy o tłumieniu proporcjonalnym dany równaniem 2.22. Wiemy, że wektor przemieszczeń \mathbf{x} może być zapisany za pomocą współrzędnych normalnych (p. 2.3.2) co powtórzono dla wygody poniżej:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{r=1}^N \boldsymbol{\psi}_r q_r(t) = \boldsymbol{\Psi} \mathbf{q}(t) \quad (2.23)$$

Podstawmy ?? do równania 2.22

$$\sum_{r=1}^N \mathbf{M}\psi_r \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^N \mathbf{C}\psi_r \dot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^N \mathbf{K}\psi_r q_r(t) = \mathbf{F}(t) \quad (2.24)$$

Następnie przemnóżmy z lewej strony każdy składnik przez ψ_n^T otrzymując:

$$\sum_{r=1}^N \psi_n^T \mathbf{M}\psi_r \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^N \psi_n^T \mathbf{C}\psi_r \dot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^N \psi_n^T \mathbf{K}\psi_r q_r(t) = \psi_n^T \mathbf{F}(t) \quad (2.25)$$

Podobnie jak w punkcie 2.3.2, ortogonalność wektorów własnych ψ sprawia, że wszystkie składniki sum, w których $r \neq n$, zerują się. Możemy więc zapisać zredukowane równanie w postaci

$$(\psi_n^T \mathbf{M}\psi_n) \ddot{q}_n(t) + (\psi_n^T \mathbf{C}\psi_n) \dot{q}_n(t) + (\psi_n^T \mathbf{K}\psi_n) q_n(t) = \psi_n^T \mathbf{F}(t) \quad (2.26)$$

Zauważmy, że iloczyny zawarte w nawiasach są skalarami. Uprośćmy więc zapis do następującej formy:

$$\mathcal{M}_n \ddot{q}_n(t) + \mathcal{C}_n \dot{q}_n(t) + \mathcal{K}_n q_n(t) = \mathcal{F}_n(t) \quad (2.27)$$

gdzie:

$$\mathcal{M}_n = \psi_n^T \mathbf{M}\psi_n \quad \mathcal{C}_n = \psi_n^T \mathbf{C}\psi_n \quad \mathcal{K}_n = \psi_n^T \mathbf{K}\psi_n \quad \mathcal{F}_n(t) = \psi_n^T \mathbf{F}(t) \quad (2.28)$$

Okazuje się, że wszystkie powyższe przekształcenia doprowadzają do tego, że (2.27) jest równaniem o jednym stopniu swobody dla n -tej współrzędnej normalnej odpowiadającej n -tej postaci drgań. Z tego względu współczynniki \mathcal{M}_n , \mathcal{C}_n , \mathcal{K}_n , $\mathcal{F}_n(t)$ nazywane są odpowiednio uogólnioną masą, uogólnionym tłumieniem, uogólnioną sztywnością i uogólnioną siłą dla n -tej postaci własnej (*eng. generalized mass, generalized damping, generalized stiffness, generalized force*). Równanie to możemy rozwiązać wszystkimi metodami dotyczącymi układów SDOF przedstawionymi w (p. 2.3.3). Warto też zwrócić uwagę, że wartości \mathcal{M}_n , \mathcal{C}_n , \mathcal{K}_n , $\mathcal{F}_n(t)$ są uzależnione jedynie od pojedynczej postaci drgań ψ_n . Naturalnie więc, jeśli znamy tylko jeden mod ψ_n , możemy wyznaczyć odpowiadający mu parametr q_n bez znajomości pozostałych modów. Jeśli współczynniki normalne q_n zostały wyznaczone dla N' wybranych (najczęściej kilku istotnych) modów, to wkład n -tego modu w całkowitą wartość przemieszczeń $\mathbf{x}(t)$ wyznaczyć można następująco

$$\mathbf{x}_n(t) = \psi_n q_n(t) \quad (2.29)$$

a wykorzystując równania (2.23) i (2.29) obliczyć przemieszczenie całkowite

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{r=1}^{N'} \mathbf{x}_n(t) \quad (2.30)$$

Sumowanie wkładu poszczególnych postaci drgań w przemieszczenie całkowite jest par excellence superpozycją. Stąd też nazwa: "metoda superpozycji modalnej". Należy wspomnieć o paru istotnych założeniach mogących wpłynąć na zastosowanie tej metody. Jak już wcześniej wspomniano, może być ona wykorzystana tylko w układach liniowych (ze względu na superpozycję) i tłumionych proporcjonalnie. W przypadku tłumienia nieproporcjonalnego przekształcenie równania (2.25) do (2.26) nie będzie prawdziwe. Warto również pamiętać, że wynikowe przemieszczenia $\mathbf{x}(t)$ są niezależne od normalizacji wektorów własnych, natomiast współrzędne normalne $q_n(t)$ są od niej ścisłe zależne.

Metoda całkowania bezpośredniego równań ruchu - Newmarka

Metoda Newmarka jest algorytmem opartym na koncepcji kroku czasowego i metodach numerycznych. Zgodnie z koncepcją kroku czasowego całkowity czas podzielony jest na serię kroków czasowych, zwykle o stałej wartości Δt . Polega on na dyskretyzacji siły wymuszającej i odpowiedzi układu poprzez określenie ich wyłącznie w wybranych chwilach czasowych. Rozpatrzmy ponownie równanie ruchu MDOF:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}(t) \quad (2.31)$$

Dokonajmy dyskretyzacji i przedstawmy siłę wymuszającą $\mathbf{F}(t)$ określona dla $t \in <0, t_k>$ jako zestaw dyskretnych wartości w chwilach czasowych t_i :

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}(t_i) \quad i = 0, 1, 2 \dots N-1, N \quad (2.32)$$

gdzie $t_N \leq t_k$. Krokiem czasowym nazywamy różnice pomiędzy kolejnymi zdyskretyzowanymi chwilami czasowymi:

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i \quad (2.33)$$

Jest on zazwyczaj przyjmowany jako stały, ale nie jest to konieczne. Tak jak wymuszenie, odpowiedź również podlega dyskretyzacji w chwilach t_i , a więc równanie ruchu można zapisać w nowej formie

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}_i + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}_i + \mathbf{K}\mathbf{x}_i = \mathbf{F}_i \quad (2.34)$$

Znając warunki początkowe $\mathbf{x}(0)$ i $\dot{\mathbf{x}}(0)$ algorytmy wykorzystywane w metodach numerycznych potrafią wyznaczyć rozwiązania równania w kolejnych krokach $i = 1, 2 \dots N-1, N$.

Rodzina metod numerycznych opartych na koncepcji kroku czasowego została rozwinięta przez Nathana M. Newmarka (Newmark 1959). Wykorzystuje ona dwa podstawowe równania:

$$\dot{\mathbf{x}}_{i+1} = \dot{\mathbf{x}}_i + [(1-\gamma)\Delta t]\ddot{\mathbf{x}}_i + (\gamma\Delta t)\ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \quad (2.35a)$$

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + (\Delta t)\dot{\mathbf{x}}_i + [(0.5-\beta)(\Delta t)^2]\ddot{\mathbf{x}}_i + (\beta(\Delta t)^2)\ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \quad (2.35b)$$

gdzie współczynniki β i γ definiują zmienność przyspieszeń w trakcie kroku czasowego i istotnie wpływają na stabilność i dokładność metody. Ze względu na oba te warunki, przy braku modyfikacji algorytmu, parametry powinny mieć następujące wartości: $\gamma = \frac{1}{2}$, a $\frac{1}{6} \leq \beta \leq \frac{1}{4}$. Na skrajach zalecanego przedziału wartości parametru β występują dwa przypadki szczególne, w których przyspieszenie ma określony charakter w kroku czasowym:

- przyspieszenie stałe - $\gamma = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{4}$
- przyspieszenie zmienne liniowo - $\gamma = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{6}$

[noitemsep] Metoda numeryczna do wyznaczenia trzech niewiadomych $\ddot{\mathbf{x}}_{i+1}$, $\dot{\mathbf{x}}_{i+1}$ i \mathbf{x}_{i+1} wymaga układu trzech równań macierzowych. Zatem dwa zaproponowane równania 2.35a i 2.35b, połączone z równaniem równowagi (2.34) zapewnionym na końcu kroku czasowego, pozwalają wyznaczyć przemieszczenia, prędkość i przyspieszenia w chwili t_{i+1} . Ze względu na występowanie w równaniach (2.35) składników w chwili czasowej $i+1$ po obu stronach równania, algorytm musi mieć charakter iteracyjny. Jednakże istnieją modyfikacje równań, które dla układów liniowych pozwalają rozwiązać układ w jednym kroku.

2.3.5 Mała dawka tłumienia

Drgania układów rzeczywistych nierozerwalnie związane są tłumieniem. Wśród polskich autorów obszerne rozważania na temat tłumienia drgań mostów przeprowadził Salamak 2003. Określa on tłumienie drgań jako rozproszenie energii mechanicznej drgającego układu. Tłumienie można podzielić ze względu na źródło na konstrukcyjne i zewnętrzne. W przypadku liniowych układów zazwyczaj przyjmuje się tłumienie klasyczne, proporcjonalne opisane jak w równaniu 2.22. Obecnie nie ma możliwości analitycznego wyznaczenia wartości tłumienia dla projektowanej konstrukcji. Istnieją opracowania poparte badaniami informujące o zalecanych wartościach tłumienia jakie należy przyjąć przy projektowaniu danej konstrukcji. Przykładowe wartości oraz wzory empiryczne można odnaleźć w pracach (Salamak 2003; Frýba 1999; Bachmann i in. 2012; Yamaguchi i Ito 1997). W literaturze można odnaleźć kilka miar tłumienia. Pierwszą z nich jest liczba tłumienia (*eng. damping ratio*) nazywana również ułamkiem tłumienia lub tłumieniem względym. Definiuje się ją jako stosunek współczynnika tłumienia wiskotycznego do tłumienia krytycznego. Dla jednego stopnia swobody (por. (2.20)) liczę tłumienia można zapisać formułą (2.36).

$$\zeta = \frac{c}{c_{kr}} = \frac{c}{2m\omega} \quad (2.36)$$

Tłumieniem krytycznym nazywamy wartość tłumienia, po przekroczeniu której ruch staje się aperiodyczny. Dla tłumienia równego tłumieniu krytycznemu liczba tłumienia jest równa 1. W przypadku mostów liczba tłumienia zwykle nie przekracza 10% (Salamak 2003).

Inną miarą tłumienia jest Logarytmiczny Dekrement Tłumienia (LDT). Określa się go jako logarytm naturalny stosunku dwóch kolejnych amplitud drgań swobodnych danego modu (2.37).

$$LDT = \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} \quad (2.37)$$

Przy małym tłumieniu wartości dwóch kolejnych amplitud mogą różnić się nieznacznie, a więc błęd powstający przy odczytcie może być duży. W takim przypadku zalecane jest wyznaczenie średniego dekrementu z odległszych w czasie amplitud. Odczytując wartość n -tej amplitudy i $n + m$ -tej amplitudy wartość LDT można wyznaczyć z równania:

$$LDT = \frac{1}{m} \ln \frac{a_n}{a_{n+m}} \quad (2.38)$$

Zależność pomiędzy LDT, a liczbą tłumienia określona jest następująco:

$$LDT = \ln \frac{q(t)}{q(t+T)} = \ln \frac{e^{-\zeta\omega t}}{e^{-\zeta\omega(t+T)}} = \ln e^{\zeta\omega T} = \zeta\omega T = \zeta\omega \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (2.39)$$

gdzie: ω_d - częstotliwość drgań tłumionych ($\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}$), T - okres drgań tłumionych $T = \frac{2\pi}{\omega_d}$. W przypadku drgań konstrukcji budowlanych liczba tłumienia jest z reguły niewielka ($\zeta < 0.1$). Z tego względu częstotliwość drgań własnych tłumionych i nietłumionych są zbliżone. W takim przypadku zależność pomiędzy LDT, a liczbą tłumienia często upraszcza się do postaci przybliżonej:

$$LDT \approx 2\pi\zeta \quad (2.40)$$

Spośród metod pozwalających na uwzględnienie tłumienia w obliczeniach najpopularniejszą jest tłumienie masowo-sztywnościowe Rayleigh'a (Chopra 2012). Opiera

się ono na stworzeniu macierzy tłumienia \mathbf{C} bazując na liniowej kombinacji macierzy mas \mathbf{M} i macierzy sztywności \mathbf{K} (por. 2.22):

$$\mathbf{C} = a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{K} \quad (2.41)$$

W przypadku zastosowania tłumienia Rayleigh'a liczba tłumienia odpowiadająca danemu modowi wyznaczona jest z wzoru:

$$\zeta_n = \frac{a_0}{2} \frac{1}{\omega_n} + \frac{a_1}{2} \omega_n \quad (2.42)$$

Z kolei przyjmując liczbę tłumienia o określonej wartości można wyznaczyć wartości parametrów a_0 i a_1 . Dla danych częstości ω_i i ω_j współczynniki Rayleigh'a wyznaczyć można z wzorów (2.43).

$$a_0 = \zeta \frac{2\omega_i \omega_j}{\omega_i + \omega_j} \quad a_1 = \zeta \frac{2}{\omega_i + \omega_j} \quad (2.43)$$

Wpływ składowych macierzy tłumienia pochodzących od macierzy mas i macierzy sztywności najlepiej zobrazować na przykładzie jednego stopnia swobody. Jakościami wpływ przedstawiono na rysunku 2.2. Z rysunku 2.2 można wysnuć przydatne



Rysunek 2.2: Wizualizacja wpływu masy i sztywności na macierz tłumienia według Rayleigh'a

z praktycznego punktu widzenia wnioski. Założone tłumienie ζ jest spełnione jedynie dla dwóch użytych w formułach 2.43 częstości ω_i i ω_j . Składnik $c_1 = a_1 k$ wzrasta liniowo wraz ze wzrostem częstości. Z kolei składnik $c_0 = a_0 m$ maleje nieliniowo wraz ze wzrostem częstości. Sumaryczna wartość obu składników z reguły gwarantuje dla wąskiego przedziału częstości $\langle \omega_i, \omega_j \rangle$ tłumienie zbliżone do zakładanego.

2.4 Dynamiczne obciążenie kolejowe

2.4.1 Realne obciążenia - tabor

2.4.2 Modele obciążenia

2.4.3 Przepisy normowe i wytyczne.

2.5 Analiza dynamiczna w Metodzie Elementów Skończonych

2.5.1 Analiza modalna

2.5.2 Odpowiedź konstrukcji

2.5.3 Kalibracja modeli numerycznych

Rozdział 3

Identyfikacja cech dynamicznych konstrukcji

3.1 Operacyjna analiza modalna (OMA)

3.1.1 Koncepcja OMA

W ogólnosci doświadczalna analiza modalna to proces korelacji charakterystyk dynamicznych modelu matematycznego, z fizycznymi właściwościami systemu opisanego rezultatami pomiarów. Przypomnijmy, że w OMA do procesu estymacji parametrów modalnych używane są tylko pomiary odpowiedzi konstrukcji. Różni ją to od EMA, w której mierzone są zarówno wymuszenia jak i odpowiedź. Fundamentem wszystkich metod OMA jest założenie, że badana struktura obciążona jest wymuszeniem o widmie zbliżonym do białego szumu. Oznacza to, że energia konstrukcji jest rozłożona w szerokim paśmie częstotliwości, które zawiera wszystkie interesuje badacza mody do identyfikacji. Z oczywistych względów idealne wymuszenie o charakterystyce białego szumu nie jest możliwe. Większość metod radzi sobie z tym brakiem, jednak najważniejsze jest, żeby wszystkie interesujące mody były odpowiednio wzbudzone, tak aby ich wkład był wychwycony przez przyrządy pomiarowe. Brincker i C. E. Ventura 2015 tłumaczą tę koncepcję za pomocą fikcyjnego, kolorowego filtra obciążenia. Zaproponowano, że kolorowe obciążenie może być traktowanego jako wynik obciążenia kolorowego filtra (zgodnego z obciążeniem) przez idealnie biały szum. Udowodniono, że takie podejście nie zmienia fizycznych modeł systemu. Należy jednak pamiętać, że metody OMA w tym przypadku dokonają identyfikacji modalnej zarówno struktury fizycznej, jak i filtra obciążenia. Koncepcję zaprezentowano na rysunku 3.1. Najważniejszą konsekwencją jest możliwość występowania wśród wyników identyfikacji nie tylko modów związanych z konstrukcją, ale też wynikających z warunków obciążenia. Należy pamiętać również, że pomierzone wartości obarczone są szumem pomiarowym. Nie niesie on żadnej istotnej, fizycznej informacji, ale jest nieunikniony w trakcie rzeczywistych pomiarów. Tak więc wynik identyfikacji zawiera w sobie trzy składowe:

- parametry modalne związane z drganiami własnymi konstrukcji,
- myślowy filtr obciążenia, kolorujący biały szum do rzeczywistego, nieznanego obciążenia,
- szum pomiarowy.

W idealnych warunkach, kiedy filtr obciążenia ma biały kolor, a szum pomiarowy byłby zerowy, OMA zidentyfikuje wyłącznie mody konstrukcji.



Rysunek 3.1: Schemat układu identyfikowanego przez OMA przy koncepcji kolorowego filtra obciążenia

Operacyjna Analiza Modalna jest obwarowana pewnymi założeniami. Są one rozwinięciem założeń podanych w punkcie 2.1. Układ poddany analizie OMA musi spełniać następujące warunki:

- liniowość - odpowiedź układ na zadaną kombinację obciążeń, jest sumą odpowiedzi odpowiadających każdemu obciążeniu traktowanemu osobno - zasada superpozycji,
- stacjonarność - charakterystyki dynamiczne konstrukcji nie zmieniają się w czasie. Innymi słowy, współczynniki równań różniczkowych opisujących odpowiedź struktury są niezależne od czasu.
- obserwowalność - dobór lokalizacji punktów pomiarowych musi być tak zaprojektowany, żeby był w stanie dostrzec interesujące obserwatora mody. Niezależnie od tego w trakcie analizy spełnione muszą być również kryteria obserwowalności sterowalności opisane w punkcie 3.3.2.

WARUNKI DOTYCZĄCE WYMUZENIA? Rainieri i Fabbrocino 2014

3.1.2 Metody operacyjnej analizy modalnej

Metody identyfikacji modalnej dzielą się na dwa główne rodzaje związane z dziedziną w której działa algorytm:

- metody w dziedzinie czasu (*eng. time-domain methods (TDM)*),
- metody w dziedzinie częstotliwości (*eng. frequency-domain methods (FDM)*).

Metody EMA w dziedzinie czasu wykorzystują do estymacji parametrów modalnych funkcje odpowiedzi impulsowej (*eng. impulse response function (IRF)*). W OMA, nośnikiem informacji o odpowiedzi swobodnej układu (*eng. free decays*) są funkcje korelacji (*eng. correlation functions*). Identyfikacja parametrów polega w tym przypadku na dopasowaniu parametrów modalnych do informacji zawartej w funkcjach korelacji. Stosowane są do tego modele parametryczne wykorzystujące techniki

regresji. Główną różnicą pomiędzy dostępnymi algorytmami TD jest właśnie zastosowana metoda regresji. Zasadniczo wszystkie metody TD stosowane w EMA mogą być użyte w OMA właśnie z zastosowaniem funkcji korelacji.

Podobną analogię jak w metodach TD można zauważać dla metod w dziedzinie częstotliwości. W algorytmach EMA w dziedzinie częstotliwości bazą do identyfikacji są funkcje odpowiedzi częstotliwościowej (*eng. frequency-response function (FRF)*). W OMA rolę tę pełnią funkcje gęstości widmowej (*eng. spectral density functions*).

Przed wyborem dziedziny w której badacz chce się poruszać, warto poznać elementy charakterystyczne dla grupy algorytmów TD i FD. Podstawową wadą metod TD jest to, że wszystkie mody, które występują w sygnale są ujęte w funkcjach korelacji. W konsekwencji wszystkie mody zawsze są rozważane w trakcie rozwiązania problemu. Z kolei ich zaletą, w porównaniu do metod FD, jest większa odporność na wystąpienie błędów systematycznych w estymowanych parametrach modalnych. Niejako w kontrze do metod TD, zaletą metod FD jest to, że każdy z modów występuje w wąskim przedziale częstotliwości. Dzięki temu możliwe jest rozważanie tylko przedziałów częstotliwości, w których występują interesujące badacza mody. Z drugiej strony wadą metod FD jest wykorzystywanie do identyfikacji funkcje gęstości widmowej, które są wyznaczane za pomocą różnych metod (CYTOWANIE) obciążonych błędami systematycznymi. Błędy te nieuchronnie przenoszą się na wynikowe parametry modalne, a określenie ich wpływu jest problematyczne. Maia i Silva 1997 sugerują, że metody w dziedzinie czasu są z reguły lepszym wyborem w przypadku dużego przedziału interesujących badacza częstotliwości, albo dużej liczby modów w tym zakresie. Natomiast metody w dziedzinie częstotliwości dostarczają lepszych wyników kiedy zakres częstotliwości jest niewielki, a liczba modów relatywnie mała.

Drugie kryterium podziału algorytmów dotyczy liczby modów, które mogą być jednocześnie analizowane za pomocą danej metody. Podział jest zbliżony do tego dotyczącej teoretycznej analizy modalnej. Metoda może identyfikować albo jeden stopień swobody (*eng. single degree-of-freedom*) albo wiele stopni swobody (*eng. multiple degree-of-freedom*).

Metody TDM i FDM możemy podzielić również na bezpośrednie (*eng. direct*) i pośrednie (*eng. indirect*). Różnica polega na sposobie wyznaczania FRF. Metody bezpośrednie pozwalają wyznaczyć ją bezpośrednio z równania ruchu. Natomiast metody pośrednie estymują FRF na podstawie wcześniej zidentyfikowanego modelu modalnego.

Ostatnim ogólnie przyjętym kryterium podziału jest liczba punktów poddanych wymuszeniu i mierzonych w trakcie serii pomiarowej. Koresponduje to z liczbą analizowanych jednocześnie przez metodę identyfikacji funkcji FRF. Kiedy mówimy o jednoczesnej analizie tylko jednej funkcji FRF mamy do czynienia z metodą jedno-wejście-jedno-wyjście (SISO) (*eng. single-input-single-output*). Kiedy mierzymy wymuszenie w jednym punkcie, a odpowiedź badamy w kilku różnych punktach na konstrukcji, otrzymując kilka funkcji FRF, metodę klasyfikuje się jako jedno-wejście-wiele-wyjścia (SIMO) (*eng. single-input-multi-output*). W powyższej technice obowiązuje założenie, że parametry modalne uzyskane z każdej funkcji FRF będą takie same. Innymi słowy są to parametry globalne dla całej konstrukcji. Naturalnym rozwińciem są metody które mogą analizować wszystkie dostępne funkcje FRF jednocześnie, uzyskane w skutek wymuszenia i pomiaru wielu różnych punktów. Metody te określane są jako wiele-wejście-wiele-wyjście (MIMO) (*eng. multi-input-multi-output*).

Maia i Silva 1997 opisali szczegółowo wiele z metod zarówno eksperymental-

nej jaki i doświadczalnej analizy modalnej. Z kolei Brincker i C. E. Ventura 2015 sklasyfikowali najpopularniejsze, używane współcześnie metody identyfikacji OMA. Spośród algorytmów działających w dziedzinie czasu należy wymienić:

- Poly Reference (PR) (Norton 2009; Vold i in. 1982),
- Autoregressive Moving Average (ARMA) (D. Shi i Stühler 1987; C. S. Huang 2000; Giorcelli i in. 1994),
- Ibrahim Time Domain (ITD) (Samir R. Ibrahim 1983; Richard S Pappa i Samir R Ibrahim 1985),
- Eigensystem Realization Algorithm (ERA) (Jer-Nan Juang i Richard S Pappa 1985; R S Pappa i J N Juang 1985; Juang i Suzuki 1988),
- Stochastic Subspace Identification (SSI). (Van Overschee i De Moor 1996; Peeters i De Roeck 1999; Peeters 2000).

Warto zaznaczyć, że metoda ERA przy zastosowaniu postulatów NExT stanowi jeden z pośrednich wariantów metody SSI, używający funkcji korelacji jako źródła informacji przy identyfikacji.

Z kolei najpopularniejsze algorytmy w dziedzinie częstotliwości to:

- Basic Frequency Domain (Peak-Picking) (Felber 1994),
- Frequency-Domain-Decomposition (FDD) (Brincker, L. Zhang i Andersen 2000; Brincker, L. Zhang i Palle Andersen 2001; Brincker, C. Ventura i Palle Andersen 2001),
- The Least Squares Complex Frequency Method (LSCF) (Verboven i in. 2005),
- The Poly-Reference Least Squares Complex Frequency Method (p-LSCF) (Peeters i Van der Auweraer 2005).

Wszystkie z powyższych algorytmów są bardzo dobrze opisane i udokumentowane w literaturze. Trudno orzec, który z nich jest obiektywnie najlepszy. Wiele zależy od doświadczenia i wiedzy autora oraz specyfiki zadania. Jak powiedział Sam Ibrahim: "Jeśli nie występują blisko położone mody i szum - wszystko zadziała" (*eng. "If there are no closely spaced modes and no noise - everything works"*). Wybór metody może więc zależeć od preferencji, umiejętności programowania czy dostępnych narzędzi. W literaturze można napotkać wiele indywidualnych aplikacji algorytów (CYTOWANIE). Istnieją również komercyjne programy, które pozwala na identyfikację modalną. Do najpopularniejszych należą ARTeMIS - SVS (Extractor ARTeMIS 1999) i MACCEC - dodatek do programu MATLAB (Reynders, Schevenels i De Roeck 2014).

Do identyfikacji parametrów modalnych konstrukcji, które są częścią tej pracy autor zdecydował o zastosowaniu algorytmu NExT-ERA. Wynika to z doświadczenia zespołu mostów Politechniki Gdańskiej przy stosowaniu tej metody oraz z dostępnej szerokiej literatury pokazującej skuteczne zastosowanie tej metody w przypadku badania mostów. W kolejnym rozdziale omówiono szczegółowo metody oraz implementację jej algorytmu w autorskiej aplikacji napisanej w języku python.

3.2 Przykłady zastosowań (literatura i własne)

3.3 Metoda NExT-ERA

Metoda NExT-ERA jest jedną z metod operacyjnej analizy modalnej. Składnik NExT pochodzi od słów Natural Excitation Technique. NExT jest właściwie klasą metodą OMA. Zawiera w sobie algorytmy początkowo stworzone do eksperymentalnej analizy modalnej wejście-wyjście (*eng. input-output*) (np. ERA, LSCE, ITD), a które następnie rozszerzone zostały do analizy problemu jedynie na podstawie sygnałów odpowiedzi konstrukcji (*eng. output-only*). Taką możliwość ujawniło odkrycie faktu, że funkcje korelacji odpowiedzi konstrukcji, wywołanej losowymi wymuszeniami mogą być wyrażone jako suma zanikających sinusoid. Potwierdzono również, że funkcje korelacji zawierają informację na temat parametrów modalnych struktury. Zauważono więc, że można zastąpić tradycyjnie używane funkcje odpowiedzi impulsowej (IRF), funkcjami korelacji losowych drgań konstrukcji pod wymuszeniem środowiskowym. W ten sposób tradycyjne metody EMA zostały skutecznie zaadaptowane do OMA (Rainieri i Fabbrocino 2014). W dalszej części rozdziału zostaną przedstawione najważniejsze zagadnienia dotyczące identyfikacji metodą NExT-ERA.

3.3.1 Funkcje korelacji, a odpowiedź swobodna układu

Przyjmijmy, że X oznacza zmienną losową, a $x(t)$ realizację tej zmiennej losowej w czasie. $x(t)$ w tej pracy może być utożsamiany z zaobserwowanym sygnałem. Wprowadźmy prostą definicję kowariancji. Jest to funkcja, która dostarcza informacji o zależności pomiędzy dwoma zmiennymi i dana jest wzorem:

$$\text{cov}[X, Y] = \text{E}[XY] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy p_{xy}(x, y) dx dy \quad (3.1)$$

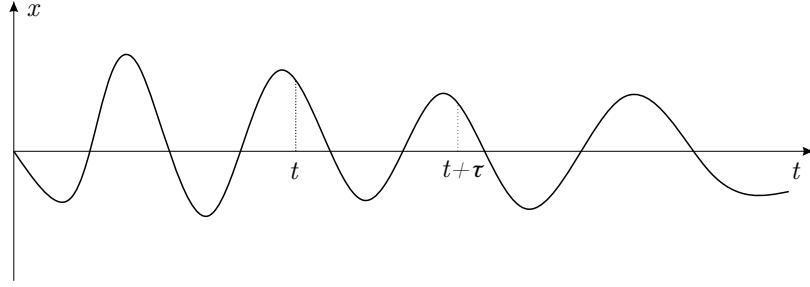
gdzie: $\text{E}[\cdot]$ - wartość oczekiwana, $p_{xy}(x, y)$ - wspólna funkcja gęstości prawdopodobieństwa (*eng. joint probability density function*). Używając metody uśredniania w czasie $[0, T]$ możemy zapisać kowariancję jako:

$$\text{cov}[x(t), y(t)] = \text{E}[x(t)y(t)] = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t) dt \quad (3.2)$$

Korelacją możemy określić zależność jak dla kowariancji, w której usunięto czynnik stały (wartość średnią) i opisać równaniem (3.3). W OMA zwykle sygnały na samym początku analizy są pozbawiane czynnika stałego, stąd użycie właśnie funkcji korelacji jest dla tej rodziny metod analizy modalnej kluczowe.

$$\text{cor}[x(t), y(t)] = \text{E}[(x(t) - \mu_x)(y(t) - \mu_y)] = \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - \mu_x)(y(t) - \mu_y) dt \quad (3.3)$$

W OMA funkcja korelacji wykorzystywana jest jako autokorelacja (*eng. autocorrelation*) i cross-korelacja (*eng. cross-correlation*). Dla pojedynczego sygnału $x(t)$ można rozważyć jak wygląda korelacja pomiędzy punktem $x(t)$, a punktem $x(t + \tau)$, czyli odległym w czasie o τ . Przedstawienie graficzne problemu pokazano na rysunku 3.2. Intuicyjnie widać, że wartość korelacji dla punktów bliskich sobie będzie duża, a dla punktów bardzo od siebie odległych będzie maleć. Autokorelacją nazwiemy



Rysunek 3.2: Autokorelacja, jako korelacja wartości funkcji $x(t)$ w czasie t i $t + \tau$

funkcję daną równaniem (3.4), gdzie funkcję y w równaniu (3.3) zastąpiono $x(t + \tau)$.

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t + \tau)] \quad (3.4)$$

Funkcję cross-korelacji opiszemy analogicznie jak autokorelacji, z tą różnicą, że pod uwagę weźmiemy dwa losowe sygnały $x(t)$ i $y(t)$.

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= E[x(t)y(t + \tau)] \\ R_{yx}(\tau) &= E[y(t)x(t + \tau)] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Nie znając funkcji gęstości prawdopodobieństwa, funkcje autokorelacji i cross-korelacji można wyznaczyć za pomocą uśredniania w czasie co opisano równaniami odpowiednio (3.6) i (3.7). W dalszej części pracy podane zostaną inne przykłady metod wyznaczania funkcji korelacji.

$$R_x = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t + \tau) dt \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} R_{xy} &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t + \tau) dt \\ R_{yx} &= \frac{1}{T} \int_0^T y(t)x(t + \tau) dt \end{aligned} \quad (3.7)$$

Jedną z istotnych właściwości funkcji korelacji jest możliwość wyznaczenia jej przez splot między sygnałem $x(-t)$ i $y(t)$, co zapisano równaniem (3.8). Główną zaletą tego rozwiązania jest prostota obliczeń, ponieważ splot dwóch funkcji jest łatwy do wyznaczenia w dziedzinie częstotliwości (Brincker i C. E. Ventura 2015).

$$R_{xy}(\tau) = x(-t) * y(t) \quad (3.8)$$

W praktyce wykonywanych jest wiele pomiarów. Założymy, że dla zestawu N pomiarów, zmierzone odpowiedzi mogą być zestawione w wektor:

$$\mathbf{y}(t) = \{y_1(t), y_2(t), y_3(t), \dots, y_N(t)\}^T \quad (3.9)$$

Wyniki autokorelacji i cross-korelacji pomiędzy wszystkimi zmierzonymi sygnałami można zagregować i zapisać macierzowo (3.10). Na przekątnej macierzy znajdują się funkcje autokorelacji, a poza przekątną cross-korelacji.

$$\mathbf{R}^T(\tau) = E[\mathbf{y}(t)\mathbf{y}^T(t + \tau)] \quad (3.10)$$

Macierzą korelacji (*eng. correlation matrix*) nazywa się macierz (3.10) dla $\tau = 0$ co można zapisać wzorem (3.11).

$$\mathbf{C} = \mathbb{E}[\mathbf{y}(t)\mathbf{y}^T(t)] = \mathbf{R}(0) \quad (3.11)$$

Funkcje korelacji posiadają dwie wspomniane wcześniej właściwości kluczowe dla OMA. Po pierwsze teoretycznie pozwalają wyodrębnić wszystkie informacje na temat parametrów modalnych konstrukcji z sygnału losowego. Po drugie mogą być utożsamiane z drganiami swobodnymi, gasącymi układu (G H James, Carne i Lauffer 1995). Oba założenia zostały wyjaśnione i udowodnione poniżej.

Założenie o reprezentacji wszystkich parametrów modalnych przez funkcje korelacji opiera się na wykorzystaniu właściwości funkcji korelacji, rozkładu normalnego oraz Centralnego Twierdzenia Granicznego (*eng. central limit theorem*). Centralne Twierdzenie Graniczne mówi, że dla niezależnych zmiennych losowych X_i o jednakowym rozkładzie, fluktuujących wokół wartości oczekiwanej μ i o skończonej wariancji σ^2 to wyrażenie (3.12)

$$\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^M X_i - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{M}}} \quad (3.12)$$

zbiega według rozkładu do rozkładu Gaussa przy nieskończonej liczbie M. Brincker i C. E. Ventura 2015 przedstawili uzasadnienie użycia tego twierdzenia w przypadku OMA w następujący sposób. Rozważmy zestaw zmiennych losowych $\{x_1, x_2, \dots, x_M\}$, które są niezależne i posiadają identyczny rozkład, ze średnią wartością μ i wariancją σ^2 . Liniowa kombinacja tych zmiennych losowych jest dana wzorem:

$$y = \sum_{i=1}^M a_i x_i \quad (3.13)$$

Centralne twierdzenie graniczne mówi o tym, że dla dużej liczby zmiennych losowych M rozkład y jest w przybliżeniu normalny, z wartością średnią $\mu_y = \mu \sum a_i$, wariancją $\sigma_y^2 = \sigma^2 \sum a_i^2$ i przy $M \rightarrow \infty$ zbiega do rozkładu normalnego. Odwołując się do dynamiki budowli możemy zapisać, że odpowiedź układu $y(t)$ jest splotem siły wymuszającej $x(\tau)$ i funkcji odpowiedzi impulsowej $h(t)$ co pokazano równaniem:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)x(\tau) d\tau \quad (3.14)$$

Dla sygnału dyskretnego z krokiem czasowym Δt i ograniczając się jedynie do N_m istotnych z punktu widzenia pamięci systemu próbek, zależność może być przedstawiona następująco:

$$y(n) = \sum_{k=n-N_m}^n h(n-k)x(k)\Delta t \quad (3.15)$$

Można zauważyć, że dla wymuszenia szumem białym odpowiedź dynamiczna $y(n)$ jest sumą, którą można przedstawić wzorem (3.13), gdzie poszczególne składniki obciążenia $x(k)$ nie muszą mieć rozkładu normalnego, ale ostateczna odpowiedź będzie mieć rozkład Gaussa. Wynika to wprost z Centralnego Twierdzenia Granicznego. Warto nadmienić, że założenie o wymuszeniu białym szumem zapewnia nam niezależność składników obciążenia $x(k)$.

Bazując na powyższym, w OMA zwykle zakładamy, że mierzone sygnały posiadają wartość średnią równą zero oraz są Gaussowskie (*eng. Gaussian signals*)

lub bliskie Gaussowskim (Brincker i C. E. Ventura 2015). Przypomnijmy, że jednowymiarowa funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu normalnego dana jest wzorem:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.16)$$

, a przyjmując dodatkowo wartość średnią równą zero wzór można wyrazić następująco:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (3.17)$$

Dla wektora losowego, zawierającego zmienne losowe o zerowej wartości średniej $\mathbf{x}^T = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_M\}$, funkcja gęstości prawdopodobieństwa może być zapisana jako:

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{M}{2}} |\mathbf{C}|} e^{\mathbf{x}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{x} / 2} \quad (3.18)$$

gdzie $|\mathbf{C}|$ jest wyznacznikiem macierzy korelacji (3.11). Podstawowym wnioskiem wynikającym z tej zależności jest to, że jednowymiarowy rozkład Gaussa może być opisany za pomocą średniej wartości, odchylenia standardowego i w przypadku wielowymiarowych danych o zerowej wartości średniej, jedynie przez przez macierz korelacji (3.18).

Aby wytłumaczyć dlaczego funkcje korelacji w OMA mogą być odpowiednikiem funkcji odpowiedzi impulsowej (IRF), a funkcje gęstości widmowej odpowiednikami funkcji odpowiedzi częstotliwościowej (FRF) przytoczymy wymagane definicje i zależności z dynamiki budowli. Szczegółowe wyprowadzenia i objaśnienia znajdują się między innymi w pracach (Brincker i C. E. Ventura 2015; Rainieri i Fabbrocino 2014; Chopra 2012; Ewins 2000). Funkcja odpowiedzi impulsowej układu, zwykle oznaczane jako $h(t)$ jest odpowiedzią układu poddanego wymuszeniu przez impulsową siłę, o bardzo krótkim czasie działania, w chwili czasowej $t = 0$. Matematycznie impulsową siłę opisuje funkcja nazywaną deltą Diraca $\delta(t)$. Dla systemów liniowych i czasowo niezależnych, jeżeli przesunięta w czasie zostanie chwila przyłożenia impulsu o τ , to otrzymamy odpowiedź $y(t)$, która będzie również przesunięta w czasie o τ . Z definicji wiemy, że impuls jest iloczynem intensywności obciążenia i czasu jego działania. Rozważmy ciągłe obciążenie oznaczone jako $x(t)$, które jest superpozycją potoku impulsów o zmiennej amplitudzie, ale o równej krótkich czasach trwania. W takim przypadku impuls siły od czasu τ do $\tau + d\tau$ obliczamy jako $x(\tau)d\tau$, a odpowiedź układu jako $h(t - \tau)x(\tau)d\tau$. Układ jest liniowy a więc obowiązuje zasada superpozycji. Wynika z tego, że suma wpływu całego obciążenia może być wyznaczona jako suma wszystkich składowych odpowiedzia i opisana całką Duhamel'a jako (3.19) oraz w postaci splotu (3.20) miedzy funkcją IRF $h(t)$ i wymuszeniem $x(t)$.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)x(\tau)d\tau \quad (3.19)$$

$$y(t) = h(t) * x(t) \quad (3.20)$$

Funkcję IRF można wyznaczyć wykonując przekształcenie Laplace'a równania ruchu przedstawionego równaniem (2.2). Dla przejrzystości przytoczono je poniżej (3.21), dla układu z jednym stopniem swobody, wymuszenia deltą Diraca i podstawiając w miejsce odpowiedzi układu funkcję IRF:

$$m\ddot{h}(t) + c\dot{h}(t) + kh(t) = \delta(t) \quad (3.21)$$

Wykonując transformatę Laplace'a obu stron otrzymamy:

$$(ms^2 + cs + k)H(s) = 1 \quad (3.22)$$

Wykorzystując właściwości transformaty i przekształcając odpowiednio równanie (3.22) otrzymamy formułę (3.23). Na jej podstawie można wprost wyznaczyć funkcje IRF podaną równaniem (3.24).

$$H(s) = \frac{1}{m(s - \lambda)(s - \lambda^*)} \quad (3.23)$$

$$h(t) = \frac{1}{m} \frac{e^{\lambda t} - e^{\lambda^* t}}{\lambda - \lambda^*} \quad (3.24)$$

Z kolei funkcja FRF w sensie fizycznym reprezentuje amplitudę i przesunięcie fazowe drgań ustalonych systemu SDOF, poddanego wymuszeniu harmonicznemu o jednostkowej amplitudzie i częstotliwości ω_d . Matematycznie FRF $H(\omega)$ można opisać również jako transformatę Laplace'a z IRF obliczoną dla urojonej wspólrzędnej $s = i\omega$ (3.23) i zapisać następująco:

$$H(\omega) = \frac{1}{m(i\omega - \lambda)(i\omega - \lambda^*)} \quad (3.25)$$

Podobnie jak IRF, FRF łączy wymuszenie z odpowiedzią układu. Jeśli równanie ruchu (2.2) stronami przekształcimy transformatą Fouriera to otrzymamy:

$$(m(i\omega)^2 + ci\omega + k)Y(\omega) = X(\omega) \quad (3.26)$$

Szczegółowe rozwiązywanie za pomocą reprezentacji biegunów układu można znaleźć w literaturze (Brincker i C. E. Ventura 2015). Ostatecznie otrzymujemy:

$$m(i\omega - \lambda)(i\omega - \lambda^*)Y(\omega) = X(\omega) \quad (3.27)$$

Po przekształceniu wyraźnie widać relację pomiędzy odpowiedzią, a wymuszeniem układu za pośrednictwem FRF:

$$Y(\omega) = \frac{1}{m(i\omega - \lambda)(i\omega - \lambda^*)}X(\omega) = H(\omega)X(\omega) \quad (3.28)$$

gdzie $X(\omega)$ i $Y(\omega)$ są odpowiednio transformatami Fouriera wymuszenia $x(t)$ i odpowiedzi $y(t)$ układu. Porównując równania (3.26)(3.28) łatwo można zauważać, że FRF zawiera w sobie informację na temat bezwładności, tłumienia i sztywności układu.

Zarówno IRF jak i FRF można uogólnić do układów MDOF o N stopniach swobody. Zapis zależności wymuszenie-odpowiedź dla układu MIMO (wiele-wejście-wiele-wyjście) przedstawiono dla dziedziny czasu (3.29) i częstotliwości (3.30).

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}(t) * \mathbf{x}(t) \quad (3.29)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}(\omega) = \tilde{\mathbf{H}}(i\omega)\tilde{\mathbf{x}}(\omega) \quad (3.30)$$

gdzie $\mathbf{H}(t)$ jest macierzą zawierającą funkcje IRF, $\mathbf{x}(t)$ jest wektorem sił wymuszających, $\tilde{\mathbf{y}}(\omega)$ i $\tilde{\mathbf{x}}(\omega)$ są transformatami Fouriera odpowiednio $\mathbf{x}(t)$ i $\mathbf{y}(t)$, a $\tilde{\mathbf{H}}(i\omega)$ jest macierzą FRF. Wyrażenia na odpowiednio IRF $\mathbf{H}(t)$ i FRF $\tilde{\mathbf{H}}(i\omega)$ podano poniżej.

$$\mathbf{H}(t) = \sum_{n=1}^N (\mathbf{A}_n e^{\lambda_n t} + \mathbf{A}_n^* e^{\lambda_n t}) \quad (3.31)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(i\omega) = \sum_{n=1}^N \left(\frac{\mathbf{A}_n}{i\omega - \lambda_n} + \frac{\mathbf{A}_n^*}{i\omega - \lambda_n^*} \right) \quad (3.32)$$

gdzie $\mathbf{A}_n = Q_n \boldsymbol{\psi}_n \boldsymbol{\psi}_n^T$, $\boldsymbol{\psi}_n$ to n-ta postać drgań własnych, Q_n to współczynnik skalujący mody, a $\lambda_n = \sigma_n + i\omega_{d,n}$ jest n-tym biegunem układu zawierającym informacje na temat częstotliwości drgań własnych tłumionych $f_{d,n} = \omega_{d,n}/(2\pi)$ i liczby tłumienia $\xi_r = -\sigma_n/\sqrt{\sigma_n^2 + \omega_{d,n}^2}$ n-tego moda.

Gęstość widmowa jest kolejnym kluczowym pojęciem potrzebnym do pełnego zrozumienia znaczenia funkcji korelacji dla OMA. Gęstość widmowa (*eng. auto spectral density*) dla przebiegu czasowego $x(t)$ jest zdefiniowana jako transformata Fouriera z funkcji korelacji $R_x(\tau)$ 3.33. Istnieje również zależność odwrotna, w której odwrotną transformata Fouriera z gęstości widmowej pozwala otrzymać funkcję korelacji 3.34. Początkowy wyraz funkcji korelacji $R_x(0)$ jest reprezentacją twierdzenia Parsevela i pozwala stwierdzić, że gęstość widmowa pokazuje rozkład energii w funkcji częstotliwości. Stąd gęstość widmową nazywa się również zamiennie gęstością widmową mocy (*eng. power spectral density*) (PSD) (Brincker i C. E. Ventura 2015).

$$G_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (3.33)$$

$$R_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (3.34)$$

Podobnie zdefiniować można gęstość widmową pomiędzy dwoma sygnałami $x(t)$ i $y(t)$ (*eng. cross spectral density*), jako przekształcenie Fouriera funkcji cross-korelacji $R_{xy}(t)$.

$$G_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (3.35)$$

$$R_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{xy}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (3.36)$$

Wykorzystanie właściwości splotu funkcji korelacji (3.8) i splotu¹ oraz symetrii Hermitowskiej² transformaty Fouriera pozwala uzyskać następującą właściwość gęstości widmowej (3.37). Należy nadmienić, że zależność ta będzie spełniona przy założeniu okresowego (lub bardzo długiego) sygnału (Brincker i C. E. Ventura 2015).

$$G_{xy}(\omega) = X^*(\omega)Y(\omega) \quad (3.37)$$

Rozważamy ponownie układ SISO o odpowiedzi $y(t)$ przy wzbudzeniu $x(t)$: $y(t) = x(t) * h(t)$ (3.20). Wykorzystując równanie (3.37) zapiszemy równanie na gęstość widmową odpowiedzi:

$$G_y(\omega) = Y^*(\omega)Y(\omega) \quad (3.38)$$

¹Transformata Fouriera splotu dwóch funkcji w dziedzinie czasu $h(t)$ i $g(t)$ jest równa iloczynowi transformat Fouriera każdej z funkcji osobno. Innymi słowy transformacie Fouriera wyrażenia $h(t)*g(t)$ odpowiada iloczyn $H_k G_k$, gdzie: H_k - transformata Fouriera funkcji $h(t)$, G_k - transformata Fouriera funkcji $g(t)$.

²Jeżeli $H(\omega)$ jest transformata Fouriera rzeczywistej funkcji $h(t)$, to prawdziwe jest równanie $H(\omega) = H^*(-\omega)$. Równanie to jest nazywane symetrią Hermitowską (Boashash 2015).

Wykorzystując transformatę Fouriera oraz przemienność i łączność splotu zapisać można następujące równanie pokazujące zależność pomiędzy gęstością widmową odpowiedzi i wymuszenia układowi.

$$G_y(\omega) = G_x(\omega)|H^*(i\omega)|^2 \quad (3.39)$$

Równanie (3.39) jest nazywane twierdzeniem podstawowym (*eng. fundamental theorem*) metody OMA. Dla układu MIMO twierdzenie to przyjmuje następującą formę w dziedzinie częstotliwości:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_y(\omega) &= \tilde{\mathbf{H}}^*(i\omega)\mathbf{G}_x(\omega)\tilde{\mathbf{H}}^T(i\omega) \\ &= \tilde{\mathbf{H}}^*(i\omega)\mathbf{G}_x(\omega)\tilde{\mathbf{H}}^T(i\omega) \end{aligned} \quad (3.40)$$

z kolei w dziedzinie czasu odpowiadająca macierz korelacji przedstawia się następująco:

$$\mathbf{R}_y(\tau) = \mathbf{H}(-\tau) * \mathbf{R}_x(\tau) * \mathbf{H}^T(\tau) \quad (3.41)$$

Jak już wielokrotnie wspomniano, w OMA zakłada się wymuszenie Gaussowskim, stacjonarnym szumem białym o zerowej wartości średniej. Podstawowym efektem tego założenia wymuszenia $x(t)$ w postaci białego szumu jest brak korelacji pomiędzy wymuszeniem w chwili t i w chwili $t+\tau$. Wyjątkiem jest przypadek $\tau = 0$. Stąd sygnał posiada zerową wartość średnią, a funkcja korelacji jest deltą Diraca co zapiszemy:

$$R_x(\tau) = \text{E}[x(t)x(t+\tau)] = 2\pi G_{x0}\delta(\tau) \quad (3.42)$$

gdzie G_{x0} jest współczynnikiem skalującym. Zakładając dalej, że biały szum działa jedynie w ograniczonym spektrum od 0 do B , a σ_x^2 to niezmiennie wariancja sygnału, otrzymamy przekształconą wersję () funkcji korelacji. Na jej podstawie można stwierdzić, że PSD wymuszenia (będąca transformatą Fouriera funkcji korelacji) jest wartością stałą³.

$$R_x(\tau) = 2\pi \frac{\sigma_x^2}{2B} \delta(\tau) \quad (3.43)$$

Chcąc rozwinać tę zależność do układu MIMO założymy sygnały wymuszenia $x_1(t)$ i $x_2(t)$ jako szumy białe. Sformułowanie macierzy korelacji z wykorzystaniem równania (3.43) prowadzi do następującej zależności:

$$\mathbf{R}_x(\tau) = \text{E}[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t+\tau)] = 2\pi \frac{\delta(\tau)}{2B} \mathbf{C} \quad (3.44)$$

gdzie \mathbf{C} jest macierzą kowariancji sygnałów. Macierz gęstości widmowej sygnałów wymuszenia szumem białym ma postać:

$$\mathbf{G}_x(\omega) = \begin{cases} \frac{\mathbf{C}}{2B}, & 0 \leq \omega \leq B \\ 0, & \omega > B \end{cases} \quad (3.45)$$

Podsumowując powyższy ciąg myślowy możliwa jest dekompozycja równania (3.41) w dziedzinie czasu i równania (3.40) w dziedzinie częstotliwości. Dekompozycję w dziedzinie czasu przeprowadzili po raz pierwszy GH H James, Carne i Lauffer

³Transformata Fouriera delty Diraca jest równa jedności: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{i\omega t} dt = e^{-i\omega \times 0} = 1$ (Zielinski 2002)

1993; G H James, Carne i Lauffer 1995. Z kolei dekompozycję w dziedzinie częstotliwości przedstawili Brincker, L. Zhang i Andersen 2000; Brincker, L. Zhang i Palle Andersen 2001. W powyższych pracach przedstawiono pełny tok postępowania. Poniżej przytoczono rezultaty końcowe w postaci opisu macierzy korelacji sygnałów odpowiedzi układu (3.46) i macierzy korelacji gęstości widmowej odpowiedzi (3.47).

$$\mathbf{R}_y(\tau) = \begin{cases} \sum_{n=1}^N (\boldsymbol{\phi}_n \boldsymbol{\gamma}_n^T e^{\lambda_n \tau} + \boldsymbol{\phi}_n^* \boldsymbol{\gamma}_n^H e^{\lambda_n^* \tau}), & \tau \geq 0 \\ \sum_{n=1}^N (\boldsymbol{\gamma}_n \boldsymbol{\phi}_n^T e^{-\lambda_n |\tau|} + \boldsymbol{\gamma}_n^* \boldsymbol{\phi}_n^H e^{-\lambda_n^* |\tau|}), & \tau < 0. \end{cases} \quad (3.46)$$

$$\mathbf{G}_y(\omega) = \sum_{n=1}^N \frac{\boldsymbol{\phi}_n \boldsymbol{\gamma}_n^T}{i\omega - \lambda_r} + \frac{\boldsymbol{\phi}_n^* \boldsymbol{\gamma}_n^H}{i\omega - \lambda_r^*} + \frac{\boldsymbol{\gamma}_n \boldsymbol{\phi}_n^T}{-i\omega - \lambda_r} + \frac{\boldsymbol{\gamma}_n^* \boldsymbol{\phi}_n^H}{-i\omega - \lambda_r^*} \quad (3.47)$$

gdzie oznaczenia przyjęto jak w równaniach (3.31) i (3.32), a $\boldsymbol{\gamma}_n$ oznacza wektor referencyjny związanego z n-tym modelem. Wektor ten zależny jest od wszystkich parametrów modalnych systemu oraz lokalizacji i macierzy korelacji wymuszeń (Rainieri i Fabbrocino 2014; Peeters 2000).

Równanie (3.46) pokazuje, że funkcje korelacji odpowiedzi mogą być wyrażone za pomocą sumy zespolonych funkcji eksponencjalnych. SHEN i in. 2003 wskazują na podobieństwo jego formy do równania (3.31). Kennedy i Eberhart 1995, w swojej kluczowej dla metody NExT pracy, rozwinieli to równanie do postaci ukazującej funkcję korelacji jako sumę zanikających sinusoid, o charakterystyce takiej samej jak w przypadku IRF. Podsumowując, funkcje korelacji mogą być użyte jako funkcje odpowiedzi impulsowej (IRF) w metodach TD identyfikacji parametrów modalnych.

3.3.2 Eigenystem Realization Algorithm

Metoda ERA została opracowana w latach 80' XX w. przez naukowców z NASA Langley Research Center: Richarda Pappa i Jer-Nan Juang'a. Przedstawili oni koncept identyfikacji modalnej i redukcji modelu układu dynamicznego na podstawie danych pomiarowych. Nowością, którą wprowadzili autorzy było połączenie pojęć z teorii kontroli i algorytmu rozkładu względem wartości osobliwych. Fundamentalne prace opisujące metodą zostały opisane w (R S Pappa i J N Juang 1985; Jer-Nan Juang i Richard S Pappa 1985; Juang i Suzuki 1988; Jer-Nan Juang 1994). Algorytm ERA był wielokrotnie testowany, na przykład pod względem odporności na zaszmienienie danych pomiarowych (J. N. Juang i R. S. Pappa 1986; P. Li, Hu i H. J. Li 2011). Spośród polskich autorów, szczegółowy opis metody zawarli w swoich pracach Szafrański 2013 i Dudek 2008.

Liniowy model dynamiczny w przestrzeni stanów

Model przestrzeni stanów⁴ (*eng. state-space model*) używany jest do przekształcenia równania różniczkowego drugiego rzędu (2.1), do dwóch równań rzędu pierwszego. Dla przejrzystości macierzowe równanie ruchu przytoczono ponownie poniżej:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (3.48)$$

⁴Według Kaczorek i in. 2016 stanem układu nazywamy zbiór liniowo niezależnych wielkości $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ określających w pełni skutki przeszłych oddziaływań ($t < t_0$) na układ, który jest wystarczający do wyznaczenie przebiegów chwilowych dowolnych wielkości w tym układzie dla $t > t_0$, gdy znane są wymuszenia i parametry obwodu. Wielkości $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ nazywa się zmiennymi stanu, a wektor $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]$ wektorem stanu tego obwodu.

gdzie: \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} to odpowiednio macierze mas, tłumienia i sztywności, $\mathbf{x}(t)$ jest wektorem przemieszczenia, a $\mathbf{F}(t)$ jest wektorem wymuszenia. Wektor wymuszenia można poddać faktoryzacji do macierzy $\bar{\mathbf{B}}$ oraz wektora $\mathbf{u}(t)$ (??). Macierz $\bar{\mathbf{B}}$ opisuje lokalizację punków wymuszenia, a wektor $\mathbf{u}(t)$ intensywność tego wymuszenia w funkcji czasu.

$$\mathbf{F}(t) = \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) \quad (3.49)$$

Macierzowe równanie ruchu może być więc więc przekształcone następująco:

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{M}^{-1}\bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) \quad (3.50)$$

Zdefiniujmy wektor stanu jako:

$$\mathbf{s}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{x}(t) \end{Bmatrix} \quad (3.51)$$

Liczba komponentów tworzących wektor stanu jest nazywana rzędem modelu. Podstawiając go do równania (3.50) dodatkowo wykorzystując oczywistą równość $\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}(t)$ otrzymamy:

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{s}(t) + \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\bar{\mathbf{B}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (3.52)$$

Stąd możemy zdefiniować następujące macierze: \mathbf{A}_c i \mathbf{B}_c :

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

$$\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\bar{\mathbf{B}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Dzięki tak sformułowanym elementom zapiszmy równanie stanu (*eng. state equation*) następująco:

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{A}_c\mathbf{s}(t) + \mathbf{B}_c\mathbf{u}(t) \quad (3.55)$$

W równaniu (3.55) $\mathbf{s}(t)$ jest wektorem stanu (3.51), czyli zestawem wielkości opisujących w sposób jednoznaczny stan modelowanego układu, a $\mathbf{u}(t)$ jest wektorem wejścia (sterowania) i opisuje sygnał wejściowy. Macierze \mathbf{A}_c i \mathbf{B}_c , nazywane są odpowiednio macierzą stanu (systemu) (*eng. state matrix*) i macierzą wejścia (*eng. input influence matrix*). Są to macierze stałych współczynników, które odwzorowują modelowany układ dynamiczny i parametry elementów tworzących ten układ.

Drugim równaniem pozwalającym na stworzenie modelu w przestrzeni stanów jest równanie obserwacji (*eng. observation equation*) lub inaczej równanie wyjścia. W ogólności ma ono postać:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_a\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}_v\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}_d\mathbf{x}(t) \quad (3.56)$$

gdzie: $\mathbf{y}(t)$ jest wektorem mierzonej odpowiedzi w m punktach pomiarowych, a $\ddot{\mathbf{x}}(t)$, $\dot{\mathbf{x}}(t)$ i $\mathbf{x}(t)$ to odpowiednio mierzone przyspieszenia, prędkości i przemieszczenia w danych m punktach. Z kolei macierze \mathbf{C}_a , \mathbf{C}_v i \mathbf{C}_d określają lokalizację mierzonych, odpowiadających im przyspieszeń, prędkości i przemieszczeń. Należy zaznaczyć, że rzeczywista konstrukcja składa się z nieskończonej liczby stopni swobody. Nawet w

przypadku dyskretyzacji do układu MDOF, jak to ma miejsce w przypadku obliczeń numerycznych, liczba stopni swobody jest ogromna. Z tego względu, w trakcie pomiarów znacznie redukuje się liczbę mierzonych stopni swobody właśnie do m . Podstawiając równanie (3.50) do (3.56), po przekształceniach można otrzymać następujące równanie obserwacji:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_c \mathbf{s}(t) + \mathbf{D}_c \mathbf{u}(t) \quad (3.57)$$

w którym:

$$\mathbf{C}_c = [\mathbf{C}_v - \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \quad \mathbf{C}_d - \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}] \quad (3.58)$$

$$\mathbf{D}_c = \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \bar{\mathbf{B}} \quad (3.59)$$

Macierz \mathbf{C}_c jest nazywana macierzą wyjścia (*eng. output influence matrix*), a \mathbf{D}_c macierzą przenoszenia lub transmisyjną (*eng. direct transmission matrix*). Równania stanu (3.55) i obserwacji (3.57) łącznie tworzą ciągły, deterministyczny model przestrzeni stanów:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}}(t) &= \mathbf{A}_c \mathbf{s}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_c \mathbf{s}(t) + \mathbf{D}_c \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (3.60)$$

Wielkości mierzone w trakcie eksperymentu są próbkiowane jedynie w dyskretnych chwilach czasowych. W takim razie, naturalnym dla rzeczywistych zastosowań jest przekształcenie modelu ciągłego przestrzeni stanów w model dyskretny. Zakładając stały czas próbkowania równy Δt , równania ciągłe mogą być zdyskretyzowane i rozwiązane jedynie w chwilach czasowych $t_k = k\Delta t$ dla $k \in N$. Dla poprawności zapisu dyskretnego, wymagane jest założenie o stałych wartościach elementów wektora wejścia $\mathbf{u}(t)$ w trakcie pojedynczego kroku czasowego, tj. $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_k$ dla $t \in [k\Delta t, (k+1)\Delta t]$. Przy spełnieniu powyższych założeń możemy zapisać dyskretny model przestrzeni stanów:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{s}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}\mathbf{s}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k \end{aligned} \quad (3.61)$$

gdzie macierze \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} są odpowiednio macierzami stanu, wejścia, wyjścia i przenoszenia dla dyskretnego modelu przestrzeni stanów.

Odpowiedź impulsowa w przestrzeni stanów

Przyjmijmy układ dynamiczny opisany równaniem (3.61), w którym \mathbf{s}_k - jest n-wymiarowym wektorem stanu, \mathbf{u}_k - m-wymiarowym wektorem sterowania, a \mathbf{y}_k - p-wymiarowym wektorem obserwacji. Parametry Markova takiego systemu \mathbf{G}_k można zdefiniować następująco (Schutter i De Schutter 2000):

$$\mathbf{G}_k = \begin{cases} \mathbf{D}, & \text{dla } k = 0 \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}, & \text{dla } k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.62)$$

Jeżeli spełnione jest równanie (3.62) to zestaw macierzy \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} jest realizacją łańcucha $G(k)$ dla $k = 1, 2, \dots, \infty$. Realizację nazywa się minimalną, kiedy rząd modelu jest minimalny (3.51).

Zakładając warunek początkowy $\mathbf{s}(0) = \mathbf{0}$ i wymuszenie wszystkich punktów układu jednostkowym impulsem w postaci:

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & \text{dla } k = 0 \\ 0, & \text{dla } k > 0 \end{cases} \quad (3.63)$$

otrzymamy odpowiedź układu postaci:

$$\mathbf{Y}_k = \begin{cases} \mathbf{D}, & \text{dla } k = 0 \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}, & \text{dla } k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.64)$$

Równanie (3.64) nazywa się odpowiedzią impulsową układu. Można zauważyć, że elementy sekwencji parametrów Markova odpowiadają wprost elementom odpowiedzi impulsowej układu (Phan, Jer-Nan Juang i Longman 1991). W przypadku identyfikacji modalnej rzeczywistej konstrukcji wyznaczenie macierzy opisujących układ jest celem. Dysponując pomierzonym sygnałem odpowiedzi swobodnej (wzbudzonej impulsem) możliwe jest sformułowanie parametrów Markova i poszukiwanie rozwiązania w postaci macierzy układu. W przypadku OMA odpowiedź impulsowa układu może być zastąpiona funkcjami korelacji co udowodniono w (3.3.1). Niezależnie od źródła danych, sygnały można złożyć w parametry Markova w identyczny sposób. W dalszej części wywodu elementy algorytmu ERA opisywane będą w sposób tradycyjny, operując na sygnale z odpowiedzi swobodnej układu.

Załóżmy, że y_k^i jest odpowiedzią konstrukcji w chwili czasowej $k\Delta t$, zmierzoną w punkcie pomiarowym n , jednym z wszystkich m punktów pomiarowych. Parametry Markova \mathbf{Y}_k zdefiniujemy zestawiając odpowiedź układu z wszystkich punktów pomiarowych dla danej chwili czasowej $k\Delta t$:

$$\mathbf{Y}_k = \begin{Bmatrix} y_k^1 \\ y_k^2 \\ y_k^3 \\ \vdots \\ y_k^m \end{Bmatrix}, \quad \text{dla } k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.65)$$

Sformułowanie macierzy Hankela

Algorytm metody ERA rozpoczyna się od sformułowania uogólnionej, blokowej⁵ macierzy Hankela⁶ dyskretnego układu dynamicznego \mathbf{H} o wymiarach $r \times s$. Wymiary r i s nazywane są parametrami projektowymi (Szafrański 2013) i oznaczają: r - liczbę blokowych wierszy, s - liczbę blokowych kolumn macierzy Hankela. Jeżeli spełnione są warunki $s > n$ i $r > n$ to właściwością macierzy Hankela jest to, że w przypadku pomiarów pozabawionych szumów rząd macierzy Hankela jest równy rzędowi systemu

⁵Macierz blokową można opisać jako macierz złożoną z innych macierzy. Na przykład mając 4 macierze $N \times N$: $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4$, można sformułować macierz $2N \times 2N$ postaci $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2; \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_4]$, która posiada dwa blokowe wiersze i dwie blokowe kolumny.

⁶W ogólności macierzą Hankela nazywamy taką macierz \mathbf{A} o wymiarach $r \times s$, że spełniona jest równość: $\mathbf{A}_{r+1,s-1} = \mathbf{A}_{r-1,s+1}$

oraz dwukrotnej liczbie modów systemu.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_{k-1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_k & \mathbf{Y}_{k+1} & \dots & \mathbf{Y}_{k+s-1} \\ \mathbf{Y}_{k+1} & \mathbf{Y}_{k+2} & \dots & \mathbf{Y}_{1+k+s-1} \\ \mathbf{Y}_{k+2} & \mathbf{Y}_{k+3} & \dots & \mathbf{Y}_{2+k+s-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{r-1+k} & \mathbf{Y}_{r-1+k+1} & \dots & \mathbf{Y}_{r-1+k+s-1} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{B} & \dots & \mathbf{C}\mathbf{A}^{k+s-2}\mathbf{B} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^{k+1}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{C}\mathbf{A}^{k+1+s-2}\mathbf{B} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{k+1}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^{k+2}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{C}\mathbf{A}^{k+3+s-2}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{r-2+k}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^{r-2+k+1}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{C}\mathbf{A}^{r+k+s-3}\mathbf{B} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{rm \times sp} \quad (3.66) \\
 &= \mathbf{P}_r \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{Q}_s \quad \text{dla } k \geq 1
 \end{aligned}$$

Macierze P_r i Q_s to odpowiednio macierze obserwacji i sterowania układu i są zdefiniowane następująco:

$$\mathbf{P}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{r-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_s = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{s-1}\mathbf{B}] \quad (3.67)$$

Problem wyboru wartości parametrów s i r nie jest ścisłe rozwiązany. Zestawienie różnych badań dotyczących doboru parametrów projektowych przedstawił w pracy Szafrański 2013. Na pewno należy spełnić zależność $s > n$ i $r > n$. Z uwagi na występowanie w sygnale pomiarowym szumów i niepewności związanych ze wstępny oszacowaniem rzędu modelu parametry trzeba zawyżyć. Jednym z powszechniej używanych zaleceń jest przyjęcie $r = (5 \div 10)n$ $s = (2 \div 3)r$ (Dudek 2008). Część badaczy zaleca aby parametr s dobrać tak, żeby macierz Hankela zawierała większość lub wszystkie parametry Markova odpowiadające wyraźnemu sygnałowi $s = (\frac{2}{3} \div 1)N_s - r - 2$ gdzie N_s oznacza liczbę próbek wyraźnego sygnału (Caicedo 2011; Nayeri i in. 2009).

Realizacja minimalna modelu w przestrzeni stanów

Jak już wspomniano realizacją układu nazywamy zestaw macierzy $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$. Podstawowym zdaniem jest znalezienie takiej realizacji, dla której zmierzona odpowiedź układu będzie możliwa od odtworzenia przez równania modelu w przestrzeni stanów. W przypadku odpowiedzi swobodnej, nie ma miejsca dodatkowe wymuszenie w trakcie pomiaru, więc prawdziwa jest zależność $\mathbf{D} = \mathbf{Y}_0$. Wszystkich możliwych realizacji, pozwalających spełnić powyższy warunek, jest nieskończoność wiele (Jernan Juang i Richard S Pappa 1985). Naturalnym wyzwaniem jest wiec znalezienie takiej realizacji, dla której rzad modelu będzie minimalny, a rzad modelu jest wprost związany z wymiarami macierzy $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$. Pierwsze prace dotyczące poszukiwania realizacji minimalnej zostały podane w (Kalman 1963; Ho i Kálmán 1966).

Aby ułatwić zrozumienie poszukiwania minimalnej realizacji przywołajmy twierdzenia o obserwowalności i sterowalności realizacji:

Twierdzenie o obserwonalności. Realizacja w postaci zestawu macierzy $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ nazywana jest obserwonalną jeżeli macierz obserwacji \mathbf{P}_r jest rzędu n , gdzie n jest rzędem systemu. Jeżeli realizacja jest obserwonalna to zawsze możliwe jest odtworzenie początkowego stanu s_0 na podstawie znanych odpowiedzi i wymuszenia układu dla $k > 0$.

Twierdzenie o sterowalności. Realizacja w postaci zestawu macierzy $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ nazywana jest sterowalną jeżeli macierz sterowania \mathbf{Q}_s jest rzędu n , gdzie n jest rzędem systemu. Jeżeli realizacja jest sterowalna to zawsze możliwe jest takie przyjęcie parametrów wymuszenia, żeby w skończonej liczbie kroków doprowadzić układ ze stanu początkowego, do pożądanego stanu.

Dodatkowo Kalman sformułował następujące twierdzenie: Realizacja $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ jest minimalna, wtedy i tylko wtedy gdy jest sterowalna i obserwonalna. Podsumowując, minimalna realizacja musi spełniać warunki sterowalności i obserwonalności. Aby to zapewnić odpowiednie wymiary macierzy Hankela. W przypadku gdybyśmy zbudowali macierz Hankela z parametrów Markova pozabawionych szumów, rząd macierzy byłby równy rzędowi modelu n , pod warunkiem, że wymiary rm i sp są większe niż n . W rzeczywistości, pomiary obarczone są szumami związanymi z pracą aparatury pomiarowej i samym przebiegiem pomiaru. Dodatkowo w rzeczywistych konstrukcjach zawsze występuje pewien stopień nieliniowości i model liniowy być może nigdy nie jest w stanie perfekcyjnie jej opisać. Konsekwencją wystąpienia szumów w pomierzonym sygnale jest powiększenie rzędu model względem układu odpowiadającego sygnałom nie obarczonych szumem. Zadaniem analityka jest więc określić najmniejszy rząd modelu, dla którego realizacja pozwoli na wystarczająco wierny opis układu, przy jednociesnym spełnieniu kryteriów błędu.

Dekompozycja według wartości osobliwych (SVD)

Pierwszym właściwym krokiem algorytmu ERA jest sformułowanie macierzy Hankela \mathbf{H}_0 oraz \mathbf{H}_1 . Posługując się wzorem (3.66) sformułujmy:

$$\mathbf{H}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_0 & \mathbf{Y}_1 & \dots & \mathbf{Y}_{s-1} \\ \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 & \dots & \mathbf{Y}_s \\ \mathbf{Y}_2 & \mathbf{Y}_3 & \dots & \mathbf{Y}_{s+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{r-1} & \mathbf{Y}_r & \dots & \mathbf{Y}_{r+s-2} \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 & \dots & \mathbf{Y}_s \\ \mathbf{Y}_2 & \mathbf{Y}_3 & \dots & \mathbf{Y}_{s+1} \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4 & \dots & \mathbf{Y}_{s+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_r & \mathbf{Y}_{r+1} & \dots & \mathbf{Y}_{r+s-1} \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

Wykorzystując opis macierzy Hankela za pomocą macierzy obserwacji i sterowania możemy zapisać że:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0 &= \mathbf{P}_r \mathbf{A}^{1-1} \mathbf{Q}_s = \mathbf{P}_r \mathbf{Q}_s \\ \mathbf{H}_1 &= \mathbf{P}_r \mathbf{A}^{2-1} \mathbf{Q}_s = \mathbf{P}_r \mathbf{A} \mathbf{Q}_s \end{aligned} \quad (3.70)$$

Zauważmy, że dwie kolejne macierze Hankela pozwalają na proste wyznaczenie macierzy systemu \mathbf{A} . Jako metodę do oceny rzędu macierzy Hankela wykorzystano

algorytm rozkładu według wartości osobliwych SVD (*eng. Singular Value Decomposition*). Dla macierzy \mathbf{H}_0 zapiszemy:

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{R}\Sigma\mathbf{S}^T = [\mathbf{R}_1 \quad \mathbf{R}_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^T \\ \mathbf{S}_2^T \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

w którym, Σ jest prostokątną macierzą diagonalną o wymiarach $(rm \times s)$ i zawiera wartości osobliwe macierzy \mathbf{H}_0 . Wartości osobliwe d_i rozmieszczone na przekątnej ułożone są w sposób niemalejący, tak że $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq \dots \geq d_n$. Z kolei kolumny macierzy \mathbf{R} i \mathbf{S} są ortonormalnymi wektorami osobliwymi odpowiadającymi poszczególnym wartościom osobliwym \mathbf{d}_i . Macierz wartości osobliwych można zapisać w następującej formie:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

gdzie Σ_1 jest macierzą diagonalną o n wartościach niezerowych na przekątnej, a pozostałe elementy macierzy Σ są zerowe. Taka formę będzie miała macierz w przypadku braku szumów w sygnale i perfekcyjnym spełnieniu wszystkich założeń identyfikacji. Liczba wartości osobliwych będzie równa rzędowi macierzy Hankela i rzędowi modelu. Niestety w rzeczywistości takie warunki nie mają nigdy miejsca. W takim przypadku liczba niezerowych wartości osobliwych będzie większa niż n . Analiza SVD pozwala jednak efektywnie ocenić rząd macierzy. Wartości osobliwe, które odpowiadają fizycznej informacji na temat systemu są zawsze relatywnie duże, a wartości wywołane przez nieidealne warunki pomiaru relatywnie małe. Ostatecznie można dokonać podziału na wartości znaczące (oznaczające rząd modelu) i nieznaczące. Za pomocą macierzy można tę sytuację odwzorować następująco:

$$\Sigma_N = \begin{bmatrix} \Sigma_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\Sigma} \end{bmatrix} = \text{diag}[d_1, d_2, d_3, \dots, d_n, d_{n+1}, \dots, d_N] \quad (3.73)$$

gdzie $d_i (i = 1, \dots, n)$ oznaczają istotne, a $d_i (i = n+1, \dots, N)$ nieistotne wartości osobliwe. Postawienie wyraźnej granicy pomiędzy wartościami istotnymi i nieistotnymi nie jest oczywiste. Rozrysowując wartości osobliwe na wykresie, zwykle widać miejsce gdzie dwie kolejne wartości różnią istotnie. Taki skok utożsamiany jest z końcem wartości istotnych. Niestety nie jest to reguła i aby w pełni odwzorować układ warto nieznacznie zwiększyć rząd modelu w trakcie identyfikacji (Szafrański 2013; Hollkamp i Gordon 2001). Podobnie zapiszmy dla macierzy \mathbf{S} i \mathbf{R} :

$$\mathbf{R}_N = [\mathbf{R}_n \quad \bar{\mathbf{R}}] \quad \mathbf{S}_N = [\mathbf{S}_n \quad \bar{\mathbf{S}}] \quad (3.74)$$

Porównując równania (3.66) i (3.71) i przyjmując $k = 1$ otrzymamy:

$$\mathbf{P}_r \mathbf{Q}_s = \mathbf{R}\Sigma\mathbf{S}^T = \mathbf{R}\Sigma^{1/2}\Sigma^{1/2}\mathbf{S}^T \quad (3.75)$$

Następnie wykorzystując powyższy podział i równanie 3.70 otrzymamy następującą zależność:

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{R}\Sigma^{1/2}\mathbf{A}\Sigma^{1/2}\mathbf{S}^T \quad (3.76)$$

Przekształcenia pozwalają uzyskać formułę na wyznaczenie macierzy systemu \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \Sigma^{-1/2}\mathbf{R}^T\mathbf{H}_1\mathbf{S}\Sigma^{-1/2} \quad (3.77)$$

Zakładając że $\mathbf{0}_i$ jest macierzą zerową rzędu i , a \mathbf{I}_i jest macierzą jednostkową rzędu i zdefiniujmy macierze pomocnicze:

$$\mathbf{E}_p^T = [\mathbf{I}_p \quad \mathbf{0}_p \quad \dots \quad \mathbf{0}_p] \quad \mathbf{E}_m^T = [\mathbf{I}_m \quad \mathbf{0}_m \quad \dots \quad \mathbf{0}_m] \quad (3.78)$$

Po wykorzystując wzór (3.66) i wykonując przekształcenia możliwe jest wyznaczenie macierzy systemu będących minimalną realizacją. Po wykonaniu SVD i przyjęciu jedynie istotnych wartości osobliwych jako rzędu modelu n zapisać można równania na przybliżone wartości macierzy modelu w przestrzeni stanów, które dla odróżnienia oznaczono przez $(\hat{\cdot})$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}} &= \Sigma_n^{-1/2} \mathbf{R}_n^T \mathbf{H}_1 \mathbf{S}_n \Sigma_n^{-1/2} \\ \hat{\mathbf{B}} &= \Sigma_n^{1/2} \mathbf{S}_n^T \mathbf{E}_m \\ \hat{\mathbf{C}} &= \mathbf{E}_p^T \mathbf{R}_n \Sigma_n^{1/2} \end{aligned} \quad (3.79)$$

Przybliżone macierze dla wybranego rzędu n są wartościami estymowanymi w sensie metody najmniejszych kwadratów (Jer-Nan Juang 1994; Rainieri i Fabbrocino 2014).

Identyfikacja parametrów modalnych

Rozwiązuje zagadnienie własne dla macierzy $\hat{\mathbf{A}}$ otrzymamy zestaw niezależnych zespółonych wartości własnych λ_i i wektorów własnych ϕ_i . Zestawiając je podobnie jak macierz widmową Λ (??) i modalną Φ (??) otrzymamy minimalną realizację $(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}})$ we współrzędnych modalnych $(\Lambda, \Phi^{-1}\hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}\Phi)$. Poszczególne elementy realizacji we współrzędnych modalnych dostarczają różnych informacji na temat zidentyfikowanych charakterystyk modalnych. Λ zawiera informacje o tłumieniu i częstotliwościach drgań własnych układu. $\Phi^{-1}\hat{\mathbf{B}}$ definiuje początkowe amplitudy modalne. Z kolei $\hat{\mathbf{C}}\Phi$ zawiera w sobie postaci drgań własnych wyznaczone dla punktów pomiarowych (P. Li, Hu i H. J. Li 2011). Przed wyznaczeniem częstości drgań własnych i tłumienia należy przetranformować macierz Λ z formy dyskretnej do formy ciągłej Λ_c (Szafrański 2013).

$$\Lambda_c = \frac{1}{\Delta t} \ln \Lambda \quad (3.80)$$

w którym Δt oznacza krok czasowy próbkowania, taki że $\Delta t = 1/f_s$ dla f_s będącej częstotliwością próbkowania pomiaru. Częstość drgań własnych ω_{ni} oraz tłumienie ξ_i wyznaczyć można na podstawie wartości własnych zebranych w macierzy Λ_c , a postaci drgań własnych ψ_i z macierzy Φ za pomocą następujących formuł:

$$\omega_{ni} = |\lambda_{ci}| = \sqrt{\operatorname{Re}(\lambda_{ci})^2 + \operatorname{Im}(\lambda_{ci})^2} \quad (3.81)$$

$$\xi_i = -\frac{\operatorname{Re}(\lambda_{ci})}{\omega_{ni}} \quad (3.82)$$

$$\psi_{j,i} = |\phi_{j,i}| \operatorname{sign}(\operatorname{Re}(\phi_{j,i})) \quad (3.83)$$

gdzie $i = 1, 2, 3, \dots, n$ (n - rząd modelu), $j = 1, 2, 3, \dots, m$, (m - liczba punktów pomiarowych), $|\cdot|$ oznacza moduł liczby zespolonej, $\operatorname{Re}(\cdot)$ i $\operatorname{Im}(\cdot)$ oznaczają odpowiednio część rzeczywistą i urojoną liczby zespolonej, a $\operatorname{sign}(\cdot)$ jest funkcją zwracającą +1 dla liczb dodatnich i -1 dla liczb ujemnych.

3.4 Aplikacja do identyfikacji modalnej OMA

Na rynku istnieją komercyjne aplikacje komputerowe, stworzone do identyfikacji modalnej. Należą do nich przede wszystkim ARTeMIS - SVS i MACEC - dodatek do programu MATLAB. Programy te służą zarówno naukowcom jak i szeroko pojętemu przemysłowi. Nie powinno więc dziwić, że są skomercjalizowane i płatne. W trakcie realizacji pracy doktorskiej podjęto decyzję o napisaniu własnej aplikacji komputerowej służącej identyfikacji modalnej. Zdaniem autora takie podejście zapewnia pełną kontrolę nad algorytmem i parametrami identyfikacji oraz nad sposobem przedstawienia wyników. Niebagatelnym profitem napisania programu autorskiego jest również lepsze zrozumienie mechanizmów i wrażliwości elementów algorytmu. W początkowej fazie tworzenia zaplanowano następującą funkcjonalność programu:

- wczytywanie i podgląd sygnałów pomiarowych, grupowanie sygnałów w serie pomiarowe, ze wskazaniem sygnałów referencyjnych i lokalizacją punktów pomiarowych,
- przetwarzanie sygnałów: okienkowanie, usunięcie składowej stałej i trendu, filtrowanie, zmiana próbkowania,
- wyznaczenie funkcji odpowiedzi impulsowych sygnałów wykorzystując algorytm NExT, z możliwością podziału na serie pomiarowe z punktem referencyjnym oraz uśredniania serii pomiarowych,
- identyfikacja modalna za pomocą algorytmu ERA,
- elementy kontroli obliczeń: zmiana parametrów metod, wybór elementów przetwarzania sygnałów,
- elementy wizualizacji wyników: wykresy sygnałów, animacja postaci drgań własnych, postaci we współrzędnych biegunkowych, diagramy stabilizacyjne metody NExT-ERA.

Aplikację napisano w języku Python 3.6 głównie z użyciem bibliotek NUMPY i SCIPY do obliczeń oraz MATPLOTLIB do wizualizacji rezultatów. Dodano interfejs graficzny wykorzystujący technologię Qt. Elementy interfejsu pokazano na rysunku 3.3.

3.4.1 Algorytm programu

Algorytm programu przedstawiono na grafice []. Poniżej omówiono podstawowe informacje na temat użytych metod przetwarzania sygnałów.

Wstępnie sygnały wyjściowe mogą być poddane standardowemu przetwarzaniu sygnału. Do zastosowanych metod należy filtrowanie, usuwanie składowej stałej i obniżenie próbkowania (*eng. downsampling, resampling*). Filtrowanie może posłużyć do odrzucenia niechcianych składowych z sygnału i ograniczyć identyfikację jedynie do określonego obszaru. Odcięcie składowej stałej jest koniecznym elementem przygotowania sygnałów do identyfikacji. Bez tego zabiegu, tak jak w przypadku Transformaty Fouriera występuje istotny pik na zerowej odciętej, tak utrudniona może być identyfikacja modów o niskiej częstotliwości. Zmiana częstotliwości próbkowania jest bardzo przydatną funkcją. Podobnie do filtrowania zmniejsza zakres analizowanej dziedziny, ale w odróżnieniu do filtrowania zmniejsza również liczbę próbek sygnału. Należy pamiętać, że resampling nie jest tożsamy pominięciu części próbek z sygnału. Wpływ obróbki sygnału na wyniki identyfikacji oraz zalecenia dotyczące przyjmowanych parametrów opisał Caicedo 2011



Rysunek 3.3: Widok na okno główne stworzonej aplikacji do identyfikacji modalnej

Pierwszym głównym etapem w algorytmie NExT-ERA jest wyznaczenie funkcji korelacji wprowadzonych sygnałów. Wyznaczanie funkcji korelacji metodą bezpośrednią jest wymagające obliczeniowo. Z tego powodu wykorzystuje się zależność pomiędzy gęstością widmową mocy, a funkcją korelacji (3.33 i 3.34). Wyznaczenie gęstości widmowej mocy jest możliwe za pomocą znacznie bardziej efektywnych algorytmów. Jednym z nich jest metoda Welch'a (Welch 1967; Brincker i C. E. Ventura 2015), którą zastosowano w programie. Umożliwiono również łączenie i uśrednianie wielu serii pomiarowych w jeden wynik identyfikacji. Wykorzystano do tego algorytm przedstawiony w Brownjohn i in. 2010. W przypadku łączenia serii pomiarowych w jeden wynik, konieczne jest zastosowanie punktów referencyjnych. Punkty referencyjne są to punkty stałe w trakcie całych pomiarów, muszą występować w każdej serii pomiarowej i nie mogą znajdować się w węźle żadnej postaci drgań. Innymi słowy punkt referencyjny musi mieć niezerową wartość w wektorze określającym postać drgań, którą należy zidentyfikować. W zastosowanym algorytmie istnieje możliwość wyboru po jednym punkcie referencyjnym dla każdego z kierunków drgań: X, Y, Z. Łączenie serii pomiarowych odbywa się w następujący sposób:

- Algorytmem Welch'a wyznaczane są funkcje wzajemnych gęstości widmowych mocy pomiędzy sygnałem referencyjnym, a pozostałymi sygnałami na powiązanym kierunku. Wzajemne gęstości widmowe związane z danym punktem referencyjnym są zestawione w jeden wektor.
- Wyznaczane są funkcje auto gęstości widmowych mocy dla sygnałów w punktach referencyjnych. Użyty jest do tego ten sam algorytm co w przypadku wzajemnych funkcji gęstości widmowej mocy, z tą różnicą że sygnały wejściowe są identyczne.
- Funkcje wzajemnej gęstości widmowej mocy zestawione w jednym wektorze dzielone są przez funkcję auto gęstości widmowej punktu referencyjnego. W tym przypadku wymagane jest aby długość wektora wszystkich wektorów była

równa. Identycznie postępuje się z każdym wektorem gęstości widmowych mocy.

- Auto gęstości widmowe mocy dla danego punktu referencyjnego są uśredniane. Auto gęstości widmowe mocy są sumowane ze wszystkich ustawień, a wynik jest podzielony przez liczbę ustawień.
- Po procesie uśredniania gęstości widmowych mocy punktów referencyjnych następuje działanie odwrotne. Wcześniej podzielone wzajemne gęstości widmowe mocy mnożone są przez uśrednione auto gęstości widmowe mocy punktów referencyjnych.
- Wynikowe gęstości widmowe mocy przekształcane są za pomocą odwrotnej Transformaty Fouriera do sygnałów w dziedzinie czasu. Otrzymany wynik odpowiada funkcjom cross-korelacji i może być użyty w metodzie ERA.

Uśrednianie serii pomiarowych z tym samym ustawieniem punktów pomiarowych odbywa się przez sumowanie gęstości widmowych mocy z powtórzonych serii pomiarowych i podzieleniu przez liczbę powtórzonych serii. Pomimo zestawienia funkcji gęstości widmowych mocy w wektory, wszystkie wspomniane wyżej operacje mnożenia i dzielenia funkcji gęstości widmowych mocy polegają na działaniu na poszczególne prążki spektrum, a nie na klasycznym rozumieniu mnożenia i dzielenia wektorów.

3.4.2 Elementy oceny poprawności rozwiązania

Ważnym elementem w procesie identyfikacji modalnej jest ocena poprawności uzyskanego rozwiązania. W tym celu najczęściej wykorzystywane są diagramy stabilizacyjne. W przypadku pomiarów obarczonych szumem, przyjęty rząd modelu musi być zadeklarowany jako większy niż miało by to miejsce w idealnych warunkach. Diagram stabilizacyjny pozwala na określenie minimalnego rzędu modelu, przy którym występują wszystkie interesujące mody i są one stabilne. Zastosowanie diagramów stabilizacyjnych opisano między innymi w (!!). W programie zastosowano dwie wersje diagramów: niefiltrowaną i filtrowaną. Wersja niefiltrowana obrazuje wszystkie wyznaczone mody: rzeczywiste i fikcyjne. Odróżnia je w zależności od wyników dla niższego rzędu modelu. Jeśli istnieje w modelu o rząd niższym mod spełniający odpowiednie kryteria to jest on uznany za rzeczywisty. Dla rzędu modelu n i obliczonego modu i zastosowane w programie domyślne kryteria to:

- częstotliwość f w dwóch kolejnych krokach nie może się różnić o więcej niż 1%,

$$\Delta f = \left| 1 - \frac{f_{n,i}}{f_{n+1,i}} \right| \leq 0.01 \quad (3.84)$$

- tłumienie ξ w dwóch kolejnych krokach nie może się różnić o więcej niż 5%,

$$\Delta \xi = \left| 1 - \frac{\xi_{n,i}}{\xi_{n+1,i}} \right| \leq 0.05 \quad (3.85)$$

- parametr MAC dla postaci w dwóch kolejnych krokach musi być większy niż 0.95,
- parametr MPC postaci modu musi być większy niż 0.9.

$$MAC_i^{n,n+1} \geq 0.95 \quad MPC_i \geq 0.90 \quad (3.86)$$

Diagram niefiltrowany obrazuje rozkład zidentyfikowanych modów w domenie częstotliwości. Wstępnie pozwala ocenić czy istnieją mody stabilne (częstotliwość i tłumienie), o rzeczywistych wektorach postaci (MPC) i o niezmiennej formie (MAC). W przypadku dużego rzędu modelu i bliskich sobie modów trudno jednoznacznie odnaleźć jedynie poprawne rozwiązania. Z tego względu stworzono również wersję filtrowaną diagramu stabilizacyjnego. Diagram filtrowany w znacznie bardziej czytelny sposób pozwala przedstawić jedynie mody uznane za rzeczywiste. Jego generacja opiera się na następujących krokach:

- Podział dziedziny częstotliwości na wąskie pasma (np. 1% dolnej granicy pasa) i podział wszystkich punktów według przynależności do poszczególnych pasm,
- Odrzucenie punktów, dla których tłumienie jest zbyt duże ($LDT \geq 0.3$) lub ujemne,
- Wyznaczenie parametru MAC pomiędzy wszystkimi punktami w paśmie oraz parametru MPC dla każdego modu w paśmie.
- Wyznaczenie wartości średniej i odchylenia standardowego częstotliwości, tłumienia i parametrów MAC i MPC dla punktów pasa. Jeżeli wartości średnie pomniejszone o odchylenie standardowe są spełniają dopuszczalne warunki, to zestaw punktów uznany jest za określający rzeczywisty mod. Jeżeli nie, wyszukiwany jest punkt charakteryzujący się najgorszym parametrem MAC lub MPC albo zbyt różniąca się liczbą tłumienia i jest odrzucany. Następnie ponownie oceniana jest wartość średnia i odchylenie standardowe. Proces ten toczy się do momentu odrzucenia wszystkich punktów lub spełnienia kryteriów uznania mod za rzeczywiste.
- Ostatecznie jako rzeczywiste i stabilne określane są mody, dla których liczba punktów w paśmie jest większa od wartości minimalnej. Domyślnie jest to 20% maksymalnego rzędu modelu na diagramie.

Wskaźniki MAC i MPC są istotną częścią algorytmu programu i służą ocenie poprawności wyników. Poniżej przytoczono ich definicje i podstawowe właściwości.

Model Phase Colinearity (MPC)

Wynikiem przeprowadzonej analizy modalnej są postaci i częstotliwości o wartościach zespolonych. Postaci zidentyfikowane na podstawie pomiarów wartości rzeczywistych powinny stanowić wektory o współrzędnych rzeczywistych. W przypadku modów normalnych wszystkie punkty konstrukcji drgają dokładnie w fazie lub w przeciwnie fazie względem siebie. Przeciwne, kiedy postaci są wektorami zespolonymi, przemieszczenia osiągają wartości ekstremalne w różnych chwilach czasowych dla różnych stopni swobody. Ewins 2000; Chopra 2012 podają przykładowe przyczyny powstania postaci o wektorach zespolonych. Są to m.in. efekt żyroskopowy, efekty aerodynamiczne, nieliniowość czy nieproporcjonalne tłumienie. Zidentyfikowane mody zwykle występują w postaci zespolonej. Wynika to z relatywnie niskiego wskaźnika sygnału do szumu (Rainieri i Fabbrocino 2014). Mimo to, "stopień zespolenia" jest zwykle niewielki i w praktycznych zastosowaniach błąd wynikający z tej cechy może być zaniedbany. Mimo to ważnym jest żeby rozróżnić, które mody są normalne, a które w dużej mierze zespolone. Jedną z najprostszych metod jest wykreślenie współrzędnych składników postaci w układzie biegunkowym. Metoda została szerzej

opisana w (Ewins 2000). Zasadą jest, że jeśli w konstrukcji występuje tłumienie proporcjonalne to składniki danej postaci układają się na linii prostej w zespólnym układzie współrzędnych (Rainieri i Fabbrocino 2014)). Do ilościowego określenia stopnia przestrzennej spójności modu Richard S Pappa, Elliott i Schenk 1992 opracowali wskaźnik MPC (*Modal Phase Collinearity*). Jest on dla i -tego moda określony wzorem 3.91

$$S_{xx} = \Phi_i'^\top \Phi_i' \quad S_{yy} = \Phi_i''^\top \Phi_i'' \quad S_{xy} = \Phi_i'^\top \Phi_i'' \quad (3.87)$$

$$\mu = \frac{S_{xx} - S_{yy}}{2S_{xy}} \quad \beta = \mu + \operatorname{sgn}(S_{xy})\sqrt{\mu^2 + 1} \quad \tau = \tan^{-1}(\beta) \quad (3.88)$$

$$\lambda_1 = S_{xx} + \frac{S_{xy}(2(\mu^2 + 1)\sin^2(\tau) - 1)}{\mu} \quad (3.89)$$

$$\lambda_2 = S_{yy} + \frac{S_{xy}(2(\mu^2 + 1)\sin^2(\tau) - 1)}{\mu} \quad (3.90)$$

$$\text{MPC}_i = \left[2 \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} - 0.5 \right) \right]^2 \quad (3.91)$$

gdzie $\operatorname{sgn}(\cdot)$ oznacza funkcję zwracającą znak liczby. Wskaźnik MPC jest bezwymiarowy i przyjmuje wartości z zakresu od 0 (dla modów z zupełnie nieskorelowanymi kątami fazowymi) do 1 (dla modów jednofazowych). Przykłady zastosowania tego wskaźnika zaprezentowano w pracach (!!!).

Modal Assurance Criterion (MAC)

Kryterium MAC (Modal Assurance Criterion) pozwala ocenić miarę dopasowania (stopień liniowości) dwóch wektorów modalnych (Randall J Allemang i Brown 1982). Jest to podstawowe i najbardziej popularne kryterium służące porównaniu wektorów modalnych Rainieri i Fabbrocino 2014. Jego wartość waha się od 0 (dla braku dopasowania) do 1 (dla idealnego dopasowania). Definicja wskaźnika dana jest wzorem 3.92.

$$\text{MAC}_n = \frac{(\psi_{n,a}^H \psi_{n,e})^2}{\psi_{n,a}^H \psi_{n,a} \psi_{n,e}^H \psi_{n,e}} \quad (3.92)$$

gdzie $\psi_{n,a}$ i $\psi_{n,e}$ to wektory postaci drgań własnych, a $(\cdot)^H$ oznacza sprzężenie Hermitowskie wektora. Należy pamiętać, że kryterium MAC nie wskazuje czy rozwiązanie jest poprawne lub czy wektory modalne są ortogonalne. Wynik pokazuje jedynie dopasowanie dwóch wektorów. Wskaźnik MAC jest nieodporny na błędy zawarte jednocześnie w obu wektorach. Z tego względu za każdym razem należy kontrolować założenia metody. Zbiór wskazówek do stosowania kryterium MAC w swojej pracy zaważył Randall J. Allemang 2003. Poza swoistą instrukcją użycia wskaźnika, wskazuje on następujące główne przyczyny niemiarodajnych wyników przy korzystaniu z kryterium MAC:

- traktowanie kryterium MAC jako informacji o ortogonalności wektorów,
- nieprawidłowe matematyczne sformułowanie kryterium, głównie zastąpienie sprzężenia Hermitowskiego transpozycją. Zmiana ta jest słuszna wyłącznie przy rzeczywistych wektorach modalnych,
- duże różnice w wartościach współrzędnych wektorów. Kryterium jest bardzo wrażliwe na duże wartości, a niewrażliwe na małe wartości,

- przyjęcie zbyt małej liczby współrzędnych wektora,
- wypełnienie zerami współrzędnych wektora, na temat których nie ma żadnej informacji.

Ze względu na ograniczenia kryterium MAC, od momentu jego powstania powstały szereg pokrewnych wskaźników. Są to między innymi: Coordinate Modal Assurance Criterion (COMAC) (Ewins 2000), Enhanced Coordinate Modal Assurance Criterion (ECOMAC) (Hunt 1992) czy Inverse Modal Assurance Criterion (IMAC) (MITCHELL 1998). Każde z kryteriów zostało zmodyfikowane w celu wyeliminowania konkretnego ograniczenia oryginalnej wersji. Zestawienie i opis wielu z nich przedstawiono miedzy innymi w pracach (Randall J. Allemand 2003; Rainieri i Fabbrocino 2014; Szafrański 2013; Salamak 2003)

Poza diagramem stabilizacyjnym, w niniejszej pracy kryterium MAC zostało również użyte przy doborze lokalizacji czujników w trakcie pomiarów na konstrukcji rzeczywistej. Jest to kolejne z popularnych zastosowań współczynnika MAC (Randall J. Allemand 2003). Polega na takim doborze punktów pomiarowych, aby zidentyfikowane w tych punktach postaci drgań były od siebie maksymalnie różne. Opis przyjętego rozwiązania i wyniki obliczeń przedstawiono w wynikach badań w rozdziale 5.3.

3.4.3 Testy numeryczne metody NEXT-ERA

Każda aplikacja komputerowa przed użyciem powinna być poddana testom. W przypadku aplikacji służącej celom naukowym, gdzie zakłada się pewien poziom wiedzy i świadomości użytkownika zdecydowano, że testom poddane zostanie jedynie jądro programu - algorytm NExT-ERA. W tym celu założono wykonanie dwóch testów: numerycznego i laboratoryjnego. Test numeryczny ma opierać się na wykonaniu modelu obliczeniowego w oprogramowaniu MES, a następnie obciążeniu go losowo (w przybliżeniu szumem białym) i wykonaniu analizy dynamicznej. Test laboratoryjny ma polegać na pomiarze i analizie drgań środowiskowych rzeczywistego obiektu badawczego. Celem testu nie jest uzyskanie idealnej zgodności pomiędzy wynikami z badania numerycznego i laboratoryjnego, a jedynie sprawdzenie działania programu. Wyniki uzyskane z testu numerycznego są pozbawione wpływu wielu niedokładności, takich jak szumów, nieliniowych warunków brzegowych, nieosiowo ustawionych czujników czy wzajemnego wpływu składowych ortogonalnych na mierzone wartości. Dlatego traktowane są głównie jako test algorytmu. Mogą również służyć jako punkt odniesienia do wyników badań laboratoryjnych. Z kolei badania laboratoryjne pozwolą sprawdzić czy program i system pomiarowy są odporne na rzeczywiście występujące obciążenia procesu identyfikacji.

Przedmiotem badań była konstrukcja o schemacie statycznym bliskim belce swobodnie podpartej. Głównym elementem układu jest kształtownik stalowy o przekroju ceowym C40 i o długości 1.5m. Obiekt został opisany szerzej w punkcie 3.4.4). Model numeryczny wykonano w programie MES bazując na inwentaryzacji wymiarów obiektu laboratoryjnego. Założono, że głównym aspektem porównawczym z badaniami laboratoryjnymi mają być mody giętne pionowe. Z tego powodu znacznie uproszczono względem rzeczywistości strefy podporowe. Nie wykonano żadnej kalibracji modelu, aby odpowiadał lepiej strukturze rzeczywistej. Do budowy wykorzystano środowisko MES SOFiSTiK. Dla odwzorowania całego układu użyto jednowymiarowych elementów belkowych. Wizualizację oraz schemat statyczny pokazano

na rysunku 3.4.



Rysunek 3.4: Wizualizacja i schemat statyczny testowego modelu numerycznego

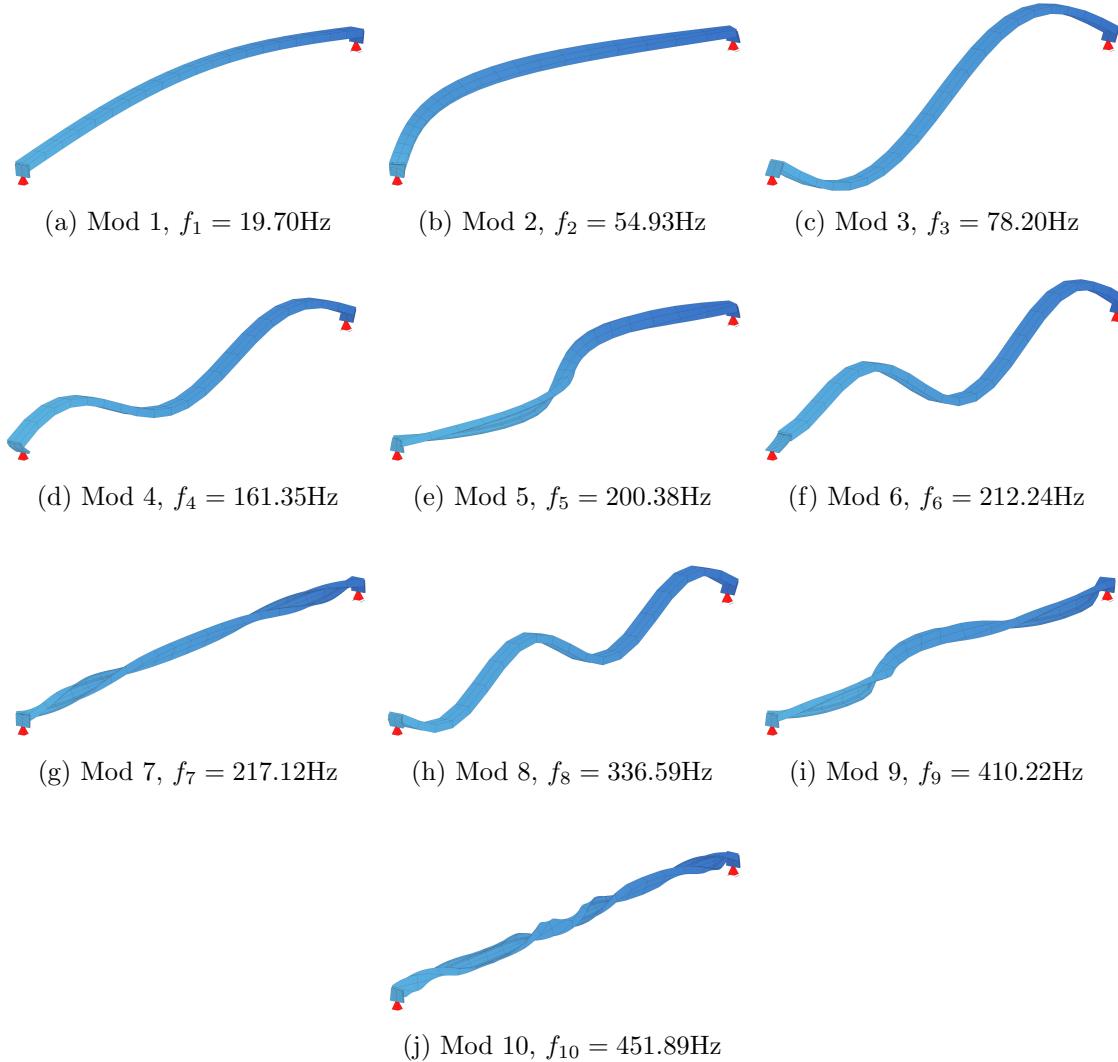
Przed przystąpieniem do analizy wygenerowano 5000 losowych przypadków obciążenia. Losowy charakter uzyskano za pomocą następujących założeń dla każdego przypadku obciążenia:

- w każdym węźle pośrednim może, ale nie musi, być przyłożona siła pionowa lub poprzeczna,
- jeśli siła została przyłożona, jej wartość jest losowana z zakresu od -3 do 3 N dla każdego węzła indywidualnie,
- w trakcie analizy, w każdym kroku czasowym losowany jest jeden przypadek obciążenia z wygenerowanych 5000.

Rozwiązyano problem własny dynamiki przedmiotowego modelu i otrzymano rezultaty jak na rysunku 3.5.

Odpowiedź konstrukcji na wymuszenie losowe wyznaczono metodą time-step Newmarka-Wilsona. Zdecydowano o sprawdzeniu modów w zakresie do około 250Hz. Z tego względu przyjęto krok całkowania jako $\Delta t = 1/2500s$. Zgodnie z kryterium Nyquista taki krok pozwala identyfikować drgania teoretycznie do częstotliwości 1250 Hz. Niemniej jednak, sygnał wyjściowy powinien zostać nadpróbkowany znacznie bardziej niż dwukrotnie. Aby zapewnić dokładność rezultatu, odpowiedź z rozwiązania numerycznego powinna być wyznaczona z próbkowaniem ok 10-15 razy większym niż częstotliwość najwyższej, interesującego modu (Żółtowski, Binczyk i Kalitowski 2017). Większość modów odczytanych z analizy modalnej mieści się w zamierzonym zakresie do 250 Hz. Kilka modów powyżej 250 Hz zostanie również uwzględnione w analizie dla pokazania zmniejszenia dokładności z uwagi na zbyt rzadkie próbkowanie. W każdym kroku struktura była obciążana losowym przypadkiem obliczeniowym z bazy 5000 wcześniej wygenerowanych. Tłumienie konstrukcji przyjęto jako masowo-sztywnościowe według metody Rayleigha (2.41). Współczynniki metody wyznaczono zakładając tłumienie LDT = 3% dla częstotliwości 20 Hz i 160 Hz. Chcąc sprawdzić charakter obciążenia wykonano analizę FFT sygnału złożonego z wartości obciążenia czterech węzłów w funkcji czasu. Widma częstotliwościowe przedstawiono na rysunku 3.6. Całkowity czas analizy przyjęto równy 25s ($25 \cdot 2500 = 62500$ kroków czasowych). Widmo częstotliwościowe nie ujawnia żadnej dominującej częstotliwości i można uznać je za równe w całym zakresie.

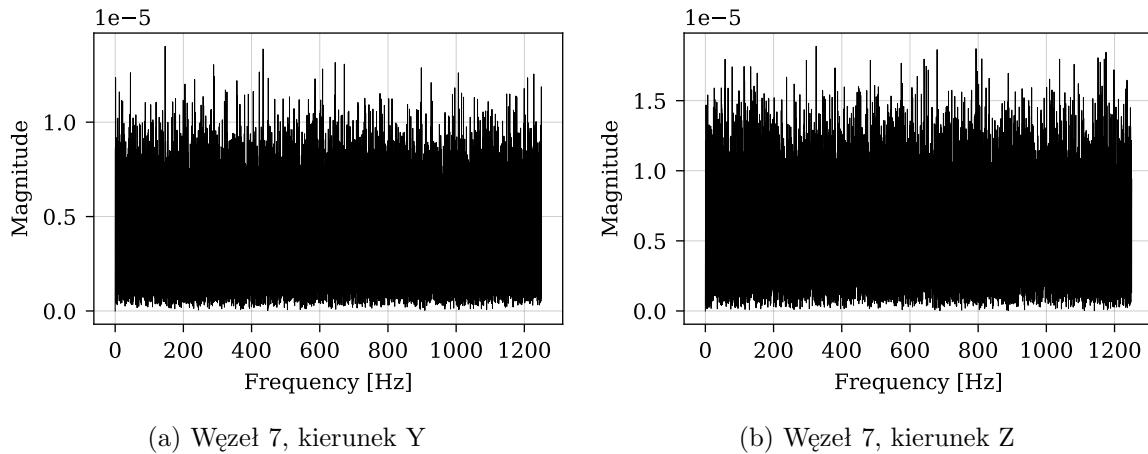
Dla obliczonego modelu odczytano przebieg przyspieszeń w dziewięciu węzłach pośrednich, na kierunku pionowym i poprzecznym. Do programu wprowadzono stworzone sygnały z informacją o lokalizacji punktów odczytu. Jako punkt referencyjny na kierunku Y wybrano punkt odległy o 0.3L od podpory, a na kierunku pionowym



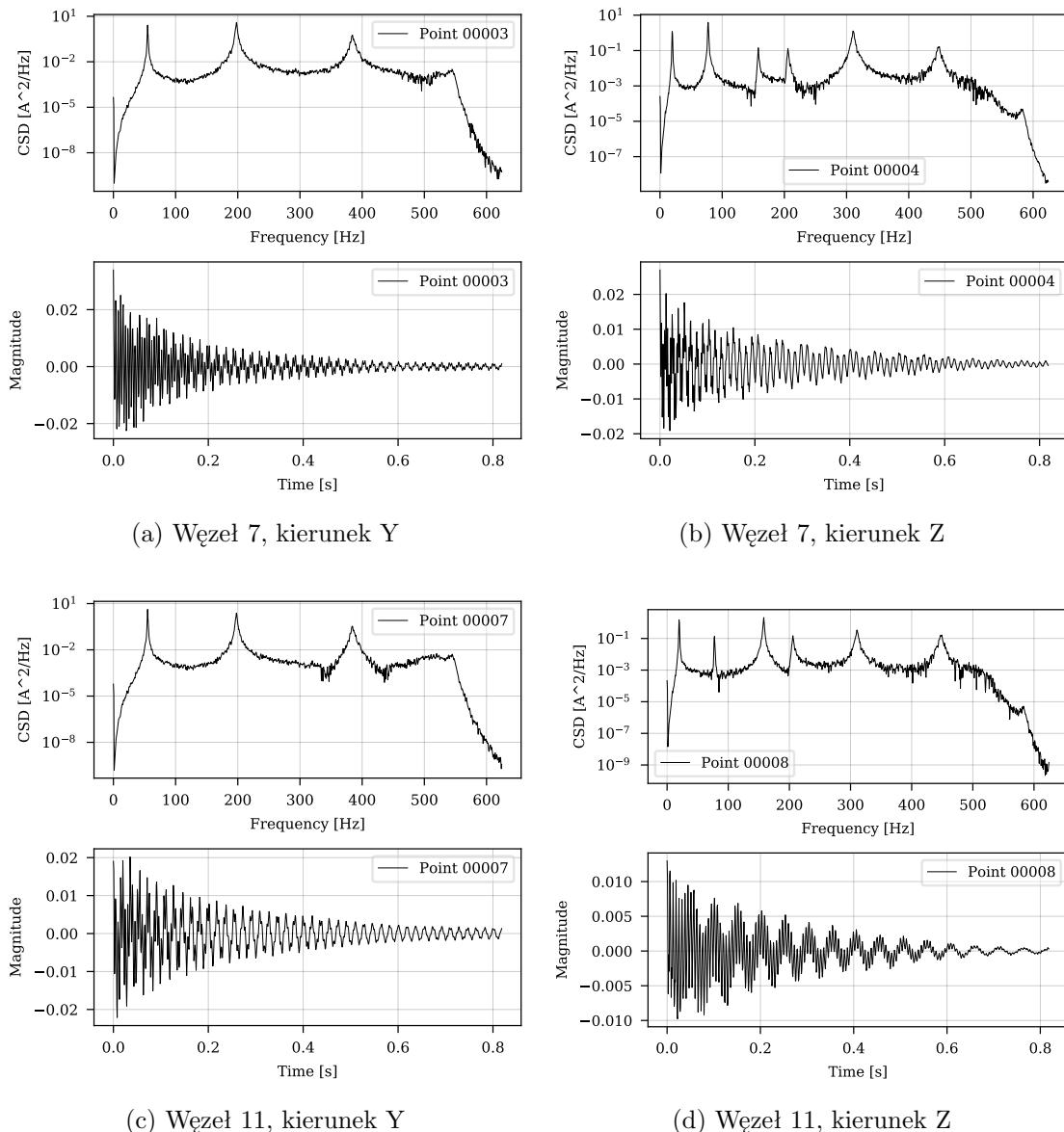
Rysunek 3.5: Rozwiążanie analizy modalnej modelu testowego

Z punkt odległy o $0.4L$ od podpory. O wyborze punktów referencyjnych decyduje warunek, że nie mogą one znajdować się w węzłach żadnej analizowanej postaci drgań. Dobór parametrów identyfikacji dokonano przy pomocy diagramu stabilizacyjnego (Rys. 3.7). Na ostatecznym diagramie w wersji filtrowanej (Rys. 3.7b) wyraźnie widać 8 zidentyfikowanych, stabilnych modów. Odczytano minimalny rząd modelu zawierający wszystkie stabilne mody jako $n = 20$. Diagram tworzony iteracyjnie pozwolił ostatecznie wyznaczyć parametry metody, które przynoszą pewne, stabilne rozwiązanie. Dobra parametry użyto w celu wyznaczenia ostatecznego rozwiązania identyfikacji.

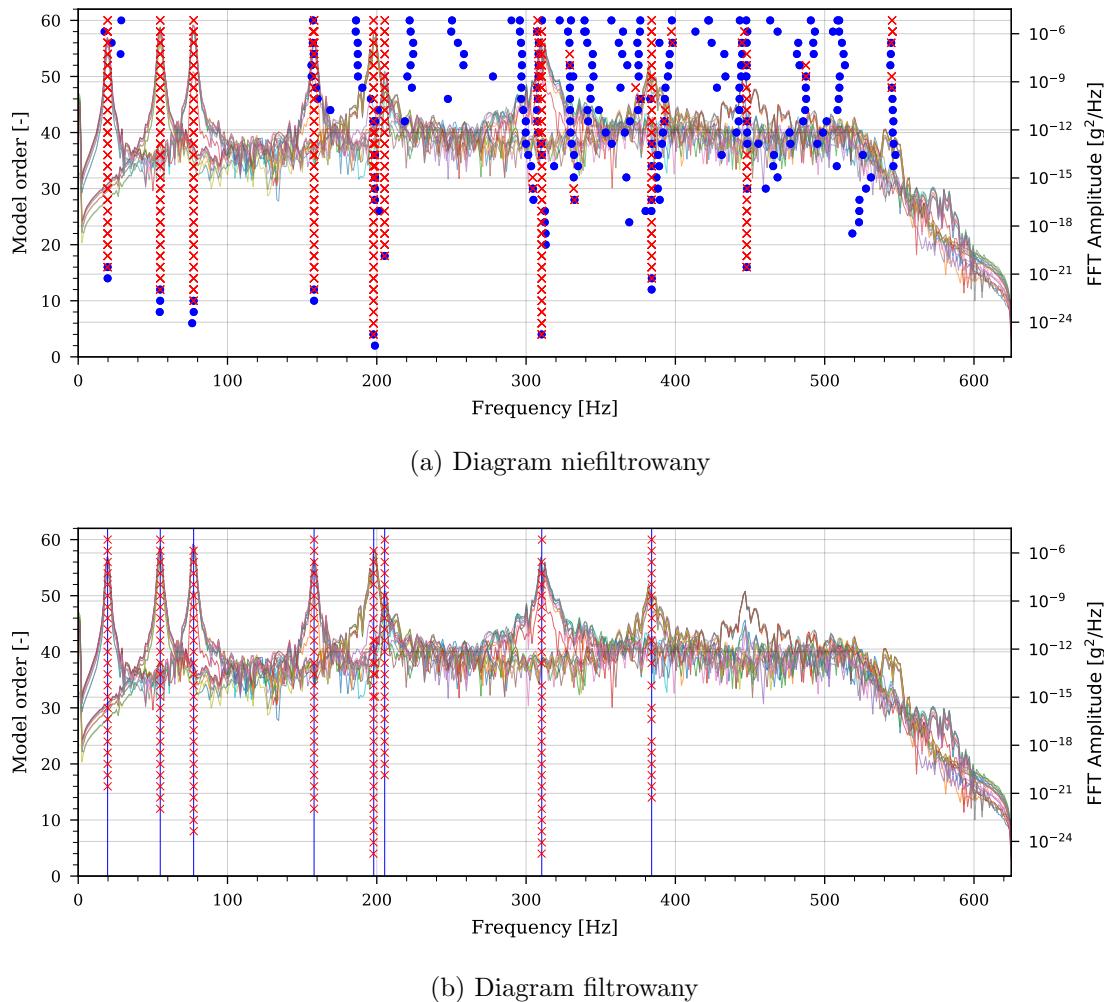
Wprowadzono wyznaczone parametry do programu. Uzyskano odpowiedzi impulsowe dla każdego punktu, których przykłady wraz z odpowiadającą im transformatą Fouriera przedstawiono na rysunku 3.8.



Rysunek 3.6: Transformaty Fouriera funkcji wymuszenia przykładowych węzłów w modelu testowym



Rysunek 3.8: Przykłady otrzymanych funkcji cross-korelacji w dziedzinie częstotliwości i w dziedzinie czasu



Rysunek 3.7: Diagram stabilizacyjny metody NExT-ERA testowego modelu numerycznego: (a) diagram niefiltrowany, (b) diagram filtrowany

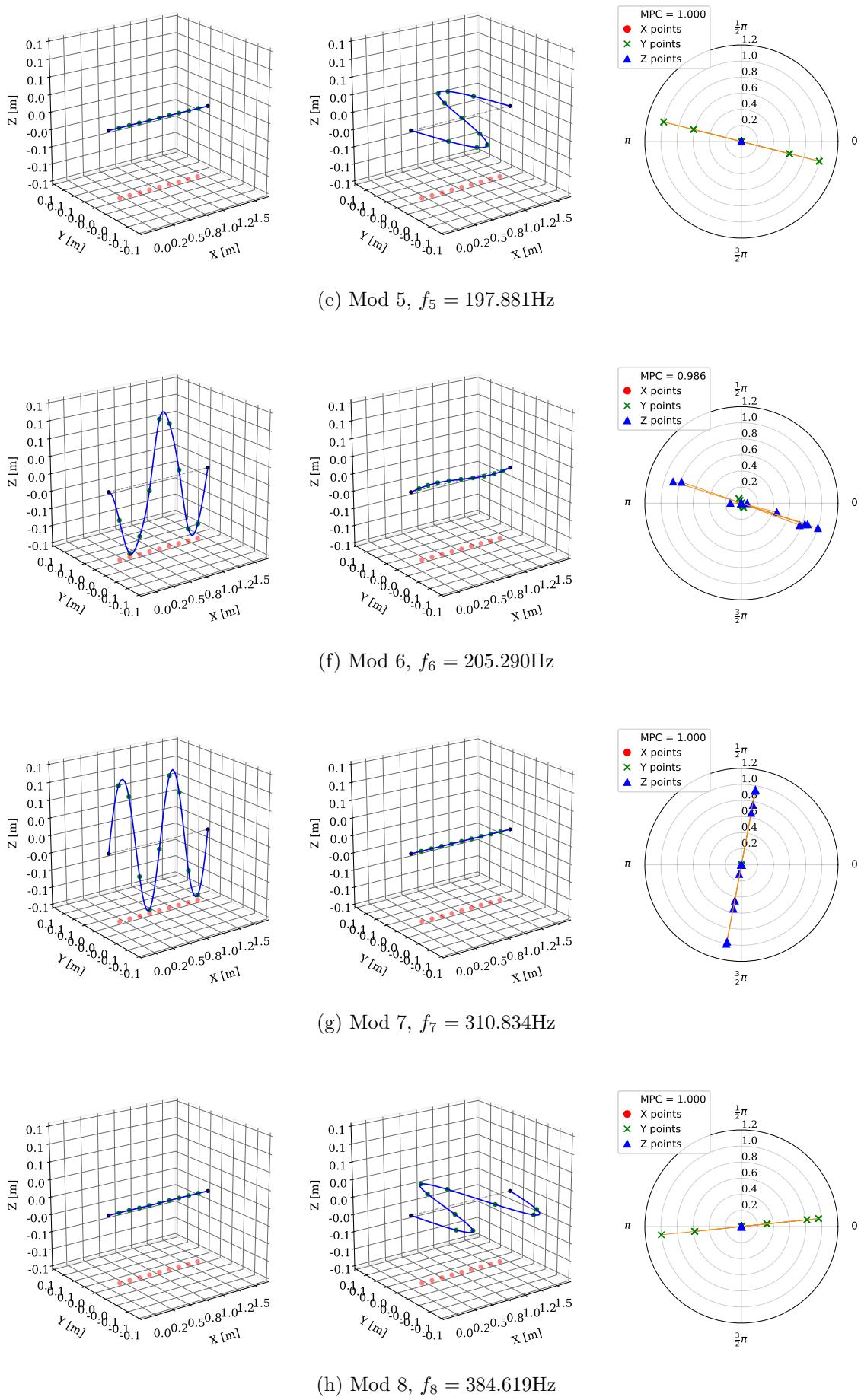
Funkcje posiadają wyraźnie gasnący, okresowy charakter. Na odpowiadających im widmach zaznaczają się wyraźnie dominujące częstotliwości. Wyznaczone funkcje IRF zostały wprowadzone do metody ERA. Wyniki obliczono dla minimalnego rzędu modelu równego $n = 20$ zgodnie ze wskazaniami diagramu stabilizacyjnego (Rys. 3.7). Spośród wszystkich modów wybrano te, które na diagramie ujawniają się jako rzeczywiste i stabilne. Wyniki w formie postaci drgań własnych na kierunku pionowym Z i poprzecznym Y oraz dla obu kierunków w układzie biegunowym przedstawiono na rysunku 3.9.

3.4.4 Testy eksperymentalne metody NEXT-ERA

W warunkach laboratoryjnych wykonano pomiary na belce rzeczywistej (Rys. ??). Belka została usytuowana na stabilnym podłożu. Aby ograniczyć możliwość przesuwu elementów podparcia w trakcie oddziaływania, punkty podparcia zostały dociążone ciężkimi stalowymi elementami. System pomiarowy składał się z wzmacniacza pomiarowego PMX firmy HBM (Hottinger Baldwin Messtechnik GmbH, Darmstadt, Germany), kabli i niskoszumnych, piezorezystywnych czujników akcelerometrycznych firmy TE CONNECTIVITY. Do obsługi wzmacniacza i akwizycji danych



Rysunek 3.9: Zidentyfikowane charakterystyki modalne belki testowej



Rysunek 3.9: Zidentyfikowane charakterystyki modalne belki testowej kont. 54

użyto program HBM Catman Easy. Czujniki przyjmocowano magnetycznie do belki. Zastosowano dwa czujniki 3-osiowe (traktowane jako 2-osiowe) i jeden 1-osiowy. Zakres pomiarowy akcelerometrów wynosi $\pm 2g$, a gwarantowane szумy są określone jako mniejsze niż $25\mu g$ RMS. Stanowisko pomiarowe zostało zaprezentowane na rysunku 3.11, a szczegóły konstrukcyjne belki i jej podparcia na rysunku 3.10



Rysunek 3.10: Szczegóły konstrukcyjne belki testowej



Rysunek 3.11: Elementy aparatury pomiarowej

Częstotliwość próbkowania

Częstotliwość próbkowania f_s określa jak często rejestrowana będzie wartość mierzoną. Zwykle zakłada się równy odstęp pomiędzy próbkami Δt . W kontekście pomiarów dynamicznych konstrukcji ważne jest aby zarejestrować drgania o wszystkich interesujących częstotliwościach. Teoretycznie gwarantuje to przyjęcie dwukrotnie większej częstotliwości próbkowania f_s niż najwyższa interesująca częstotliwość odpowiedzi układu f_{max} . Graniczna częstotliwość nazywa się częstotliwością Nyquista i wynosi $f_N = 0.5f_s$. Jednakże systemy akwizycji danych najczęściej posiadają filtry antialiasingowe, które mają swoje odbicie w pobliżu częstotliwości Nyquista. Brincker i C. E. Ventura 2015 podają, że z tego względu częstotliwość Nyquista musi o 20% większa niż wymagana teoretycznie. Podsumowując minimalna zaleca częstotliwość próbkowania powinna być równa:

$$f_s > 2.4f_{max} \quad (3.93)$$

Przyjmując założoną minimalną granicę interesujących modów jako 250Hz wyliczono częstotliwość próbkowania jako $f_{s,min} = 2.4 \cdot 250\text{Hz} = 600\text{Hz}$. W badaniach przyjęto znacznie wyższą częstotliwość równą $f_s=2400\text{Hz}$ chcąc, podobnie jak w przypadku modelu teoretycznego, móc zidentyfikować również kilka wyższych modów.

Długość pomiarów

Czas serii pomiarowej przyjęto zgodnie z zaleceniami opisanymi w Brincker i C. E. Ventura 2015. Według autorów minimalny czas gwarantujący poprawne określenie tłumienia, bez ryzyka negatywnego wpływu obciążen metody Welch'a, musi być

dłuższy niż 20 okien czasowych użytych przy wyznaczeniu funkcji korelacji. Z tego względu zalecana minimalna długość pomiaru dana jest nierównością ??.

$$T_{tot} > \frac{20}{2\xi f_{min}} = \frac{10}{\xi f_{min}} \quad (3.94)$$

gdzie f_{min} oznacza najniższą częstotliwość drgań własnych układu. Dla podanego układu minimalna częstotliwość drgań własnych wyznaczona teoretycznie wynosi $f_{min} = 19.7\text{Hz}$, a przewidywana minimalna liczba tłumienia wynosi $\xi \approx 0.005$. Minimalna długość serii pomiarowej wynosi więc $T_{min} = \frac{10}{0.005 \cdot 19.7} = 101.5\text{s}$.

Stosunek sygnału do szumu pomiarowego

Wyznaczono również stosunek poziomu sygnału do szumu posługując się wzorem:

$$SN = 20 \log \frac{\sigma_s}{\sigma_n} \quad (3.95)$$

gdzie σ_s oznacza wartość RMS sygnału zmierzonego, a σ_n jest wartością RMS szumu tła. Według zaleceń ANSI S2.47 wartość ta nie powinna być mniejsza niż 10 dB. Brincker i C. E. Ventura 2015 zalecają by w przypadku OMA stosunek sygnału do szumu nie był mniejszy niż 30-40 dB.

Przebieg badań

Przeprowadzono analizę sygnałów NExT-ERA podobnie jak miało to miejsce dla modelu numerycznego. Zastosowano dwa czujniki referencyjne. Jeden, mierzący pionowe i poprzeczne przyspieszenia w ciągu całych badań znajdował się w odległości 0.4L od podpory. Drugi, mierzący jedynie przyspieszenia poziome znajdował się w odległości 0.3L od podpory. Zwiększenie liczby czujników referencyjnych pozwala uniknąć sytuacji, gdzie jedyny czujnik referencyjny będzie znajdował się w węźle jakiegoś modu, co nie pozwoli go później zidentyfikować (Caicedo 2011). W takiej sytuacji drugi czujnik może w innym wariancie identyfikacji posłużyć jako referencyjny, a wyniki z obu wariantów należy skalić. Trzeci, ruchomy czujnik był przedstawiany 10 razy tak, że ostatecznie zmierzono przyspieszenia na obu kierunkach w 11 punktach odpowiadających węzłom modelu numerycznego oraz punktom podporowym. .

Pomiary odbywały się w pomieszczeniu, w godzinach wieczornych. Z tego powodu amplitudy przyspieszeń wywołane oddziaływaniem otoczenia były znikome. Dla zastosowanego układu pomiarowego zmierzony w laboratorium szum charakteryzuje się wartością RMS $\sigma_n = 0.00138 \text{ m/s}^2$. Sygnał nie zmieniał swojej mocy niezależnie od tego czy czujnik był umieszczony na obiekcie czy na stabilnym podłożu. Z tego względu w badaniach zastosowano sztuczne wymuszenie. Brincker i C. E. Ventura 2015 w przypadku badań laboratoryjnych zalecają szuranie lub gładzenie obiektu. W badaniach szurano po strukturze zgniecionym papierem pakowym. Wiotka struktura elementu wymuszającego nie powinna wpływać na dodatkowe tłumienie drgań. RMS jednominutowego sygnału pomierzonego ze sztucznym wymuszeniem wyniósł $\sigma_n = 0.0539 \text{ m/s}^2$. Dla takich rezultatów obliczony wg formuły (3.95) stosunek sygnału do szumu jest równy $SN = 20 \log \frac{0.0539}{0.0014} = 31.84 \text{ dB}$. Wyznaczona wartość jest większa niż zalecana.

Rezultaty badań

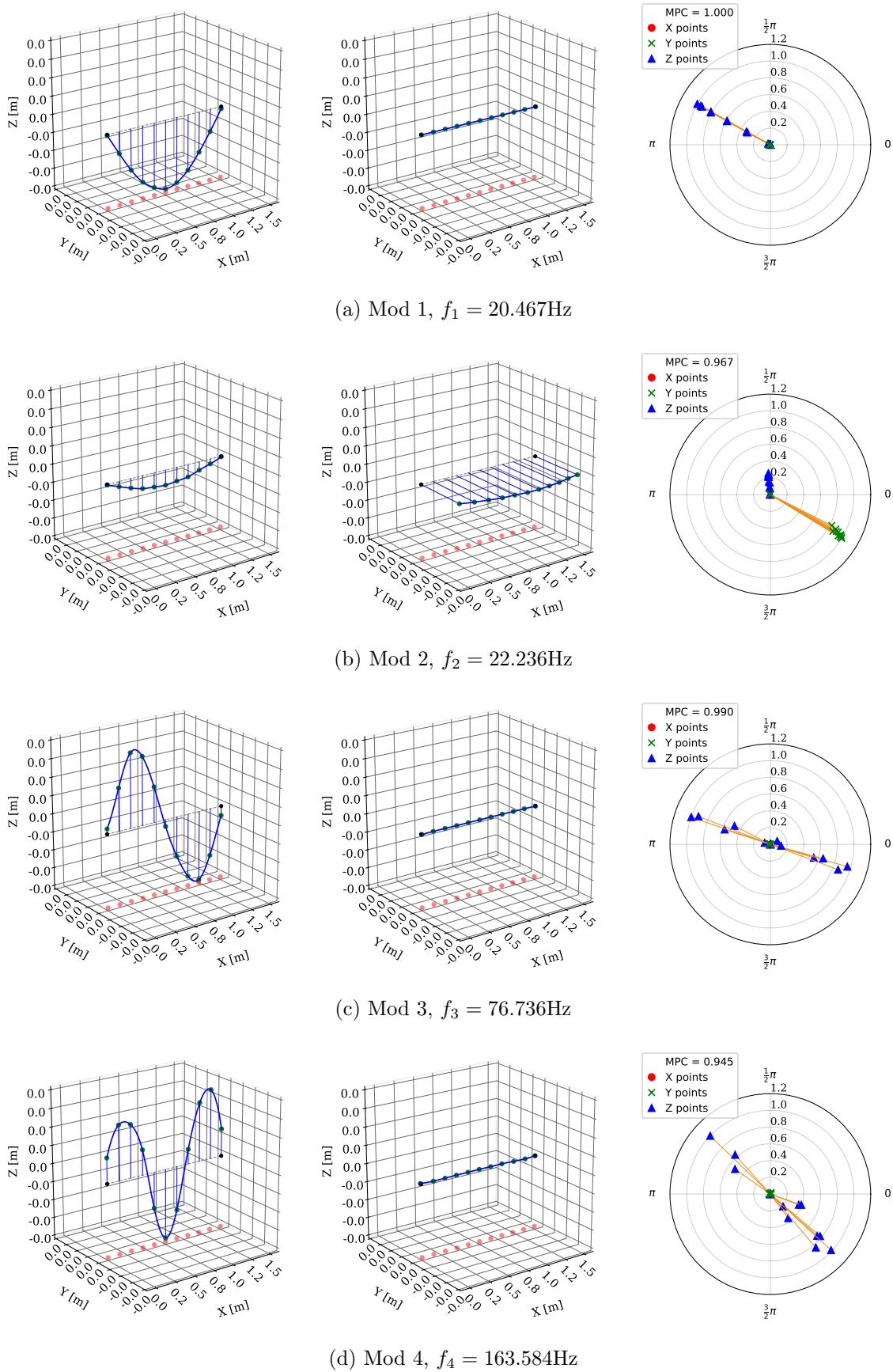
Diagramy stabilizacyjny metody NExT-ERA pokazano na rysunku 3.12. Zidentyfikowano 4 stabilne mody. Zidentyfikowane częstotliwości i postaci drgań zamieszczono na rysunku 3.13. Rezultaty porównano również z obliczeniami numerycznymi w tabeli 3.1.



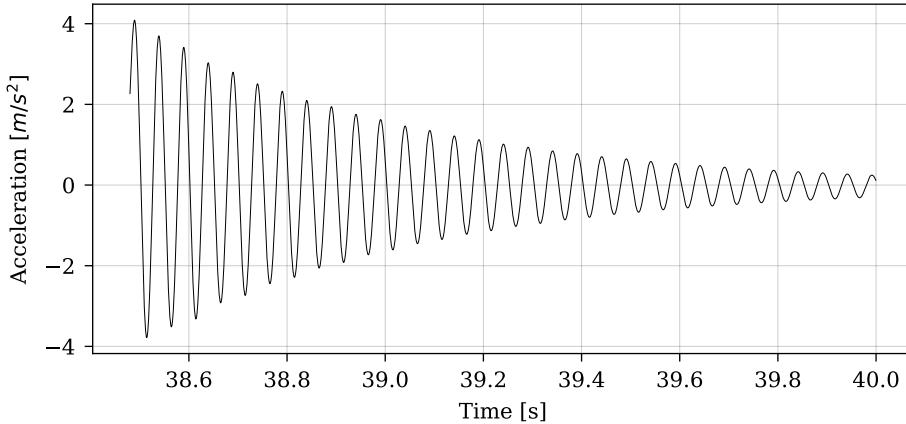
Rysunek 3.12: Diagram stabilizacyjny metody NExT-ERA rzeczywistej belki testowej: (a) diagram niefiltrowany, (b) diagram filtrowany

Analizując rezultaty można zauważać, że zidentyfikowano poprawnie 3 giętne pionowe postaci drgań. Pomimo bardzo dobrzej zgodności częstotliwości i formy drgań ich tłumienie jest jednak znacznie większe niż zakładane LDT = 3% w modelu numerycznym. Z uwagi na dużą wartość tłumienia dokonano prostej weryfikacji. Na rysunku 3.14 pokazano przyspieszenia pionowe środkowego punktu belki, drgającego swobodnie po wymuszeniu siłą impulsową. Sygnał odfiltrowano do 25Hz uzyskując drgania w pierwszej postaci. Odczytano wartości kolejnych amplitud o numerach 1, 10 i 20. Dla obu przedziałów 1-10 i 10-20 wyznaczono logarytmiczny dekrement tłumienia: $LDT_{1-10} = \frac{1}{10-1} \ln \frac{3.156}{1.378} = 0.092$ $LDT_{10-20} = \frac{1}{20-10} \ln \frac{1.378}{0.544} = 0.093$. Wyznaczone tłumienia są zbliżone do wartości wynikającej z analizy NExT-ERA.

Jedyna giętna postać poprzeczna nie odpowiada strukturalnie żadnej z wyznaczonych w analizach numerycznych. Mimo to sklasyfikowano ją jako mod 2 w tabeli



Rysunek 3.13: Zidentyfikowane charakterystyki modalne belki testowej



Rysunek 3.14: Odpowiedź swobodna belki testowej

3.1. Charakteryzuje się ona ruchem wszystkich punktów pomiarowych, w jednym kierunku i o zbliżonej amplitudzie. Dotyczy to także punktów nad miejscami podparcia. Mimo to mod został zidentyfikowany jako stabilny i charakteryzuje się bardzo wysokim tłumieniem ($LDT = 0.44$). Istnieje kilka elementów, które mogły wpływać na brak spodziewanej identyfikacji poziomych modów giętnych belki. Głównym jest różniąca się struktura fragmentów podporowych. Podpora belki laboratoryjnej była złożona z połączenia śrubowego i nie była sztywno przymocowana do podłoża. W modelu numerycznym w tym miejscu ustalono sztywne więzy w układzie belki swobodnie podpartej. Postać i wysokie tłumienie moda nr 2 może świadczyć, że belka wahala się na boki w całości i nie udało się wymusić drgań poprzecznych o bardzo wysokich częstotliwościach.

3.5 Podsumowanie testów metody NExT-ERA

Zidentyfikowane częstotliwości drgań własnych oraz tłumienia zestawiono w tabeli 3.1.

Częstotliwości wynikające z analizy modalnej i zidentyfikowane z odpowiedzi modelu numerycznego charakteryzują się bardzo dobrą zgodnością. Dla niskich częstotliwości różnice nie są większe niż 1%. Wraz ze wzrostem częstotliwości wzrastają również różnice do maksymalnie 8%. Jest to prawdopodobnie spowodowane zbyt niską częstotliwością próbkowania (zbyt dużym krokiem czasowym) dla modów o wysokich częstotliwościach. W takim przypadku różnica nie wynika z błędów identyfikacji tylko z błędów w wyznaczeniu odpowiedzi dynamicznej konstrukcji. Obserwując postaci uzyskane z analizy modalnej można zauważyć, że Mod 7 i Mod 10 mają charakter skrętny. Posługując się modelem belkowym i odczytując przyspieszenia węzłów wyłącznie na kierunku Y i Z nie ma możliwości zaobserwować tych postaci. Przeprowadzona identyfikacja potwierdza ten fakt, nie wskazując tych modów jako stabilnych rozwiązań. Z tego względu w tabeli zbiorczej zostały one oznaczone myślnikiem jako brakujące. Zidentyfikowane tłumienia różnią się do maksymalnie do 23% od zakładanych wartości wynikających z formuł teoretycznych. Uzyskanie dobrej zgodności zidentyfikowanego tłumienia jest z reguły bardziej problematyczne niż ma to miejsce w przypadku częstotliwości. W przedmiotowym przypadku większość tłumień zidentyfikowanych nie różni się o więcej niż 10% od wartości teoretycznych.

Tablica 3.1: Porównanie zidentyfikowanych parametrów modalnych obiektu testowego

	Analiza modalna	Zakładane tłumienie	Model MES					Badania				
			Częst.	LDT	Częst.	Stosunek	LDT	Stosunek	Częst.	Stosunek	LDT	Stosunek
			[Hz]	[-]	[Hz]	[%]	[-]	[%]	[Hz]	[%]	[-]	[%]
Mod 1	19.77	0.0303	19.701	100%	0.0291	96%	20.467	104%	0.097	333%		
Mod 2	54.93	0.0189	54.958	100%	0.0232	123%	22.236	40%	0.440	2335%		
Mod 3	78.20	0.0199	77.331	99%	0.0190	96%	76.739	98%	0.151	760%		
Mod 4	161.35	0.0302	157.995	98%	0.0240	79%	163.584	101%	0.185	614%		
Mod 5	200.38	0.0361	197.881	99%	0.0325	90%	-	-	-	-		
Mod 6	212.24	0.0379	205.29	97%	0.0410	108%	-	-	-	-		
Mod 7	217.12	0.0386	-	-	-	-	-	-	-	-		
Mod 8	336.59	0.0577	310.834	92%	0.0473	82%	-	-	-	-		
Mod 9	410.22	0.0697	384.619	94%	0.0628	90%	-	-	-	-		
Mod 10	451.89	0.0765	-	-	-	-	-	-	-	-		

W badaniach laboratoryjnych zidentyfikowano 4 stabilne mody. Model numeryczny pomimo dobrego odwzorowania wymiarów geometrycznych konstrukcji nie był kalibrowany względem obiektu rzeczywistego. Niemniej, pomimo braku kalibracji modelu numerycznego, częstotliwości modów pionowych są bardzo bliskie wartościom z analizy modalnej. Maksymalna różnica wynosi 4%. Tłumienia modów pionowych są zdecydowanie większe niż zakładane teoretycznie. Ich porównanie jest podane orientacyjnie i nie ma daje podstaw do wyciągnięcia wniosków na temat identyfikacji. Dla sprawdzenia efektu identyfikacji tłumienia w warunkach rzeczywistych porównano Logarytmiczny Dekrement Tłumienia odpowiedzi swobodnej układu ze zidentyfikowanym tłumieniem pierwszego modu (Rys. 3.14). Stosunek obu wartości wynosi $LDT_{\text{ident}}/LDT = 0.097/0.093 = 1.04$. Zawarty w tabeli mod 2 nie ma odpowiednika w analizach teoretycznych co uzasadniono w punkcie 3.4.4 i jego wystąpienie uznano za efekt niedoskonałego eksperymentu. Warto zaznaczyć, że mod 1 i mod 2 są bliskie pod względem częstotliwości przy zastosowanym spektrum całkowitym, a ich identyfikacja i rozróżnienie nie sprawiło problemu. Podsumowując, na podstawie przytoczonych testów uznano zaimplementowany algorytm jako skuteczny i przystąpiono do badań właściwych. Identyfikacja modalna rzeczywistego obiektu mostowego została opisana w punkcie 5.3.

Rozdział 4

Optymalizacja metodą roju cząstek - Particle Swarm Optimizaton

Wprowadzenie

Znalezienie najlepszej możliwej konfiguracji elementów konstrukcyjnych, zapewniającej poprawnie przeniesienie obciążen statycznych, zapewniającej komfort dynamiczny i najlepiej możliwie taniej jest zadaniem, które na co dzień towarzyszy projektantom mostów. Takie zadanie może kojarzyć się intuicyjnie z pojęciem optymalizacji, czyli wyborem najlepszego z wielu rozwiązań, pozwalającego osiągnąć cel lub cele. Szymczak 1995 określa następuje elementy, jakie powinno zawierać poprawnie sformułowane zadanie optymalizacji

- kryteria optymalizacji - miarę spełnienia danego celu,
- parametry optymalizacji - parametry systemu, które są stałe lub niezależne od projektanta,
- zmienne projektowe - parametrów systemu zależne od projektanta,
- ograniczenia - elementy określające zakres dopuszczalnych rozwiązań.

Kryterium optymalizacji powinno w sposób wymierny pozwolić na ocenę danego rozwiązania. Podstawowymi kryteriami stosowanymi w przypadku konstrukcji może być koszt jej wykonania, ilość materiału czy nakład pracy. Kryterium, które decyduje o wyborze najlepszego rozwiązania nazywane jest funkcją celu. W przypadku wielu kryteriów, jednym z rozwiązań upraszczających proces optymalizacji jest stworzenie jednej funkcji celu, łączącej wszystkie kryteria z zastosowaniem wag dla poszczególnych elementów. Odbywa się to zazwyczaj na zasadzie kombinacji liniowej:

$$F = \sum_{i=1}^n w_i F_i \quad (4.1)$$

gdzie w_i to współczynnik określający wagę kryterium F_i . W pracy została zastosowane rozwiązanie optymalizacji wielokryterialnej. W takim przypadku optymalizacja polega na minimalizowaniu lub maksymalizowaniu jednocześnie kilku funkcji celu. Zagadnienie zostanie omówione teoretycznie w punkcie 4.4.

W przypadku konstrukcji, parametry projektowe to założone wartości opisujące urząd, które nie ulegają zmianie w procesie optymalizacji. Mogą być one narzucone przez względy technologiczne bądź normowe (Szymczak 1995), lub wynikać

z innych założeń projektowych. Z kolei zmienne projektowe x_i , jak sama nazwa wskazuje, mogą się zmieniać w procesie optymalizacji i zależą od projektanta. Wybór konkretnych m zmiennych projektowych tworzy rozwiązanie w postaci wektora $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$, będącego punktem w przestrzeni m -wymiarowej.

Z reguły wartości zmiennych projektowych muszą spełniać szereg obostrzeń. Wynikają one ponownie ze względów technologicznych, normowych lub innych uznanych za istotne przez projektanta. Z tego powodu, na zmienne projektowe \mathbf{x} narzucone są ograniczenia. Wektor, który spełnia wszystkie ograniczenia nazywany jest dopuszczalnym. W analizie konstrukcji budowlanych ograniczeniami mogą być wymogi wytrzymałościowe, eksploatacyjne - zarówno statyczne jak i dynamiczne - czy też warunki stateczności. **DODAĆ OPIS MATEMATYCZNY OGRANICZEŃ**

4.1 Klasyfikacja problemów i metod optymalizacji

Wszystkie powyższe elementy definiują problem optymalizacji. Każdy z nich może przyjmować różne postaci co będzie miało znaczący wpływ przede wszystkim na wybór metody rozwiązania problemu. Tesch 2016 zaproponował następującą klasyfikację problemów optymalizacji zależnie od elementów charakterystycznych je definiujących:

- Liczba funkcji celu
 - pojedyncza funkcja celu,
 - wiele funkcji celu.
- Liczba ekstremów lokalnych
 - funkcja unimodalna - funkcja jest ciągła i posiada jedno ekstremum w rozpatrywanym przedziale,
 - funkcja multimodalna - problem posiada więcej niż jedno ekstremum lokalne w rozpatrywanym zakresie,
- Liniowość funkcji celu
 - problem programowania liniowego - funkcja celu i ograniczenia są liniowe,
 - problem programowania nieliniowego - funkcja celu lub ograniczenia nie są liniowe,
- Rodzaj zmiennych projektowych
 - ciągłe - zmienne projektowe są liczbami rzeczywistymi w zadanym przedziale,
 - dyskretne - zmienne projektowe są liczbami całkowitymi w zadanym przedziale,
 - mieszane - w problemie występują zarówno zmienne ciągłych jak i dyskretnych ,

Klasyfikacje zawarte w klasycznych pozycjach dotyczących optymalizacji podają również ogólny podział ze względu na to czy zmienne projektowe są liczbami czy funkcjami (Szymczak 1995; Findeisen, Szymanowski i Wierzbicki 1980).

Rodzaj problemu optymalizacji ogranicza wybór metody, którą można użyć do jego rozwiązania. W literaturze algorytmy tradycyjne dzielone są ze względu na

sposób przeszukiwania na: analityczne, enumeratywne oraz losowe (David Edward Goldberg 1995). W skrócie, pierwsze opierają się na stworzeniu i rozwiązyaniu układu równań, powstałego przez przyrównanie gradientu funkcji celu do zera. Metody te wymagają obliczenia pochodnych funkcji i mają charakter lokalny, szukając optymalnego rozwiązania wokół punktu, a nie w całym dopuszczalnym obszarze. W realnych przypadkach są to trudne do zaakceptowania warunki i metody te mają raczej ograniczony zakres zastosowań. Metody enumeracyjne polegają na obliczaniu funkcji celu dla kolejnych rozwiązań dopuszczalnych. W literaturze przedmiotu inną spotykaną nazwą tej metody jest „systematyczne przeszukiwanie”. Pomimo naturalności metody i jej prostoty jest to najmniej efektywna klasa metod, co jest jej główną wadą. Działanie metod losowych jest podobne do systematycznego przeszukiwania, z tą różnicą że kolejne rozwiązania są dobierane w sposób losowy, a nie uporządkowany. Metody losowe w ogólności nie pozwalają efektywniej uzyskać optymalnego rozwiązania niż enumeratywne. Przedstawione konwencjonalne metody są albo wysoce wyspecjalizowane i swoim zastosowaniem obejmują wąskie spektrum problemów, albo są mało efektywne w szerokim zakresie zastosowań.

Znając ograniczenia metod tradycyjnych, poszukiwano innych, które dzięki wykorzystaniu maszyn cyfrowych mogą stać się jednocześnie znacznie bardziej efektywne niż metody enumeratywne oraz jednocześnie pozwalają na rozwiązanie znacznie bardziej różnorodnych zadań niż metody analityczne. W odpowiedzi powstały algorytmy, które doboru coraz lepszego rozwiązania dokonują wykorzystując randomizację, ale nie są w zupełności losowe. Są to tak zwane algorytmy heurystyczne i w rozwiniętej wersji metaheurystyczne. Wykorzystują one doświadczenie powstałe na bazie przeprowadzonych prób i uczą się na ich podstawie szukając coraz lepszego wyniku, wykorzystując przy tym mechanizm randomizacji. Są to algorytmy zapewniające dobre rozwiązanie przy poświęceniu rozsądnej ilości czasu. Ponadto, większość algorytmów metaheurystycznych ma charakter globalny i nie ogranicza się do funkcji unimodalnych. Niemniej jednak, pomimo niewątpliwych zalet, należy pamiętać że algorytmy metaheurystyczne są z natury przybliżone. W związku z tym nie gwarantują, że optymalny wynik zostanie w ogóle odnaleziony. Najbardziej popularne algorytmy metaheurystyczne są inspirowane zachowaniami zaobserwowanymi w naturze (Fister Jr. i in. 2013). Główne mechanizmy ich działania mogą być zaczerpnięte z praw fizyki (np. Algorytm Przeszukiwania Grawitacyjnego (Rashedi, Nezamabadi-pour i Saryazdi 2009)), biologii (np. Algorytmy Genetyczne (David Edward Goldberg 1995)) czy inteligencji stadnej (np. Optymizacja Rojem Cząstek (Kennedy i Eberhart 1995; R. C. Eberhart, Y. Shi i James Kennedy 2001)). Podsumowując i odwołując się do wyżej przytoczonej klasyfikacji problemów optymalizacji, algorytmy ich rozwiązania Tesch 2016 podzielił według następujących kryteriów:

- Różniczkowalność funkcji celu
 - Wymagające pochodnej - algorytmy tej kategorii wymagają istnienia dwukrotnej pochodnej funkcji celu.
 - Niewymagające pochodnej - algorytmy tej klasy nie wymagają ciągłości funkcji celu oraz jej pochodnej.
- Liczba jednocześnie rozważanych rozwiązań
 - Jednopunktowe - w jednej chwili rozważane jest jedno rozwiązanie. W kolejnych krokach algorytmu jest ono modyfikowane w celu uzyskania lepszego rozwiązania.

- Wielopunktowe - jednocześnie odbywa się analiza wielu rozwiązań, które mają wpływ na wynik końcowy.
- Mechanizmy losowości
 - Deterministyczne - rozwiązania są wyznaczane jedynie na podstawie danych wejściowych i wyznaczonych parametrów.
 - Stochastyczne - zmienne projektowe są wybierane z uwzględnieniem czynnika losowego.
 - Hybrydowe - algorytm zawiera oba mechanizmy wyboru kolejnego rozwiązania.

4.2 Określenie funkcji celu i wybór metody optymalizacji

Wpływ poszczególnych rozwiązań konstrukcyjnych obiektu na jego odpowiedź dynamiczną zalicza się do zagadnień złożonych. Pierwszą funkcją celu postawionego problemu może być minimalizacja przyspieszeń pionowych pomostu w trakcie przejazdu. Jest to najbardziej najczęściej decydujący warunek eksploatacyjny mostu narzucony przez normę Europejską. Drugą pożądaną cechą może być poszukiwanie najtańszego obiektu (w uproszczeniu najmniejszej ilości materiału), przy spełnieniu wszystkich innych warunków wytrzymałościowych. Wybór metody optymalizacji, która została wykorzystana dokonano przez analizę rozpatrywanego zadania. Z uwagi na brak funkcyjnego opisu odpowiedzi dynamicznej modelu numerycznego zaniechano użycia metod analitycznych, wymagających obliczania pochodnych. Dodatkowo problem ma charakter globalny i nie wolno dopuścić do zakończenia poszukiwania w ekstremum lokalnym. Odrzucono również metody losowe i systematycznego przeszukiwania z uwagi na długotrwałe wyznaczanie funkcji celu i bardzo nieefektywny algorytm. Kolejnym kryterium była uniwersalność algorytmu, ponieważ zaplanowano użycie go w dwóch zupełnie różnych problemach: kalibracji modelu i optymalizacji konstrukcji z punktu widzenia zachowania dynamicznego. Ostatnim kryterium była udokumentowana w literaturze skuteczność metody, w tym wykorzystanie jej w przypadkach analizy i oceny konstrukcji. Powyższe warunki spełniają metody metaheurystyczne. Spośród opisanych w literaturze wybrano metodę optymalizacji rojem cząstek.

4.3 Opis algorytmu

Optymalizacja rojem cząstek (*eng. Particle Swarm Optimization (PSO)*) jest metaheurystycznym, inspirowanym naturą algorytmem optymalizacji. W bazowej wersji powstał w roku 1995 (James Kennedy i Russell Eberhart 1995; Russell Eberhart, Kennedy i James Kennedy 1995) i od tamtej pory ulegał wielu modyfikacjom, udoskonaleniom i rozszerzeniom. Metoda zakłada istnienie pewnej populacji - roju składającego się z M cząstek. Każda cząstka o indeksie i posiada trzy informacje ($\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{p}_i$). \mathbf{x}_i i \mathbf{p}_i są wektorami o długości D oznaczającymi punkt w przeszukiwanej przestrzeni \mathbf{X} , gdzie D jest liczbą zmiennych projektowych problemu. \mathbf{x}_i oznacza aktualną pozycję cząstki w przestrzeni \mathbf{X} . Z kolei \mathbf{p}_i określa najlepsze dotychczasowe położenie cząstki i (*eng. personal best (pbest)*). Jakość położenia określana jest przez

wyznaczenie funkcji celu dla danej cząstki (np. zakładając minimalizację, mniejsza wartość funkcji celu jest lepsza od większej). Jeżeli funkcja celu dla nowego położenia cząstki jest lepsza niż zachowana w pamięci (pbest) to wektor \mathbf{p}_i jest aktualizowany do nowej wartości. \mathbf{v}_i jest również wektorem o długości D i oznacza różnicę pomiędzy nowym położeniem w chwili $t + 1$ i poprzedzającym w chwili t :

$$\mathbf{x}_i^{t+1} = \mathbf{x}_i^t + \mathbf{v}_i^{t+1} \quad (4.2)$$

Jako że wektor \mathbf{v}_i decyduje o kolejnym położeniu cząstki nazywany jest również wektorem prędkości. Współrzędne wektora \mathbf{v}_i z kroku t uaktualniane są w kolejnej iteracji $t + 1$ w następujący sposób:

$$\mathbf{v}_i^{t+1} = \theta \mathbf{v}_i^t + \alpha \mathbf{u}_1^t \circ (\mathbf{n}_i^t - \mathbf{x}_i^t) + \beta \mathbf{u}_2^t \circ (\mathbf{p}_i^t - \mathbf{x}_i^t) \quad (4.3)$$

gdzie wektory \mathbf{u}_1^t i \mathbf{u}_2^t zawierają zestawy losowych liczb o rozkładzie jednostajnym z zakresu $[0,1]$, ustalonych w chwili czasowej t . Symbol (\circ) oznacza iloczyn skalarny. Parametry α , β i θ w pierwotnej wersji algorytmu są stałymi. W zależności od zastosowanej topologii roju, \mathbf{n}_i oznacza najlepsze rozwiązanie \mathbf{p}_i spośród dostępnych sąsiadów. W jednej z najpopularniejszych i najbardziej intuicyjnych wersji stosowana jest topologia gbest, w której \mathbf{n}_i przyjmuje najlepszą wartość \mathbf{p}_i spośród wszystkich cząstek.

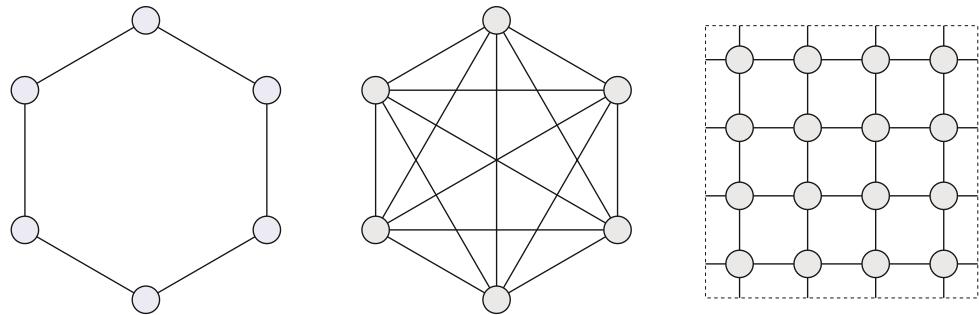
Parametry algorytmu PSO

Każdy składnik prędkości spełnia określona rolę. Pierwszy jest związany z bezwładnością i utrzymuje on bieżącą trajektorię cząstki. Parametr θ w ogólności zmniejsza prędkość, zapewniając lepszą zbieżność rozwiązania (Blackwell i James Kennedy 2019). Jego wartość może być stała lub zmienna w trakcie analizy. Współczynniki α i β odpowiadają za przyspieszenie na bazie odpowiednio własnych i społecznych doświadczeń. Clerc i James Kennedy 2002 wyznaczyli wartości $\theta = 0.7968$, $\alpha = 1.4962$ i $\beta = 1.4962$ jako optymalne z punktu widzenia działania algorytmu. Przyjęcie równości $\alpha = \beta$ oznacza, że na prędkość cząstki równy wpływ mają doświadczenia własne i sąsiadów. Do podobnych rezultatów doszli Y. Shi i Russell Eberhart 1998. Xu i Rahmat-Samii 2007 podaje przykład zmiennego wariantu, gdzie θ zmniejsza swoją wartość liniowo od 0.9 do 0.4, a parametry α i β są stałe i równe 2.0. Poli, James Kennedy i Blackwell 2007 obszernie opisali metody wyznaczania wartości parametrów algorytmu.

Topologie roju

Topologia roju odpowiada za zachowanie społeczne cząstek roju. Określa ona sąsiedztwo, z którym cząstka może się komunikować i wymieniać doświadczeniem. Definiuje również liderów, za którymi podążać będą pozostałe cząstki. Topologie dzielą się na dwie główne grupy: globalne (eng. *global best (gbest)*) i lokalne (eng. *local best (lbest)*). Schemat topologii można przedstawić za pomocą grafów, w których węzły oznaczają cząstki, a krawędzie możliwość komunikacji z inną cząstką. Trzy najczęściej występujące w literaturze przedmiotu topologie to:

- topologia pierścieniowa (Rys. 4.1a),
- topologia pełnego grafu (Rys. 4.1b),



(a) Topologia pierścieniowa (b) Topologia pełnego grafu (c) Topologia von Neumanna

Rysunek 4.1: Schematy wybranych topologii komunikacji pomiędzy cząstkami w metodzie optymalizacji rojem cząstek

- topologia von Neumanna (Rys. 4.1c).

Przyjęta topologia roju ma istotny wpływ na zachowanie i efektywność algorytmu. Topologie należące do rodziny gbest osiągają szybciej zbieżność, ale istnieje większe ryzyko na utknięcie w minimum lokalnym gdy funkcja celu nie jest unimodalna. Innymi słowy przynosi ona precyzyjniejsze rozwiązanie, ale mniej dokładnie przeszukuje obszar. Przy wykorzystaniu rodziny lbest efekt jest odwrotny. Ograniczona jest komunikacja jedynie do wąskiego grona sąsiadów, przez co algorytm zbiega do rozwiązania wolniej. Zwiększa to szansę na dokładniejsze przeszukanie obszaru, ale zmniejsza precyzję ostatecznego wyniku. Topologie mogą być również podzielone na statyczne i dynamiczne. Pierwsze utrzymują swoją strukturę przez cały czas wykonywania algorytmu, drugie zmieniają swoje właściwości wraz z postępem obliczeń. Najczęściej topologią dynamiczną populacja rozpoczyna od małej liczby sąsiadów żeby w trakcie wykonywania algorytmu ich liczba stopniowo wzrosła (Poli, James Kennedy i Blackwell 2007). Warto podkreślić, że w klasycznej wersji algorytmu położenie cząstki w przestrzeni \mathbf{X} nie ma wpływu na początkowy wybór sąsiedztwa zgodnie z założoną topologią.

Jedyną topografią z rodziny gbest jest topologia pełnego grafu (Rys. 4.1b). Każda cząstka może przekazywać informację o najlepszym położeniu ze wszystkimi innymi. W tym wariantie wektor \mathbf{n}_i w formule (4.3) jest równy dla wszystkich cząstek i odpowiada najlepszemu dotychczasowemu położeniu całej populacji. Z kolei pierwszą i najprostszą topografią lbest jest topologia pierścieniowa (Rys. 4.1a). Komunikacja jest zapewniona jedynie pomiędzy najbliższymi sąsiadami: cząstka o indeksie i wymienia informację o najlepszym położeniu jedynie z cząstkami o indeksach $i - 1$ i $i + 1$. Trzecia wymieniona topografia von Neumanna należy również do rodziny lbest, ale reprezentuje kompromis pomiędzy przypadkami skrajnymi: topografią pierścieniową i pełnego grafu (Rys. 4.1c). Pozwala ona na wymianę informacji z czterema sąsiadami.(James Kennedy i Mendes 2002) wykonali szereg testów obliczeniowych dla zróżnicowanych problemów dla wielu topologii. W tym teście topografia von Neumanna otrzymała najwyższą sumaryczną notę i jest opisana jako uniwersalna. Obszerne porównanie topologii wraz z historycznym opisem i powstania oraz efektywnością zostało zawarte w pracy (Blackwell i James Kennedy 2019).

4.3.1 Generacja populacji

Początkowa populacja roju jest rozmieszczana w D -wymiarowej przestrzeni rozwiązań \mathbf{X} . Przyjęcie właściwej liczby częstek nie jest kwestią ściśle określona. Piotrowski, Napiorkowski i Piotrowska 2020 przeprowadzili obszerne studium dotyczące przyjęcia wstępnej liczebności populacji. Posłużyli się oni kilkudziesięcioma rzeczywistymi i testowymi problemami optymalizacji i ocenili 8 różnych wersji algorytmu. Na bazie analizy statystycznej stwierdzono, że klasycznie zalecane przyjęcie od 20 do 50 (Kennedy i Eberhart 1995; Liang i in. 2006; Chen i in. 2012; Harrison, Engelbrecht i Ombuki-Berman 2018) częstek jest w przypadku wielu rzeczywistych problemów niewystarczające. Taka liczba sprawdza się jedynie w przypadku stosunkowo prostych problemów unimodalnych. Dla złożonych zagadnień i wersji algorytmu opisanej w niniejszej pracy autorzy podali poprawny zakres od 70 do 500 częstek. Jednocześnie sformułowano również generalną wskazówkę, że dla wszystkich wariantów algorytmu bezpiecznym rozwiążaniem jest przyjęcie od 70 do 100 częstek. Liczebność populacji w trakcie całej analizy jest zazwyczaj stała, chociaż istnieją modyfikacje algorytmu, które pozwalają na dodawanie częstek w trakcie działania algorytmu.



Rysunek 4.2: Przykłady rozkładu wygenerowanych populacji częstek: (a)-(c) generacja losowa, (d) generacja z wykorzystaniem sekwencji Haltona

Rozwiązania realnych zagadnień inżynierskich zazwyczaj cechują pewne ograniczenia, które przekładają się na dopuszczalny zakres zmiennych projektowych. Jeżeli

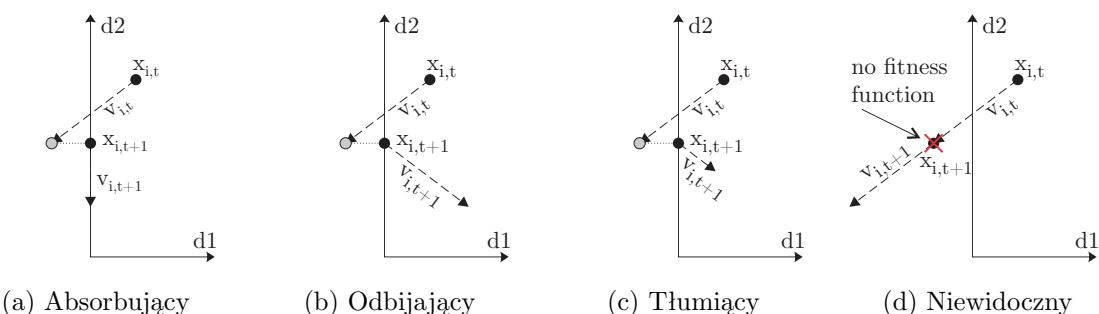
wektor minimalnych wartości dopuszczalnych zmiennych projektowych zebrany zostanie w wektorze x_{min} , a maksymalnych jako x_{max} to możliwe jest określenie hiperprostokąta o wierzchołkach (x_{min}, x_{max}) . Początkowe położenie cząstek odbywa się więc przez dobranie współrzędnych wektorów rozwiązań x_i , tak aby wszystkie cząstki znalazły się wewnątrz hiperprostokąta (x_{min}, x_{max}) . Pozycje początkowe mogą być wybierane przez użytkownika bądź losowane wewnątrz przestrzeni dopuszczalnych rozwiązań. Zakładając niewielką populację roju, istnieje spora szansa, że losowanie o jednorodnym rozkładzie nie zagwarantuje równomiernego pokrycia przestrzeni. Z tego powodu do generacji początkowej populacji niekiedy stosowane są deterministyczne algorytmy, które pozwalają uzyskać rozkład do złudzenia przypominający losowy, ale zapewniające jednocześnie równomierną dystrybucję w przestrzeni (Saliby i Pacheco 2002). Jedną z takich metod jest wykorzystanie sekwencji Haltona (Tesch 2016). Na rysunku 4.2 pokazano przykłady rozkładu 36 początkowych cząstek w przestrzeni dwuwymiarowej. Trzykrotnie wylosowano populację za pomocą generatora pseudolosowego (4.2a–4.2c). Dla kontrastu przedstawiono punkty wygenerowane za pomocą sekwencji Haltona w takim samym zbiorze 4.2d. W każdej z losowo wybranych populacji widoczne są obszary, które są gęsto pokryte i takie, w którym nie znajduje się żadna cząstka. Przy wykorzystaniu sekwencji Haltona przestrzeń jest pokryta znacznie bardziej równomiernie. Problem staje się tym bardziej istotny kiedy dotyczy małych populacji. Kiedy wyznaczenie funkcji celu jest bardzo kosztowne czasowo, a zadanie wielowymiarowe wykorzystanie sekwencji Haltona zwiększa pewność równomiernego rozkładu w całej przestrzeni.

Warunki brzegowe

Początkowa populacja roju jest losowana wewnątrz przestrzeni dopuszczalnych rozwiązań. Następnie wykorzystana jest inteligencja roju do przeszukania przestrzeni w celu znalezienia globalnego ekstremum. W trakcie kolejnych iteracji położenie cząstek zmieniane jest według wzorów (4.3) i (4.2). W trakcie obliczeń, w oryginalnej wersji algorytmu użytkownik nie ingeruje w proces przemieszczania się cząstek. Istnieje więc możliwość że wyznaczona prędkość wyprowadzi cząstkę poza obszar dopuszczalnych rozwiązań. Jest to szczególnie prawdopodobne kiedy ekstremum globalne znajduje się w pobliżu granicy rozwiązań dopuszczalnych (Xu i Rahmat-Samii 2007). Kiedy cząstka wyjdzie poza zakres dopuszczalnych rozwiązań jej wartość jest nieistotna (błędna) dla projektanta i nie powinna wpływać negatywnie na wynik końcowy. Jednym z rozwiązań jest obciążenie takiej cząstki karą. Do funkcji celu dodawana jest wartość, która drastycznie oddali wynik od najlepszego rezultatu (dla minimalizacji zwiększenie wyniku, a dla maksymalizacji pomniejszenie). Aby zniwelować efekt ucieczki z obszaru dopuszczalnego zastosowana może być prędkość maksymalna V_{max} , połączona ze współczynnikiem zaciskania (Russell Eberhart i Y. Shi 2001). Zalecana prędkość maksymalna może być powiązana z rozpiętością zakresu zmiennych projektowych $V_{max} = X_{max} - X_{min}$. Drugim stosowanym zabiegiem jest zdefiniowanie warunków brzegowych. Modyfikują one parametry cząstki (położenie lub prędkość) jeżeli znajdzie się ona poza obszarem dopuszczalnych rozwiązań. W literaturze spotykane są cztery podstawowe rodzaje warunków brzegowych: absorbowiący (*eng. absorbing wall*), odbijający (*eng. reflecting wall*), tłumiący (*eng. damping wall*) i niewidoczny (*eng. invisible wall*) (Robinson i Rahmat-Samii 2004; T. Huang i Mohan 2005). Efekt poszczególnych warunków brzegowych przy przekroczeniu przez cząstkę granicy danego wymiaru jest następujący:

- absorbujący - cząstka jest zatrzymywana na granicy, a składowa wektora prędkości w danym wymiarze jest zerowana,
- odbijający - cząstka jest zatrzymywana na granicy, a znak składowej prędkości w danym wymiarze jest odwracany,
- tłumiący - cząstka jest zatrzymywana na granicy, a znak składowej prędkości w danym wymiarze jest odwracany i pomniejszany przez losowy mnożnik z zakresu $(0, 1)$,
- niewidoczny - cząstka nie jest zatrzymywana na granicy, a wektor prędkości nie zmienia swojej definicji. Wartość funkcji celu nie jest wyznaczana.

Na rysunku pokazano efekt oddziaływania na cząstkę każdego z warunków brzegowych w przestrzeni 2D o zmiennych projektowych d_1 i d_2 . W swojej pracy, (Xu i Rahmat-Samii 2007) zbadali dodatkowe warianty warunków opierające się powyższych założeniach, ale bez wymuszonej zmiany położenia cząstki, jedynie modyfikując prędkość. Autorzy podanych prac zgodnie określają warunek tłumiący jako najbardziej uniwersalny, a warunek niewidoczny jako najwydajniejszy w większości problemów.



Rysunek 4.3: Rodzaje warunków brzegowych wpływające na zachowanie cząstki wychodzącej poza zakres rozwiązań dopuszczalnych

Warunki zakończenia

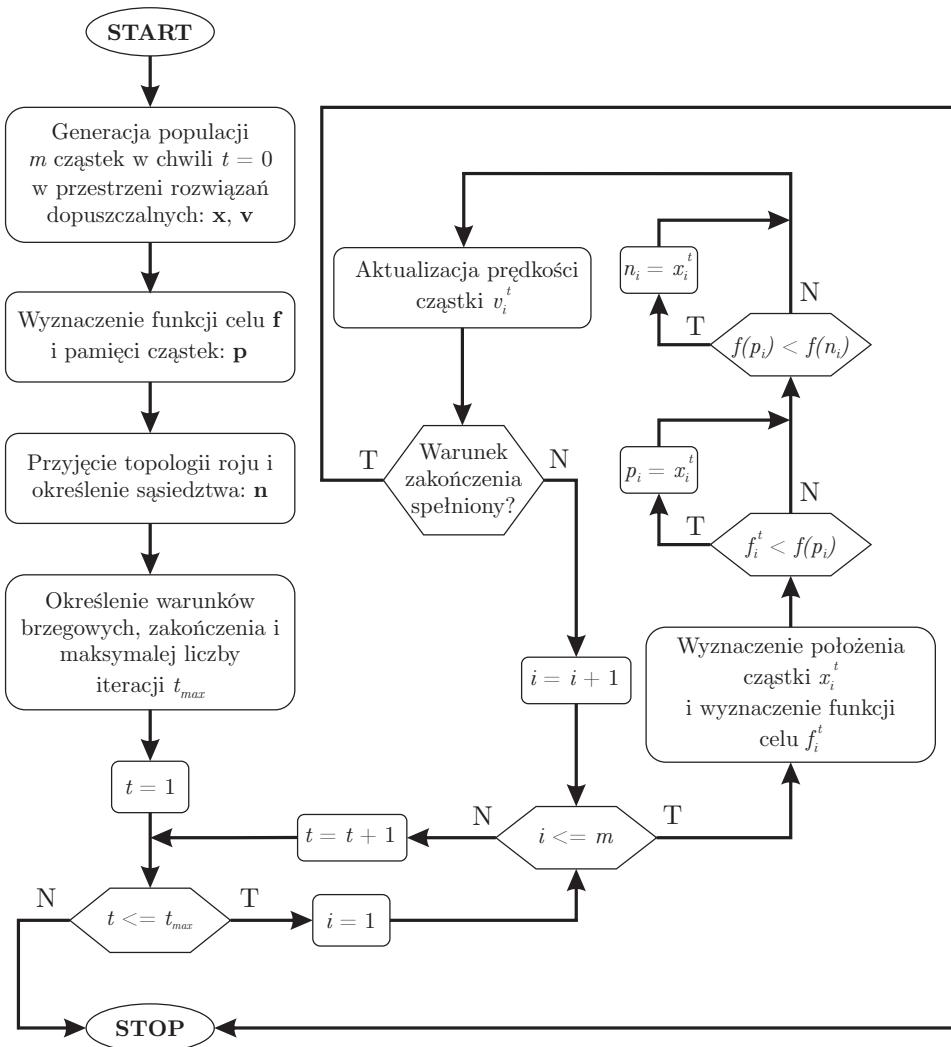
Algorytm PSO z każdą kolejną iteracją aktualizuje położenie cząstek i pamięć roju. Warunek zakończenia przeszukiwani przestrzeni może odbyć się w różny sposób. Najprostszą metodą jest określenie maksymalnej liczby aktualizacji roju, po której poszukiwanie zostanie zakończone. W tym przypadku na wstępie wiadomym jest ile iteracji zostanie wykonanych i przy znajomości czasu potrzebnego na oszacowanie funkcji celu możliwe jest określenie długości całego procesu optymalizacji. Podstawową wadą tego kryterium jest, że nie odnosi się w żaden sposób do jakości rozwiązania w ciągu trwania obliczeń. (Zielinski i Laur 2007) przedstawili zestaw innych kryteriów, które uwzględniają zachowanie roju w trakcie poszukiwań. Wyróżniono następujące kryteria mogące wpływać na warunek zakończenie algorytmu:

- kryterium postępu - optymalizacja jest zatrzymywana kiedy w określonej liczbie kolejnych iteracji nie nastąpi znaczące polepszenie ekstremum globalnego,
- kryterium ruchu - optymalizacja jest zatrzymywana kiedy położenie bieżącego ekstremum globalnego nie zmienia się istotnie w określonej liczbie kolejnych iteracji,

- kryterium dystrybucji populacji - optymalizacja jest zatrzymywana kiedy cząstki zgrupują się w jednym miejscu. Dystrybucja może być mierzona m. in. przez odchylenie standardowe położenia populacji, maksymalny dystans między cząstkami lub rozmiar roju mierzony przez długość boków hiperprostokąta, w którym w całości się mieści.
- kryterium prędkości - optymalizacja jest zatrzymywana kiedy prędkość cząstek roju spadnie poniżej wartości minimalnej i nie wzrośnie przez określoną liczbę kolejnych iteracji.

Wszystkie powyższe warunki mogą być łączone i użyte wedle potrzeb w zależności od specyfiki problemu optymalizacji. Banach 2017 określił kryterium prędkości jako najbardziej uniwersalne, ponieważ nie dotyczy położenia cząstek roju i nie zależy od rozwiązywanego problemu optymalizacji. Uzasadnił, że nie wymaga ono znajomości wartości progowych najczęściej nieznanej funkcji celu oraz nie wymaga by wszystkie cząstki zbiegły w tym samym miejscu.

Podsumowując, algorytm podstawowej wersji metody optymalizacji rojem cząstek (PSO) przedstawiono na rysunku 4.4.



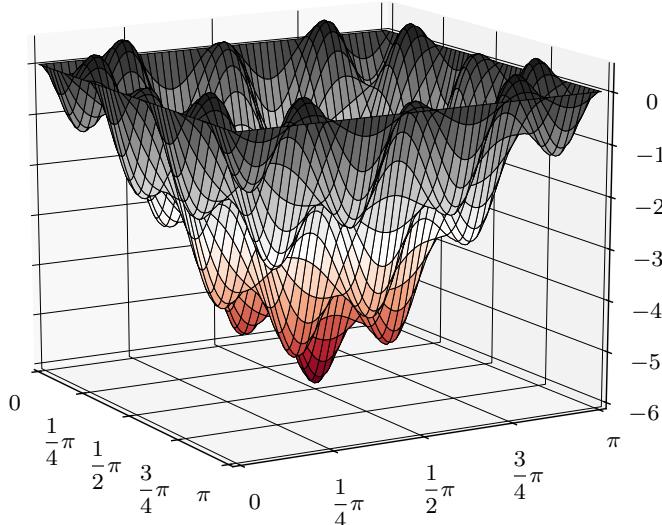
Rysunek 4.4: Podstawowy algorytm optymalizacji jednokryterialnej metodą roju cząstek PSO. Przypadek minimalizacji

4.3.2 Przykład teoretyczny

W celu weryfikacji stosowanej metody przygotowano przykład teoretyczny. Zastosowano wariant minimalizacji funkcji celu za pomocą metody PSO. Zaimplementowano algorytm PSO w języku Python. Do testu wybrano funkcję multimodalną przedstawioną w pracy (Tesch 2016) i daną wzorem:

$$f(x, y) = -5 \sin x \sin y - 5 \sin 7x \sin 7y \quad (4.4)$$

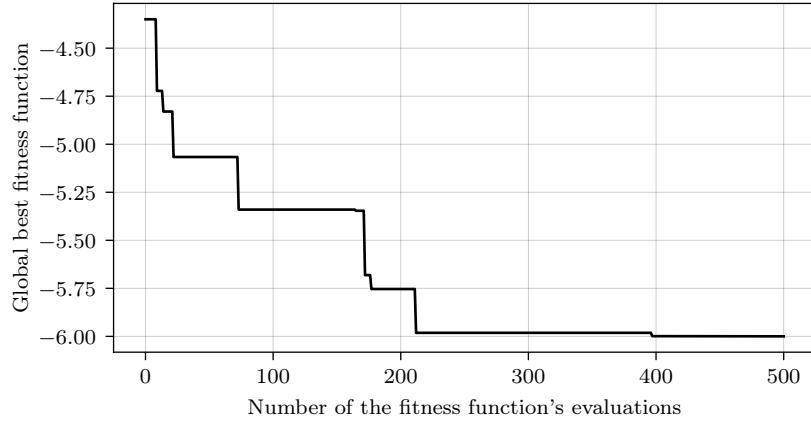
gdzie x, y tworzą wektor zmiennych projektowych, a wartość funkcji $f(x, y)$ jest funkcją celu. Funkcję zwizualizowano w przestrzeni 3D na rysunku 4.5. Podobnie jak w pracy źródłowej przedział dopuszczalny dla każdej zmiennej projektowej to $[0, \pi]$. Wartość minimalna funkcji w tej dziedzinie jest znana i wynosi $f_{\min} = -6$, dla punktu $(x, y) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.



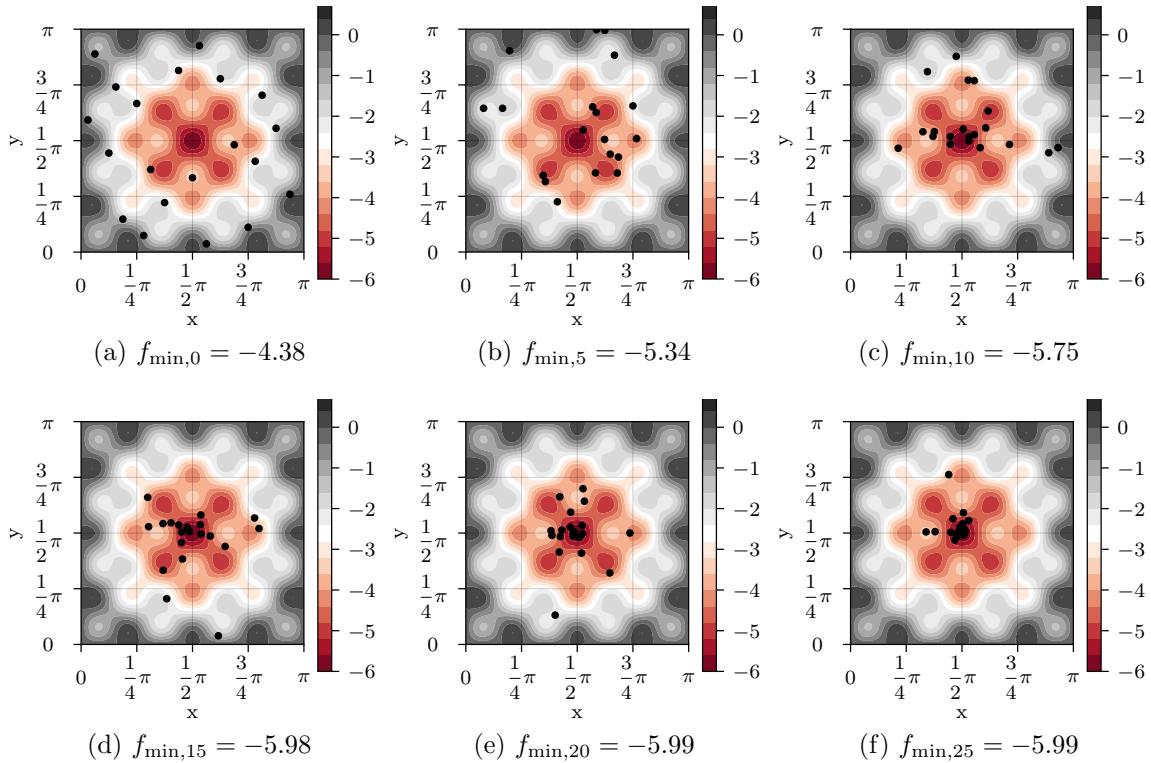
Rysunek 4.5: Wizualizacja funkcji testowej w przestrzeni trójwymiarowej

Wygenerowano populację złożoną z 20 części. Do generacji użyto wariant korzystający z sekwencji Haltona. Z uwagi na multimodalność funkcji celu zastosowano topologię z rodziny lbest - von Neumanna. Warunki brzegowe przyjęto typu niewidocznego. Parametry wektora prędkości (4.3) ustalone domyślnie równie: $\theta = 0.7968$, $\alpha = 1.4962$ oraz $\beta = 1.4962$. Zatrzymanie algorytmu nastąpiło po wykonaniu założonej liczby aktualizacji całego roju równej 25. W konsekwencji całkowita liczba ewaluacji funkcji celu przez cząstki wynosi $25 \cdot 20 = 500$. Na rysunku 4.6 zaprezentowano diagram poprawy najlepszego rozwiązania znalezionego przez rój. Na rysunku 4.7 pokazano 6 etapów z procesu poszukiwania przez rój minimum funkcji. Ostateczna znaleziona wartość minimum globalnego wynosi $f_{\min,25} = -5.99$. Wartość ta została osiągnięta po około 400 ewaluacjach funkcji i jest bardzo bliska znanemu minimum globalnemu. Warto nadmienić, że już po 215 ewaluacjach odnaleziona zostało rozwiązanie o funkcji celu wynoszącej $f = -5.98$. Wizualizacja położenia cząstek roju w kolejnych iteracjach pokazuje, że wraz z postępem algorytmu, cząstki z rozproszonego układu skupiają się konsekwentnie wokół lidera. Topologia von Neumanna spowalnia ten proces. Opóżnia to znalezienie precyzyjnego rozwiązania, ale obszar

dopuszczalny jest przeszukany dokładniej. Na kolejnych grafikach widać, że pomimo znalezienia punktu bliskiego teoretycznego minimum globalnego (Rys. 4.7b) wciąż pozostają cząstki, które eksplorują pozostały obszar. Na podstawie powyższego testu uznano, że zaimplementowany algorytm PSO działa poprawnie.



Rysunek 4.6: Diagram postępu roju cząstek w poszukiwaniu minimum globalnego funkcji testowej



Rysunek 4.7: Etapy rozwiązywania testowego problemu optymalizacji dwuwymiarowej za pomocą roju cząstek. Minimum globalne znalezione przez rój oznaczono przez $f_{\min,t}$, gdzie indeks t oznacza liczbę pełnych aktualizacji położenia roju. Za pomocą izomapy pokazano wartość funkcji celu na płaszczyźnie

4.4 Optymalizacja wielokryterialna

Jak wspomniano we wstępie rozdziału, rzeczywiste problemy inżynierskie rzadko sprowadzają się do jednego kryterium, którego optymalizacja dostarczy bezkompromisowo jedyne, idealne rozwiązanie. Najczęściej występuje kilka istotnych kryteriów stojących ze sobą w kontrze, które nie osiągają jednocześnie maksimum lub minimum dla tych samych wartości zmiennych projektowych. Jedna z metod radzenia sobie w takich przypadkach została już opisana i polega na liniowej kombinacji kryteriów, sprowadzając problem optymalizacji de facto do jednej funkcji celu. Wadą tego rozwiązania jest konieczność ustalenia skali ważności poszczególnych kryteriów jeszcze przed rozpoczęciem optymalizacji. Poza koniecznością ustalenia wag składników sumy, niekiedy trudno ustalić związki między zmiennymi projektowymi i kryteriami, a następnie sprowadzić wszystkie kryteria do jednego porównawczego, jakim jest na przykład koszt wykonania lub ilość materiału (Szymczak 1995). Inną metodą jest rozwiązanie problemu optymalizacji jako wielokryterialnego. Polega ona na jednoczesnej minimalizacji lub maksymalizacji więcej niż jednej funkcji celu. W konsekwencji zamiast pojedynczego optymalnego rozwiązania - jak to ma miejsce w przypadku optymalizacji jednokryterialnej - otrzymywany jest zestaw wielu rozwiązań. Jest to tak zwany zbiór Pareto, zawierający rozwiązania niezdominowane. Do wytłumaczenia powyższego zdania niezbędne jest przytoczenie kilku formalnych definicji (Coello Coello i Reyes-Sierra 2006).

Rozpatrzmy problem minimalizacji zestawu k funkcji celu $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ zależnych od D -wymiarowego wektora zmiennych projektowych \mathbf{x} :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})] \quad f_i : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, k \quad (4.5)$$

Dodatkowo niech zbiór \mathcal{N} jest zbiorem liczb naturalnych takich, że $\mathcal{N} = [1, \dots, D]$.

Definicja 1 (Dominacja Pareto)

Niech dwa wektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ są zdefiniowane w przestrzeni \mathbb{R}^D . W przypadku minimalizacji, wektor \mathbf{x}_1 dominuje nad wektorem \mathbf{x}_2 , jeżeli każdy element $x_{1,i}$ jest nie większy niż $x_{2,i}$ dla $i \in \mathcal{N}$ i istnieje taki element $x_{1,j}$, że $x_{1,j}$ jest mniejszy niż $x_{2,j}$ dla $j \in \mathcal{N}$. Dominację wektora \mathbf{x}_1 nad \mathbf{x}_2 oznacza się przez $\mathbf{x}_1 \prec \mathbf{x}_2$.

$$\bigvee_{i \in \mathcal{N}} x_{1,i} \leq x_{2,i} \wedge \exists_{j \in \mathcal{N}} x_{1,j} < x_{2,j} \quad (4.6)$$

Należy jednak nadmienić, że w kontekście optymalizacji wielokryterialnej, pojęcie dominacji dotyczy przestrzeni funkcji celu, a nie przestrzeni rozwiązań. Optymalny zbiór Pareto zawiera wszystkie rozwiązania \mathbf{x} w przestrzeni \mathbb{R}^D , dla których nie istnieje inny punkt dominujący w przestrzeni funkcji celu \mathbb{R}^k . Graficzną prezentację dominacji w sensie Pareto i Frontu Pareto przedstawiono na rysunku 4.8 dla przestrzeni dwóch funkcji celu.

Definicja 2 (Zbiór Pareto)

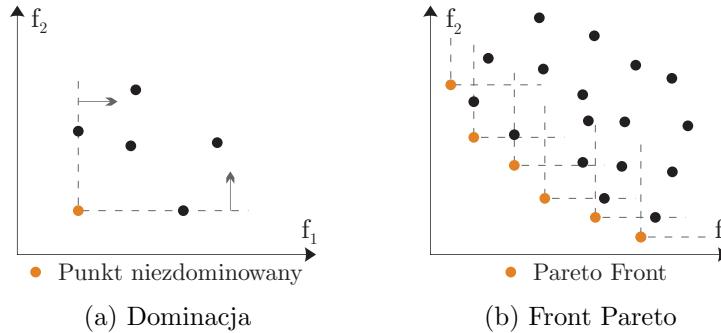
Zbiór Pareto \mathcal{PS} rozwiązania, jest zbiorem punktów \mathbf{x} , dla których wśród zestawu rozwiązań dopuszczalnych Ω nie istnieje inny punkt dominujący ze względu na wartość funkcji $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

$$\mathcal{PS} = \left\{ \mathbf{x}_j \in \Omega : \forall_{\mathbf{x} \in \Omega} \left(\exists_{i \in \mathcal{N}} f_i(\mathbf{x}) > f_i(\mathbf{x}_j) \vee \forall_{i \in \mathcal{N}} f_i(\mathbf{x}) \geq f_i(\mathbf{x}_j) \right) \right\} \quad (4.7)$$

Definicja 3 (Front Pareto)

Front Pareto $\mathcal{P}\mathcal{F}$ jest zbiorem punktów $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ w przestrzeni funkcji celu, wyznaczonych dla punktów \mathbf{x} należących do Zbioru Pareto $\mathcal{P}\mathcal{S}$.

$$\mathcal{P}\mathcal{F} = \left\{ \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^k : \mathbf{x} \in \mathcal{P}\mathcal{S} \right\} \quad (4.8)$$



Rysunek 4.8: Wizualizacja definicji dominacji i Frontu Pareto

Przyjmując powyższe definicje optymalizacja wielokryterialna sprowadza się więc do znalezienia wszystkich rozwiązań należących do Zbioru Pareto. W ogólności, rozwiązaniem problemów optymalizacji wielokryterialnej może być Front Pareto składający się z ogromnej lub nieskończonej liczby punktów. Algorytmy służące optymalizacji wielokryterialnej działają najczęściej iteracyjnie - jednym z przykładów będzie zastosowany w pracy zmodyfikowany algorytm PSO. Konsekwencją tego, w kolejnych iteracjach wyznaczane jest jedynie przybliżenie Frontu Pareto, reprezentowane przez skończony zestaw punktów niezdominowanych. Większość algorytmów wyposażonych jest w Archiwum, w którym przechowywane jest aktualne przybliżenie Frontu Pareto. Archiwum to ma najczęściej stałą, maksymalną objętość (Banach 2017). W trakcie działania algorytmu wyznaczane są wartości funkcji celu dla nowo wskazanych rozwiązań. Za wskazywanie kandydatów odpowiedzialny jest osobny mechanizm na przykład oparty na PSO. Następnie algorytm sprawdza wzajemną dominację między elementami Archiwum i nowym rozwiązaniem. W przypadku lepszego przybliżenia Frontu Pareto przez nowy punkt, archiwum jest aktualizowane. Jeśli zachodzi taka sytuacja, rozwiązania zdominowane przez nowy wynik są odrzucane, a nowy rezultat jest dodawany do Archiwum. Algorytm powinien gwarantować coraz lepszą jakość rozwiązania. W porównaniu do optymalizacji jednokryterialnej, określenie jakości rozwiązania optymalizacji wielokryterialnej jest znacznie bardziej złożone. Zitzler, Deb i Thiele 2000 podają następujące cele jakie powinny być postawione w problemie optymalizacji wielokryterialnej:

- odległość pomiędzy wyznaczonym rozwiązaniem przybliżonym, a rzeczywistym Frontem Pareto powinna być jak najmniejsza,
- dystrybucja wyznaczonych punktów Frontu Pareto powinna być odpowiednia - najczęściej równomierna,
- liczba wyznaczonych punktów Frontu Pareto powinna być jak największa.

Banach 2017 wskazuje, że warto by algorytm optymalizacji zwracał również uwagę na dobre rozmieszczenie rozwiązań w Zbiorze Pareto, a nie jedynie Frontie Pareto. Wynika to z tego, że wartość funkcji celu może być identyczna dla bardzo

oddalonych od siebie rozwiązań w przestrzeni rozwiązań. Taka sytuacja możliwa jest w przypadku okresowych funkcji celu.

W pracy zawarto jedynie podstawowe informacje dotyczące jednego z podejść do rozwiązywania problemów optymalizacji wielokryterialnej. Szerszy przegląd i porównanie metod dostępne jest w literaturze przedmiotu: (Zitzler, Deb i Thiele 2000; Elbeltagi, Hegazy i Grierson 2005; Abido 2006; Coello, Lamont i Van Veldhuizen 2007; Lalwani i in. 2013; Zaman i in. 2019).

4.5 Optymalizacja wielokryterialna rojem częstek

Algorytm służący optymalizacji wielokryterialnej rojem częstek (*eng. Multi-Objective Particle Swarm Optimization (MOPSO)*) jest modyfikacją oryginalnego algorytmu PSO. Pierwsza publikacja przedstawiająca ten zamysł ukazała się w 1999 roku (More i Chapman 1999). Następnie nastąpił gwałtowny przyrost prac wprowadzających nowe strategie wyboru liderów, topologie, systemy sprawdzania jakości rozwiązania lub modyfikujące istniejące elementy algorytmu. Szczegółowe podsumowanie prac nad wielokryterialną wersją algorytmu PSO do 2006 przedstawił (Coello Coello i Reyes-Sierra 2006). Z punktu widzenia algorytmu PSO, występują dwa dodatkowe aspekty, które są wyzwaniem w przypadku wersji optymalizacji wielokryterialnej (Pulido 2005):

- wybór i aktualizacja lidera roju spośród wielu kandydatów,
- wskazanie nowych rozwiązań aby zachować dobrą dystrybucję Frontu Pareto.

Wybór lidera roju nie jest rzeczą oczywistą w kontekście algorytmu PSO i musi ulec modyfikacji. Wynika to z większej od jedności liczby równie dobrych rozwiązań optymalizacji. Podstawowym i najprostszym podejściem przy doborze lidera roju jest wybór spośród wszystkich niezdominowanych rozwiązań. Jednakże zupełnie losowy wybór lidera z zestawu niezdominowanych rozwiązań może prowadzić do utraty odpowiedniej dystrybucji rozwiązań, która jest jednym z celów dobrego algorytmu optymalizacji wielokryterialnej. Istnieje wiele podejść pozwalających na ocenę jakości rozwiązania i w konsekwencji jego wyboru jako lidera. Popularnym jest ocena zagęszczenia rozwiązań niezdominowanych w przestrzeni funkcji celu. Aby zachować równomierność Frontu Pareto predestynowane do pozycji lidera są częstki, występujące w małym zagęszczeniu. Wśród najpopularniejszych metod, zaproponowano pomiar tego zagęszczenia wprost przez ocenę odległości między sąsiednimi częstkami (Deb, Pratap i in. 2002) i przez bardziej złożone funkcje rdzenia (Deb i David E Goldberg 1989). Inne rozwiązania zostały zebrane i szerzej opisane w pracy (Coello Coello i Reyes-Sierra 2006).

We ogólnym opisie podstaw optymalizacji wielokryterialnej opisano zbiór przechowywanych rozwiązań niezdominowanych jako Archiwum. Ma ono za cel przechować niezdominowane rozwiązania w trakcie całego procesu optymalizacji i ostatecznie może służyć jako rezultat końcowy. Oczywistym rozwiązaniem jest przechowywanie wszystkich otrzymanych wyników niezdominowanych, aktualizując je w trakcie przebiegu algorytmu. Aktualizacja musi zapewnić uwzględnienie nowych niezdominowanych rozwiązań w archiwum i usunięcie tych, które zostały zdominowane przez nowe częstki. Jednakże przechowywanie wszystkich wyników wiąże się z dużą złożonością obliczeniową aktualizacji. Aktualizacja musi być wykonywana po

każdym przesunięciu wszystkich cząstek roku, a jej koszt rośnie kwadratowo wraz ze wzrostem liczebności roju i liniowo z liczebnością zmiennych decyzyjnych. Jak zasugerowano wcześniej, z tego względu archiwum najczęściej jest ograniczane do stałej, maksymalnej objętości (Coello, Lamont i Van Veldhuizen 2007). Przykładowe metody pozwalające na selekcję odrzucanych z archiwum elementów zostały opisane w (Zitzler i Thiele 1999; Knowles i Corne 2000).

Wybór nowych kandydatów

4.5.1 Przykład teoretyczny

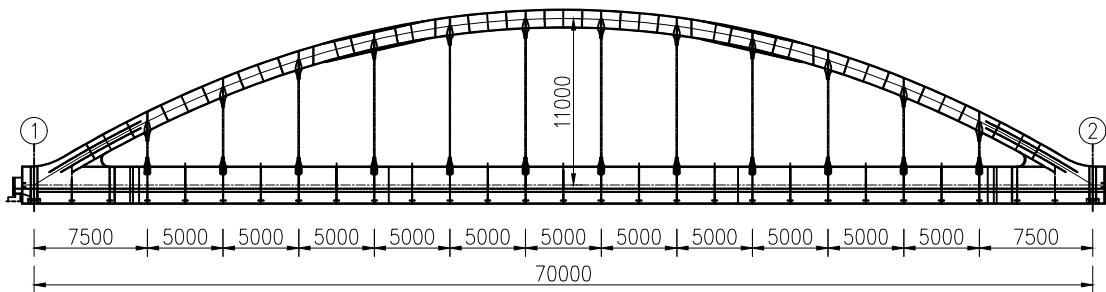
Rozdział 5

Wiadukt WK2 w ciągu Pomorskiej Kolei Metropolitalnej

5.1 Charakterystyka obiektu

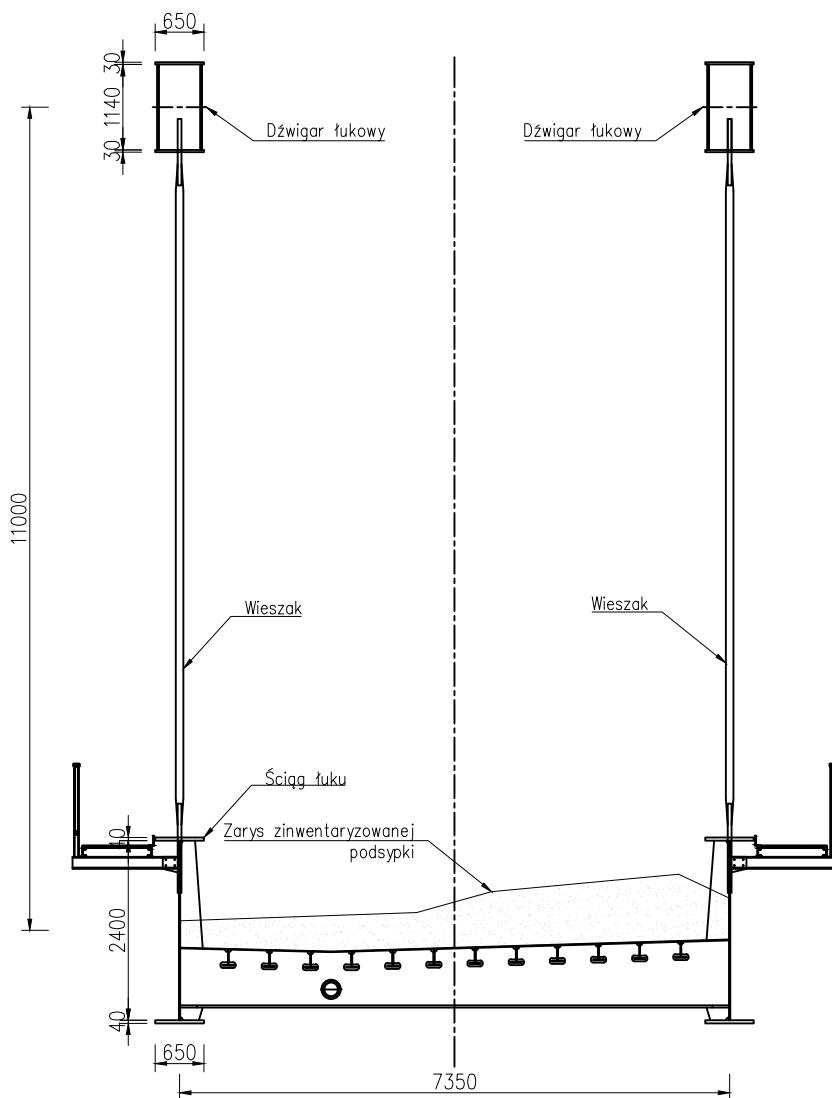
Obiekt badawczy stanowi kolejowy wiadukt łukowy w ciągu linii Pomorskiej Kolei Metropolitalnej w km 1+696,02. Przęsło wiaduktu stanowi stalowy ustój łukowy z jazdą dołem. Widok z boku na konstrukcję stalową wiaduktu pokazano na rysunkach 5.1. Główne wymiary charakteryzujące konstrukcję to:

- rozpiętość teoretyczna: $L_t = 70.00\text{m}$,
- długość całkowita: $L_c = 71,60\text{m}$,
- wysokość w kluczu: $H = 11.00\text{m}$,
- rozstaw osiowy dźwigarów: $B_t = 7.35\text{m}$,
- szerokość całkowita: $B_c = 10.21\text{m}$.



Rysunek 5.1: Widok z boku na konstrukcję stalową dźwigara łukowego wiaduktu WK3

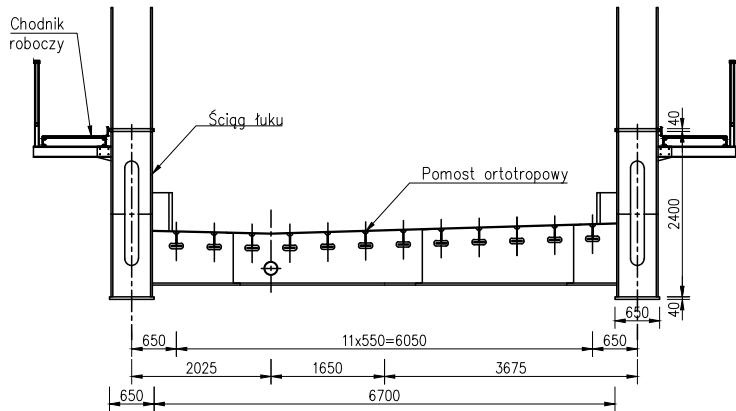
Przekrój poprzeczny dźwigarów łukowych zaprojektowano jako skrzynkowy (rys. 5.2). Pomost wykonano jako ortotropowy, z blachy wzmocnionej żebrami podłużnymi i poprzecznymi o przekroju teowym. Poprzecznice rozmieszczone w rozstawie 2.5 m. Ściąg łuku stanowią belki dwuteowe, po jednej dla każdego dźwigara łukowego. Przekrój ściągu zmienia się z dwuteowego na skrzynkowy w strefie podporowej. Na rysunku 5.3 przedstawiono przekrój poprzeczny pomostu i ściągu w strefie podporowej.



Rysunek 5.2: Przekrój poprzeczny konstrukcji stalowej wiaduktu WK2 w środku rozpiętości

W zrealizowanym wariantie pomost został podwieszony do łuku za pomocą prętowych, prostych wieszaków o średnicy 100 mm. Po każdej ze stron zamontowano 12 wieszaków w rozstawie co 5 m. Wieszaki zostały połączone z dźwigarem i ściągiem sztywnym połączeniem spawanym. Rzeczywisty widok zrealizowanego przęsła pokazano na rysunku 5.4, detale konstrukcyjne w obrębie strefy podporowej na rysunku 5.5, a połączenie wieszaka ze ściągiem na rysunku 5.6.

Na obiekcie po wybudowaniu przeprowadzono badania odbiorcze. Próbne obciążenia odbyły się w dniu 14.04.2015 i zostały przeprowadzone przez zespół naukowców z Politechniki Śląskiej i Politechniki Gdańskiej (Łaziński i in. 2015). Wykonano badania statyczne i dynamiczne. Wyniki jednych i drugich pomiarów posłużą jako elementy kalibracji modelu lub spełnią rolę punktu odniesienia dla wyników badań zrealizowanych w ramach tej pracy. W ramach pomiarów statycznych zrealizowano dwa interesujące, z punktu widzenia tej pracy, ustawienia obciążenia. Ustawienie U1 z obciążeniem zorientowanym symetrycznie na obiekcie oraz ustawienie U2 z obciążeniem wywołującym maksymalne ugięcia w 1/4 rozpiętości przęsła. Pomiary



Rysunek 5.3: Przekrój poprzeczny przez pomost w strefie podporowej wiaduktu WK2



Rysunek 5.4: Widok od strony lotniska na wiadukt WK2

przemieszczeń wykonywano w 6 punktach zlokalizowanych w 1/4, 1/2 i 3/4 rozpiętości przesła, po obu jego stronach. Czujniki zamocowano do konstrukcji w osiach ściągów, na dolnych lub górnych pasach. Obciążenie statyczne stanowiły dwie lokomotywy spalinowe typu: SM-48 i BR232. Pomierzone ugięcia statyczne zostaną użyte jako dodatkowe kryterium kalibracji modelu numerycznego. W ramach badań dynamicznych mierzono przyspieszenia konstrukcji po wymuszeniu obciążeniem impulsowym. Impuls generowano przez upadek jednej osi koparki dwudrogowej i zeskóków drezyny z progu. Na postawie przebiegów drgań swobodnych zidentyfikowano częstotliwości drgań własnych przesła i towarzyszące im tłumienia. Do identyfikacji użyto algorytmu ERA. Zidentyfikowane częstotliwości drgań i tłumienia przesła posłużą do porównania z wynikami badań przeprowadzonymi w ramach tej pracy.



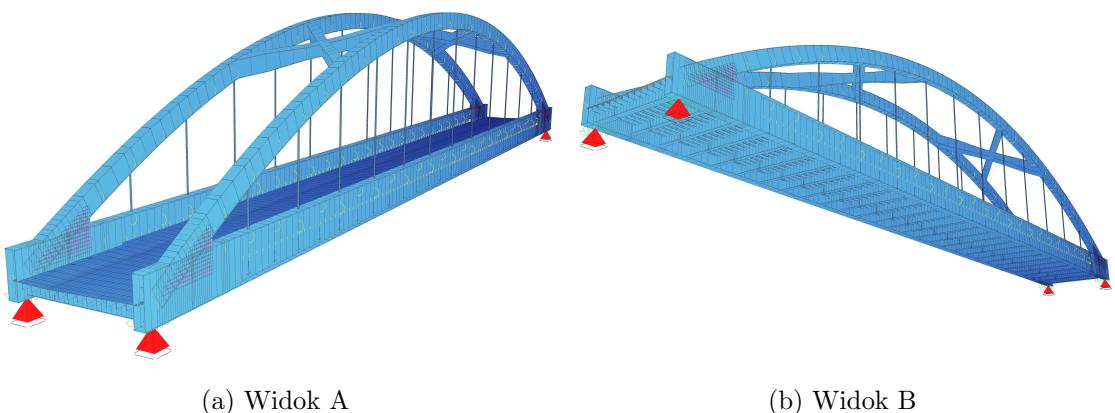
Rysunek 5.5: Szczegóły konstrukcyjne w obrębie połączenia łuku ze ściągiem



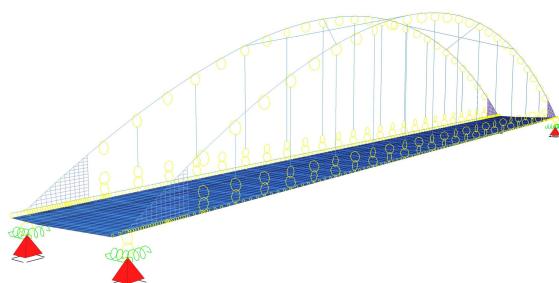
Rysunek 5.6: Detal połączenia wieszaka łuku z pomostem

5.2 Budowa modelu numerycznego

Na potrzeby analiz numerycznych zbudowano model MES w środowisku SOFiSTiK (rys. 5.7). Model przestrzenny składa się kilku rodzajów elementów skończonych. Z jednowymiarowych elementów belkowych wykonano łuki, stężenia, belki ściągu, wzmocnienia wezgłowii i żebra pomostu ortotropowego. Z elementów kratowych stworzono wieszaki. Blachę pomostu wykonano z czterowęzłowych elementów powłokowych. Połączenia pomiędzy końcami wieszaków i osiami łuku oraz ściągu zrealizowano przez połączenia kinematyczne translacji i rotacji węzłów. Podparcia pionowe w miejscach łożysk mostu zrealizowano za pomocą sztywnych więzów węzłów. Nie zablokowano przesuwów podłużnych i poprzecznych za pomocą blokady przemieszczeń. Zamiast tego na obu kierunkach zamocowano elastyczne elementy o bardzo dużej sztywności. Dostosowanie do istniejących warunków łożyskowania opisane zostało w dalszej części rozdziału. Usztywnienia wezgłowii zamodelowano za pomocą rusztu elementów belkowych o przekroju składającym się z dwóch blach odsuniętych od siebie na szerokość przekroju skrzynkowego łuku. Elementy strukturalne konstrukcji (takie jak ściągi, pomost, dźwigary łukowe, elementy podparcia itd.) podzielono w modelu na grupy pozwalające odnosić się do nich jako całości. Przekroje elementów belkowych przyjęto zgodnie z dostępną dokumentacją (!!). Wymiary przekrojów zmiennych po długości interpolowane liniowo. Widoczne na rysunku (5.8) dodatkowe połączenia kinematyczne są przygotowaniem dla możliwości podłączenia innych konfiguracji wieszaków.

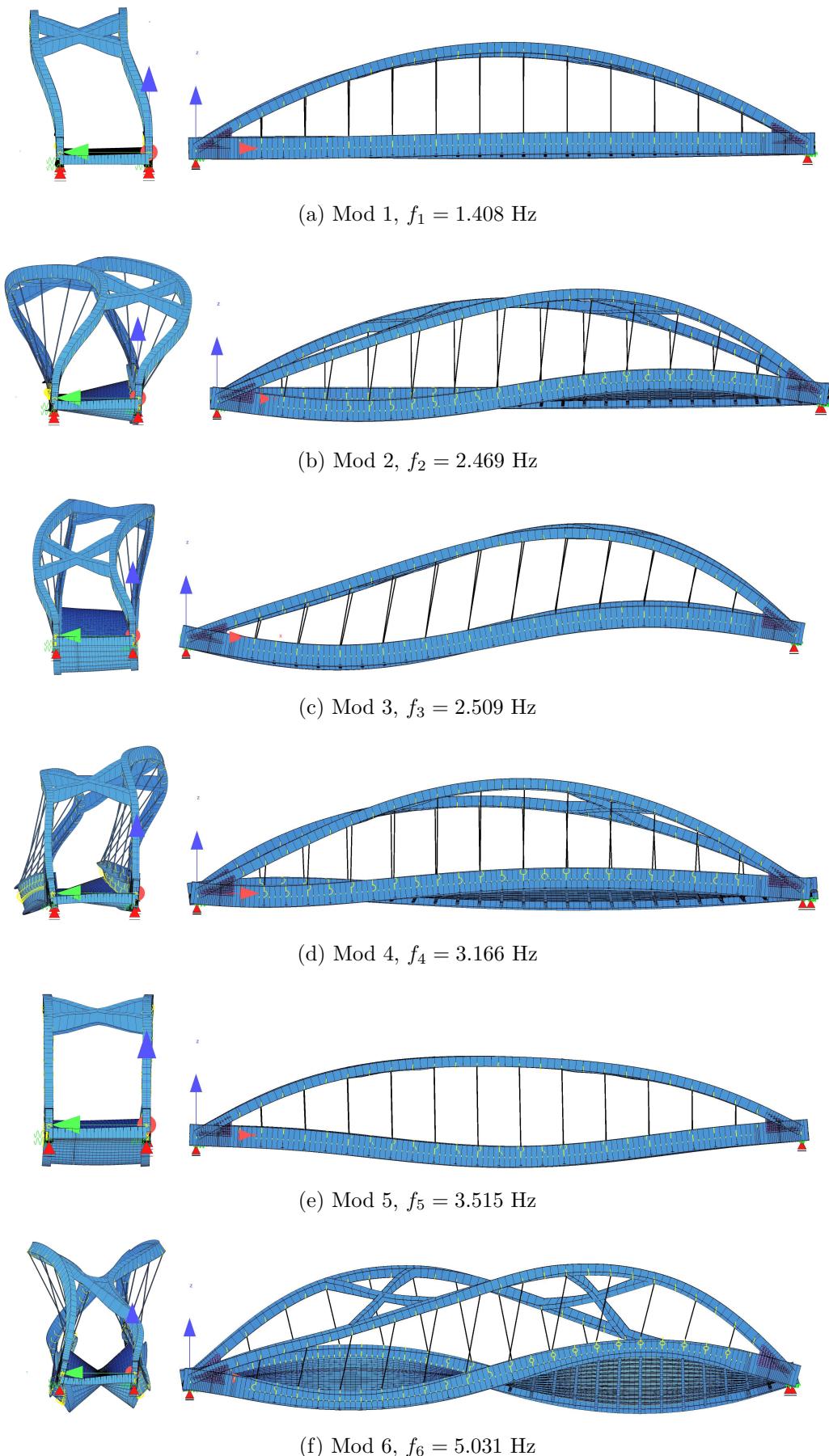


Rysunek 5.7: PODMIENIC NA RZECZYWISTE WYMIARY KONSTRUKCJI!!!!!!
Wizualizacja przestrzennego modelu numerycznego wiaduktu WK2 Pomorskiej
Kolei Metropolitalnej

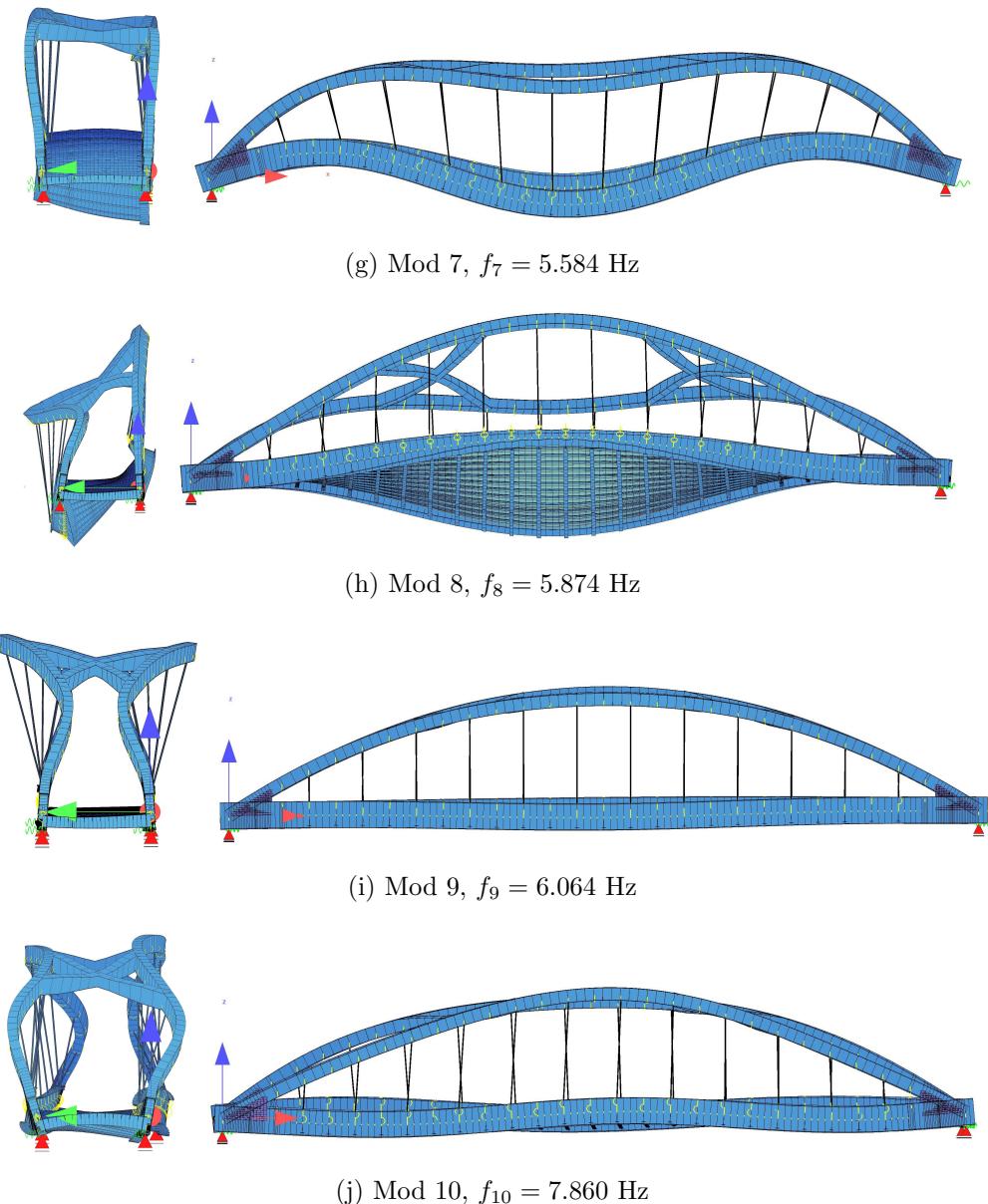


Rysunek 5.8: Schemat statyczny modelu numerycznego wiaduktu WK2 Pomorskiej
Kolei Metropolitalnej

Obciążenie ciężarem własnym konstrukcji zostało wygenerowane na podstawie ciężarów wprowadzonych przekrojów elementów liniowych bądź grubości elementów powłokowych. Dodatkowe elementy takie jak przepony i zakotwienia wieszaków dodane zostały jako obciążenia węzłowe. Osobny przypadek obciążenia stanowi pomost roboczy dodany jako ekwiwalentne obciążenie węzłowe i momenty zginające. Ostatnim obciążeniem stałym jest ciężar tłucznia. Z uwagi na ułożenie toru po łuku w planie, rozkład tłucznia na obiekcie nie jest regularną, symetryczną bryłą. Dostępna dokumentacja obiektu nie dostarcza dokładnych informacji o ułożeniu podsypki na pomoście. Podsypka została w prosty sposób zinwentaryzowana przez pomiar grubości w niektórych punktach charakterystycznych. Na rysunku 5.2 zaprezentowano zinwentaryzowany układ tłucznia w przekroju przesłowym. Zastosowana metoda pomiaru objętości tłucznia nie jest dokładna i na pewno nie odzwierciedla realnego rozkładu ciężaru podsypki na obiekcie. Z tego względu podzielono obciążenie tłucznem na dwa osobne przypadki: równomiernie rozłożone obciążenie na całym pomoście i obciążenie równomierne o szerokości (!!!) usytuowane wzdłuż osi toru. Wartość obciążenia tłucznem przyjęto z normy (!!!).



Rysunek 5.9: Postaci i częstotliwości drgań własnych wiaduktu WK2 - Model wstępny



Rysunek 5.9: Postaci i częstotliwości drgań własnych wiaduktu WK2 - Model wstępny. Kont.

5.3 Identyfikacja modalna wiaduktu WK2

Przed przystąpieniem do procesu optymalizacji układu statycznego dźwigara łukowego model należało skalibrować. Z uwagi na zakres planowanych analiz kluczowe dla analizy dynamicznej jest aby model w odpowiedni sposób odzwierciedlał rzeczywistość w zakresie parametrów modalnych. Mając do dyspozycji rzeczywisty obiekt, zdecydowano o wykonaniu badań terenowych, które pozwolą na identyfikację częstotliwości i postaci drgań własnych oraz towarzyszącego im tłumienia. Obiekt jest w ciągłej eksploatacji. Z tych względów zdecydowano o wykorzystaniu Operacyjnej Analizy Modalnej do identyfikacji parametrów modalnych przesła. Przed przystąpieniem do badań przygotowano plan zawierający kluczowe punkty, bez których spełnienia badania mogą zakończyć się niepowodzeniem lub wyniki mogą być trudne

w interpretacji. Brincker i C. E. Ventura 2015 sporządzili listę zaleceń, które należy wypełnić w trakcie przygotowań eksperymentu OMA aby zakończył się on powodzeniem. Podobne zalecenia w swojej pracy sformułował Poprawa 2018. W kontekście założonych celów i wybranego obiektu badawczego główne z nich to:

- opracowanie strategii prowadzenia badań i akwizycji danych,
- uzgodnienia administracyjne - wstęp na obiekt i możliwość prowadzenia badań pod ruchem,
- dobranie sprzętu pomiarowego.

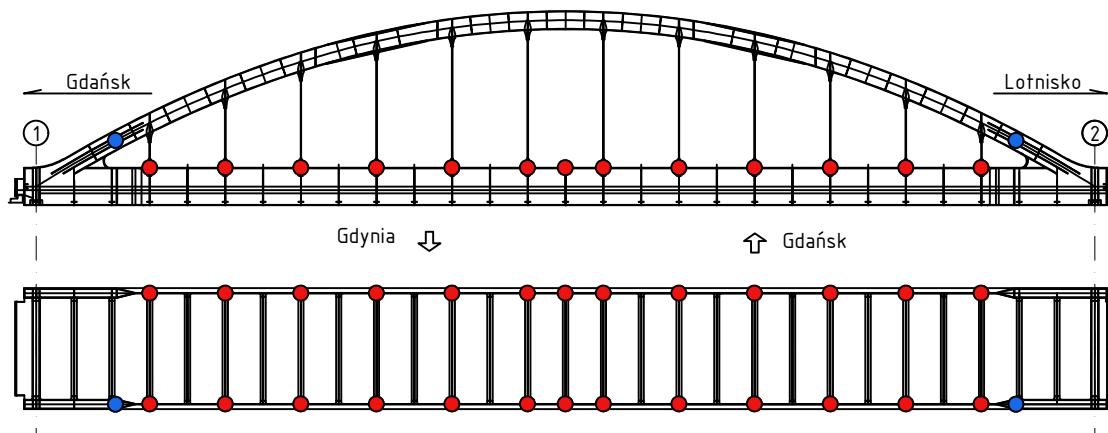
Zarządca obiektu zezwolił na prowadzenie badań pod ruchem w towarzystwie sygnalisty. Średnie natężenie ruchu na obiekcie w trakcie badań to około 1 przejazd na 30 min. Wybór sprzętu pomiarowego ograniczał się do zastosowania posiadanego sprzętu do akwizycji przyspieszeń opisanego w punkcie (!!). Najistotniejszym punktem przygotowania badań było opracowanie strategii badań. Według Brincker i C. E. Ventura 2015 plan badań OMA powinien zawierać następujące punkty:

- sporzązoną siatkę pomiarową,
- kolejność ustawień czujników w seriach pomiarowych,
- określenie liczby osób potrzebnych do przeprowadzenia eksperymentu,
- zapewnienie bezpieczeństwa w trakcie badań,
- określenie parametrów akwizycji danych (częstotliwość próbkowania, długość pomiarów, liczba powtórzeń serii pomiarowych itd.)

Wybór punktów pomiarowych

Dostępny system pomiarowy składał się z dwóch akcelerometrów 3-osiowych i z dwóch czujników 1-osiowych. Mając do dyspozycji ograniczoną liczbę jednocześnie mierzonych punktów należało przeprowadzić symulację najlepszego rozmieszczenia punktów pomiarowych na obiekcie. Przykłady metod pozwalających na optymalne rozmieszczenie punktów pomiarowych w analizach dynamicznych zaprezentowano w literaturze i najczęściej opierają się one na wyznaczeniu reprezentatywnego wskaźnika, dzięki któremu da się porównać różne ustawienia. Między innymi Kammer 1991; Papadopoulos i Garcia 1998 zaproponowali użycie Modalnej Energii Kinetycznej (*eng. Modal Kinetic Energy*), Udwadia 1994 macierzy informacyjnej Fisher (*eng. Fisher Information Matrix*), a Penny, Friswell i Garvey 1994; Randall J. Allemand 2003 macierzy MAC dla zestawu modów. J. Zhang i in. 2017 przedstawili zwięzłe zestawienie powyższych metod i zaproponowali opcję optymalizującą lokalizację punktów pomiarowych przy wielu ustawieniach pomiarowych, zarówno dla punktów pomiarowych jak i punktów referencyjnych. Autorzy zwracają również uwagę, że przy wielu punktach pomiaru ścisła ocena wszystkich możliwych ustawień jest wymagająca obliczeniowo bądź niemożliwa. Z tego względu stosowane są algorytmy heurystyczne bądź meta-heurystyczne.

W niniejszej pracy zastosowano metodę wykorzystującą kryterium MAC (Penny, Friswell i Garvey 1994). Podobne postępowanie przedstawił w swojej pracy Poprawa 2018. Polega ono na wyznaczeniu teoretycznych postaci drgań własnych z dostępnego modelu MES. Dla zbioru wszystkich możliwych położen czujników odczytywane są przemieszczenia znormalizowane danej postaci drgań. Ze zbioru możliwych położen wybierane są punkty, gdzie umieszczone mają zostać czujniki. Posiłkując się opisem postaci drgań w wybranych punktach tworzona jest macierz MAC. Każda postać

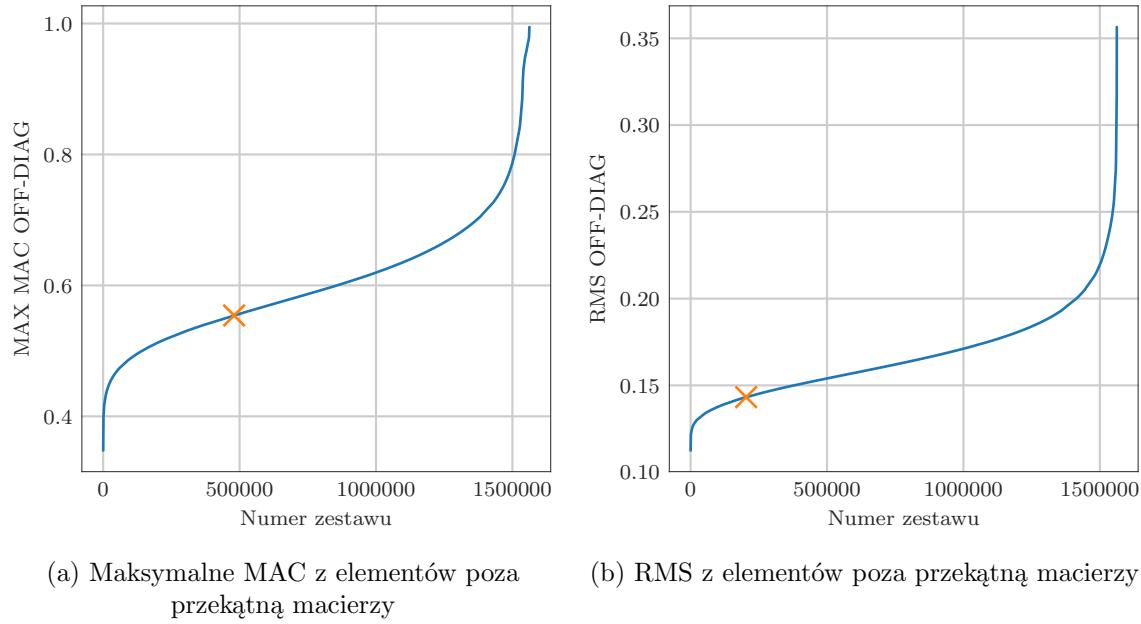


Rysunek 5.10: Lokalizacje dozwolone przy doborze punktów pomiarowych

porównuje się ze wszystkimi innymi i z samą sobą. W ten sposób na przekątnej macierzy pojawiają się wartości równe 1 co oznacza oczywiste, idealne dopasowanie według kryterium MAC dla równych wektorów. Poza przekątną, wartości MAC mieszczą się w przedziale 0 - 1. Celem analizy jest dobór punktów pomiarowych tak by poza przekątną wartości były możliwie małe. Przy małym dopasowaniu, postaci będą miały szansę być zidentyfikowane jednoznacznie przy mocno ograniczonej liczbie punktów pomiarowych i bliskim położeniu modów w dziedzinie częstotliwości. Dla każdego rozwiązania należy wyznaczyć wskaźnik, który pozwala ocenić zbiór punktów względem innych. Penny, Friswell i Garvey 1994 zaproponowali w jednym z wariantów maksymalną wartość MAC wśród elementów poza przekątną macierzy oraz średnią kwadratową (RMS)¹ ze wszystkich elementów powyżej przekątnej macierzy MAC. Im niższa wartość maksymalna i im niższa średnia kwadratowa tym lepiej.

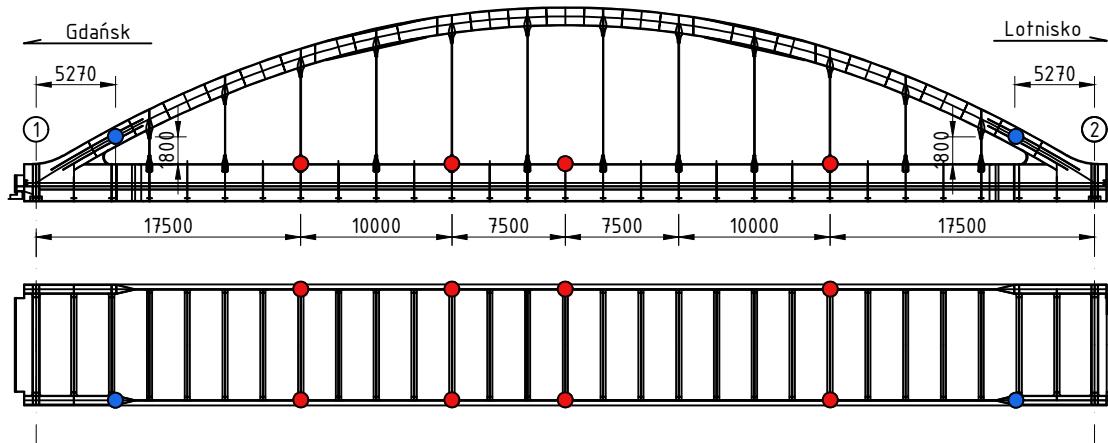
Z uwagi na ograniczony czas dostępu do obiektu ustalone, że całość badań musi być zrealizowana w 3 ustawieniach dostępnych czujników. W przypadku wiaduktu, akcelerometry 3-osiowe potraktowano jako 2-osiowe. Odrzucono pomiar wzdłuż osi podłużnej obiektu jako nieistotny. W tej sytuacji jeden czujnik 2-osiowy posłużył jako punkt referencyjny mierzący drgania pionowe i poprzeczne. Pozostałe 4 punkty pomiarowe mogły być zmieniane w poszczególnych ustawieniach. Ostatecznie przy trzech ustawieniach możliwy był pomiar w 14 punktach pomiarowych ($6 + 4 + 4$) w tym 10 na kierunku pionowym Z i 4 na kierunku poprzecznym Y . Kolejnym koniecznym przy doborze siatki pomiarowej ograniczeniem było to, że dostęp do konstrukcji był możliwy jedynie z pomostu. Z uwagi na występowanie modów związkanych głównie z bocznym ruchem łuków (rys. 5.9) narzucono, że 4 punkty pomiarowe $2Yi2Z$ zostaną zamocowane bezpośrednio na łuku. Uwzględniając powyższe założenia pozostało do dyspozycji 8 punktów pomiarowych Z i 2 punkty pomiarowe Y . Punkty Y są związane z Z w ramach obudowy czujnika 2-osiowego, zaniechano więc doboru lokalizacji z uwagi na punkty Y i skupiono się tylko na kierunku Z . Na rysunku 5.10 kolorem czerwonym zaznaczono zbiór wszystkich dozwolonych do wyboru punktów. Kolorem niebieskim zaznaczono punkty zarezerwowane dla czujników mocowanych do łuku. Punków czerwonych jest 26 i należy z nich wybrać 8. Wykonano kombina-

¹ Średnią kwadratową wyznaczono zgodnie z definicją z równania: $x_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2}{n}}$



Rysunek 5.11: Wskaźniki oceniające jakość wyboru zestawu punktów pomiarowych dla wszystkich analizowanych kombinacji

cją bez powtórzeń i uzyskano 1562275 zestawów lokalizacji czujników. Dla każdego zestawu wyznaczono macierz MAC uwzględniając 10 pierwszych modów z modelu MES, a następnie RMS i maksymalny element każdej macierzy. Zestawy posortowano względem każdego parametru i wyniki przedstawiono graficznie na rysunku 5.11. Logicznym wyborem punktów byłoby wzięcie pod uwagę ustawień charakteryzujących się minimalną wartością jednego z parametrów. Jednakże prowadząc badania terenowe należy brać pod uwagę czynniki takie jak ułożenie kabli, możliwości systemu pomiarowego do łączenia punktów pomiarowych, przejście przez czynną linię kolejową. Z tego powodu zaproponowano układ czujników intuicyjnie pozwalający na dobrą identyfikację modalną, a jednocześnie gwarantujący komfort w montażu i kontroli przez jedną osobę. Wybrane punkty pokazano na rysunku 5.12. Dla wybranego zestawu punktów wyznaczono macierz MAC (Rys. 5.13) i wskaźniki: RMS i maksymalną wartość MAC. Wskaźniki zaznaczono na rysunku 5.11 pomarańczowym krzyżykiem, pokazując jakość dokonanego wyboru wśród wszystkich możliwych. Na podstawie wartości RMS można stwierdzić, że narzucony wariant charakteryzuje się niską wartością parametru i jego dalsze optymalizowanie kosztem utrudnień w trakcie pomiarów, ocenione jako nieopłacalne. Należy również zaznaczyć, że wartość RMS elementów poza przekątną macierzy MAC mierzy jedynie średnią zależność wszystkich par wektorów. Nie uwzględnia wielkości amplitud poszczególnych modów w punktach i ich znaczenia na ostateczne zachowanie dynamiczne kładki. W przedmiotowym przypadku zamocowano punkty pomiarowe w miejscach, gdzie kryterium RMS jest jednocześnie niskie (Rys. 5.11) i przemieszczenia modalne dla głównych modów giętnych i skrętnych pomostu są bliskie ekstremalnym (Rys. 5.9).



Rysunek 5.12: Wybrane do badań punkty pomiarowe



Rysunek 5.13: Macierz MAC dla pierwszych dziesięciu wektorów postaci drgań własnych, odczytanych z modelu dla wybranych punktów pomiarowych

Parametry akwizycji danych

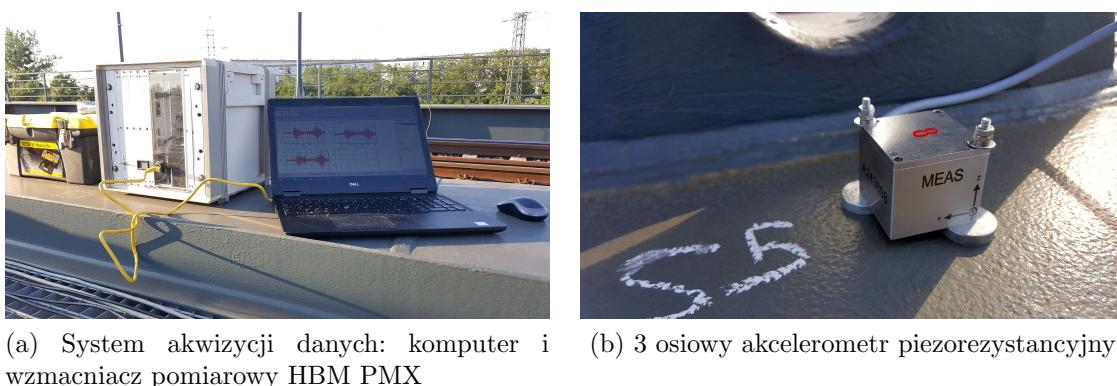
Przed przystąpieniem do badań wyznaczono podstawowe parametry pozwalające na przeprowadzenie poprawnego eksperymentu OMA. Posługując się formułami (3.93 - 3.93) określono minimalną częstotliwość próbkowania jako $f_{s,min} = 2.4 \cdot 8 = 19.2\text{Hz}$ i minimalny czas prowadzenia pomiarów w jednym ustawieniu jako $T_{min} = \frac{10}{0.005 \cdot 1.4} = 1429\text{s} = 23.8\text{min}$. Ostatecznie zdecydowano o prowadzeniu pomiarów ze znacznym nadpróbkowaniem o częstotliwości $f_s = 300\text{Hz}$ i w seriach czasowych 20 do 30 min.

Przebieg badań

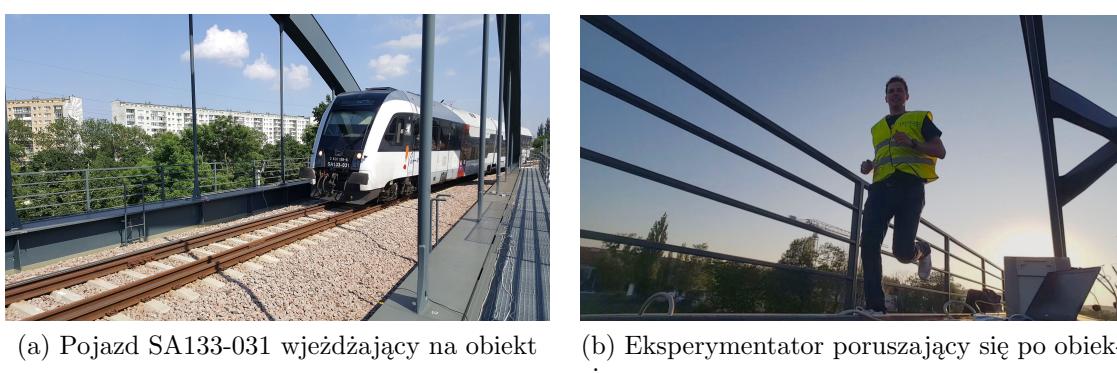
Badania na obiekcie przeprowadzone zostały w dniu 17 czerwca 2019 r. Wykorzystano zestaw pomiarowy opisany w rozdziale 3.4.4. Zestaw w trakcie badań pokazano na rysunku 5.14. Pomiary wykonano zgodnie z planem. Akwizycję danych podzielono na 3 ustawienia. Akwizycja danych w każdym ustawieniu wynosiła od 20 do 30 min. Punkty pomiarowe w poszczególnych ustawieniach oznaczono na rysunku 5.12. Warunki atmosferyczne były stabilne: brak odczuwalnych podmuchów wiatru, silne operowanie słońca.

Środki obciążeniowe

W trakcie badań na obiekcie odbywał się standardowy dla PKM ruch pociągów pasażerskich. Pomiędzy przejazdami, w asyście sygnalisty eksperymentator przemieszczał się biegając i podskakując po obiekcie. 5.15. Porównanie amplitud drgań bez wymuszenia i z dodatkowym wymuszeniem pokazano na rysunku ???. Z punktu widzenia pomiaru drgań środowiskowych należy zwrócić uwagę na pomniejsze oddziaływanie występujące przy braku obciążeń kolejowych na obiekcie. Pod obiektem odbywał się ruch w ciągu magistralnej linii kolejowej nr 202. W odległości około 150 m od wiaduktu, niemal równolegle przebiega główna arteria Gdańsk - aleja Grunwaldzka, na której ciągu dnia panuje stały, znaczny ruch samochodowy. W podobnej odległości od obiektu panowały prace budowlane z wykorzystaniem ciężkiego sprzętu.



Rysunek 5.14: System pomiarowy użyty do identyfikacji modalnej wiaduktu WK2



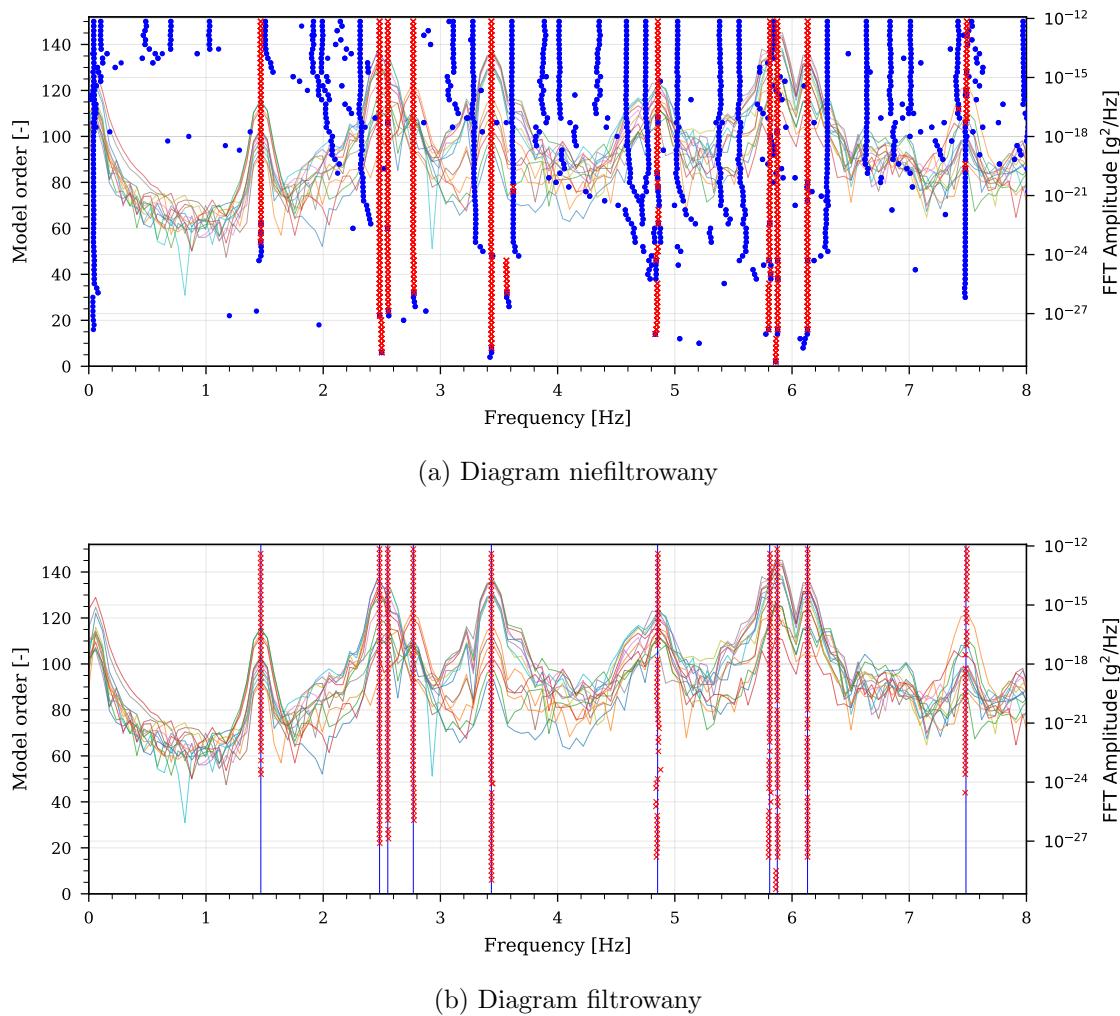
Rysunek 5.15: Obciążenia w trakcie badań obiektu WK-2

Analiza i rezultaty badań

Zarejestrowane sygnały poddano analizie OMA metodą NExT-ERA. W procesie iteracyjnym przyjęto parametry metody pozwalające uzyskać stabilne rozwiązania. Uwzględniając wyniki z analizy modalnej modelu teoretycznego (rys. 5.9), stwierdzono że niektóre częstotliwości drgań własnych są bardzo bliskie. Caicedo 2011 w takiej sytuacji proponuje obniżenie częstotliwości próbkowania sygnału. Zabieg ten zwiększa szanse na zidentyfikowanie blisko położonych modów przez uwzględnienie w analizie mniejszego, całkowitego zakresu częstotliwości. Zastosowano resampling do próbkowania 30Hz. Szerokość okna FFT przy obliczaniu funkcji korelacji przyjęto jako 1024. Wybrane okno przy zmniejszonej częstotliwości próbkowania pozwoliło uzyskać funkcje korelacji o długości około 17s. Wymiary macierzy Hankela przyjęto jako $r = 110$ i $s = 150$. Uwzględniono w ten sposób w macierzy Hankela niespełna 9s odpowiedzi impulsowej konstrukcji danej funkcjami korelacji. Taki czas pozwala na uwzględnienie kilkunastu okresów drgań modu o najniższej częstotliwości. Na rysunku 5.16 przedstawiono diagramy stabilizacyjne metody w wersji filtrowanej i niefiltrowanej dla rzędu maksymalnego równego $n = 150$. Przy tworzeniu diagramów zastosowano następujące kryteria poprawności rozwiązania:

- maksymalna różnica częstotliwości (3.84): $\Delta f \leq 0.005$,
- maksymalny tłumienia (3.85): $\Delta \xi \leq 0.03$,
- minimalne kryterium MAC i MPC (3.86): $MPC \geq 0.95$ $MAC \geq 0.95$

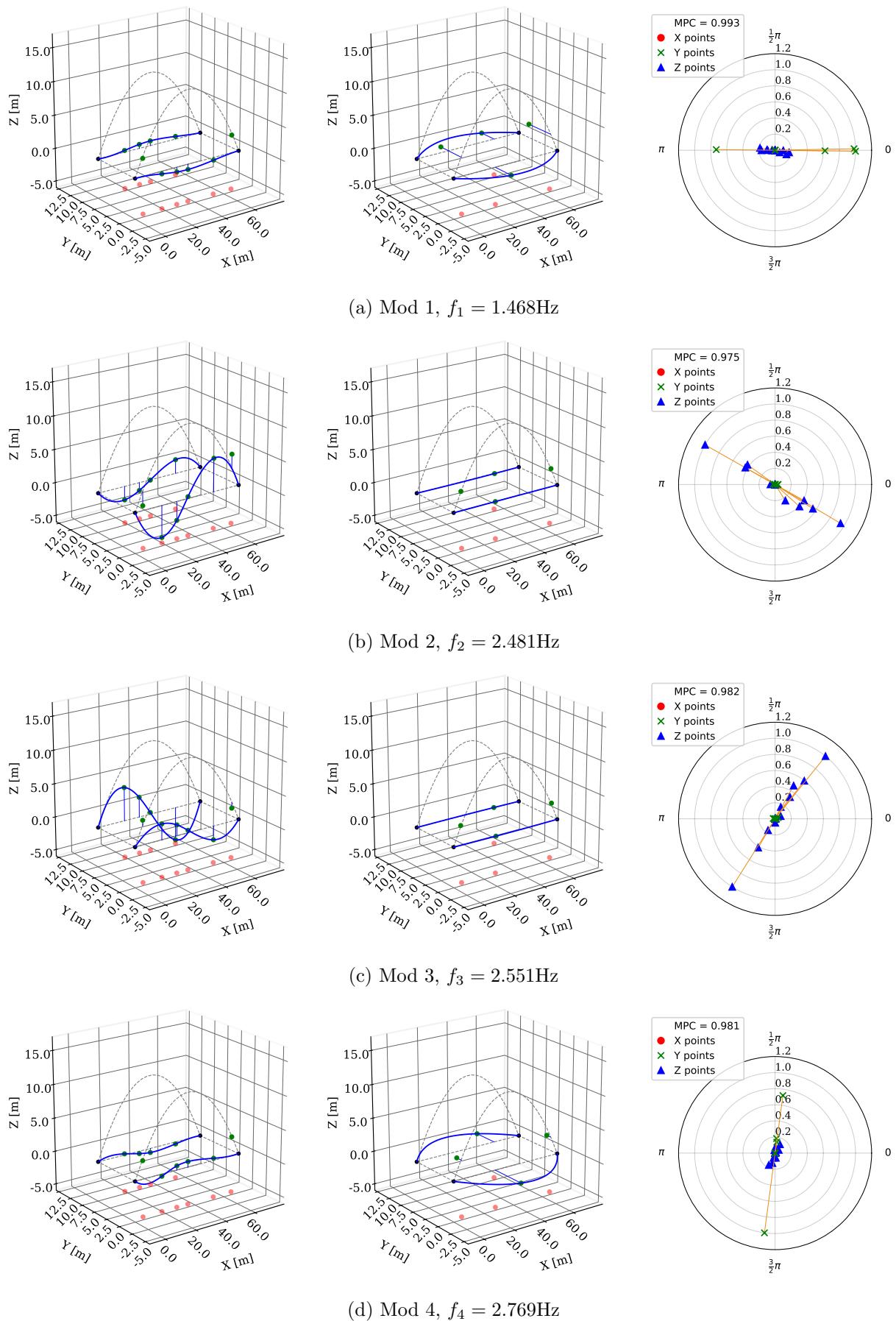
Zidentyfikowano 10 pierwszych modów o częstotliwościach mniejszych niż 8 Hz. Pomimo zidentyfikowania również modów o wyższych częstotliwościach dalsze rozważania ograniczono do pierwszych dziesięciu. Z praktycznego punktu widzenia, dla obiektów mostowych jedynie kilka najniższych modów ma znaczący wpływ na odpowiedź dynamiczną konstrukcji. Charakterystyki zidentyfikowanych modów przedstawiono na wykresach 5.17 i w tabeli 5.1. Pierwszych 10 zidentyfikowanych częstotliwości drgań własnych jest zbliżonych do wyznaczonych analitycznie ze wstępnego modelu MES (Rys. 5.9). Wartości Logarytmicznego Dekrementu Tłumienia wahają się od 1.3% do 7.7%. Biorąc pod uwagę, że Wiadukt WK2 jest konstrukcją stalową z korytem wypełnionym podsypką, rezultaty te nie wzbudzają zastrzeżeń. Zidentyfikowane postaci drgań pozwalają odróżnić od siebie mody, ale wyraźnie cierpią z uwagi na zbyt słabe odwzorowanie postaci. Postaci związane z drganiami poprzecznymi łuków identyfikowane są przez węzły zlokalizowane blisko wezgłowii i przez przemieszczenia pomostu realizujące się przez połączenie łuków ze ściągiem za pomocą wieszaków. Pomimo wspólnej normalizacji przemieszczeń modalnych pionowych i poprzecznych, wartości dla punków na łukach nie są znacznie większe niż przemieszczenia pomostu. Utrudnia to jednoznaczne powiązanie dla bliskich sobie modów z postaciami uzyskanymi w modelu teoretycznym. Gdyby to było możliwe, zamocowanie punktów pomiarowych na łuku w większej liczbie i w wyższych partiach mogłoby istotnie ułatwić identyfikację postaci i dalsze działania związane z kalibracją modelu. Podsumowując, identyfikację uznano za udaną i pozwalającą na ocenę konstrukcji i kalibrację modelu numerycznego.



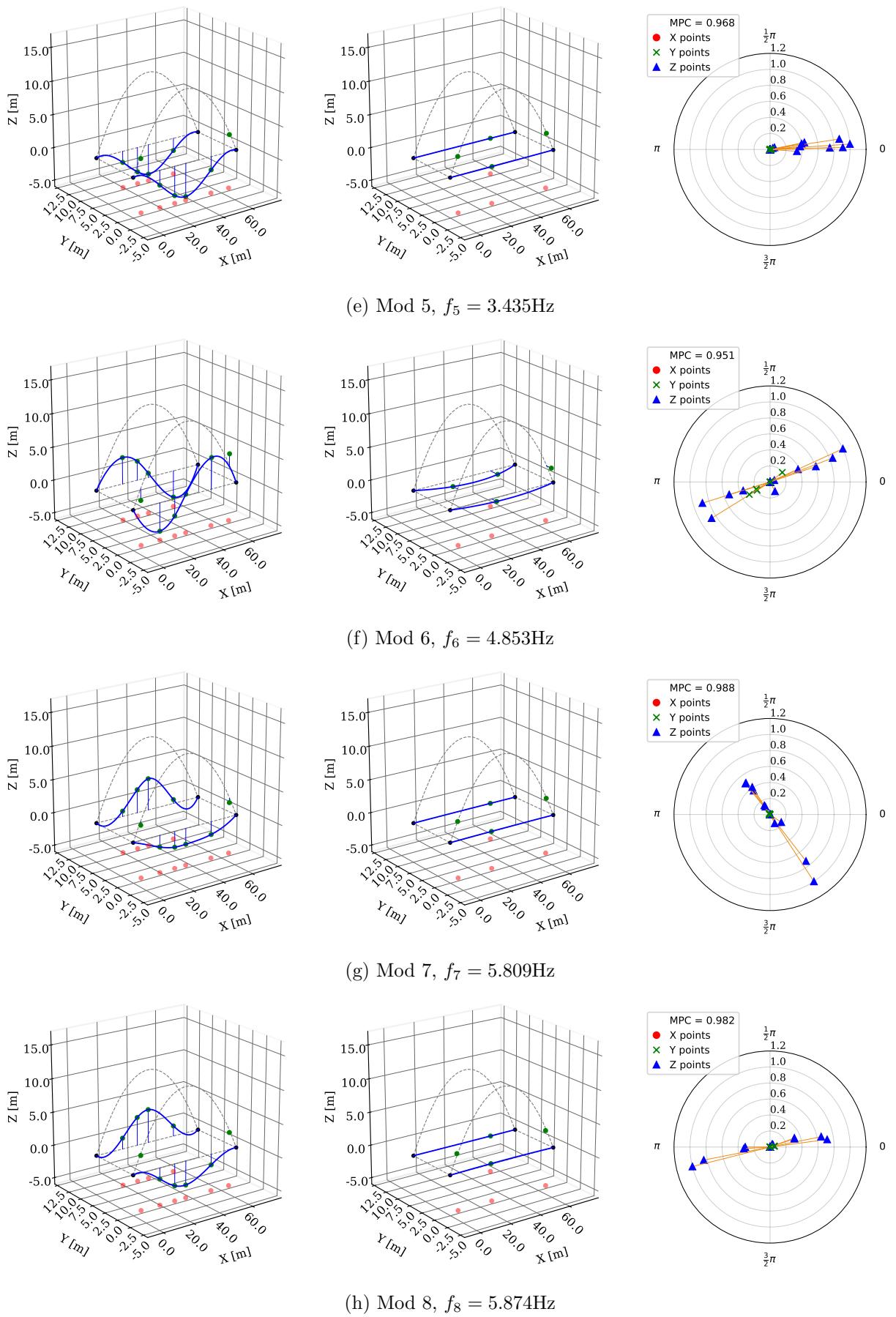
Rysunek 5.16: Diagramy stabilizacyjne metody NExT-ERA w badaniach wiaduktu WK2

Tablica 5.1: Zidentyfikowane charakterystyki modalne wiaduktu WK2

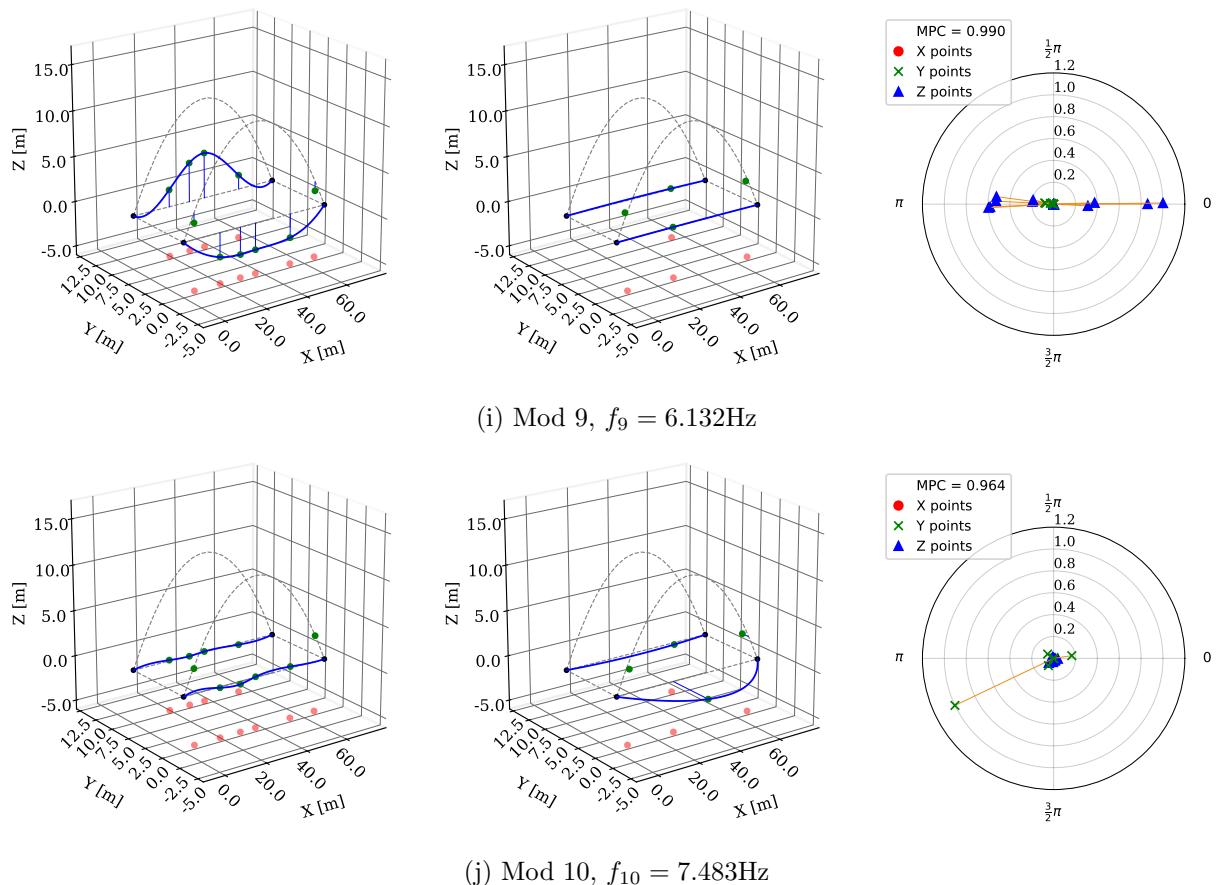
	Mod 1	Mod 2	Mod 3	Mod 4	Mod 5	Mod 6	Mod 7	Mod 8	Mod 9	Mod 10
Częstotliwość [Hz]	1.468	2.481	2.551	2.769	3.435	4.853	5.809	5.874	6.132	7.483
Liczba tłumienia [-]	0.007	0.009	0.006	0.011	0.012	0.012	0.005	0.005	0.002	0.004
LDT [-]	0.043	0.053	0.037	0.070	0.077	0.077	0.028	0.031	0.013	0.024



Rysunek 5.17: Zidentyfikowane charakterystyki modalne wiaduktu WK2



Rysunek 5.17: Zidentyfikowane charakterystyki modalne wiaduktu WK2 kont.

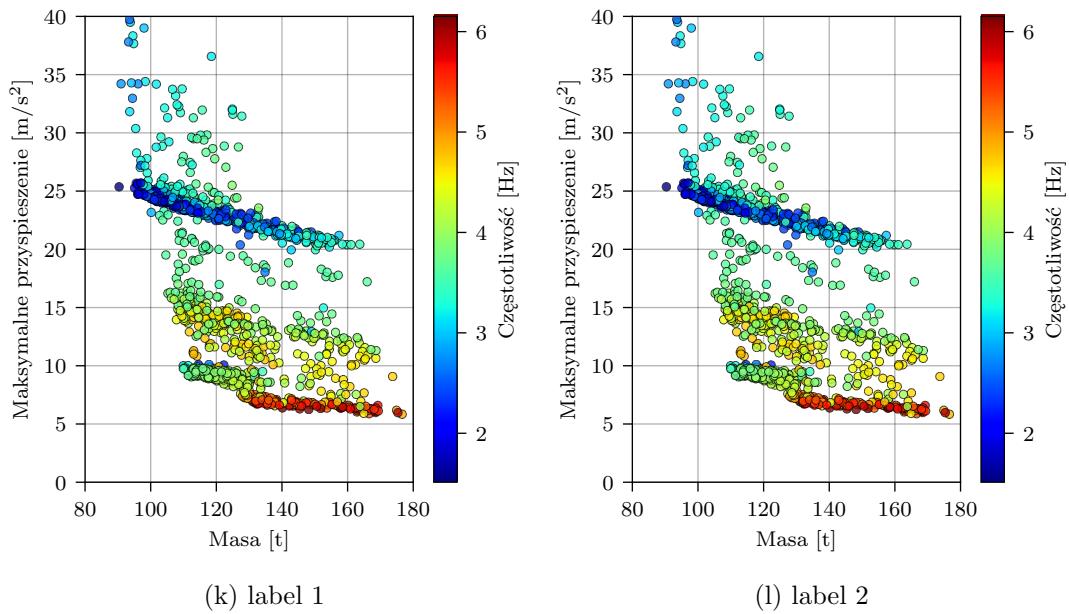


Rysunek 5.17: Zidentyfikowane charakterystyki modalne wiaduktu WK2 kont.

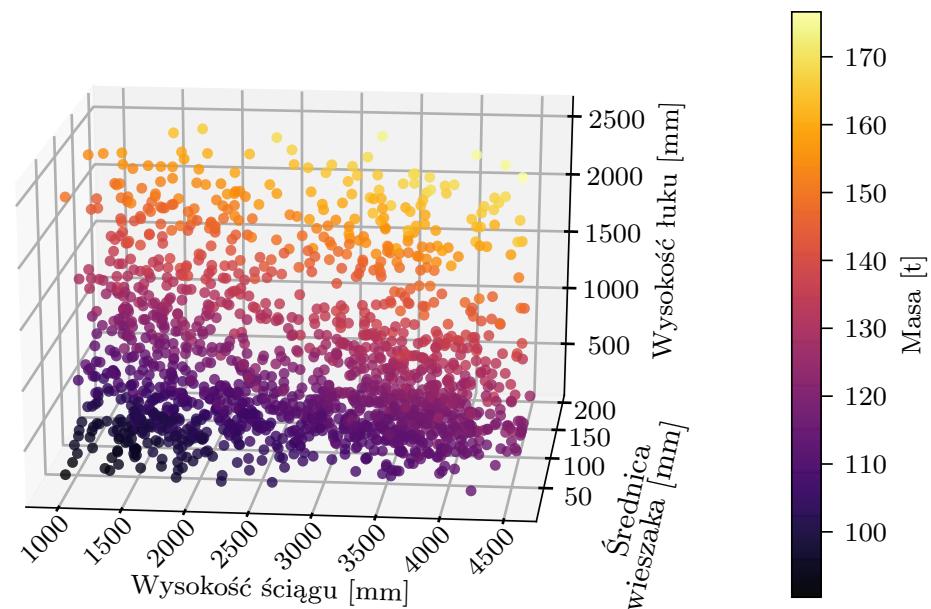
5.4 Kalibracja modelu numerycznego z wykorzystaniem PSO

5.5 Wielokryterialna optymalizacja modelu: opis + wyniki

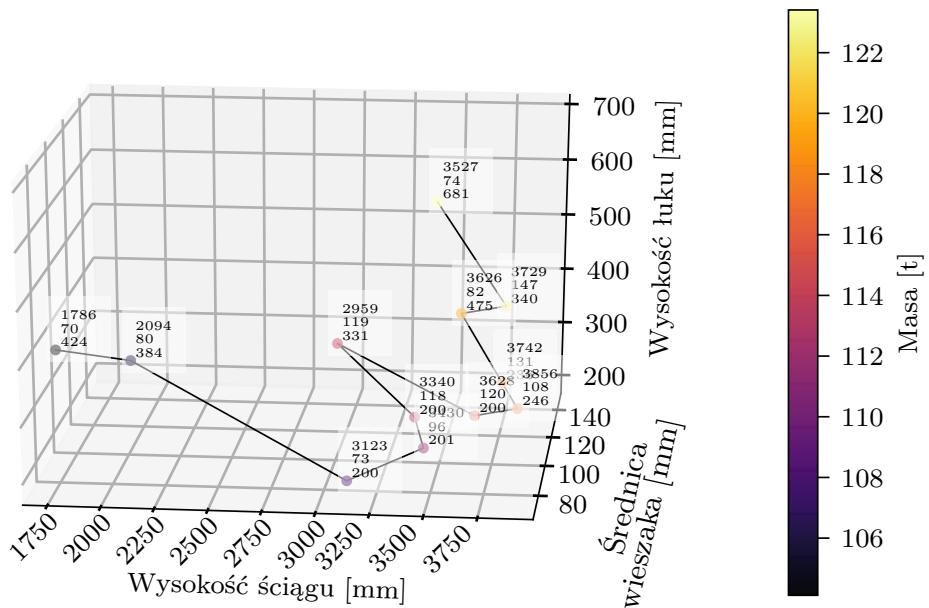
Treść dotycząca tykresu zbiorczego



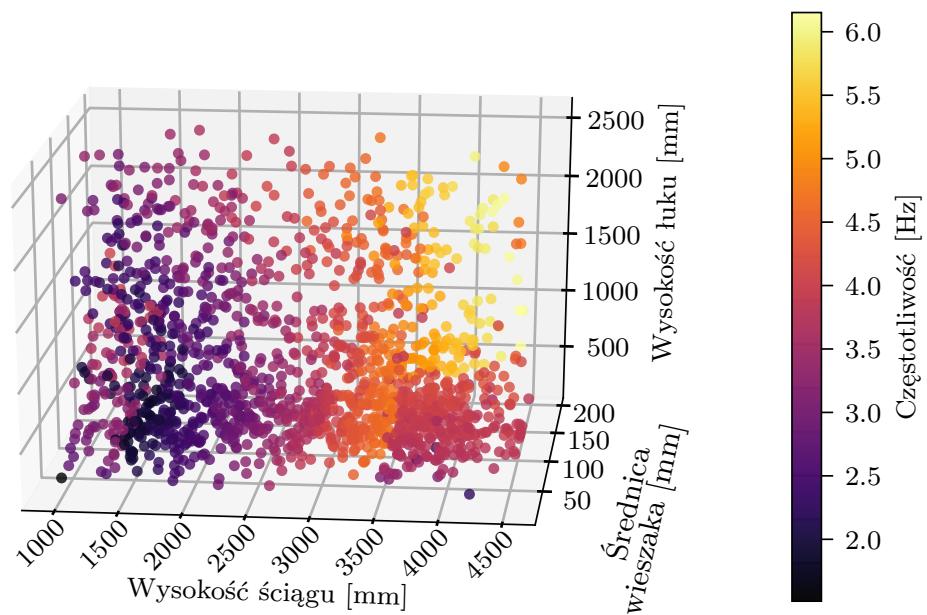
Rysunek 5.18: Częstotliwość drgań własnych związana z decydującą prędkością krytyczną. Wieszaki proste, prędkość maksymalna 300km/h



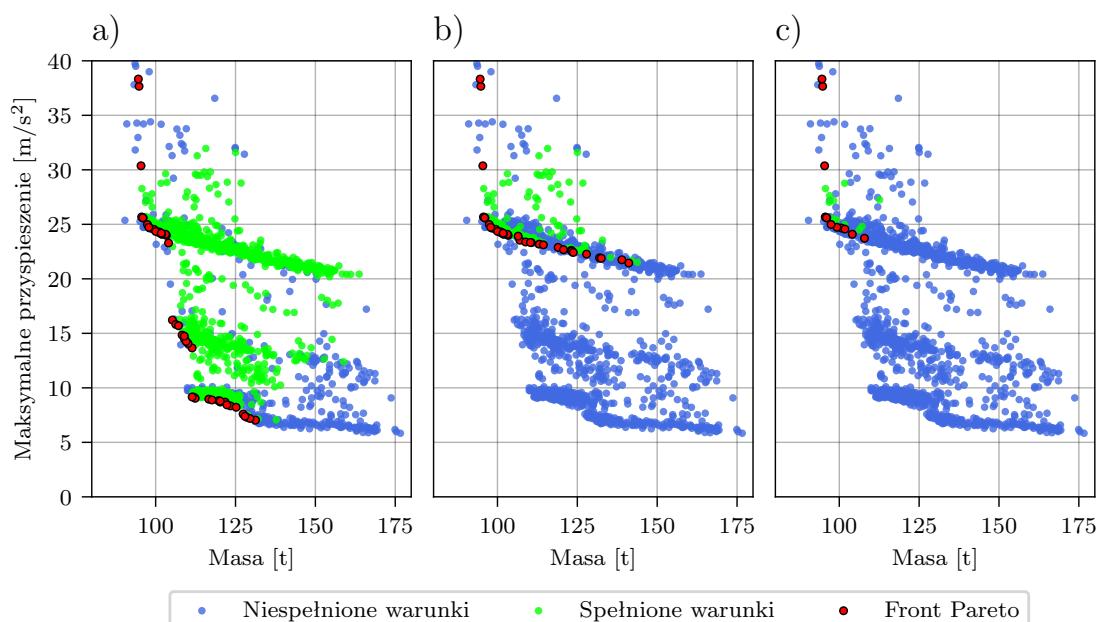
Rysunek 5.19: Częstotliwość drgań własnych związana z decydującą prędkością krytyczną. Wieszaki proste, prędkość maksymalna 300km/h



Rysunek 5.20: Częstotliwość drgań własnych związana z decydującą prędkością krytyczną. Wieszaki proste, prędkość maksymalna 300km/h



Rysunek 5.21: Częstotliwość drgań własnych związana z decydującą prędkością krytyczną. Wieszaki proste, prędkość maksymalna 300km/h



Rysunek 5.22: Częstotliwość drgań własnych związana z decydującą prędkością krytyczną. Wieszaki proste, prędkość maksymalna 300km/h

Rozdział 6

Podsumowanie i wnioski

Podsumowania wnioski

Bibliografia

- Abido, Mohammad Ali (2006). "Multiobjective evolutionary algorithms for electric power dispatch problem". W: *IEEE transactions on evolutionary computation* 10.3, s. 315–329. ISSN: 1089-778X.
- Allemang, Randall J i David L. Brown (1982). "A correlation coefficient for modal vector analysis". W: *Proceedings of the 1st international modal analysis conference. Vol. 1.* SEM Orlando, s. 110–116.
- Allemang, Randall J. (2003). "The Modal Assurance Criterion—Twenty Years of Use and Abuse." W: *Sound & Vibration* 37.8, s. 14–23. ISSN: 15410161.
- Bachmann, Hugo i in. (2012). *Vibration Problems in Structures: Practical Guidelines*. en. Birkhäuser, s. 248. ISBN: 978-3-0348-9231-5.
- Banach, Mateusz (2017). "Metody obliczeniowe jedno- i wielokryterialnej optymalizacji rojem cząstek. Zastosowanie w bioinformatyce." pl. Prac. dokt. Instytut Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk w Warszawie, s. 310.
- Bathe, Klaus-Jürgen (2006). *Finite element procedures*. Prentice Hall. ISBN: 978-0-9790049-5-7.
- Blackwell, Tim i James Kennedy (2019). "Impact of Communication Topology in Particle Swarm Optimization". W: *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* 23.4, s. 689–702. ISSN: 19410026. DOI: 10.1109/TEVC.2018.2880894.
- Boashash, Boualem (2015). *Time-frequency signal analysis and processing: a comprehensive reference*. Academic Press. ISBN: 0123985250.
- Brincker, Rune, C Ventura i Palle Andersen (2001). "Damping estimation by frequency domain decomposition". W: *Proceedings of the 19th international modal analysis conference (IMAC)*. T. 1. Orlando, FL, USA, s. 698–703.
- Brincker, Rune i Carlos E. Ventura (2015). *Introduction to Operational Modal Analysis*. English. Chichester, West Sussex: Wiley, s. 1–360. ISBN: 978-1-119-96315-8. DOI: 10.1002/9781118535141.
- Brincker, Rune, Lingmi Zhang i P Andersen (2000). "Modal identification from ambient responses using frequency domain decomposition". W: *Proc. of the 18*International Modal Analysis Conference (IMAC), San Antonio, Texas*.
- Brincker, Rune, Lingmi Zhang i Palle Andersen (2001). "Modal identification of output-only systems using frequency domain decomposition". W: *Smart materials and structures* 10.3, s. 441. ISSN: 0964-1726.
- Brownjohn, J. M.W. W i in. (sierp. 2010). "Ambient vibration re-testing and operational modal analysis of the Humber Bridge". en. W: *Engineering Structures* 32.8, s. 2003–2018. ISSN: 01410296. DOI: 10.1016/j.engstruct.2010.02.034.
- Caicedo, Juan M. (2011). "Practical guidelines for the natural excitation technique (NExT) and the eigensystem realization algorithm (ERA) for modal identification using ambient vibration". W: *Experimental Techniques* 35.4, s. 52–58. ISSN: 0732-8818. DOI: 10.1111/j.1747-1567.2010.00643.x.

- Caughey, T K i M E J O'kelly (1961). "Effect of damping on the natural frequencies of linear dynamic systems". W: *The Journal of the Acoustical Society of America* 33.11, s. 1458–1461. ISSN: 0001-4966.
- Chen, Wei-Neng i in. (2012). "Particle swarm optimization with an aging leader and challengers". W: *IEEE transactions on evolutionary computation* 17.2, s. 241–258. ISSN: 1089-778X.
- Chmielewski, Tadeusz i Zbigniew Zembaty (1998). *Podstawy dynamiki budowli. Arkady*. ISBN: 83-213-4072-5.
- Chopra, Anil K (2012). *Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering*. en. 4th ed. Upper Saddle River, N.J: Prentice Hall, s. 944. ISBN: 978-0-13-285803-8.
- Clerc, Maurice i James Kennedy (2002). "The particle swarm-explosion, stability, and convergence in a multidimensional complex space". W: *IEEE transactions on Evolutionary Computation* 6.1, s. 58–73. ISSN: 1089-778X.
- Clough, Ray W i Joseph Penzien (1975). *Dynamics of structures*. New York: McGraw-Hill, s. 634. ISBN: 978-0-07-011392-3.
- Coello, Carlos A Coello, Gary B Lamont i David A Van Veldhuizen (2007). *Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems*. Second Edi. Springer, Boston, MA, s. 800. ISBN: 978-0-387-36797-2. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-36797-2>.
- Coello Coello, Carlos A. i Margarita Reyes-Sierra (wrz. 2006). "Multi-Objective Particle Swarm Optimizers: A Survey of the State-of-the-Art". en. W: *International Journal of Computational Intelligence Research* 2.3, s. 287–308. ISSN: 09741259. DOI: 10.5019/j.ijcir.2006.68. URL: http://www.ijcir.com/publishedPapers.php?showDetails=Y&idArticle=68&volume=1&number=1&volume_id=2&number_id=4%20http://files/702/Coello%20Coello%20i%20Reyes-Sierra%20-%202006%20-%20Multi-Objective%20Particle%20Swarm%20Optimizers%20A%20Survey.pdf.
- Deb, Kalyanmoy i David E Goldberg (1989). "An investigation of niche and species formation in genetic function optimization". W: *Proceedings of the third international conference on Genetic algorithms*, s. 42–50.
- Deb, Kalyanmoy, Amrit Pratap i in. (2002). "A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II". W: *IEEE transactions on evolutionary computation* 6.2, s. 182–197. ISSN: 1089-778X.
- Dudek, Marcin (2008). "Identyfikacja parametrów dynamicznych konstrukcji mostowych na bazie drgań wywołanych obciążeniem środowiskowym : [rozprawa doktorska]". Prac. dokt.
- Eberhart, Russell, J Kennedy i James Kennedy (lip. 1995). "A new optimizer using particle swarm theory". en. W: *MHS'95. Proceedings of the Sixth International Symposium on Micro Machine and Human Science*. T. 0-7803-267. IEEE, s. 39–43. ISBN: 978-0-7803-2676-7. DOI: 10.1109/MHS.1995.494215.
- Eberhart, Russell i Yuhui Shi (2001). "Particle swarm optimization: developments, applications and resources". W: *Proceedings of the 2001 congress on evolutionary computation (IEEE Cat. No. 01TH8546)*. T. 1. IEEE, s. 81–86. ISBN: 0780366573.
- Eberhart, Russell C, Yuhui Shi i James Kennedy (2001). *Swarm intelligence*. Elsevier. ISBN: 0080518265.
- Elbeltagi, Emad, Tarek Hegazy i Donald Grierson (lip. 2005). "Comparison among five evolutionary-based optimization algorithms". en. W: *Advanced Engineering Informatics* 19.1, s. 43–53. ISSN: 14740346. DOI: 10.1016/j.aei.2005.01.004.
- Ewins, David J. (2000). *Modal testing: theory, practice and application*. Baldock: RESEARCH STUDIES PRESS LTD. ISBN: 0863802184.
- Extractor ARTeMIS (1999). "Structural vibration solutions". W: *Aalborg, Denmark*.

- Felber, Andreas Johann (1994). "Development of a hybrid bridge evaluation system". en. Prac. dokt. THE UNIVERSITY OF BRITISH COLUMBIA, s. 297.
- Fialko, Sergey (2000). "High-performance aggregation element-by-element Ritz-gradient method for structure dynamic response analysis". W: *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences* 7.4, s. 537–550. ISSN: 1232-308X.
- Findeisen, Władysław, Jacek Szymanowski i Andrzej Wierzbicki (1980). *Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji*. Wydanie dr. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.
- Fister Jr., Iztok i in. (2013). "A brief review of nature-inspired algorithms for optimization". W: *Elektrotechniski Vestnik/Electrotechnical Review* 80.3, s. 116–122. ISSN: 00135852. arXiv: 1307.4186.
- Frýba, Ladislav (lut. 1999). *Vibration of Solids and Structures under Moving Loads*. en. Third edit. T. 23. Thomas Telford Publishing, s. 548–556. ISBN: 978-0-7277-3996-4. DOI: 10.1680/vosasuml.35393.
- Giorcelli, E i in. (1994). "Modal Analysis and system identification using ARMAV models". W: *SPIE*. T. 2251, s. 676. ISBN: 0277-786X.
- Goldberg, David Edward (1995). *Algorytmy genetyczne i ich zastosowania*. Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, s. 408. ISBN: 8320418526.
- Golub, Gene H i Charles F Van Loan (2013). "Matrix computations, 4th". W: *Johns Hopkins*.
- Harrison, Kyle Robert, Andries P Engelbrecht i Beatrice M Ombuki-Berman (2018). "Self-adaptive particle swarm optimization: a review and analysis of convergence". W: *Swarm Intelligence* 12.3, s. 187–226. ISSN: 1935-3820.
- Ho, B L i Rudolf E Kálmán (1966). "Effective construction of linear state-variable models from input/output functions". W: *at-Automatisierungstechnik* 14.1-12, s. 545–548. ISSN: 2196-677X.
- Hollkamp, J. J. i R. W. Gordon (2001). "Modal test experiences with a jet engine fan model". W: *Journal of Sound and Vibration* 248.1, s. 151–165. ISSN: 0022-460X. DOI: 10.1006/jsvi.2001.3758.
- Huang, C S (2000). "Modal identification of structures using ARMAV model for ambient vibration measurement". W: *12th World Conference on Earthquake Engineering, Auckland, New Zealand, paper*. 1702.
- Huang, Tony i Ananda Sanagavarapu Mohan (2005). "A hybrid boundary condition for robust particle swarm optimization". W: *IEEE antennas and wireless propagation letters* 4, s. 112–117. ISSN: 1536-1225.
- Hughes, Thomas (1987). *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.
- Hunt, David L (1992). "Application of an enhanced coordinate modal assurance criterion". W: *Proc 10th international modal analysis conference*. T. 1. San Diego, CA, s. 66–71.
- Ibrahim, Samir R. (1983). "TIME DOMAIN MODAL PARAMETER IDENTIFICATION AND MODELING OF STRUCTURES." W: *Proceedings of the American Control Conference*. T. 3. IEEE, s. 989–996. DOI: 10.23919/acc.1983.4788259.
- Inman, Daniel J i Gerard Lallement (1995). "A TUTORIAL ON COMPLEX EIGENVALUES". en. W: *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*. January 1995, s. 7.
- James, G H, Thomas G Carne i James P Lauffer (1995). "The natural excitation technique (NExT) for modal parameter extraction from operating structures". W: *Modal Analysis-the International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis* 10.4, s. 260. ISSN: 1055-0763.

- James, GH H, Thomas G Carne i James P Lauffer (1993). "The Natural Excitation Technique (NExT) for Modal Parameter Extraction From Operating Wind Turbines". W: *NASA STI/Rec on Technical Report N 93.4*, s. 260–277. ISSN: 1055-0763.
- Juang, J-N i Hideto Suzuki (1988). "An eigensystem realization algorithm in frequency domain for modal parameter identification". W: *Journal of vibration, acoustics, stress, and reliability in design* 110.1, s. 24–29. ISSN: 0739-3717.
- Juang, J. N. i R. S. Pappa (1986). "Effects of noise on modal parameters identified by the eigensystem realization algorithm". W: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 9.3, s. 294–303. ISSN: 07315090. DOI: 10.2514/3.20106.
- Juang, Jer-Nan (1994). *Applied system identification*. Prentice-Hall, Inc. ISBN: 013079211X.
- Juang, Jer-Nan i Richard S Pappa (1985). "An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction". W: *Journal of guidance, control, and dynamics* 8.5, s. 620–627. ISSN: 0731-5090.
- Kaczorek, Tadeusz i in. (2016). *Podstawy teorii sterowania*. Wydawnictwo WNT. ISBN: 8301185910.
- Kalman, Rudolf Emil (1963). "Mathematical description of linear dynamical systems". W: *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series A: Control* 1.2, s. 152–192. ISSN: 0887-4603.
- Kammer, Daniel C (1991). "Sensor placement for on-orbit modal identification and correlation of large space structures". W: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 14.2, s. 251–259. ISSN: 0731-5090.
- Kennedy, J i R Eberhart (lip. 1995). "Particle swarm optimization". en. W: *ICNN'95 - International Conference on Neural Networks*. T. 4. IEEE, s. 1942–1948. ISBN: 978-0-7803-2768-9. DOI: 10.1109/ICNN.1995.488968.
- Kennedy, James i Russell Eberhart (1995). "47-Particle Swarm Optimization Proceedings., IEEE International Conference". W: *Proceedings of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks* 11.1, s. 111–117. ISSN: 1598-8619. URL: <http://ci.nii.ac.jp/naid/10015518367>.
- Kennedy, James i Rui Mendes (2002). "Population structure and particle swarm performance". W: *Proceedings of the 2002 Congress on Evolutionary Computation. CEC'02 (Cat. No. 02TH8600)*. T. 2. IEEE, s. 1671–1676. ISBN: 0780372824.
- Knowles, Joshua D i David W Corne (2000). "Approximating the nondominated front using the Pareto archived evolution strategy". W: *Evolutionary computation* 8.2, s. 149–172. ISSN: 1063-6560.
- Lalwani, Soniya i in. (2013). "A comprehensive survey: Applications of multi-objective particle swarm optimization (MOPSO) algorithm". W: *Transactions on Combinatorics* 2.1, s. 39–101. ISSN: 2251-8657.
- Lengvarský, Pavol i Jozef Bocko (2013). "Theoretical basis of modal analysis". W: *American Journal of Mechanical Engineering* 1.7, s. 173–179.
- Li, P., S. L.J. J Hu i H. J. Li (2011). "Noise issues of modal identification using eigensystem realization algorithm". W: *Procedia engineering* 14, s. 1681–1689. ISSN: 1877-7058. DOI: 10.1016/j.proeng.2011.07.211.
- Liang, Jing J i in. (2006). "Comprehensive learning particle swarm optimizer for global optimization of multimodal functions". W: *IEEE transactions on evolutionary computation* 10.3, s. 281–295. ISSN: 1089-778X.
- Laziński, Piotr i in. (2015). *Raport z próbnego obciążenia statycznego i dynamicznego Wiadukt Kolejowy WK-2 w ciągu projektownej linii PKM w Gdańsku*. Spraw. tech. Gliwice: Politechnika Ślaska, Zespół Badań Terenowych.
- Maia, Nuno Manuel Mendes i Julio Martins Montalvao Silva (1997). *Theoretical and Experimental Modal Analysis*. Research Studies Press, s. 488. ISBN: 978-0-863-80208-9.

- MITCHELL, L. (1998). *Increasing the sensitivity of the modal assurance criteria (MAC) to small mode shape changes : The IMAC*. Santa Barbara CA.
- Moore, Jacqueline i Richard Chapman (1999). *Application of particle swarm to multi-objective optimization*. Spraw. tech.
- Nayeri, Reza D. i in. (2009). "Study of time-domain techniques for modal parameter identification of a long suspension bridge with dense sensor arrays". W: *Journal of engineering mechanics* 135.7, s. 669–683. ISSN: 0733-9399. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(2009)135:7(669).
- Newmark, Nathan M (1959). "A method of computation for structural dynamics". W: *Journal of the engineering mechanics division* 85.3, s. 67–94.
- Norton, John P (2009). *An introduction to identification*. Courier Corporation. ISBN: 0486469352.
- Papadopoulos, Michael i Ephrahim Garcia (1998). "Sensor placement methodologies for dynamic testing". W: *AIAA journal* 36.2, s. 256–263. ISSN: 0001-1452.
- Papadrakakis, Manolis (1993). *Solving large-scale problems in mechanics*. Wiley.
- Pappa, R S i J N Juang (1985). "An Eigensystem Realization Algorithm (ERA) for modal parameter identification and model reduction". W: JPL Proc. of the Workshop on Identification i Control of Flexible Space Struct., Vol. 3.
- Pappa, Richard S, Kenny B Elliott i Axel Schenk (1992). *A consistent-mode indicator for the Eigensystem Realization Algorithm*. Hampton, Va. : [Springfield, Va. : National Aeronautics i Space Administration, Langley Research Center ; For sale by the National Technical Information Service, 1992.
- Pappa, Richard S i Samir R Ibrahim (1985). "A parametric study of the Ibrahim time domain modal identification algorithm". W.
- Peeters, Bart (2000). "System Identification and Damage Detection in Civil Engineering". Prac. dokt.
- Peeters, Bart i Guido De Roeck (1999). "Reference-based stochastic subspace identification for output-only modal analysis". W: *Mechanical systems and signal processing* 13.6, s. 855–878. ISSN: 0888-3270. DOI: 10.1006/mssp.1999.1249.
- Peeters, Bart i Herman Van der Auweraer (2005). "PolyMAX: a revolution in operational modal analysis". W: *Proceedings of the 1st International Operational Modal Analysis Conference, Copenhagen, Denmark*.
- Penny, J E T, M I Friswell i S D Garvey (1994). "Automatic choice of measurement locations for dynamic testing". W: *AIAA journal* 32.2, s. 407–414. URL: <http://files/166/Penny%20i%20in.%20-%201994%20-%20Automatic%20choice%20of%20measurement%20locations%20for%20dyna.pdf%20http://files/167/3.html>.
- Phan, Minh, Jer-Nan Juang i Richard W Longman (1991). *On Markov parameters in system identification*. Spraw. tech. Hampton, Virginia: NASA Langley Research Center.
- Piotrowski, Adam P, Jaroslaw J Napiorkowski i Agnieszka E Piotrowska (2020). "Population size in particle swarm optimization". W: *Swarm and Evolutionary Computation* 58, s. 100718. ISSN: 2210-6502.
- Poli, Riccardo, James Kennedy i Tim Blackwell (lip. 2007). "Particle swarm optimization: An overview". en. W: *Swarm Intelligence* 1.1, s. 33–57. ISSN: 1935-3812, 1935-3820. DOI: 10.1007/s11721-007-0002-0. URL: <http://link.springer.com/10.1007/s11721-007-0002-0%20http://files/512/Poli%20i%20in.%20-%202007%20-%20Particle%20swarm%20optimization%20An%20overview.pdf%20http://files/514/Poli%20i%20in.%20-%202007%20-%20Particle%20swarm%20optimization%20An%20overview.pdf>.
- Poprawa, Grzegorz (2018). "Operacyjna analiza modalna w badaniach kratowych mostów kolejowych pod próbnym obciążeniem dynamicznym". Prac. dokt.

- Pulido, G T (2005). "On the use of self-adaptation and elitism for multiobjetive particle swarm optimization". W: National Polytechnic Institute, Mexico City.
- Rainieri, C i G Fabbrocino (2014). *Operational Modal Analysis of Civil Engineering Structures: An Introduction and Guide for Applications*. Italy, Europe: Springer-Verlag. ISBN: 9781493907670.
- Rashedi, Esmat, Hossein Nezamabadi-pour i Saeid Saryazdi (maj 2009). "GSA: A Gravitational Search Algorithm". en. W: *Information Sciences* 179.13, s. 2232–2248. ISSN: 00200255. DOI: 10.1016/j.ins.2009.03.004. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ins.2009.03.004%20https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0020025509001200%20http://files/405/Rashedi%20i%20in.%20-%202009%20-%20GSA%20A%20Gravitational%20Search%20Algorithm.pdf>.
- Reynders, Edwin, Mattias Schevenels i Guido De Roeck (2014). "MACEC 3.2: A Matlab toolbox for experimental and operational modal analysis". W: *Department of Civil Engineering, KU Leuven*.
- Robinson, Jacob i Yahya Rahmat-Samii (2004). "Particle swarm optimization in electromagnetics". W: *IEEE transactions on antennas and propagation* 52.2, s. 397–407. ISSN: 0018-926X.
- Rucka, Magdalena i Krzysztof Wilde (2014). *Dynamika budowli : z przykładami w środowisku MATLAB®*. Gdańsk : Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, 2014. ISBN: 978-83-7348-588-4.
- Salamak, Marek (2003). "Doświadczalne metody określania poziomu tłumienia drgań w kładkach dla pieszych". Prac. dokt.
- Saliby, Eduardo i Flavio Pacheco (2002). "An empirical evaluation of sampling methods in risk analysis simulation: quasi-Monte Carlo, descriptive sampling, and Latin hypercube sampling". W: *Proceedings of the winter simulation conference*. T. 2. IEEE, s. 1606–1610. ISBN: 0780376145.
- Schutter, B.De i Bart De Schutter (kw. 2000). "Minimal state-space realization in linear system theory: an overview". en. W: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 121.1-2, s. 331–354. ISSN: 03770427. DOI: 10.1016/S0377-0427(00)00341-1.
- SHEN, F i in. (2003). "USING THE CROSS-CORRELATION TECHNIQUE TO EXTRACT MODAL PARAMETERS ON RESPONSE-ONLY DATA". W: *Journal of Sound and Vibration* 259.5, s. 1163. ISSN: 0022460X.
- Shi, D i W Stühler (1987). "Modal analysis with AR (ARMA) model and unknown excitation". W: *International Modal Analysis Conference, 5 th, London, England*, s. 1171–1176.
- Shi, Yuhui i Russell Eberhart (1998). "A modified particle swarm optimizer". W: *1998 IEEE international conference on evolutionary computation proceedings. IEEE world congress on computational intelligence (Cat. No. 98TH8360)*. IEEE, s. 69–73. ISBN: 0780348699.
- Szafrański, Marek (2013). "Odziaływanie taboru na mosty kolejowe przy zmiennych parametrach ruchu". Prac. dokt.
- Szymczak, Czesław (1995). *Elementy teorii projektowania*. Gdańsk: Politechnika Gdańsk, s. 231.
- Tesch, Krzysztof (2016). *Continuous optimisation algorithms*. en. Gdańsk University of Technology Publishers. ISBN: 978-83-7348-680-5.
- Udwadia, Firdaus E (1994). "Methodology for optimum sensor locations for parameter identification in dynamic systems". W: *Journal of engineering mechanics* 120.2, s. 368–390. ISSN: 0733-9399.
- Van Overschee, P i Bart De Moor (1996). *Subspace Identification for Linear Systems: Theory, Implementation, Applications*.

- Verboven, P i in. (2005). "A comparison of frequency-domain transfer function model estimator formulations for structural dynamics modelling". W: *Journal of sound and vibration* 279.3-5, s. 775–798. ISSN: 0022-460X.
- Vold, Harvard i in. (1982). "A multi-input modal estimation algorithm for mini-computers". W: *SAE Transactions*, s. 815–821. ISSN: 0096-736X.
- Welch, Peter (1967). "The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra: a method based on time averaging over short, modified periodograms". W: *IEEE Transactions on audio and electroacoustics* 15.2, s. 70–73. ISSN: 0018-9278.
- Wilson, Edward L (1997). *Three dimensional dynamic analysis of structures: with emphasis on earthquake engineering*. Computers i Structures Incorporated.
- Wilson, Edward L i Tetsuji Itoh (1983). "An eigensolution strategy for large systems". W: *Computers & structures* 16.1-4, s. 259–265. ISSN: 0045-7949.
- Xu, Shenheng i Yahya Rahmat-Samii (lip. 2007). "Boundary Conditions in Particle Swarm Optimization Revisited". en. W: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 55.3, s. 760–765. ISSN: 0018-926X. DOI: 10.1109/TAP.2007.891562. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/document/4120306/> %20http://files/541/Xu%20i%20Rahmat-Samii%20-%202007%20-%20Boundary%20Conditions%20in%20Particle%20Swarm%20Optimization.pdf.
- Yamaguchi, Hiroki i Manabu Ito (1997). "Mode-dependence of structural damping in cable-stayed bridges". W: *Journal of wind engineering and industrial aerodynamics* 72, s. 289–300. ISSN: 0167-6105.
- Zaman, Forhad i in. (wrz. 2019). "Multi-method based algorithm for multi-objective problems under uncertainty". en. W: *Information Sciences* 481, s. 81–109. ISSN: 00200255. DOI: 10.1016/j.ins.2018.12.072. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0020025518310272> %20http://files/716/Zaman%20i%20in.%20-%202019%20-%20Multi-method%20based%20algorithm%20for%20multi-objective%20p.pdf.
- Zhang, Jie i in. (2017). "Optimal sensor placement for multi-setup modal analysis of structures". W: *Journal of Sound and Vibration* 401, s. 214–232. ISSN: 0022-460X.
- Zhang, Lingmi, Rune Brincker i Palle Andersen (2004). "An overview of major developments and issues in modal identification". W: *Proceeding of the 22nd IMAC* 1, s. 1–8. ISSN: 0888-3270.
- Zielinski, Karin i Rainer Laur (2007). "Stopping criteria for a constrained single-objective particle swarm optimization algorithm". W: *Informatica* 31.1. ISSN: 1854-3871.
- Zieliński, Tomasz Piotr (2002). *Od teorii do cyfrowego przetwarzania sygnałów*. Wydział EAiE AGH. ISBN: 978-83-88309-55-7.
- Zitzler, Eckart, Kalyanmoy Deb i Lothar Thiele (2000). "Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: Empirical results". W: *Evolutionary computation* 8.2, s. 173–195. ISSN: 1063-6560.
- Zitzler, Eckart i Lothar Thiele (1999). "Multiobjective evolutionary algorithms: a comparative case study and the strength Pareto approach". W: *IEEE transactions on Evolutionary Computation* 3.4, s. 257–271. ISSN: 1089-778X.
- Żółtowski, Krzysztof, Mikołaj Binczyk i Przemysław Kalitowski (2017). "Footbridges. Dynamic Design–Selected Problems". W: ISSN: 3981896807. URL: <http://files/639/footbridges-dynamic-design-selected-problems,142027-1.html>.