

Przęsło łukowe wiaduktu kolejowego. Wpływ  
schematu statycznego i rozwiązań konstrukcyjnych  
na własności dynamiczne.

Przemysław Kalitowski

18 stycznia 2021

# Spis treści

<b>Wprowadzenie</b>	<b>5</b>
<b>1 Kolejowe, łukowe przęsła mostowe. Przegląd</b>	<b>6</b>
1.1 Typy.	
Cechy.	
Problemy związane z dynamiką. . . . .	7
1.2 Wydzielić rozdział? Modele obiektów w celach analiz dynamicznych	
Kalibracja/Walidacja/Weryfikacja. . . . .	7
<b>2 Dynamiczne obciążenie kolejowe</b>	<b>10</b>
2.1 Realne obciążenia - tabor.	
Modele obciążenia.	
Przepisy normowe i wytyczne. . . . .	10
<b>3 Identyfikacja modalna</b>	<b>11</b>
3.1 Wiadomości wstępne . . . . .	11
3.2 Klasyfikacja metod analizy modalnej . . . . .	13
3.3 Teoretyczna analiza modalna . . . . .	15
3.3.1 Zagadnienie własne . . . . .	16
3.3.2 Transformacja do współrzędnych normalnych . . . . .	19
3.3.3 Odpowiedź systemów dynamicznych o jednym stopniu swobody	19
3.3.4 Odpowiedź systemów dynamicznych o skończonej liczbie stopni swobody (MDOF) . . . . .	22
3.4 Mała dawka tłumienia . . . . .	25
3.5 Operacyjna analiza modalna (OMA) . . . . .	26
3.5.1 Koncepcja OMA . . . . .	26
3.5.2 Metody operacyjnej analizy modalnej . . . . .	28
3.6 Metoda NExT-ERA . . . . .	30
3.6.1 Funkcje korelacji, a odpowiedź swobodna układu . . . . .	30
3.6.2 Eigenystem Realization Algorithm . . . . .	37
3.7 Implementacja programu . . . . .	45
3.7.1 Algorytm programu . . . . .	46
3.7.2 Elementy oceny poprawności rozwiązania . . . . .	47
3.8 Testy numeryczne metody NEXT-ERA . . . . .	50
3.9 Testy eksperymentalne metody NEXT-ERA . . . . .	53
3.10 Podsumowanie . . . . .	55

<b>4 Optymalizacja metodą roju cząstek - Particle Swarm Optimizaton</b>	<b>59</b>
4.1 Wprowadzenie: metody optymalizacji w tym „nieróżniczkowe”.	
Particle Swarm optimization - opis, przegląd.	
Wielokryterialne PSO - opis przegląd.	
Opis implementacji. . . . .	59
<b>5 Wiadukt WK2 w ciągu Pomorskiej Kolei Metropolitalnej</b>	<b>60</b>
5.1 Budowa modelu numerycznego . . . . .	60
5.2 Badania - identyfikacja modalna: wybór punktów, opis badań, wyniki identyfikacji . . . . .	60
5.3 Kalibracja modelu numerycznego z wykorzystaniem PSO . . . . .	61
5.4 Wielokryterialna optymalizacja modelu: opis + wyniki . . . . .	61
<b>6 Podsumowanie i wnioski</b>	<b>64</b>

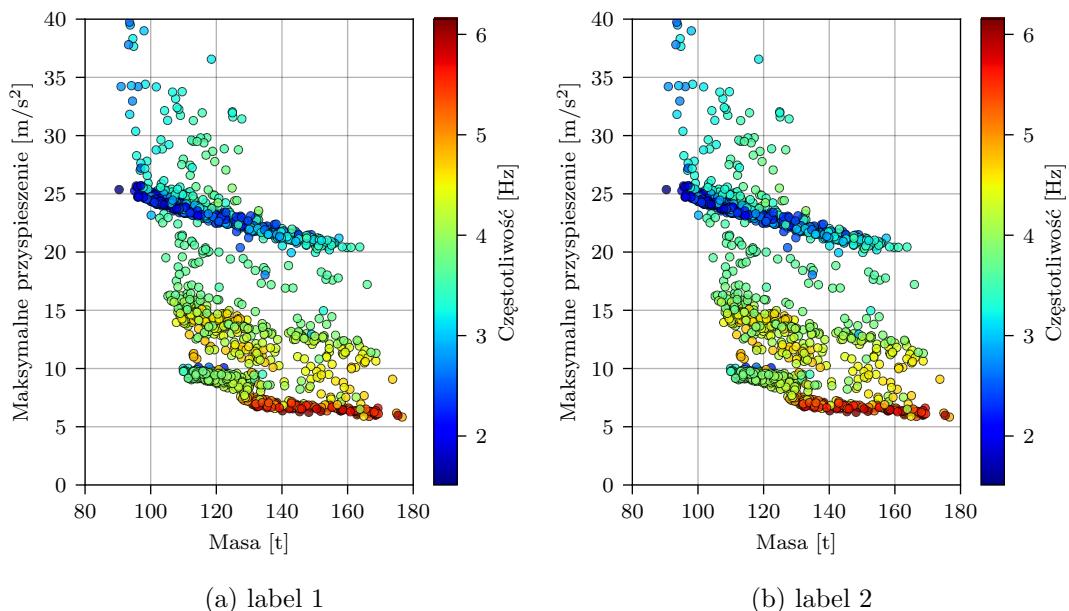
# **Słownik pojęć**

Dyskretyzacja matematyczna - czynność polegająca na określeniu lub poszukiwaniu wartości funkcji ciągłych w skończonym zbiorze punktów.

# **Wprowadzenie**

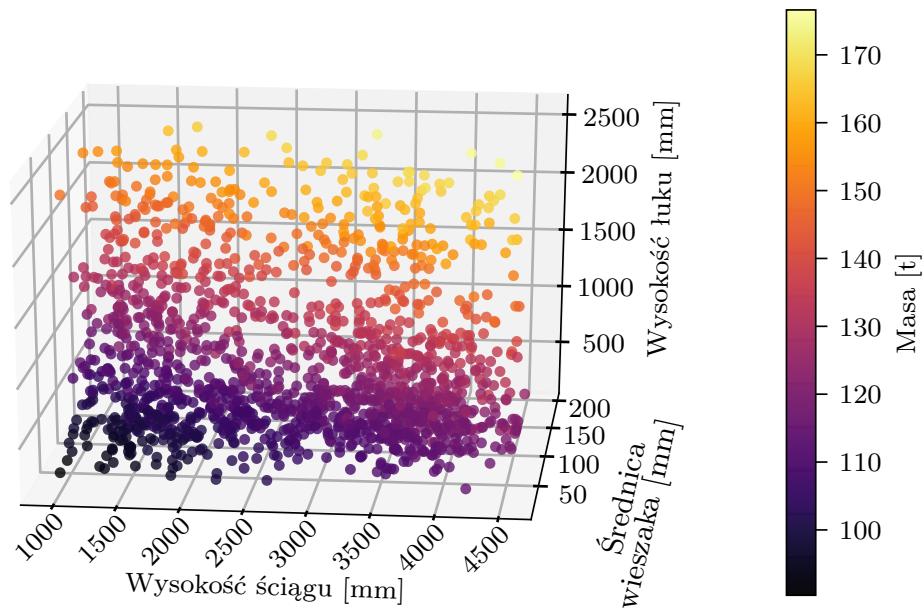
# Rozdział 1

## Kolejowe, łukowe przesła mostowe. Przegląd



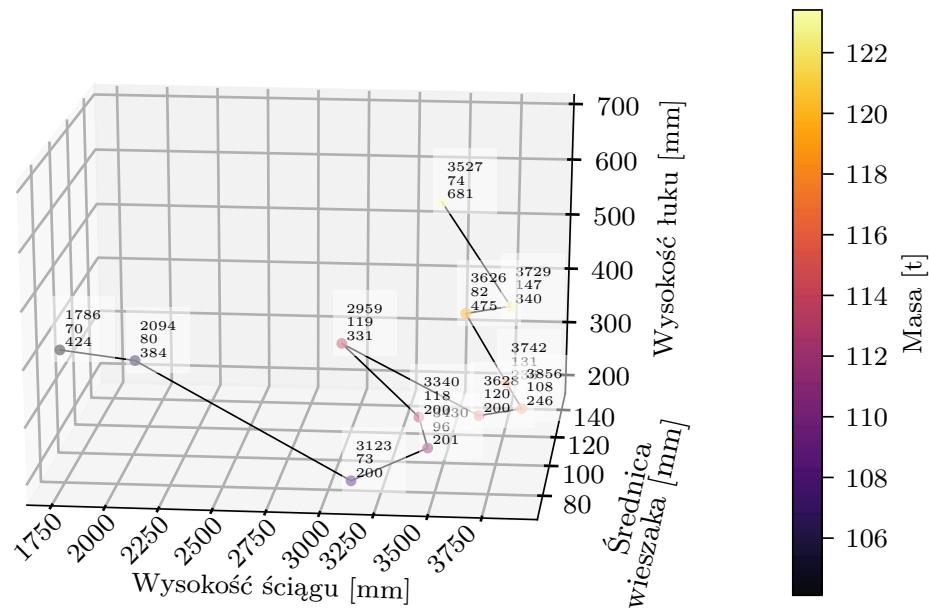
Rysunek 1.1: Częstotliwość drgań własnych związana z decydującą prędkością krytyczną. Wieszaki proste, prędkość maksymalna 300km/h

Treść dotycząca tykresu zbiorczego

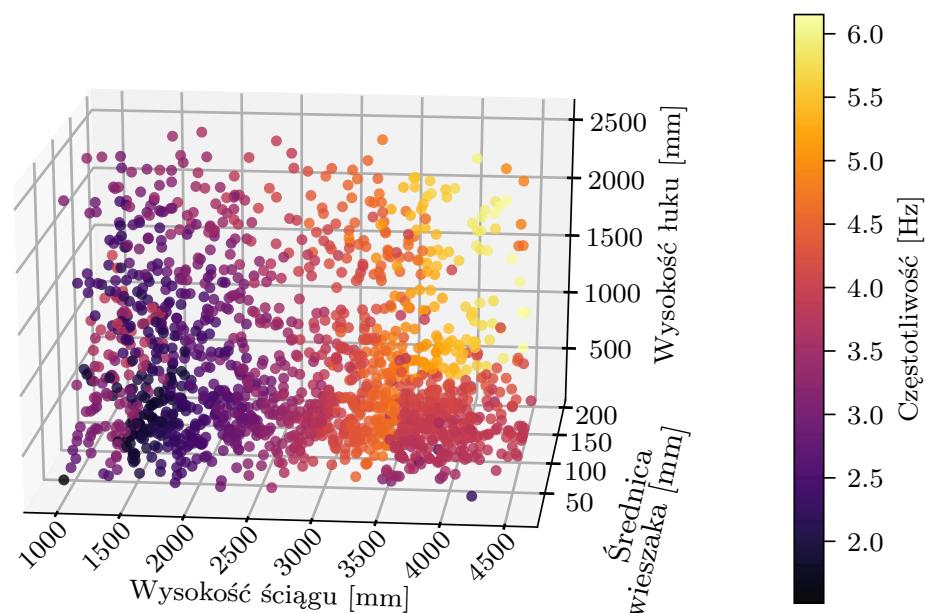


Rysunek 1.2: Częstotliwość drgań własnych związana z decydującą prędkością krytyczną. Wieszaki proste, prędkość maksymalna 300km/h

- 1.1 Typy.  
Cechy.  
Problemy związane z dynamiką.**
- 1.2 Wydzielić rozdział? Modele obiektów w celach analiz dynamicznych  
Kalibracja/Walidacja/Weryfikacja.**

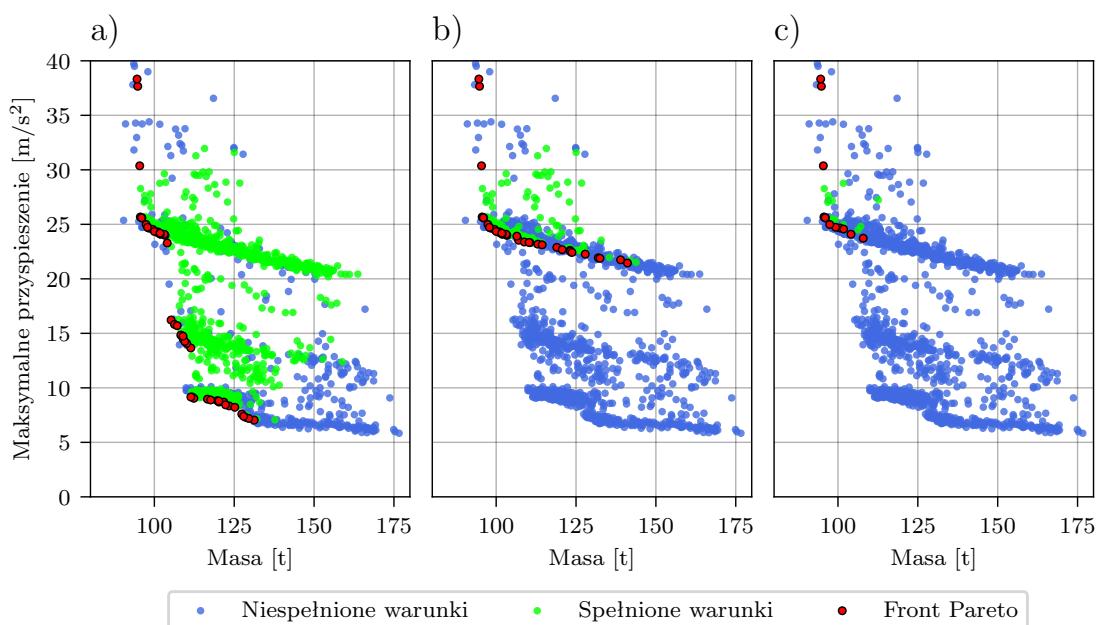


Rysunek 1.3: Częstotliwość drgań własnych związana z decydującą prędkością krytyczną. Wieszaki proste, prędkość maksymalna 300km/h



Rysunek 1.4: Częstotliwość drgań własnych związana z decydującą prędkością krytyczną. Wieszaki proste, prędkość maksymalna 300km/h

## 1.2. WYDZIELIĆ ROZDZIAŁ? MODELE OBIEKTÓW W CELACH ANALIZ DYNAMICZNYCH



Rysunek 1.5: Częstotliwość drgań własnych związana z decydującą prędkością krytyczną. Wieszaki proste, prędkość maksymalna 300km/h

## Rozdział 2

### Dynamiczne obciążenie kolejowe

**2.1 Realne obciążenia - tabor.  
Modele obciążenia.  
Przepisy normowe i wytyczne.**

# Rozdział 3

## Identyfikacja modalna

### 3.1 Wiadomości wstępne

Podstawowym celem pracy jest określenie zależności pomiędzy przyjętymi rozwiązaniami konstrukcyjnymi mostów kolejowych, a ich zachowaniem dynamicznym. Prädycja odpowiedzi, jak wspomniano wcześniej, możliwa jest dzięki rozwiązaniom numerycznym modeli MES poddanych odpowiednim obciążeniom. Na każdym etapie analiz trzeba zdawać sobie sprawę z niepewności, które mogą wystąpić przy konstruowaniu założeń. Brincker i C. E. Ventura 2015 zestawili różnego rodzaju parametry występujące w modelu i stopień niepewności, który im towarzyszy na etapie modelowania. Niepewności te przytoczono w tabeli ???. Wyraźnie widać, że przyjęcie niektórych parametrów modelu w sposób bezkrytyczny może prowadzić do zupełnie nieodpowiednich rezultatów. Niektóre, związane np ze sztywnością szeroko rozumianych podpór czy połączeń śrubowych, mogą wypaczyć rezultaty i wprowadzić badacza w błąd na temat stanu i zachowania konstrukcji. Aby zbudować model, który będzie efektywnie odwzorowywał rzeczywiste zachowanie należy dołożyć wszelkich starań aby wyeliminować możliwe niepewności. Model taki może zostać poddany walidacji i kalibracji. Oba te pojęcia zostaną rozwinięte w następnych rozdziałach. Niemniej, aby model dostosować do rzeczywistych warunków należy mieć punkt odniesienia. W przypadku analizy statycznej takim odniesieniem mogą być pomiary statyczne ugięć, np. w trakcie próbnego obciążenia. W przypadku analizy dynamicznej, do porównania będą służyć charakterystyki modalne: częstotliwości i postaci drgań własnych oraz tłumienia. Parametry te można zaczerpnąć z literatury i doświadczenia na etapie projektowania. Na etapie badania rzeczywistej konstrukcji warto sięgnąć po narzędzie zwane identyfikacją modalną. Poniższy rozdział przytoczy podstawowe zagadnienia związane z analizą modalną, obliczeniami odpowiedzi dynamicznej i identyfikacją charakterystyk modalnych układu. Informacje te zostaną w dalszej części pracy zastosowane w obliczeniach numerycznych i optymalizacyjnych.

**GDZIEŚ DO WSTĘPU:** Drgania towarzyszą ludzkości od zawsze. Jakkolwiek trywialnie nie brzmiałoby to zdanie, wibracje występują w naszym otoczeniu przejawiając się często w sposób niepożądany: wywołują dyskomfort użytkowania, są odbierane jako hałas, powodują zjawiska zmęczeniowe czy w skrajnej sytuacji wywołują uszkodzenia i zniszczenia (Maia i Silva 1997). Wciąż postępujący rozwój nauki połączony z komputeryzacją i informatyzacją sprawiają, że używane materiały są coraz wytrzymalsze. Jednocześnie rośnie zapotrzebowanie na coraz większe, spekta-

Tablica 3.1: Niepewności najistotniejszych parametrów modeli numerycznych i modalnych na podstawie Brincker i C. E. Ventura 2015

Własność fizyczna	Poziom niepewności
Moduł sprężystości i gęstość masy dla stali i innych metali	1-5
Moduł sprężystości i gęstość masy dla betonu, drewna i zbrojonych włóknami materiałów	5-20
Warunki brzegowe z podłożem	10-nieskończoność
Połączenia śrubowe	10-nieskończoność
Połączenia spawane	2-10
Masa całkowita	1-5
Określana częstotliwość drgań własnych	0.1-0.05
Pomierzona odpowiedź	0.2-2
Określone postaci drgań własnych	2-5
Określone tłumienie	5-20
Współczynnik skalujący postaci drgań własnych	5-30

kularne konstrukcje. Te dwa czynniki połączone ze sobą sprawiają, że zachowanie dynamiczne struktury często decyduje o właściwościach użytkowych i wytrzymałościowych konstrukcji.

W odpowiedzi na zapotrzebowanie, w sposób naturalny rozwinięła się dziedzina nauki zajmująca się opisem i modelowaniem zjawisk dynamicznych. Podstawowym narzędziem służącym identyfikacji parametrów modalnych i zachowania dynamicznego jest analiza modalna (*eng. modal analysis*). Często Analiza modalna bywa określana jako identyfikacja modalna (*eng. modal identification*). (Zhang, Brincker i Palle Andersen 2004) w pracy definiuje identyfikację modalną jako gałąź szerszego pojęcia identyfikacji systemów, a jej celem jest budowa modelu matematycznego systemu dynamicznego poprzez pomiar i analizę zestawu danych wejściowych i wyjściowych. Z kolei Chmielewski i Zembaty 1998 zwięzle preczyzuje pojęcie modelu matematycznego dla zagadnień dynamiki budowli jako „źównanie lub zbiór równań, które opisują ruch modelu obliczeniowego”. Ewins 2000 podaje trzy główne cele przeprowadzania analizy modalnej:

- ocena źródła drgań i ich przebiegu,
- weryfikacja modeli teoretycznych i przewidywanie zjawisk dynamicznych,
- identyfikacja charakterystyk materiałowych ciała poddanego wymuszeniu dynamicznemu (np. tłumienie, tarcie, wytrzymałość zmęczeniowa).

Każdy z powyższych celów może być jedynie środkiem do osiągnięcia zupełnie innego celu. W rzeczywistości tak właśnie jest najczęściej o czym świadczy mnogość aplikacji analizy modalnej w bardzo różnych zagadnieniach dotyczących konstrukcji.

W poniższej pracy, tak jak w zdecydowanej większości innych opracowań, modele matematyczne będą oparte na trzech głównych zasadach (Maia i Silva 1997):

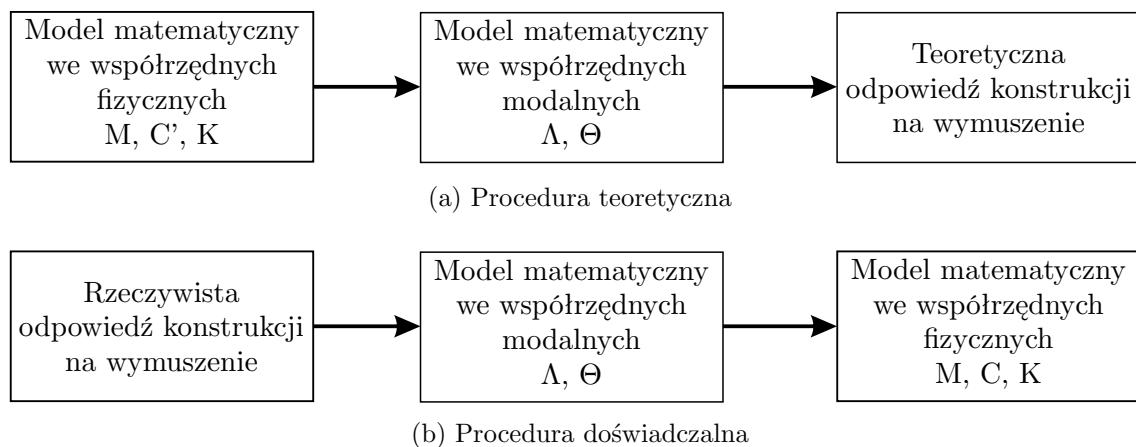
- system jest liniowy,
- obowiązuje zasada wzajemności Maxwell'a,
- system jest niezależny od czasu.

## 3.2 Klasyfikacja metod analizy modalnej

Identyfikacja modalna jest zbiorem technik, które są rozwijane dynamicznie od lat 60' XX w. Gwałtowny przyrost zainteresowania tym tematem wywołał głównie rozwój technik cyfrowych (Ewins 2000). Do tej pory powstało wiele różnych technik, których krótką klasyfikację z podziałem na główne kryteria podano w tym podrozdziale.

Matematyczne modele modalne mogą charakteryzować się różnym stopniem skomplikowania. Parametrami, które mogą opisywać model są postaci drgań własnych oraz powiązane z nimi częstotliwości i tłumienia modalne, a także masa i sztywność modalna. Z kolei metody analizy modalnej również różnią się pod względem informacji, którą mogą dostarczyć. Z tego względu wybór odpowiedniej metody powinien być świadomym i popartym przeglądem wielu technik, z których wybrana zostanie ta optymalna. Aspektami mogącymi wpływać na wybór metody są m.in.: czas potrzebny do implementacji (pierwszego użycia), informacje możliwe do uzyskania z modelu, możliwy wpływ założeń i uproszczeń, liczba parametrów potrzebnych do stworzenia modelu czy też stabilność rozwiązania. Przedstawiony podział opiera się na klasycznych kryteriach stosowanych przy klasyfikacji metod analizy modalnej. Istnieje wiele pozycji literaturowych, w których zainteresowany znajdzie dokładny opis wielu metod ze wskazówkami do ich użycia (Ewins 2000; Maia i Silva 1997; Zhang, Brincker i Palle Andersen 2004; Brincker i C. E. Ventura 2015; Rainieri i Fabbrocino 2014).

Najogólniej analizę modalną można podzielić na dwie główne gałęzie zależne od typu stosowanej procedury, jej danych wejściowych i rezultatów: teoretyczną i eksperymentalną (Lengvarský i Bocko 2013). W niniejszej pracy wielokrotnie używane będą oba podejścia, dlatego autor zdecydował się na krótki ich opis. Ogólny schemat procedur teoretycznej i doświadczalnej analizy modalnej pokazano na rysunku 3.1.



Rysunek 3.1: Porównanie procedur teoretycznej i doświadczalnej analizy modalnej

Metody teoretyczne opierają się na rozwiązaniach analitycznych lub numerycznych (rys. 3.1a). Badanie zachowania dynamicznego rozpoczyna się od definicji struktury, najczęściej za pomocą modelu dyskretnego opisanego macierzami  $M$ ,  $C'$ ,  $K$  oznaczającymi odpowiednio macierz mas, tłumienia i sztywności. Macierz tłumienia, w przypadku metod teoretycznych, jest to niewyznaczalna analitycznie macierz bazująca na doświadczeniach i rezultatach badań, stąd została oznaczona apostrofem  $C'$ . Za pomocą przekształceń matematycznych (skrótnie opisanych w dalszej

części tekstu) tworzony jest model matematyczny we współrzędnych modalnych. Uzyskiwane są charakterystyki modalne układu  $\Lambda$  i  $\Psi$  odpowiednio częstości drgań własnych, postaci drgań własnych i dodatkowo parametry opisujące przyjęty model tłumienia. Po uzyskaniu modelu matematycznego opisanego współrzędnymi modalnymi możliwe jest wyznaczenie odpowiedzi konstrukcji w czasie przy jej znanym wymuszeniu. Powyższy opis przedstawia pełną procedurę teoretyczną zakończoną wyznaczeniem odpowiedzi układu. Jednakże, jak wspomniano wcześniej, analiza modalna oraz jej metody są zróżnicowane z punktu widzenia skomplikowania. Zazwyczaj wybór metody zależy od zapotrzebowania na rezultaty. Zwłaszcza w przypadkach obliczeń inżynierskich często poprzestaje się na wyznaczeniu charakterystyk modalnych, które są następnie oceniane z punktu widzenia zagrożenia nadmiernymi efektami dynamicznymi. Metody analityczne znajdują realne zastosowanie w przypadku obiektów, których opis ciągły nie jest złożony, a dyskretny ograniczony jedynie do niewielkiej liczby stopni swobody. Rzeczywiste konstrukcje są układami o nieskończonej liczbie stopni swobody. Niemniej, sprowadzenie ich do skończonej (choć zazwyczaj bardzo dużej) liczby stopni swobody pozwala otrzymać zadowalająco poprawne rezultaty. W przypadku dużej liczby stopni swobody najszerzej stosowane są metody przybliżone opierające się obliczeniach numerycznych, takie jak: metoda różnic skończonych (MRS) czy metoda elementów skończonych (MES). Teoretyczna analiza modalna ma wiele zalet. Pozwala uzyskać rezultaty relatywnie szybko i tanio. Wynika to z powszechności narzędzi do modelowania i obliczania konstrukcji. W obrębie modelowania realnych struktur współczesne oprogramowanie pozwala budować modele numeryczne praktycznie bez ograniczeń. Stosowane preprocesory graficzne pozwalają użytkownikowi na odwzorowanie nawet skomplikowanych kształtów geometrycznych. Rosnąca moc obliczeniowa komputerów przestaje być ograniczeniem, zwłaszcza przy obliczeniach statycznych modeli o znaczającej liczbie stopni swobody. Niepodważalną zaletą jest również dowolność sposobów obciążania i modyfikacji modelu numerycznego. Pomimo wielu niewątpliwych zalet, teoretyczna analiza modalna posiada ograniczenia, z których należy zdawać sobie sprawę. Przede wszystkim jakość rezultatów zależy wprost od jakości wprowadzonych przez użytkownika danych. (Potrzebne przykłady). W przypadku zagadnień dynamicznych kolejnym bardzo ważnym ograniczeniem jest brak analitycznej możliwości określenia tłumienia konstrukcji. Taką możliwość daje jedynie badanie doświadczalne na rzeczywistej konstrukcji. Metody analityczne i numeryczne są obszernie opisane w wielu publikacjach (Chmielewski i Zembaty 1998; Chopra 2012; Rucka i Wilde 2014). W dalszej części rozdziału zaprezentowano absolutne podstawy i założenia analitycznej analizy dynamicznej.

Doświadczalna analiza w odróżnieniu od wersji teoretycznej angażuje do identyfikacji warsztat badawczy. Ewins 2000 definiuje ją jako zespół procesów związanych z badaniem elementów konstrukcji w celu uzyskania matematycznego opisu ich zachowania dynamicznego. Jest to definicja zbliżona do ogólniejszej podanej przez Zhang, Brincker i Palle Andersen 2004, ale stawia szczególnie mocny akcent na aspekt badawczy. Jak przedstawiono na rysunku (rys. 3.1b) ten typ analizy ma niejako odwrotny kierunek niż teoretyczna analiza modalna. W tym przypadku odpowiedź konstrukcji jest mierzona i na jej podstawie wyznaczane są wielkości opisujące model matematyczny:  $\Lambda$  i  $\Psi$ . Następnie na dopiero ich podstawie możliwe jest przekształcenie na model matematyczny wyrażony we współrzędnych fizycznych:  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}'$ ,  $\mathbf{K}$ . Doświadczalna analiza modalna dzieli się na dwie główne odnogi związane z zakre-

sem rejestrów danych w trakcie wykonywania eksperymentu. Pierwsza z nich to Eksperimentalna Analiza Modalna (EMA) (*eng. Experimental Modal Analysis*) wymaga pomiaru sił wymuszających oraz odpowiedzi konstrukcji na to wymuszenie. Druga to Operacyjna Analiza Modalna (OMA) (*eng. Operational Modal Analysis*), która estymuje parametry modalne wyłącznie na podstawie pomierzonych efektów nieznanego wymuszenia. Wymuszenie to jednak nie może być dowolne, a ograniczenia przedstawione zostaną w dalszej części pracy.

Kwestia pomiaru sił wymuszających wpływa na podstawowe różnice pomiędzy dwoma rodzinami metod: EMA i OMA. EMA najczęściej prowadzona jest w kontrolowanych warunkach i przez to pozwala dostarczyć bardziej szczegółowych i dokładniejszych informacji na temat zachowania dynamicznego konstrukcji. Jednakże w przypadku rzeczywistych konstrukcji inżynierskich (np. mosty) trudno jest stworzyć takie kontrolowane warunki. Obiekt musi zostać na czas pomiarów wyłączony z eksploatacji. Okazuje się to często niemożliwe z przyczyn proceduralnych, a na pewno kosztowne. Drugim zasadniczym ryzykiem jest potrzeba stworzenia takiego systemu wymuszenia, które wywoła mierzoną odpowiedź konstrukcji. W przypadku dużych konstrukcji inżynierskich może okazać się to trudne do zrealizowania ponieważ oddziaływanie środowiskowe mogą wywoływać efekty oddziaływań porównywalne z kontrolowanym wymuszeniem. OMA praktycznie pozbywa się negatywnych skutków potrzeby kontroli wymuszenia. Badania prowadzone mogą być przy normalnej eksploatacji, a losowe oddziaływanie środowiskowe zazwyczaj polepszają jakość wyników. Oczywiście odbywa się to kosztem dokładności rezultatów. Teoretyczne założenia metody są spełnione tylko w sposób przybliżony. Z tego względu serie pomiarowe zwykle muszą trwać znacznie dłużej, a interpretacja wyników wymaga większego doświadczenia.

### Połączenie obu typów analiz

Obszerność zagadnień dotyczących analizy teoretycznej i identyfikacji modalnej wypełnia wiele tomów specjalistycznej literatury. Mimo chęci nie sposób przytoczyć je wszystkie z zadowalającą dokładnością. W rozdziale opisano najważniejsze według autora pojęcia których zrozumienie było kluczowe do przeprowadzenia badań i analiz numerycznych.

## 3.3 Teoretyczna analiza modalna

Metody teoretycznej analizy modalnej są obszernie opisane w literaturze przedmiotu (cytowania). Ze względu na złożoność rzeczywistych konstrukcji, w praktyce mają one zastosowanie głównie w formie rozwiązań numerycznych. Według przedstawionej na rysunku 3.1a procedury metody teoretycznej analizy modalnej służą głównie dwóm celom: identyfikacji charakterystyk modalnych (częstotliwości i postaci drgań własnych) i wyznaczaniu odpowiedzi układu. Dla zrozumienia zagadnienia, metody analityczne najczęściej przedstawione są dla najprostszego przypadku układu z jednym stopniem swobody. Układ ten z reguły łatwo daje się uogólnić do układu o wielu stopniach swobody. Macierzowe równanie drgań wymuszonych dla tłumionego układu o skończonej liczbie stopni swobody przedstawiono we wzorze 3.1.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (3.1)$$

gdzie  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  to odpowiednio macierze mass, tłumienia i sztywności,  $\mathbf{x}$  to wektor współrzędnych uogólnionych (przemieszczeń lub obrotów punktu),  $\mathbf{F}(t)$  to wektor

uogólnionych sił wymuszających. Wzór 3.1 odpowiadający formule 3.2 pozbawionej składnika reprezentującego opory ruchu opisuje ruch nietłumiony układu.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (3.2)$$

Drgania swobodne są procesem fizycznym spowodowanym zaburzeniem stanu równowagi, przez zaistnienie warunków początkowych. Macierzowe równanie ruchu drgań swobodnych, tłumionych opisane jest wzorem 3.3, a nietłumionych wzorem 3.4. Od równań ruchu drgań wymuszonych, równania te różnią się brakiem składnika sił wymuszających.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (3.4)$$

Okazuje się, że parametry modalne systemu są ścisłe powiązane z rozwiązaniem algebraicznego problemu własnego równań drgań własnych.

### 3.3.1 Zagadnienie własne

Identyfikacja modalna modelu matematycznego polegająca na wyznaczeniu częstotliwości i postaci drgań własnych najczęściej sprawdza się do rozwiązywania zagadnienia własnego. Bardzo pozytywnym aspektem tej zależności jest to, że istnieje wiele prostych w aplikacji, wydajnych i dokładnych algorytmów pozwalających rozwiązać numerycznie zagadnienie własne (Golub i Van Loan 2013). Dzięki temu, właśnie ta metoda identyfikacji modalnej cieszy się największą popularnością wśród producentów oprogramowania do obliczania konstrukcji. Użytkownicy oprogramowania mogą bez większego wysiłku dokonać identyfikacji parametrów modalnych nawet złożonych modeli matematycznych.

#### Układ nietłumiony

Z reguły przyjmuje się, że rozwiązywanie zagadnienia własnego wykorzystuje równanie drgań swobodnych nietłumionych (3.4). Należy zaznaczyć, że drgania własne nie opisują procesu fizycznego, a są jedynie matematyczną idealizacją drgań układu. W przypadku nietłumionym, dla każdego z modów, układ oscyluje wokół położenia równowagi z częstotliwością drgań własnych, a wszystkie stopnie swobody drgają w tej samej fazie. Oznacza to, że każdy z punktów osiąga swoje ekstremalne położenie w tej samej chwili. Podobnie wszystkie punkty znajdują się w położeniu równowagi w tym samym czasie. Poniżej przedstawiono rozwiązanie dla nietłumionego układu  $N$  dynamicznych stopni swobody.

Założono rozwiązanie 3.4 w postaci  $\mathbf{x}(t) = \psi e^{j\omega t}$  gdzie  $\omega$  to częstotliwość drgań własnych,  $j = \sqrt{-1}$ , a  $\psi$  to niezerowy wektor postaci drgań własnych. Po podstawieniu rozwiązania i jego drugiej pochodnej ( $\ddot{\mathbf{x}}(t) = -\psi\omega^2 e^{j\omega t}$ ) do równia 3.4 otrzymamy równanie 3.5.

$$-\mathbf{M}\psi\omega^2 e^{j\omega t} + \mathbf{K}\psi e^{j\omega t} = \mathbf{0} \quad (3.5)$$

Dzieląc strony równania przez niezerową wartość  $e^{j\omega t}$  otrzymujemy układ liniowych równań algebraicznych:

$$-\mathbf{M}\omega^2\psi + \mathbf{K}\psi = \mathbf{0} \quad (3.6)$$

w którym dwie niewiadome do ustalenia to:  $\psi$  - niezerowy wektor postaci drgań własnych oraz  $\omega$  - częstość drgań własnych. Równanie to można zapisać w formie 3.7 z indeksami określającymi poszczególne mody drgań własnych. Liczba par odpowiadających sobie częstości  $\omega_i$  i postaci drgań własnych  $\psi_i$  jest równa liczbie  $N$  stopni swobody.

$$\omega_i^2 \mathbf{M} \psi_i = \mathbf{K} \psi_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.7)$$

Z kolei równanie 3.8 to reprezentacja uogólnionego problemu własnego, w którym  $\lambda_i$  to wartość własna, a  $u_i$  to wektor własny. Z porównania wzorów 3.7 i 3.8 wyraźnie widać powiązanie  $\lambda_i = \omega_i^2$ . Wynika z tego, że rozwiązanie numeryczne uogólnionego problemu własnego pozwala wprost uzyskać częstości ( $\lambda_i = \omega_i^2$ ) i postaci drgań własnych ( $\psi_i$ ).

$$\lambda_i \mathbf{A} u_i = \mathbf{B} u_i \quad (3.8)$$

Układ równań (3.7) ma nietrywialne rozwiązania tylko jeśli

$$\det[\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}] = 0 \quad (3.9)$$

Formuła 3.9 jest znana jako równanie charakterystyczne zagadnienia własnego. Jeśli rozwiniąć wyznacznik, otrzymamy wielomian stopnia  $N$  względem  $\omega_i^2$ . Pierwiastkami równania 3.9 są częstości drgań własnych  $\omega_i$ . Znając częstości własne  $\omega_i$  z równania 3.7 można obliczyć odpowiadające wektory własne  $\psi_i$  z dokładnością do stałego czynnika. Taki wynik bywa nieprzystępny w ocenie więc wektory poddawane mogą być normalizacji. Do najczęściej stosowanych metod normalizacji należy taka modyfikacja wektora tak aby maksymalna wartość bezwzględna spośród wszystkich elementu była równa jedności. Innym przykładem może być normalizacja wektorów tak aby wartość elementu dla danego stopnia swobody, we wszystkich wektorach była równa jedności.

Jeżeli macierze  $\mathbf{M}$  i  $\mathbf{K}$  ( $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$  wg 3.6) są symetryczne i dodatnio określone o wartościach rzeczywistych to wartości oraz wektory własne są również rzeczywiste. W przypadku konstrukcji budowlanych macierz  $\mathbf{K}$  jest zawsze dodatnio określona ponieważ warunki brzegowe zapewniają brak ruchu ciała jako bryły sztywnej. Nie jest to oczywiste dla innych niż budowlane struktur, takich jak np. samolot w locie (Chopra 2012).

Postaci drgań własnych (wektory własne) odpowiadające różnym częstościom własnym spełniają warunki ortogonalności. W przypadku gdy  $\omega_i \neq \omega_j$  prawdziwe są zależności 3.10. Ortogonalność wektorów własnych może być wykorzystana do weryfikacji obliczonych wektorów.

$$\psi_i^T \mathbf{K} \psi_j = 0 \quad \psi_i^T \mathbf{M} \psi_j = 0 \quad (3.10)$$

Obliczone z równania 3.9 wartości oraz wektory własne możemy przedstawić w postaci dwóch specjalnych macierzy.  $N$  obliczonych wartości własnych zestawionych w macierz diagonalną tworzy tak zwaną macierz widmową (3.11). Z kolei  $N$  wektorów własnych zestawionych kolumnowo nazywamy macierzą modalną (3.12).

$$\Omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_N^2 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\Psi = [\psi_{i,j}] = \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \dots & \psi_{1N} \\ \psi_{12} & \psi_{22} & \dots & \psi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{N1} & \psi_{N2} & \dots & \psi_{NN} \end{bmatrix} \quad 1 \leq i, j \leq N. \quad (3.12)$$

Dla układu o  $N$  stopniach swobody możemy wyznaczyć  $N$  par częstotliwości i postaci drgań własnych. Jednak w rzeczywistości rozwiążanie ogranicza się do wyznaczenia jedynie ograniczonej do kilkunastu (maksymalnie kilkuset) pierwszych par. Określenie "pierwszych" właściwe jest w przypadku kiedy wyznaczone częstotliwości uporządkujemy w szeregu rosnącym

$$0 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \dots \omega_{N-1} \leq \omega_N \quad (3.13)$$

W większości przypadków zagadnienie własne jest rozwiązywane numerycznie za pomocą maszyn cyfrowych. Metody numeryczne wykorzystują iteracyjne algorytmy do rozwiązywania zagadnienia własnego. Chopra 2012 definiuje trzy główne kategorie algorytmów:

- Metody iteracji wektora wykorzystujące właściwości równania (3.7),
- Metody transformacyjne korzystające z ortogonalności wektorów własnych,
- Metody iteracyjne wykorzystujące równanie charakterystyczne (3.9).

Dla dużych systemów korzystne okazuje się łączenie algorytmów z tej samej bądź różnych kategorii co podnosi wydajność metody rozwiązywania. W oprogramowaniu komercyjnym stosowane są złożone algorytmy takie jak metoda iteracji podprzestrzeni, metoda Lanczosa czy metoda gradientów Ritza. Wybór metody zależy również od wybranego solvera (silnika programu rozwiązywającego równania). Algorytmy te różnią się pod względem wydajności, maksymalnej dokładności rozwiązywania czy zbieżności. Ich wydajność może zależeć od liczby zadanych do wyznaczenia wartości własnych czy wielkości zadania. Więcej szczegółów odnośnie stosowanych metod rozwiązywania zagadnienia własnego można odnaleźć w literaturze (Bathe 2006; Wilson i Itoh 1983; Wilson 1997; Fialko 2000; Papadrakakis 1993; Hughes 1987; Chopra 2012). W przypadku dobrej jakości oprogramowania komercyjnego informacje na temat używanych algorytmów powinny dostępne w pomocy do programu.

## Układ tłumiony

Drgania swobodne tłumione układu określone są równaniem (3.3), które przytoczono ponownie poniżej:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (3.14)$$

Rozwiążanie tego równania jest uzależnione od postaci tłumienia: klasycznego lub nieklasycznego. Tłumienie klasyczne zwane również proporcjonalnym (*eng. classical damping, proportional damping*) występuje w przypadku kiedy spełnione jest równanie (3.15).

$$\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = \mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \quad (3.15)$$

Kiedy macierz  $\mathbf{C}$  jest diagonalna to warunek (3.15) jest spełniony. W takim przypadku wszystkie częstotliwości drgań własnych są rzeczywiste i identyczne do tych wyznaczonych dla układu nietłumionego. W przeciwnym mamy do czynienia

z tłumieniem nieklasycznym bądź nieproporcjonalnym (*eng. nonclassical damping, nonproportional damping*). Dla tej sytuacji macierz  $\mathbf{C}$  nie jest diagonalna, a wartości własne są zespółone. Szczegółowe informacje oraz metody rozwiązywania przypadków dynamiki konstrukcji nieklasycznie tłumionych podano w (Caughey i O'Kelly 1961; Chopra 2012). Inman i Lallement 1995 na przykładzie pokazali, że obliczanie struktur charakteryzujących się tłumieniem nieklasycznym za pomocą zagadnienia własnego bez uwzględnienia macierzy tłumienia możliwe prowadzić do błędnych rezultatów. Tak wyznaczone częstotliwości drgań będą różnić się od rzeczywistych, co może pociągnąć za sobą błędne wnioski odnośnie zakresu częstotliwości grożących rezonansem.

### 3.3.2 Transformacja do współrzędnych normalnych

Rozważmy ponownie równanie ruchu układu MDOF (3.14). Wiemy, że każdy wektor o długości  $N$  może być przedstawiony jako kombinacja liniowa  $N$  liniowo niezależnych wektorów. Przedstawmy zatem wektor przemieszczeń  $\mathbf{x}$  jako kombinację wektorów własnych  $\psi$ .

$$\mathbf{x} = \sum_{r=1}^N \psi_r q_r = \Psi \mathbf{q} \quad (3.16)$$

gdzie współczynniki  $q_r$  nazywane są współrzędnymi normalnymi (*eng. modal coordinates, normal coordinates*) i  $\mathbf{q} = \langle q_1 \ q_2 \ \dots \ q_N \rangle^T$ . Założymy, że zagadnienie własne zostało rozstrzygnięte i wyznaczylismy macierz modalną  $\Psi$  (3.12). Aby uzyskać wartości współczynników  $q_n$  dla danego  $\mathbf{x}$ , przemnożmy obie strony równania 3.16 przez  $\psi_n^T \mathbf{M}$ :

$$\psi_n^T \mathbf{M} \mathbf{x} = \sum_{r=1}^N (\psi_n^T \mathbf{M} \psi_r) q_r \quad (3.17)$$

Ortogonalność wektorów własnych (3.10) sprawia, że wszystkie składniki powyżej sumy są równe 0 poza tymi, w których  $r = n$ . Pomińmy więc znak sumy i zapiszmy

$$\psi_n^T \mathbf{M} \mathbf{x} = (\psi_n^T \mathbf{M} \psi_n) q_n \quad (3.18)$$

$$q_n = \frac{\psi_n^T \mathbf{M} \mathbf{x}}{\psi_n^T \mathbf{M} \psi_n} \quad (3.19)$$

Transformacja do współrzędnych normalnych jest istotnym elementem przewidywania odpowiedzi wymuszonych, liniowych układów MDOF z tłumieniem proporcjonalnym (p. 3.3.4).

### 3.3.3 Odpowiedź systemów dynamicznych o jednym stopniu swobody

Przegląd metod pozwalających wyznaczyć odpowiedź konstrukcji poddanej wymuszeniu wypada zacząć klasycznie od układu z jednym stopniem swobody. W przypadku liniowego układu SDOF obciążonego siłą zewnętrzną, równanie ruchu jest liniowym równaniem różniczkowym drugiego rzędu (3.20). Znając warunki początkowe  $x(0)$  i  $\dot{x}(0)$  możemy traktować zadanie jako w pełni sformułowane. Dla konstrukcji wstępnie nieobciążonej dynamicznie przemieszczenie i prędkość początkowe

można przyjąć jako równe zeru.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (3.20)$$

Dla tak sformułowanego problemu istnieją cztery podstawowe metody wyznaczenia odpowiedzi dynamicznej:

- klasyczne rozwiązywanie równań różniczkowych,
- wykorzystanie całki Duhamela,
- rozwiązywanie w dziedzinie częstotliwości,
- wykorzystanie metod numerycznych.

Dla porządku powyższe metody zostaną w dalszej części krótko opisane. Dokładny opis metod jest przedstawiony w wielu podstawowych pozycjach literaturowych dotyczących dynamiki budowli (Clough i Penzien 1975; Chmielewski i Zembaty 1998; Chopra 2012).

### Metoda klasyczna

Rozwiązywanie liniowego równania różniczkowego o stałych współczynnikach jakim jest równanie ruchu składa się z rozwiązywania całki ogólnej i szczególnej, a następnie zsumowania ich. Równanie ruchu jest rzędu drugiego stąd do wyznaczenia pozostają dwie zmienne całkowania. Z kolei do ich wyznaczenia wykorzystane są warunki początkowe. **OGRANICZENIA**

### Całka Duhamela

Metoda rozwiązywania równania ruchu układu SDOF za pomocą całki Duhamela polega na przekształceniu funkcji obciążenia  $f(t)$  na sekwencję nieskończonie krótkich impulsów. Przykładając impulsowe, jednostkowe wymuszenie (delta Diraca) do układu (3.20), dla odpowiednich warunków początkowych otrzymuje się rozwiązanie w postaci odpowiedzi impulsowej, inaczej zwanej impulsową funkcją przejścia (*eng. unit response function*). Aby uzyskać odpowiedź układu w czasie  $t$  sumuje się wszystkie odpowiedzi impulsowe do chwili czasowej  $t$ . W przypadku całkowalnej funkcji wymuszenia, całka Duhamela może być alternatywą do rozwiązywania metodą klasyczną. Dla eksperymentalnych funkcji wymuszenia, całkę Duhamela można wyznaczyć metodami numerycznymi. W tym przypadku odpowiedź będzie wyznaczona w dyskretnych chwilach czasowych. Należy jednak wspomnieć, w przypadku angażowania metod numerycznych całka Duhamela nie jest najwydajniejszym rozwiązaniem. Dodatkowo, ze względu na wykorzystywaną superpozycję, rozwiązanie to jest ograniczone wyłącznie do układów liniowych.

### Metoda przejścia do dziedziny częstotliwości

Metoda przejścia do dziedziny częstotliwości (*eng. frequency-domain method*) wykorzystuje właściwości przekształceń Laplace'a lub Fourier'a. Dla układu SDOF (3.20) wykonuje się wybrane przekształcenie funkcji wymuszenia  $f(t)$  uzyskując  $F(\omega)$ .  $F(\omega)$  można określić jako amplitudy wszystkich składników harmonicznych, które składają się na wymuszenie  $f(t)$ . Przekształcenie  $X(\omega)$  rozwiązania równania różniczkowego  $x(t)$  można z kolei opisać następująco

$$X(\omega) = H(\omega)F(\omega) \quad (3.21)$$

gdzie  $H(\omega)$  to odpowiedź zespolona w dziedzinie częstotliwości nazywana też funkcją przenoszenia lub transmitancją (*eng. complex frequency-response function (FRF)*). Funkcja przenoszenia  $H(\omega)$  opisuje odpowiedź układu w dziedzinie częstotliwości przy wymuszeniu harmonicznym. Ostatnim krokiem metody jest wyznaczenie rozwiązania  $x(t)$  podając  $X(\omega)$  odwrotnemu przekształceniu (Fourier'a bądź Laplace'a). Tak uzyskany rezultat  $x(t)$  można traktować jako określenie odpowiedzi harmonicznych układu na każdy z składników wymuszenia. Te cząstkowego odpowiedzi te są następnie sumowane w celu uzyskania całkowitej odpowiedzi  $x(t)$ . Ponownie, metoda ta bezpośrednio może być stosowana tylko dla prostych funkcji wymuszenia  $f(t)$ . Jeżeli funkcja wymuszenia jest określona numerycznie, odpowiednie przekształcenia można przeprowadzić np. z użyciem algorytmu dyskretnej transformaty Fouriera w wariancie szybkiej transformaty Fourier'a (*eng. Fast Fourier Transform (FFT)*).

### Metody numeryczne

Zastosowanie powyższych trzech metody wyznaczania odpowiedzi dynamicznej ograniczone jest tylko do układów liniowych. Wspomniano również, że stają się niepraktyczne lub wręcz niemożliwe do zastosowania w przypadku skomplikowanych, zmiennych w czasie funkcji wymuszenia  $f(t)$ . W takich niekorzystnych okolicznościach z pomocą przychodzą metody numeryczne. Co więcej, okazuje się, że w przypadkach liniowych układów metody te są również konkurencyjne dla metod analitycznych.

Stworzono wiele metod i algorytmów numerycznych służących skutecznemu rozwiązaniu równań ruchu. Powstało również wiele pozycji traktujących o tym zagadnieniu (LITERATRA). Z tego względu przytoczono tylko podstawowe pojęcia i założenia dotyczące istoty rozwiązań numerycznych.

Metody numeryczne w głównej mierze opierają się na mechanizmie kroku czasowego (*eng. time-step*) (p. 3.3.4). Zwykle nie jest to rozwiązanie ścisłe. Metody dostarczają jedynie przybliżonych rozwiązań, dlatego też muszą spełniać następujące kryteria:

- zbieżności (*eng. convergence*) - wraz ze zmniejszeniem kroku czasowego, rozwiązanie powinno zmierzać do rozwiązania dokładnego,
- stabilności (*eng. stability*) - rozwiązanie powinno być stabilne pomimo występowania błędów zaokrągleń,
- dokładności (*eng. accuracy*) - rozwiązanie powinno być dostatecznie bliskie rozwiązanie dokładnego.

Wśród metod numerycznych, które okazały się skuteczne w rozwiązaniach problemów możemy wyróżnić trzy główne:

- metoda interpolacji funkcji wymuszającej,
- metoda różnic skończonych,
- metoda średniego lub liniowego przyspieszenia w przedziale różnicowym, oparte na metodzie Newmark'a.

Pomimo, że powyższe metody są opisane dla układu SDOF, są łatwo uogólniane i praktycznie wykorzystywane do obliczania układów MDOF. Algorytm metody Newmark'a jest najpowszechniej używany w obliczeniach konstrukcji inżynierskich oraz został wykorzystany w niniejszej pracy. Stąd w następnym podrozdziale zawarto zwięzły opis jego działania.

### 3.3.4 Odpowiedź systemów dynamicznych o skończonej liczbie stopni swobody (MDOF)

Systemy o skończonej liczbie stopni swobody mogą charakteryzować się tłumieniem klasycznym (proporcjonalnym) bądź nieklasycznym (nieproporcjonalnym). Mogą być liniowe lub nieliniowe geometrycznie lub materiałowo. Czynniki te mają wpływ na wybór metody przewidywania odpowiedzi takiego układu. Macierzowe równanie ruchu dla układu o  $N$  stopniach swobody możemy zapisać jako  $N$  równań różniczkowych w formie (3.22)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (3.22)$$

Modelem z tłumieniem proporcjonalnym, z wystarczającym przybliżeniem, można opisać większość badanych struktur. Odpowiedź układów ograniczonych do kilku stopni swobody może być wyznaczana przez rozwiązywanie równania różniczkowego 3.22. W przypadku większej liczby stopni swobody zwykle wykorzystuje się metody numeryczne. Jak wiemy z rozdziału 3.3, dla takich układów zawsze możliwe jest wyznaczenie częstotliwości i postaci drgań własnych. Co więcej, opisujące je macierzowe równanie ruchu można przekształcić za pomocą metody transformacji własnej do postaci zależnej od współrzędnych modalnych. W takiej formie równanie to jest zbiorem równań rozwikłanych. Z tego względu można wyznaczyć odpowiedź dla każdego modu (zestawu jednej częstotliwości i postaci własnej oraz towarzyszącego tłumienia) osobno, a następnie złożyć ją w celu wyznaczenia odpowiedzi całkowitej. Dodatkowo, każda odpowiedź modalna może być wyznaczona jako funkcja czasu przez analizę układu SDOF. Równania SDF mogą być oczywiście rozwiązane wszystkimi przytoczonymi wcześniej wymienionymi metodami - w tym numerycznymi.

W przypadku kiedy mamy do czynienia z układem o tłumieniu nieproporcjonalnym, klasyczne parametry modalne nie mogą być wyznaczone, a równania ruchu nie mogą być rozwikłane. Takie systemy można analizować dwiema metodami: poprzez przekształcenie równań ruchu na wektory własne obliczone w zespołolonym zagadnieniu własnym lub poprzez bezpośrednie całkowanie nieroziwkłanych równań różniczkowych. Druga metoda wykorzystuje metody numeryczne co wynika z braku zamkniętych rozwiązań analitycznych nawet dla analitycznie opisanych funkcji obciążenia. Metody numeryczne muszą być stosowane również w przypadku kiedy układ jest nieliniowy (niezależnie czy materiałowo, czy geometrycznie). W przypadku braku założenia o liniowości wybór metody nie jest uzależniony od tego, czy tłumienie jest proporcjonalne, czy też nie jest.

Zachowując porządek i kompletność wynodu poniżej przedstawiono krótki zarys dwóch podstawowych metod wyznaczania odpowiedzi układów dyskretnych o skończonej liczbie stopni swobody.

#### Metoda superpozycji modalnej

Rozpatrzmy układ MDOF, liniowy o tłumieniu proporcjonalnym dany równaniem 3.22. Wiemy, że wektor przemieszczeń  $\mathbf{x}$  może być zapisany za pomocą współrzędnych normalnych (p. 3.3.2) co powtórzono dla wygody poniżej:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{r=1}^N \boldsymbol{\psi}_r q_r(t) = \boldsymbol{\Psi} \mathbf{q}(t) \quad (3.23)$$

Podstawmy ?? do równania 3.22

$$\sum_{r=1}^N \mathbf{M}\psi_r \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^N \mathbf{C}\psi_r \dot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^N \mathbf{K}\psi_r q_r(t) = \mathbf{F}(t) \quad (3.24)$$

Następnie przemnóżmy z lewej strony każdy składnik przez  $\psi_n^T$  otrzymując:

$$\sum_{r=1}^N \psi_n^T \mathbf{M}\psi_r \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^N \psi_n^T \mathbf{C}\psi_r \dot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^N \psi_n^T \mathbf{K}\psi_r q_r(t) = \psi_n^T \mathbf{F}(t) \quad (3.25)$$

Podobnie jak w punkcie 3.3.2, ortogonalność wektorów własnych  $\psi$  sprawia, że wszystkie składniki sum, w których  $r \neq n$ , zerują się. Możemy więc zapisać zredukowane równanie w postaci

$$(\psi_n^T \mathbf{M}\psi_n) \ddot{q}_n(t) + (\psi_n^T \mathbf{C}\psi_n) \dot{q}_n(t) + (\psi_n^T \mathbf{K}\psi_n) q_n(t) = \psi_n^T \mathbf{F}(t) \quad (3.26)$$

Zauważmy, że iloczyny zawarte w nawiasach są skalarami. Uprośćmy więc zapis do następującej formy:

$$\mathcal{M}_n \ddot{q}_n(t) + \mathcal{C}_n \dot{q}_n(t) + \mathcal{K}_n q_n(t) = \mathcal{F}_n(t) \quad (3.27)$$

gdzie:

$$\mathcal{M}_n = \psi_n^T \mathbf{M}\psi_n \quad \mathcal{C}_n = \psi_n^T \mathbf{C}\psi_n \quad \mathcal{K}_n = \psi_n^T \mathbf{K}\psi_n \quad \mathcal{F}_n(t) = \psi_n^T \mathbf{F}(t) \quad (3.28)$$

Okazuje się, że wszystkie powyższe przekształcenia doprowadzają do tego, że (3.27) jest równaniem o jednym stopniu swobody dla  $n$ -tej współrzędnej normalnej odpowiadającej  $n$ -tej postaci drgań. Z tego względu współczynniki  $\mathcal{M}_n$ ,  $\mathcal{C}_n$ ,  $\mathcal{K}_n$ ,  $\mathcal{F}_n(t)$  nazywane są odpowiednio uogólnioną masą, uogólnionym tłumieniem, uogólnioną sztywnością i uogólnioną siłą dla  $n$ -tej postaci własnej (*eng. generalized mass, generalized damping, generalized stiffness, generalized force*). Równanie to możemy rozwiązać wszystkimi metodami dotyczącymi układów SDOF przedstawionymi w (p. 3.3.3). Warto też zwrócić uwagę, że wartości  $\mathcal{M}_n$ ,  $\mathcal{C}_n$ ,  $\mathcal{K}_n$ ,  $\mathcal{F}_n(t)$  są uzależnione jedynie od pojedynczej postaci drgań  $\psi_n$ . Naturalnie więc, jeśli znamy tylko jeden mod  $\psi_n$ , możemy wyznaczyć odpowiadający mu parametr  $q_n$  bez znajomości pozostałych modów. Jeśli współczynniki normalne  $q_n$  zostały wyznaczone dla  $N'$  wybranych (najczęściej kilku istotnych) modów, to wkład  $n$ -tego modu w całkowitą wartość przemieszczeń  $\mathbf{x}(t)$  wyznaczyć można następująco

$$\mathbf{x}_n(t) = \psi_n q_n(t) \quad (3.29)$$

a wykorzystując równania (3.23) i (3.29) obliczyć przemieszczenie całkowite

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{r=1}^{N'} \mathbf{x}_n(t) \quad (3.30)$$

Sumowanie wkładu poszczególnych postaci drgań w przemieszczenie całkowite jest par excellence superpozycją. Stąd też nazwa: "metoda superpozycji modalnej". Należy wspomnieć o paru istotnych założeniach mogących wpłynąć na zastosowanie tej metody. Jak już wcześniej wspomniano, może być ona wykorzystana tylko w układach liniowych (ze względu na superpozycję) i tłumionych proporcjonalnie. W przypadku tłumienia nieproporcjonalnego przekształcenie równania (3.25) do (3.26) nie będzie prawdziwe. Warto również pamiętać, że wynikowe przemieszczenia  $\mathbf{x}(t)$  są niezależne od normalizacji wektorów własnych, natomiast współrzędne normalne  $q_n(t)$  są od niej ścisłe zależne.

### Metoda całkowania bezpośredniego równań ruchu - Newmarka

Metoda Newmarka jest algorytmem opartym na koncepcji kroku czasowego i metodach numerycznych. Zgodnie z koncepcją kroku czasowego całkowity czas podzielony jest na serię kroków czasowych, zwykle o stałej wartości  $\Delta t$ . Polega on na dyskretyzacji siły wymuszającej i odpowiedzi układu poprzez określenie ich wyłącznie w wybranych chwilach czasowych. Rozpatrzmy ponownie równanie ruchu MDOF:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}(t) \quad (3.31)$$

Dokonajmy dyskretyzacji i przedstawmy siłę wymuszającą  $\mathbf{F}(t)$  określoną dla  $t \in <0, t_k>$  jako zestaw dyskretnych wartości w chwilach czasowych  $t_i$ :

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}(t_i) \quad i = 0, 1, 2 \dots N-1, N \quad (3.32)$$

gdzie  $t_N \leq t_k$ . Krokiem czasowym nazywamy różnice pomiędzy kolejnymi zdyskretyzowanymi chwilami czasowymi:

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i \quad (3.33)$$

Jest on zazwyczaj przyjmowany jako stały, ale nie jest to konieczne. Tak jak wymuszenie, odpowiedź również podlega dyskretyzacji w chwilach  $t_i$ , a więc równanie ruchu można zapisać w nowej formie

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}_i + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}_i + \mathbf{K}\mathbf{x}_i = \mathbf{F}_i \quad (3.34)$$

Znając warunki początkowe  $\mathbf{x}(0)$  i  $\dot{\mathbf{x}}(0)$  algorytmy wykorzystywane w metodach numerycznych potrafią wyznaczyć rozwiązania równania w kolejnych krokach  $i = 1, 2 \dots N-1, N$ .

Rodzina metod numerycznych opartych na koncepcji kroku czasowego została rozwinięta przez Nathana M. Newmarka (Newmark 1959). Wykorzystuje ona dwa podstawowe równania:

$$\dot{\mathbf{x}}_{i+1} = \dot{\mathbf{x}}_i + [(1-\gamma)\Delta t]\ddot{\mathbf{x}}_i + (\gamma\Delta t)\ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \quad (3.35a)$$

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + (\Delta t)\dot{\mathbf{x}}_i + [(0.5-\beta)(\Delta t)^2]\ddot{\mathbf{x}}_i + (\beta(\Delta t)^2)\ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \quad (3.35b)$$

gdzie współczynniki  $\beta$  i  $\gamma$  definiują zmienność przyspieszeń w trakcie kroku czasowego i istotnie wpływają na stabilność i dokładność metody. Ze względu na oba te warunki, przy braku modyfikacji algorytmu, parametry powinny mieć następujące wartości:  $\gamma = \frac{1}{2}$ , a  $\frac{1}{6} \leq \beta \leq \frac{1}{4}$ . Na skrajach zalecanego przedziału wartości parametru  $\beta$  występują dwa przypadki szczególne, w których przyspieszenie ma określony charakter w kroku czasowym:

- przyspieszenie stałe -  $\gamma = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = \frac{1}{4}$
- przyspieszenie zmienne liniowo -  $\gamma = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = \frac{1}{6}$

[noitemsep] Metoda numeryczna do wyznaczenia trzech niewiadomych  $\ddot{\mathbf{x}}_{i+1}$ ,  $\dot{\mathbf{x}}_{i+1}$  i  $\mathbf{x}_{i+1}$  wymaga układu trzech równań macierzowych. Zatem dwa zaproponowane równania 3.35a i 3.35b, połączone z równaniem równowagi (3.34) zapewnionym na końcu kroku czasowego, pozwalają wyznaczyć przemieszczenia, prędkość i przyspieszenia w chwili  $t_{i+1}$ . Ze względu na występowanie w równaniach (3.35) składników w chwili czasowej  $i+1$  po obu stronach równania, algorytm musi mieć charakter iteracyjny. Jednakże istnieją modyfikacje równań, które dla układów liniowych pozwalają rozwiązać układ w jednym kroku.

### 3.4 Mała dawka tłumienia

Drgania układów rzeczywistych nierozerwalnie związane są tłumieniem. Wśród polskich autorów obszerne rozważania na temat tłumienia drgań mostów przeprowadził Salamak 2003. Określa on tłumienie drgań jako rozproszenie energii mechanicznej drgającego układu. Tłumienie można podzielić ze względu na źródło na konstrukcyjne i zewnętrzne. W przypadku liniowych układów zazwyczaj przyjmuje się tłumienie klasyczne, proporcjonalne opisane jak w równaniu 3.22. Obecnie nie ma możliwości analitycznego wyznaczenia wartości tłumienia dla projektowanej konstrukcji. Istnieją opracowania poparte badaniami informujące o zalecanych wartościach tłumienia jakie należy przyjąć przy projektowaniu danej konstrukcji. Przykładowe wartości oraz wzory empiryczne można odnaleźć w pracach (Salamak 2003; Frýba 1999; Bachmann i in. 2012; Yamaguchi i Ito 1997). W literaturze można odnaleźć kilka miar tłumienia. Pierwszą z nich jest liczba tłumienia (*eng. damping ratio*) nazywana również ułamkiem tłumienia lub tłumieniem względnym. Definiuje się ją jako stosunek współczynnika tłumienia wiskotycznego do tłumienia krytycznego. Dla jednego stopnia swobody (por. (3.20)) liczbę tłumienia można zapisać formułą (3.36).

$$\zeta = \frac{c}{c_{kr}} = \frac{c}{2m\omega} \quad (3.36)$$

Tłumieniem krytycznym nazywamy wartość tłumienia, po przekroczeniu której ruch staje się aperiodyczny. Dla tłumienia równego tłumieniu krytycznemu liczba tłumienia jest równa 1. W przypadku mostów liczba tłumienia zwykle nie przekracza 10% (Salamak 2003).

Inną miarą tłumienia jest Logarytmiczny Dekrement Tłumienia (LDT). Określa się go jako logarytm naturalny stosunku dwóch kolejnych amplitud drgań swobodnych danego modu (3.37).

$$LDT = \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} \quad (3.37)$$

Przy małym tłumieniu wartości dwóch kolejnych amplitud mogą różnić się nieznacznie, a więc błęd powstający przy odczycie może być duży. W takim przypadku zalecane jest wyznaczenie średniego dekrementu z odległszych w czasie amplitud. Odczytując wartość  $n$ -tej amplitudy i  $n+m$ -tej amplitudy wartość LDT można wyznaczyć z równania:

$$LDT = \frac{1}{m} \ln \frac{a_n}{a_{n+m}} \quad (3.38)$$

Zależność pomiędzy LDT, a liczbą tłumienia określona jest następująco:

$$LDT = \ln \frac{q(t)}{q(t+T)} = \ln \frac{e^{-\zeta\omega t}}{e^{-\zeta\omega(t+T)}} = \ln e^{\zeta\omega T} = \zeta\omega T = \zeta\omega \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3.39)$$

gdzie:  $\omega_d$  - częstotliwość drgań tłumionych ( $\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}$ ),  $T$  - okres drgań tłumionych  $T = \frac{2\pi}{\omega_d}$ . W przypadku drgań konstrukcji budowlanych liczba tłumienia jest z reguły niewielka ( $\zeta < 0.1$ ). Z tego względu częstotliwość drgań własnych tłumionych i nietłumionych są zbliżone. W takim przypadku zależność pomiędzy LDT, a liczbą tłumienia często upraszcza się do postaci przybliżonej:

$$LDT \approx 2\pi\zeta \quad (3.40)$$

Spośród metod pozwalających na uwzględnienie tłumienia w obliczeniach najpopularniejszą jest tłumienie masowo-sztynnościowe Rayleigh'a (Chopra 2012). Opiera się ono na stworzeniu macierzy tłumienia  $\mathbf{C}$  bazując na liniowej kombinacji macierzy mas  $\mathbf{M}$  i macierzy sztywności  $\mathbf{K}$  (por. 3.22):

$$\mathbf{C} = a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{K} \quad (3.41)$$

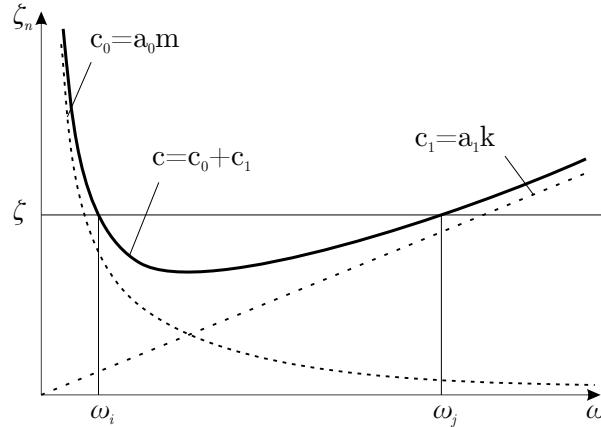
W przypadku zastosowania tłumienia Rayleigh'a liczba tłumienia odpowiadająca danemu modowi wyznaczona jest z wzoru:

$$\zeta_n = \frac{a_0}{2} \frac{1}{\omega_n} + \frac{a_1}{2} \omega_n \quad (3.42)$$

Z kolei przyjmując liczbę tłumienia o określonej wartości można wyznaczyć wartości parametrów  $a_0$  i  $a_1$ . Dla danych częstości  $\omega_i$  i  $\omega_j$  współczynniki Rayleigh'a wyznaczyć można z wzorów (3.43).

$$a_0 = \zeta \frac{2\omega_i \omega_j}{\omega_i + \omega_j} \quad a_1 = \zeta \frac{2}{\omega_i + \omega_j} \quad (3.43)$$

Wpływ składowych macierzy tłumienia pochodzących od macierzy mas i macierzy sztywności najlepiej zobrazować na przykładzie jednego stopnia swobody. Jakościowo wpływ przedstawiono na rysunku 3.2. Z rysunku 3.2 można wysnuć przydatne



Rysunek 3.2: Wizualizacja wpływu masy i sztywności na macierz tłumienia według Rayleigh'a

z praktycznego punktu widzenia wnioski. Założone tłumienie  $\zeta$  jest spełnione jedynie dla dwóch użytych w formułach 3.43 częstości  $\omega_i$  i  $\omega_j$ . Składnik  $c_1 = a_1 k$  wzrasta liniowo wraz ze wzrostem częstości. Z kolei składnik  $c_0 = a_0 m$  maleje nieliniowo wraz ze wzrostem częstości. Sumaryczna wartość obu składników z reguły gwarantuje dla wąskiego przedziału częstości  $\langle \omega_i, \omega_j \rangle$  tłumienie zbliżone do zakładanego.

## 3.5 Operacyjna analiza modalna (OMA)

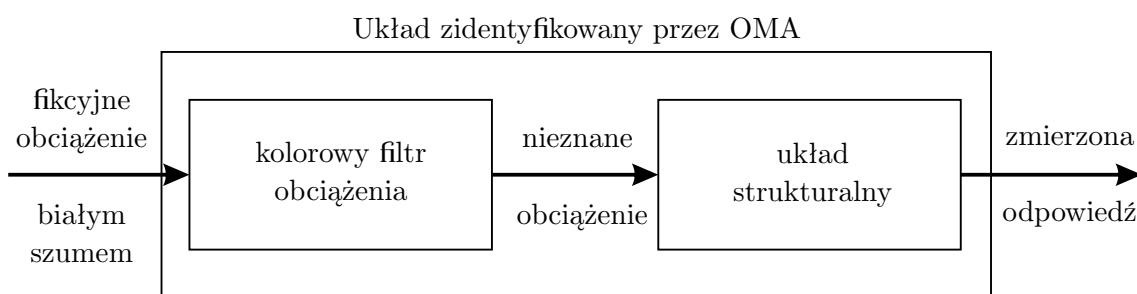
### 3.5.1 Koncepcja OMA

W ogólności doświadczalna analiza modalna to proces korelacji charakterystyk dynamicznych modelu matematycznego, z fizycznymi właściwościami systemu opisanego

rezultatami pomiarów. Przypomnijmy, że w OMA do procesu estymacji parametrów modalnych używane są tylko pomiary odpowiedzi konstrukcji. Różni ją to od EMA, w której mierzone są zarówno wymuszenia jak i odpowiedź. Fundamentem wszystkich metod OMA jest założenie, że badana struktura obciążona jest wymuszeniem o widmie zbliżonym do białego szumu. Oznacza to, że energia konstrukcji jest rozłożona w szerokim paśmie częstotliwości, które zawiera wszystkie interesujące badacza mody do identyfikacji. Z oczywistych względów idealne wymuszenie o charakterystyce białego szumu nie jest możliwe. Większość metod radzi sobie z tym brakiem, jednak najważniejsze jest, żeby wszystkie interesujące mody były odpowiednio wzbudzone, tak aby ich wkład był wychwycony przez przyrządy pomiarowe. Brincker i C. E. Ventura 2015 tłumaczą tę koncepcję za pomocą fikcyjnego, kolorowego filtra obciążenia. Zaproponowano, że kolorowe obciążenie może być traktowanego jako wynik obciążenia kolorowego filtra (zgodnego z obciążeniem) przez idealnie biały szum. Udowodniono, że takie podejście nie zmienia fizycznych mody systemu. Należy jednak pamiętać, że metody OMA w tym przypadku dokonują identyfikacji modalnej zarówno struktury fizycznej, jak i filtra obciążenia. Koncepcje zaprezentowano na rysunku 3.3. Najważniejszą konsekwencją jest możliwość występowania wśród wyników identyfikacji nie tylko mody związkowych z konstrukcją, ale też wynikających z warunków obciążenia. Należy pamiętać również, że pomierzone wartości obarczone są szumem pomiarowym. Nie niesie on żadnej istotnej, fizycznej informacji, ale jest nieunikniony w trakcie rzeczywistych pomiarów. Tak więc wynik identyfikacji zawiera w sobie trzy składowe:

- parametry modalne związane z drganiami własnymi konstrukcji,
- myślowy filtr obciążenia, kolorujący biały szum do rzeczywistego, nieznanego obciążenia,
- szum pomiarowy.

W idealnych warunkach, kiedy filtr obciążenia ma biały kolor, a szum pomiarowy byłby zerowy, OMA zidentyfikuje wyłącznie mody konstrukcji.



Rysunek 3.3: Schemat układu identyfikowanego przez OMA przy koncepcji kolorowego filtra obciążenia

Operacyjna Analiza Modalna jest obwarowana pewnymi założeniami. Są one rozwinięciem założeń podanych w punkcie 3.1. Układ poddany analizie OMA musi spełniać następujące warunki:

- liniowość - odpowiedź układ na zadaną kombinację obciążen, jest sumą odpowiedzi odpowiadających każdemu obciążeniu traktowanemu osobno - zasada superpozycji,
- stacjonarność - charakterystyki dynamiczne konstrukcji nie zmieniają się w czasie. Innymi słowy, współczynniki równań różniczkowych opisujących odpowiedź struktury są niezależne od czasu.
- obserwowalność - dobór lokalizacji punktów pomiarowych musi być tak zaprojektowany, żeby był w stanie dostrzec interesujące obserwatora mody. Niezależnie od tego w trakcie analizy spełnione muszą być również kryteria obserwowalności sterowalności opisane w punkcie 3.6.2.

WARUNKI DOTYCZĄCE WYMUZENIA? Rainieri i Fabbrocino 2014

### 3.5.2 Metody operacyjnej analizy modalnej

Metody identyfikacji modalnej dzielą się na dwa główne rodzaje związane z dziedziną w której działa algorytm:

- metody w dziedzinie czasu (*eng. time-domain methods (TDM)*),
- metody w dziedzinie częstotliwości (*eng. frequency-domain methods (FDM)*).

Metody EMA w dziedzinie czasu wykorzystują do estymacji parametrów modalnych funkcje odpowiedzi impulsowej (*eng. impulse response function (IRF)*). W OMA, nośnikiem informacji o odpowiedzi swobodnej układu (*eng. free decays*) są funkcje korelacji (*eng. correlation functions*). Identyfikacja parametrów polega w tym przypadku na dopasowaniu parametrów modalnych do informacji zawartej w funkcjach korelacji. Stosowane są do tego modele parametryczne wykorzystujące techniki regresji. Główną różnicą pomiędzy dostępnymi algorytmami TD jest właśnie zastosowana metoda regresji. Zasadniczo wszystkie metody TD stosowane w EMA mogą być użyte w OMA właśnie z zastosowaniem funkcji korelacji.

Podobną analogię jak w metodach TD można zauważać dla metod w dziedzinie częstotliwości. W algorytmach EMA w dziedzinie częstotliwości bazą do identyfikacji są funkcje odpowiedzi częstotliwościowej (*eng. frequency-response function (FRF)*). W OMA rolę tę pełnią funkcje gęstości widmowej (*eng. spectral density functions*).

Przed wyborem dziedziny w której badacz chce się poruszać, warto poznać elementy charakterystyczne dla grupy algorytmów TD i FD. Podstawową wadą metod TD jest to, że wszystkie mody, które występują w sygnale są ujęte w funkcjach korelacji. W konsekwencji wszystkie mody zawsze są rozważane w trakcie rozwiązania problemu. Z kolei ich zaletą, w porównaniu do metod FD, jest większa odporność na wystąpienie błędów systematycznych w estymowanych parametrach modalnych. Niejako w kontrze do metod TD, zaletą metod FD jest to, że każdy z modów występuje w wąskim przedziale częstotliwości. Dzięki temu możliwe jest rozważanie tylko przedziałów częstotliwości, w których występują interesujące badacza mody. Z drugiej strony wadą metod FD jest wykorzystywanie do identyfikacji funkcje gęstości widmowej, które są wyznaczane za pomocą różnych metod (CYTOWANIE) obciążonych błędami systematycznymi. Błędy te nieuchronnie przenoszą się na wynikowe parametry modalne, a określenie ich wpływu jest problematyczne. Maia i Silva 1997 sugerują, że metody w dziedzinie czasu są z reguły lepszym wyborem w przypadku

dużego przedziału interesujących badacza częstotliwości, albo dużej liczby modów w tym zakresie. Natomiast metody w dziedzinie częstotliwości dostarczają lepszych wyników kiedy zakres częstotliwości jest niewielki, a liczba modów relatywnie mała.

Drugie kryterium podziału algorytmów dotyczy liczby modów, które mogą być jednocześnie analizowane za pomocą danej metody. Podział jest zbliżony do tego dotyczącego teoretycznej analizy modalnej. Metoda może identyfikować albo jeden stopień swobody (*eng. single degree-of-freedom*) albo wiele stopni swobody (*eng. multiple degree-of-freedom*).

Metody TDM i FDM możemy podzielić również na bezpośrednie (*eng. direct*) i pośrednie (*eng. indirect*). Różnica polega na sposobie wyznaczania FRF. Metody bezpośrednie pozwalają wyznaczyć ją bezpośrednio z równania ruchu. Natomiast metody pośrednie estymują FRF na podstawie wcześniej zidentyfikowanego modelu modalnego.

Ostatnim ogólnie przyjętym kryterium podziału jest liczba punktów poddanych wymuszeniu i mierzonych w trakcie serii pomiarowej. Koresponduje to z liczbą analizowanych jednocześnie przez metodę identyfikacji funkcji FRF. Kiedy mówimy o jednoczesnej analizie tylko jednej funkcji FRF mamy do czynienia z metodą jedno-wejście-jedno-wyjście (SISO) (*eng. single-input-single-output*). Kiedy mierzymy wymuszenie w jednym punkcie, a odpowiedź badamy w kilku różnych punktach na konstrukcji, otrzymując kilka funkcji FRF, metodę klasyfikuje się jako jedno-wejście-wiele-wyjść (SIMO) (*eng. single-input-multi-output*). W powyższej technice obowiązuje założenie, że parametry modalne uzyskane z każdej funkcji FRF będą takie same. Innymi słowy są to parametry globalne dla całej konstrukcji. Naturalnym rozwińciem są metody które mogą analizować wszystkie dostępne funkcje FRF jednocześnie, uzyskane w skutek wymuszenia i pomiaru wielu różnych punktów. Metody te określane są jako wiele-wejście-wiele-wyjście (MIMO) (*eng. multi-input-multi-output*).

Maia i Silva 1997 opisali szczegółowo wiele z metod zarówno eksperymentalnej jak i doświadczalnej analizy modalnej. Z kolei Brincker i C. E. Ventura 2015 sklasyfikowali najpopularniejsze, używane współcześnie metody identyfikacji OMA. Spośród algorytmów działających w dziedzinie czasu należy wymienić:

- Poly Reference (PR) (Norton 2009; Vold i in. 1982),
- Autoregressive Moving Average (ARMA) (Shi i Stühler 1987; Huang 2000; Giorcelli i in. 1994),
- Ibrahim Time Domain (ITD) (Samir R. Ibrahim 1983; Richard S Pappa i Samir R Ibrahim 1985),
- Eigensystem Realization Algorithm (ERA) (Jer-Nan Juang i Richard S Pappa 1985; R S Pappa i J N Juang 1985; Juang i Suzuki 1988),
- Stochastic Subspace Identification (SSI). (Van Overschee i De Moor 1996; Peeters i De Roeck 1999; Peeters 2000).

Warto zaznaczyć, że metoda ERA przy zastosowaniu postulatów NExT stanowi jeden z pośrednich wariantów metody SSI, używający funkcji korelacji jako źródła informacji przy identyfikacji.

Z kolei najpopularniejsze algorytmy w dziedzinie częstotliwości to:

- Basic Frequency Domain (Peak-Picking) (Felber 1994),
- Frequency-Domain-Decomposition (FDD) (Brincker, Zhang i Andersen 2000; Brincker, Zhang i Palle Andersen 2001; Brincker, C. Ventura i Palle Andersen 2001),

- The Least Squares Complex Frequency Method (LSCF) (Verboven i in. 2005),
- The Poly-Reference Least Squares Complex Frequency Method (p-LSCF) (Peters i Van der Auweraer 2005).

Wszystkie z powyższych algorytmów są bardzo dobrze opisane i udokumentowane w literaturze. Trudno orzec, który z nich jest obiektywnie najlepszy. Wiele zależy od doświadczenia i wiedzy autora oraz specyfiki zadania. Jak powiedział Sam Ibrahim: "Jeśli nie występują blisko położone mody i szum - wszystko zadziała" (*eng.* "If there are no closely spaced modes and no noise - everything works"). Wybór metody może więc zależeć od preferencji, umiejętności programowania czy dostępnych narzędzi. W literaturze można napotkać wiele indywidualnych aplikacji algorytów (CYTOWANIE). Istnieją również komercyjne programy, które pozwala na identyfikację modalną. Do najpopularniejszych należą ARTeMIS - SVS (Extractor ARTeMIS 1999) i MACEC - dodatek do programu MATLAB (Reynders, Schevenels i De Roeck 2014).

Do identyfikacji parametrów modalnych konstrukcji, które są częścią tej pracy autor zdecydował o zastosowaniu algorytmu NExT-ERA. Wynika to z doświadczenia zespołu mostów Politechniki Gdańskiej przy stosowaniu tej metody oraz z dostępnej szerokiej literatury pokazującej skuteczne zastosowanie tej metody w przypadku badania mostów. W kolejnym rozdziale omówiono szczegółowo metody oraz implementację jej algorytmu w autorskiej aplikacji napisanej w języku python.

## 3.6 Metoda NExT-ERA

Metoda NExT-ERA jest jedną z metod operacyjnej analizy modalnej. Składnik NExT pochodzi od słów Natural Excitation Technique. NExT jest właściwie klasą metodą OMA. Zawiera w sobie algorytmy początkowo stworzone do eksperymentalnej analizy modalnej wejście-wyjście (*eng. input-output*) (np. ERA, LSCE, ITD), a które następnie rozszerzone zostały do analizy problemu jedynie na podstawie sygnałów odpowiedzi konstrukcji (*eng. output-only*). Taką możliwość ujawniło odkrycie faktu, że funkcje korelacji odpowiedzi konstrukcji, wywołanej losowymi wymuszeniami mogą być wyrażone jako suma zanikających sinusoid. Potwierdzono również, że funkcje korelacji zawierają informację na temat parametrów modalnych struktury. Zauważono więc, że można zastąpić tradycyjnie używane funkcje odpowiedzi impulsowej (IRF), funkcjami korelacji losowych drgań konstrukcji pod wymuszeniem środowiskowym. W ten sposób tradycyjne metody EMA zostały skutecznie zaadaptowane do OMA (Rainieri i Fabbrocino 2014). W dalszej części rozdziału zostaną przedstawione najważniejsze zagadnienia dotyczące identyfikacji metodą NExT-ERA.

### 3.6.1 Funkcje korelacji, a odpowiedź swobodna układu

Przyjmijmy, że  $X$  oznacza zmienną losową, a  $x(t)$  realizację tej zmiennej losowej w czasie.  $x(t)$  w tej pracy może być utożsamiany z zaobserwowanym sygnałem. Wprowadźmy prostą definicję kowariancji. Jest to funkcja, która dostarcza informacji o zależności pomiędzy dwoma zmiennymi i dana jest wzorem:

$$\text{cov}[X, Y] = \text{E}[XY] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x y p_{xy}(x, y) dx dy \quad (3.44)$$

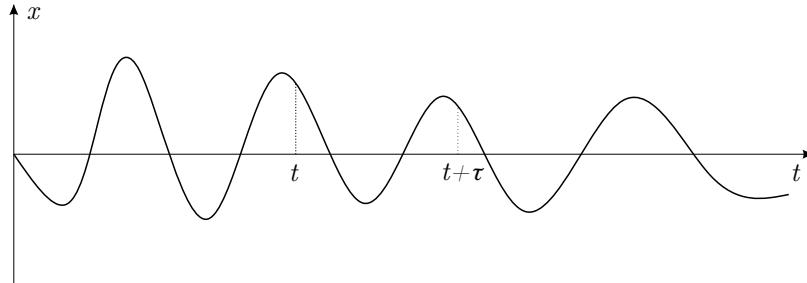
gdzie:  $E[\cdot]$  - wartość oczekiwana,  $p_{xy}(x, y)$  - wspólna funkcja gęstości prawdopodobieństwa (*eng. joint probability density function*). Używając metody uśredniania w czasie  $[0, T]$  możemy zapisać kowariancję jako:

$$\text{cov}[x(t), y(t)] = E[x(t)y(t)] = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t) dt \quad (3.45)$$

Korelacją możemy określić zależność jak dla kowariancji, w której usunięto czynnik stały (wartość średnią) i opisać równaniem (3.46). W OMA zwykle sygnały na samym początku analizy są pozbawiane czynnika stałego, stąd użycie właśnie funkcji korelacji jest dla tej rodziny metod analizy modalnej kluczowe.

$$\text{cor}[x(t), y(t)] = E[(x(t) - \mu_x)(y(t) - \mu_y)] = \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - \mu_x)(y(t) - \mu_y) dt \quad (3.46)$$

W OMA funkcja korelacji wykorzystywana jest jako autokorelacja (*eng. autocorrelation*) i cross-korelacja (*eng. cross-correlation*). Dla pojedynczego sygnału  $x(t)$  można rozważyć jak wygląda korelacja pomiędzy punktem  $x(t)$ , a punktem  $x(t + \tau)$ , czyli odległym w czasie o  $\tau$ . Przedstawienie graficzne problemu pokazano na rysunku 3.4. Intuicyjnie widać, że wartość korelacji dla punktów bliskich sobie będzie duża, a dla punktów bardzo od siebie odległych będzie maleć. Autokorelację nazwiemy funkcję daną równaniem (3.47), gdzie funkcję  $y$  w równaniu (3.46) zastąpiono  $x(t + \tau)$ .



Rysunek 3.4: Autokorelacja, jako korelacja wartości funkcji  $x(t)$  w czasie  $t$  i  $t + \tau$

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t + \tau)] \quad (3.47)$$

Funkcję cross-korelacji opiszemy analogicznie jak autokorelacji, z tą różnicą, że pod uwagę weźmiemy dwa losowe sygnały  $x(t)$  i  $y(t)$ .

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= E[x(t)y(t + \tau)] \\ R_{yx}(\tau) &= E[y(t)x(t + \tau)] \end{aligned} \quad (3.48)$$

Nie znając funkcji gęstości prawdopodobieństwa, funkcje autokorelacji i cross-korelacji można wyznaczyć za pomocą uśredniania w czasie co opisano równaniami odpowiednio (3.49) i (3.50). W dalszej części pracy podane zostaną inne przykłady metod wyznaczania funkcji korelacji.

$$R_x = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t + \tau) dt \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} R_{xy} &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t + \tau) dt \\ R_{yx} &= \frac{1}{T} \int_0^T y(t)x(t + \tau) dt \end{aligned} \quad (3.50)$$

Jedną z istotnych właściwości funkcji korelacji jest możliwość wyznaczenia jej przez splot między sygnałem  $x(-t)$  i  $y(t)$ , co zapisano równaniem (3.51). Główną zaletą tego rozwiązania jest prostota obliczeń, ponieważ splot dwóch funkcji jest łatwy do wyznaczenia w dziedzinie częstotliwości (Brincker i C. E. Ventura 2015).

$$R_{xy}(\tau) = x(-t) * y(t) \quad (3.51)$$

W praktyce wykonywanych jest wiele pomiarów. Założymy, że dla zestawu  $N$  pomiarów, zmierzone odpowiedzi mogą być zestawione w wektor:

$$\mathbf{y}(t) = \{y_1(t), y_2(t), y_3(t), \dots, y_N(t)\}^T \quad (3.52)$$

Wyniki autokorelacji i cross-korelacji pomiędzy wszystkimi zmierzonymi sygnałami można zagregować i zapisać macierzowo (3.53). Na przekątnej macierzy znajdują się funkcje autokorelacji, a poza przekątną cross-korelacji.

$$\mathbf{R}^T(\tau) = \mathbb{E}[\mathbf{y}(t)\mathbf{y}^T(t + \tau)] \quad (3.53)$$

Macierz korelacji (*eng. correlation matrix*) nazywa się macierz (3.53) dla  $\tau = 0$  co można zapisać wzorem (3.54).

$$\mathbf{C} = \mathbb{E}[\mathbf{y}(t)\mathbf{y}^T(t)] = \mathbf{R}(0) \quad (3.54)$$

Funkcje korelacji posiadają dwie wspomniane wcześniej właściwości kluczowe dla OMA. Po pierwsze teoretycznie pozwalają wyodrębnić wszystkie informacje na temat parametrów modalnych konstrukcji z sygnału losowego. Po drugie mogą być utożsamiane z drganiami swobodnymi, gasącymi układu (G H James, Carne i Lauffer 1995). Oba założenia zostały wyjaśnione i udowodnione poniżej.

Założenie o reprezentacji wszystkich parametrów modalnych przez funkcje korelacji opiera się na wykorzystaniu właściwości funkcji korelacji, rozkładu normalnego oraz Centralnego Twierdzenia Granicznego (*eng. central limit theorem*). Centralne Twierdzenie Graniczne mówi, że dla niezależnych zmiennych losowych  $X_i$  o jednakowym rozkładzie, fluktuujących wokół wartości oczekiwanej  $\mu$  i o skończonej wariancji  $\sigma^2$  to wyrażenie (3.55)

$$\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^M X_i - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{M}}} \quad (3.55)$$

zbiega według rozkładu do rozkładu Gaussa przy nieskończonej liczbie M. Brincker i C. E. Ventura 2015 przedstawili uzasadnienie użycia tego twierdzenia w przypadku OMA w następujący sposób. Rozważmy zestaw zmiennych losowych  $\{x_1, x_2, \dots, x_M\}$ , które są niezależne i posiadają identyczny rozkład, ze średnią wartością  $\mu$  i wariancją  $\sigma^2$ . Liniowa kombinacja tych zmiennych losowych jest dana wzorem:

$$y = \sum_{i=1}^M a_i x_i \quad (3.56)$$

Centralne twierdzenie graniczne mówi o tym, że dla dużej liczby zmiennych losowych  $M$  rozkład  $y$  jest w przybliżeniu normalny, z wartością średnią  $\mu_y = \mu \sum a_i$ , wariancją  $\sigma_y^2 = \sigma^2 \sum a_i^2$  i przy  $M \rightarrow \infty$  zbiega do rozkładu normalnego. Odwołując się do dynamiki budowlnej możemy zapisać, że odpowiedź układu  $y(t)$  jest splotem siły wymuszającej  $x(\tau)$  i funkcji odpowiedzi impulsowej  $h(t)$  co pokazano równaniem:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)x(\tau) d\tau \quad (3.57)$$

Dla sygnału dyskretnego z krokiem czasowym  $\Delta t$  i ograniczając się jedynie do  $N_m$  istotnych z punktu widzenia pamięci systemu próbek, zależność może być przedstawiona następująco:

$$y(n) = \sum_{k=n-N_m}^n h(n-k)x(k)\Delta t \quad (3.58)$$

Można zauważyć, że dla wymuszenia szumem białym odpowiedź dynamiczna  $y(n)$  jest sumą, którą można przedstawić wzorem (3.56), gdzie poszczególne składniki obciążenia  $x(k)$  nie muszą mieć rozkładu normalnego, ale ostateczna odpowiedź będzie mieć rozkład Gaussa. Wynika to wprost z Centralnego Twierdzenia Granicznego. Warto nadmienić, że założenie o wymuszeniu białym szumem zapewnia nam niezależność składników obciążenia  $x(k)$ .

Bazując na powyższym, w OMA zwykle zakładamy, że mierzone sygnały posiadają wartość średnią równą zero oraz są Gaussowskie (*eng. Gaussian signals*) lub bliskie Gaussowskim (Brincker i C. E. Ventura 2015). Przypomnijmy, że jednowymiarowa funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu normalnego dana jest wzorem:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.59)$$

, a przyjmując dodatkowo wartość średnią równą zero wzór można wyrazić następująco:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (3.60)$$

Dla wektora losowego, zawierającego zmienne losowe o zerowej wartości średniej  $\mathbf{x}^T = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_M\}$ , funkcja gęstości prawdopodobieństwa może być zapisana jako:

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{M}{2}} |\mathbf{C}|} e^{\mathbf{x}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{x} / 2} \quad (3.61)$$

gdzie  $|\mathbf{C}|$  jest wyznacznikiem macierzy korelacji (3.54). Podstawowym wnioskiem wynikającym z tej zależności jest to, że jednowymiarowy rozkład Gaussa może być opisany za pomocą średniej wartości, odchylenia standardowego i w przypadku wielowymiarowych danych o zerowej wartości średniej, jedynie przez macierz korelacji (3.61).

Aby wytłumaczyć dlaczego funkcje korelacji w OMA mogą być odpowiednikiem funkcji odpowiedzi impulsowej (IRF), a funkcje gęstości widmowej odpowiednikami funkcji odpowiedzi częstotliwościowej (FRF) przytoczymy wymagane definicje i zależności z dynamiki budowli. Szczegółowe wyprowadzenia i objaśnienia znajdują się między innymi w pracach (Brincker i C. E. Ventura 2015; Rainieri i Fabbrocino 2014; Chopra 2012; Ewins 2000). Funkcja odpowiedzi impulsowej układu, zwykle oznaczane jako  $h(t)$  jest odpowiedzią układu poddanego wymuszeniu przez impulsową siłę, o bardzo krótkim czasie działania, w chwili czasowej  $t = 0$ . Matematycznie impulsową siłę opisuje funkcja nazywaną deltą Diraca  $\delta(t)$ . Dla systemów liniowych i czasowo niezależnych, jeżeli przesunięta w czasie zostanie chwila przyłożenia impulsu o  $\tau$ , to otrzymamy odpowiedź  $y(t)$ , która będzie również przesunięta w czasie o  $\tau$ . Z definicji wiemy, że impuls jest iloczynem intensywności obciążenia i czasu jego działania. Rozważmy ciągłe obciążenie oznaczone jako  $x(t)$ , które jest superpozycją potoku impulsów o zmiennej amplitudzie, ale o równie krótkich czasach trwania. W

takim przypadku impuls siły od czasu  $\tau$  do  $\tau + d\tau$  obliczamy jako  $x(\tau)d\tau$ , a odpowiedź układu jako  $h(t - \tau)x(\tau)d\tau$ . Układ jest liniowy a więc obowiązuje zasada superpozycji. Wynika z tego, że suma wpływu całego obciążenia może być wyznaczona jako suma wszystkich składowych odpowiedzia i opisana całką Duhamel'a jako (3.62) oraz w postaci splotu (3.63) miedzy funkcją IRF  $h(t)$  i wymuszeniem  $x(t)$ .

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)x(\tau)d\tau \quad (3.62)$$

$$y(t) = h(t) * x(t) \quad (3.63)$$

Funkcję IRF można wyznaczyć wykonując przekształcenie Laplace'a równania ruchu przedstawionego równaniem (3.2). Dla przejrzystości przytoczono je poniżej (3.64), dla układu z jednym stopniem swobody, wymuszenia deltą Diraca i podstawiając w miejsce odpowiedzi układu funkcję IRF:

$$m\ddot{h}(t) + c\dot{h}(t) + kh(t) = \delta(t) \quad (3.64)$$

Wykonując transformatę Laplace'a obu stron otrzymamy:

$$(ms^2 + cs + k)H(s) = 1 \quad (3.65)$$

Wykorzystując właściwości transformaty i przekształcając odpowiednio równanie (3.65) otrzymamy formułę (3.66). Na jej podstawie można wprost wyznaczyć funkcje IRF podaną równaniem (3.67).

$$H(s) = \frac{1}{m(s - \lambda)(s - \lambda^*)} \quad (3.66)$$

$$h(t) = \frac{1}{m} \frac{e^{\lambda t} - e^{\lambda^* t}}{\lambda - \lambda^*} \quad (3.67)$$

Z kolei funkcja FRF w sensie fizycznym reprezentuje amplitudę i przesunięcie fazowe drgań ustalonych systemu SDOF, poddanego wymuszeniu harmonickiemu o jednostkowej amplitudzie i częstotliwości  $\omega_d$ . Matematycznie FRF  $H(\omega)$  można opisać również jako transformatę Laplace'a z IRF obliczoną dla urojonej współrzędnej  $s = i\omega$  (3.66) i zapisać następująco:

$$H(\omega) = \frac{1}{m(i\omega - \lambda)(i\omega - \lambda^*)} \quad (3.68)$$

Podobnie jak IRF, FRF łączy wymuszenie z odpowiedzią układu. Jeśli równanie ruchu (3.2) stronami przekształcimy transformatą Fouriera to otrzymamy:

$$(m(i\omega)^2 + ci\omega + k)Y(\omega) = X(\omega) \quad (3.69)$$

Szczegółowe rozwiązanie za pomocą reprezentacji biegunów układu można znaleźć w literaturze (Brincker i C. E. Ventura 2015). Ostatecznie otrzymujemy:

$$m(i\omega - \lambda)(i\omega - \lambda^*)Y(\omega) = X(\omega) \quad (3.70)$$

Po przekształceniu wyraźnie widać relację pomiędzy odpowiedzią, a wymuszeniem układu za pośrednictwem FRF:

$$Y(\omega) = \frac{1}{m(i\omega - \lambda)(i\omega - \lambda^*)}X(\omega) = H(\omega)X(\omega) \quad (3.71)$$

gdzie  $X(\omega)$  i  $Y(\omega)$  są odpowiednio transformatami Fouriera wymuszenia  $x(t)$  i odpowiedzi  $y(t)$  układu. Porównując równania (3.69)(3.71) łatwo można zauważać że FRF zawiera w sobie informację na temat bezwładności, tłumienia i sztywności układu.

Zarówno IRF jak i FRF można uogólnić do układów MDOF o  $N$  stopniach swobody. Zapis zależności wymuszenie-odpowiedź dla układu MIMO (wiele-wejście-wiele-wyjście) przedstawiono dla dziedziny czasu (3.72) i częstotliwości (3.73).

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}(t) * \mathbf{x}(t) \quad (3.72)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}(\omega) = \tilde{\mathbf{H}}(i\omega) \tilde{\mathbf{x}}(\omega) \quad (3.73)$$

gdzie  $\mathbf{H}(t)$  jest macierzą zawierającą funkcje IRF,  $\mathbf{x}(t)$  jest wektorem sił wymuszających,  $\tilde{\mathbf{y}}(\omega)$  i  $\tilde{\mathbf{x}}(\omega)$  są transformatami Fouriera odpowiednio  $\mathbf{x}(t)$  i  $\mathbf{y}(t)$ , a  $\tilde{\mathbf{H}}(i\omega)$  jest macierzą FRF. Wyrażenia na odpowiednio IRF  $\mathbf{H}(t)$  i FRF  $\tilde{\mathbf{H}}(i\omega)$  podano poniżej.

$$\mathbf{H}(t) = \sum_{n=1}^N (\mathbf{A}_n e^{\lambda_n t} + \mathbf{A}_n^* e^{\lambda_n^* t}) \quad (3.74)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(i\omega) = \sum_{n=1}^N \left( \frac{\mathbf{A}_n}{i\omega - \lambda_n} + \frac{\mathbf{A}_n^*}{i\omega - \lambda_n^*} \right) \quad (3.75)$$

gdzie  $\mathbf{A}_n = Q_n \boldsymbol{\psi}_n \boldsymbol{\psi}_n^T$ ,  $\boldsymbol{\psi}_n$  to n-ta postać drgań własnych,  $Q_n$  to współczynnik skalujący mody, a  $\lambda_n = \sigma_n + i\omega_{d,n}$  jest n-tym biegunem układu zawierającym informacje na temat częstotliwości drgań własnych tłumionych  $f_{d,n} = \omega_{d,n}/(2\pi)$  i liczby tłumienia  $\xi_r = -\sigma_n/\sqrt{\sigma_n^2 + \omega_{d,n}^2}$  n-tego moda.

Gęstość widmowa jest kolejnym kluczowym pojęciem potrzebnym do pełnego zrozumienia znaczenia funkcji korelacji dla OMA. Gęstość widmowa (*eng. auto spectral density*) dla przebiegu czasowego  $x(t)$  jest zdefiniowana jako transformata Fouriera z funkcji korelacji  $R_x(\tau)$  3.76. Istnieje również zależność odwrotna, w której odwrotną transformata Fouriera z gęstości widmowej pozwala otrzymać funkcję korelacji 3.77. Początkowy wyraz funkcji korelacji  $R_x(0)$  jest reprezentacją twierdzenia Parsevela i pozwala stwierdzić, że gęstość widmowa pokazuje rozkład energii w funkcji częstotliwości. Stąd gęstość widmową nazywa się również zamiennie gęstością widmową mocy (*eng. power spectral density*) (PSD) (Brincker i C. E. Ventura 2015).

$$G_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (3.76)$$

$$R_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (3.77)$$

Podobnie zdefiniować można gęstość widmową pomiędzy dwoma sygnałami  $x(t)$  i  $y(t)$  (*eng. cross spectral density*), jako przekształcenie Fouriera funkcji cross-korelacji  $R_{xy}(t)$ .

$$G_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (3.78)$$

$$R_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{xy}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (3.79)$$

Wykorzystanie właściwości splotu funkcji korelacji (3.51) i splotu<sup>1</sup> oraz symetrii Hermitowskiej<sup>2</sup> transformaty Fouriera pozwala uzyskać następującą właściwość gęstości widmowej (3.80). Należy nadmienić, że zależność ta będzie spełniona przy założeniu okresowego (lub bardzo długiego) sygnału (Brincker i C. E. Ventura 2015).

$$G_{xy}(\omega) = X^*(\omega)Y(\omega) \quad (3.80)$$

Rozważamy ponownie układ SISO o odpowiedzi  $y(t)$  przy wzbudzeniu  $x(t)$ :  $y(t) = x(t) * h(t)$  (3.63). Wykorzystując równanie (3.80) zapiszemy równanie na gęstość widmową odpowiedzi:

$$G_y(\omega) = Y^*(\omega)Y(\omega) \quad (3.81)$$

Wykorzystując transformatę Fouriera oraz przemienność i łączność splotu zapisać można następujące równanie pokazujące zależność pomiędzy gęstością widmową odpowiedzi i wymuszenia układu.

$$G_y(\omega) = G_x(\omega)|H^*(i\omega)|^2 \quad (3.82)$$

Równanie (3.82) jest nazywane twierdzeniem podstawowym (*eng. fundamental theorem*) metody OMA. Dla układu MIMO twierdzenie to przyjmuje następującą formę w dziedzinie częstotliwości:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_y(\omega) &= \tilde{\mathbf{H}}^*(i\omega)\mathbf{G}_x(\omega)\tilde{\mathbf{H}}^T(i\omega) \\ &= \tilde{\mathbf{H}}^*(i\omega)\mathbf{G}_x(\omega)\tilde{\mathbf{H}}^T(i\omega) \end{aligned} \quad (3.83)$$

z kolei w dziedzinie czasu odpowiadająca macierz korelacji przedstawia się następująco:

$$\mathbf{R}_y(\tau) = \mathbf{H}(-\tau) * \mathbf{R}_x(\tau) * \mathbf{H}^T(\tau) \quad (3.84)$$

Jak już wielokrotnie wspomniano, w OMA zakłada się wymuszenie Gaussowskim, stacjonarnym szumem białym o zerowej wartości średniej. Podstawowym efektem tego założenia wymuszenia  $x(t)$  w postaci białego szumu jest brak korelacji pomiędzy wymuszeniem w chwili  $t$  i w chwili  $t+\tau$ . Wyjątkiem jest przypadek  $\tau = 0$ . Stąd sygnał posiada zerową wartość średnią, a funkcja korelacji jest deltą Diraca co zapiszemy:

$$R_x(\tau) = \mathbb{E}[x(t)x(t+\tau)] = 2\pi G_{x0}\delta(\tau) \quad (3.85)$$

gdzie  $G_{x0}$  jest współczynnikiem skalującym. Zakładając dalej, że biały szum działa jedynie w ograniczonym spektrum od 0 do  $B$ , a  $\sigma_x^2$  to niezmiennie wariancja sygnału, otrzymamy przekształconą wersję () funkcji korelacji. Na jej podstawie można stwierdzić, że PSD wymuszenia (będąca transformatą Fouriera funkcji korelacji) jest wartością stałą<sup>3</sup>.

$$R_x(\tau) = 2\pi \frac{\sigma_x^2}{2B} \delta(\tau) \quad (3.86)$$

---

<sup>1</sup>Transformata Fouriera splotu dwóch funkcji w dziedzinie czasu  $h(t)$  i  $g(t)$  jest równa iloczynowi transformat Fouriera każdej z funkcji osobno. Innymi słowy transformacie Fouriera wyrażenia  $h(t)*g(t)$  odpowiada iloczyn  $H_kG_k$ , gdzie:  $H_k$  - transformata Fouriera funkcji  $h(t)$ ,  $G_k$  - transformata Fouriera funkcji  $g(t)$ .

<sup>2</sup>Jeżeli  $H(\omega)$  jest transformatą Fouriera rzeczywistej funkcji  $h(t)$ , to prawdziwe jest równanie  $H(\omega) = H^*(-\omega)$ . Równanie to jest nazywane symetrią Hermitowską (Boashash 2015).

<sup>3</sup>Transformata Fouriera delty Diraca jest równa jedności:  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{i\omega t} dt = e^{-i\omega \times 0} = 1$  (Zielinski 2002)

Chcąc rozwinać tę zależność do układu MIMO założymy sygnały wymuszenia  $x_1(t)$  i  $x_2(t)$  jako szумy białe. Sformułowanie macierzy korelacji z wykorzystaniem równania (3.86) prowadzi do następującej zależności:

$$\mathbf{R}_x(\tau) = \mathbb{E}[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t+\tau)] = 2\pi \frac{\delta(\tau)}{2B} \mathbf{C} \quad (3.87)$$

gdzie  $\mathbf{C}$  jest macierzą kowariancji sygnałów. Macierz gęstości widmowej sygnałów wymuszenia szumem białym ma postać:

$$\mathbf{G}_x(\omega) = \begin{cases} \frac{\mathbf{C}}{2B}, & 0 \leq \omega \leq B \\ 0, & \omega > B \end{cases} \quad (3.88)$$

Podsumowując powyższy ciąg myślowy możliwa jest dekompozycja równania (3.84) w dziedzinie czasu i równania (3.83) w dziedzinie częstotliwości. Dekompozycję w dziedzinie czasu przeprowadzili po raz pierwszy GH H James, Carne i Lauffer 1993; G H James, Carne i Lauffer 1995. Z kolei dekompozycję w dziedzinie częstotliwości przedstawili Brincker, Zhang i Andersen 2000; Brincker, Zhang i Palle Andersen 2001. W powyższych pracach przedstawiono pełny tok postępowania. Poniżej przytoczono rezultaty końcowe w postaci opisu macierzy korelacji sygnałów odpowiedzi układu (3.89) i macierzy korelacji gęstości widmowej odpowiedzi (3.90).

$$\mathbf{R}_y(\tau) = \begin{cases} \sum_{n=1}^N (\boldsymbol{\phi}_n \boldsymbol{\gamma}_n^T e^{\lambda_n \tau} + \boldsymbol{\phi}_n^* \boldsymbol{\gamma}_n^H e^{\lambda_n^* \tau}), & \tau \geq 0 \\ \sum_{n=1}^N (\boldsymbol{\gamma}_n \boldsymbol{\phi}_n^T e^{-\lambda_n |\tau|} + \boldsymbol{\gamma}_n^* \boldsymbol{\phi}_n^H e^{-\lambda_n^* |\tau|}), & \tau < 0. \end{cases} \quad (3.89)$$

$$\mathbf{G}_y(\omega) = \sum_{n=1}^N \frac{\boldsymbol{\phi}_n \boldsymbol{\gamma}_n^T}{i\omega - \lambda_r} + \frac{\boldsymbol{\phi}_n^* \boldsymbol{\gamma}_n^H}{i\omega - \lambda_r^*} + \frac{\boldsymbol{\gamma}_n \boldsymbol{\phi}_n^T}{-i\omega - \lambda_r} + \frac{\boldsymbol{\gamma}_n^* \boldsymbol{\phi}_n^H}{-i\omega - \lambda_r^*} \quad (3.90)$$

gdzie oznaczenia przyjęto jak w równaniach (3.74) i (3.75), a  $\boldsymbol{\gamma}_n$  oznacza wektor referencyjny związany z n-tym modelem. Wektor ten zależny jest od wszystkich parametrów modalnych systemu oraz lokalizacji i macierzy korelacji wymuszeń (Rainieri i Fabbrocino 2014; Peeters 2000).

Równanie (3.89) pokazuje, że funkcje korelacji odpowiedzi mogą być wyrażone za pomocą sumy zespolonych funkcji eksponencjalnych. SHEN i in. 2003 wskazują na podobieństwo jego formy do równania (3.74). Kennedy i Eberhart 1995, w swojej kluczowej dla metody NExT pracy, rozwinęli to równanie do postaci ukazującej funkcję korelacji jako sumę zanikających sinusoid, o charakterystyce takiej samej jak w przypadku IRF. Podsumowując, funkcje korelacji mogą być użyte jako funkcje odpowiedzi impulsowej (IRF) w metodach TD identyfikacji parametrów modalnych.

### 3.6.2 Eigenystem Realization Algorithm

Metoda ERA została opracowana w latach 80' XX w. przez naukowców z NASA Langley Research Center: Richarda Pappa i Jer-Nan Juang'a. Przedstawili oni koncept identyfikacji modalnej i redukcji modelu układu dynamicznego na podstawie danych pomiarowych. Nowością, którą wprowadzili autorzy było połączenie pojęć z teorii kontroli i algorytmu rozkładu względem wartości osobliwych. Fundamentalne prace opisujące metodą zostały opisane w (R S Pappa i J N Juang 1985; Jer-Nan Juang i Richard S Pappa 1985; Juang i Suzuki 1988; Jer-Nan Juang 1994). Algorytm

ERA był wielokrotnie testowany, na przykład pod względem odporności na zaszmienienie danych pomiarowych (J. N. Juang i R. S. Pappa 1986; P. Li, Hu i H. J. Li 2011). Spośród polskich autorów, szczegółowy opis metody zawarli w swoich pracach Szafranowski 2013 i Dudek 2008.

### Liniowy model dynamiczny w przestrzeni stanów

Model przestrzeni stanów<sup>4</sup> (*eng. state-space model*) używany jest do przekształcenia równania różniczkowego drugiego rzędu (3.1), do dwóch równań rzędu pierwszego. Dla przejrzystości macierzowe równanie ruchu przytoczono ponownie poniżej:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (3.91)$$

gdzie:  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  to odpowiednio macierze mas, tłumienia i sztywności,  $\mathbf{x}(t)$  jest wektorem przemieszczenia, a  $\mathbf{F}(t)$  jest wektorem wymuszenia. Wektor wymuszenia można poddać faktoryzacji do macierzy  $\bar{\mathbf{B}}$  oraz wektora  $\mathbf{u}(t)$  (??). Macierz  $\bar{\mathbf{B}}$  opisuje lokalizację punków wymuszenia, a wektor  $\mathbf{u}(t)$  intensywność tego wymuszenia w funkcji czasu.

$$\mathbf{F}(t) = \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) \quad (3.92)$$

Macierzowe równanie ruchu może być więc przekształcone następująco:

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{M}^{-1}\bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) \quad (3.93)$$

Zdefiniujmy wektor stanu jako:

$$\mathbf{s}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{x}(t) \end{Bmatrix} \quad (3.94)$$

Liczba komponentów tworzących wektor stanu jest nazywana rzędem modelu. Podstawiając go do równania (3.93) dodatkowo wykorzystując oczywistą równość  $\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}(t)$  otrzymamy:

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{s}(t) + \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\bar{\mathbf{B}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (3.95)$$

Stąd możemy zdefiniować następujące macierze:  $\mathbf{A}_c$  i  $\mathbf{B}_c$ :

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

$$\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\bar{\mathbf{B}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

Dzięki tak sformułowanym elementom zapiszmy równanie stanu (*eng. state equation*) następująco:

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{A}_c\mathbf{s}(t) + \mathbf{B}_c\mathbf{u}(t) \quad (3.98)$$

---

<sup>4</sup>Według Kaczorek i in. 2016 stanem układu nazywamy zbiór liniowo niezależnych wielkości  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  określających w pełni skutki przeszłych oddziaływań ( $t < t_0$ ) na układ, który jest wystarczający do wyznaczenie przebiegów chwilowych dowolnych wielkości w tym układzie dla  $t > t_0$ , gdy znane są wymuszenia i parametry obwodu. Wielkości  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  nazywa się zmiennymi stanu, a wektor  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]$  wektorem stanu tego obwodu.

W równaniu (3.98)  $\mathbf{s}(t)$  jest wektorem stanu (3.94), czyli zestawem wielkości opisujących w sposób jednoznaczny stan modelowanego układu, a  $\mathbf{u}(t)$  jest wektorem wejścia (sterowania) i opisuje sygnał wejściowy. Macierze  $\mathbf{A}_c$  i  $\mathbf{B}_c$ , nazywane są odpowiednio macierzą stanu (*eng. state matrix*) i macierzą wejścia (*eng. input influence matrix*). Są to macierze stałych współczynników, które odwzorowują modelowany układ dynamiczny i parametry elementów tworzących ten układ.

Drugim równaniem pozwalającym na stworzenie modelu w przestrzeni stanów jest równanie obserwacji (*eng. observation equation*) lub inaczej równanie wyjścia. W ogólności ma ono postać:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_a \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}_v \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}_d \mathbf{x}(t) \quad (3.99)$$

gdzie:  $\mathbf{y}(t)$  jest wektorem mierzonej odpowiedzi w  $m$  punktach pomiarowych, a  $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  i  $\mathbf{x}(t)$  to odpowiednio mierzone przyspieszenia, prędkości i przemieszczenia w danych  $m$  punktach. Z kolei macierze  $\mathbf{C}_a$ ,  $\mathbf{C}_v$  i  $\mathbf{C}_d$  określają lokalizację mierzonych, odpowiadających im przyspieszeń, prędkości i przemieszczeń. Należy zaznaczyć, że rzeczywista konstrukcja składa się z nieskończonej liczby stopni swobody. Nawet w przypadku dyskretyzacji do układu MDOF, jak to ma miejsce w przypadku obliczeń numerycznych, liczba stopni swobody jest ogromna. Z tego względu, w trakcie pomiarów znacznie redukuje się liczbę mierzonych stopni swobody właśnie do  $m$ . Podstawiając równanie (3.93) do (3.99), po przekształceniach można otrzymać następujące równanie obserwacji:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_c \mathbf{s}(t) + \mathbf{D}_c \mathbf{u}(t) \quad (3.100)$$

w którym:

$$\mathbf{C}_c = [\mathbf{C}_v - \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \quad \mathbf{C}_d - \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}] \quad (3.101)$$

$$\mathbf{D}_c = \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \bar{\mathbf{B}} \quad (3.102)$$

Macierz  $\mathbf{C}_c$  jest nazywana macierzą wyjścia (*eng. output influence matrix*), a  $\mathbf{D}_c$  macierzą przenoszenia lub transmisyjną (*eng. direct transmission matrix*). Równania stanu (3.98) i obserwacji (3.100) łącznie tworzą ciągły, deterministyczny model przestrzeni stanów:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}}(t) &= \mathbf{A}_c \mathbf{s}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_c \mathbf{s}(t) + \mathbf{D}_c \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (3.103)$$

Wielkości mierzone w trakcie eksperymentu są próbkiowane jedynie w dyskretnych chwilach czasowych. W takim razie, naturalnym dla rzeczywistych zastosowań jest przekształcenie modelu ciągłego przestrzeni stanów w model dyskretny. Zakładając stały czas próbkowania równy  $\Delta t$ , równania ciągłe mogą być zdyskretyzowane i rozwiązane jedynie w chwilach czasowych  $t_k = k\Delta t$  dla  $k \in N$ . Dla poprawności zapisu dyskretnego, wymagane jest założenie o stałych wartościach elementów wektora wejścia  $\mathbf{u}(t)$  w trakcie pojedynczego kroku czasowego, tj.  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_k$  dla  $t \in [k\Delta t, (k+1)\Delta t]$ . Przy spełnieniu powyższych założeń możemy zapisać dyskretny model przestrzeni stanów:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}}_{k+1} &= \mathbf{A} \mathbf{s}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C} \mathbf{s}_k + \mathbf{D} \mathbf{u}_k \end{aligned} \quad (3.104)$$

gdzie macierze  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  są odpowiednio macierzami stanu, wejścia, wyjścia i przenoszenia dla dyskretnego modelu przestrzeni stanów.

### Odpowiedź impulsowa w przestrzeni stanów

Przyjmijmy układ dynamiczny opisany równaniem (3.104), w którym  $s_k$  - jest n-wymiarowym wektorem stanu,  $u_k$  - m-wymiarowym wektorem sterowania, a  $y_k$  - p-wymiarowym wektorem obserwacji. Parametry Markova takiego systemu  $G_k$  można zdefiniować następująco (Schutter 2000):

$$G_k = \begin{cases} D, & \text{dla } k = 0 \\ CA^{k-1}B, & \text{dla } k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.105)$$

Jeżeli spełnione jest równanie (3.105) to zestaw macierzy  $A, B, C, D$  jest realizacją łańcucha  $G(k)$  dla  $k = 1, 2, \dots, \infty$ . Realizację nazywa się minimalną, kiedy rząd modelu jest minimalny (3.94).

Zakładając warunek początkowy  $s(0) = \mathbf{0}$  i wymuszenie wszystkich punktów układu jednostkowym impulsem w postaci:

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & \text{dla } k = 0 \\ 0, & \text{dla } k > 0 \end{cases} \quad (3.106)$$

otrzymamy odpowiedź układu postaci:

$$Y_k = \begin{cases} D, & \text{dla } k = 0 \\ CA^{k-1}B, & \text{dla } k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.107)$$

Równanie (3.107) nazywa się odpowiedzią impulsową układu. Można zauważyć, że elementy sekwencji parametrów Markova odpowiadają wprost elementom odpowiedzi impulsowej układu (Phan, Jer-Nan Juang i Longman 1991). W przypadku identyfikacji modalnej rzeczywistej konstrukcji wyznaczenie macierzy opisujących układ jest celem. Dysponując pomierzonym sygnałem odpowiedzi swobodnej (wzbudzonej impulsem) możliwe jest sformułowanie parametrów Markova i poszukiwanie rozwiązania w postaci macierzy układu. W przypadku OMA odpowiedź impulsowa układu może być zastąpiona funkcjami korelacji co udowodniono w (3.6.1). Niezależnie od źródła danych, sygnały można złożyć w parametry Markova w identyczny sposób. W dalszej części wywodu elementy algorytmu ERA opisywane będą w sposób tradycyjny, operując na sygnale z odpowiedzi swobodnej układu.

Założymy, że  $y_k^i$  jest odpowiedzią konstrukcji w chwili czasowej  $k\Delta t$ , zmierzoną w punkcie pomiarowym  $n$ , jednym z wszystkich  $m$  punktów pomiarowych. Parametry Markova  $Y_k$  zdefiniujemy zestawiając odpowiedź układu z wszystkich punktów pomiarowych dla danej chwili czasowej  $k\Delta t$ :

$$Y_k = \begin{Bmatrix} y_k^1 \\ y_k^2 \\ y_k^3 \\ \vdots \\ y_k^m \end{Bmatrix}, \quad \text{dla } k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.108)$$

### Sformułowanie macierzy Hankela

Algorytm metody ERA rozpoczyna się od sformułowania uogólnionej, blokowej<sup>5</sup> macierzy Hankela<sup>6</sup> dyskretnego układu dynamicznego  $\mathbf{H}$  o wymiarach  $r \times s$ . Wymiary  $r$  i  $s$  nazywane są parametrami projektowymi (Szafrański 2013) i oznaczają:  $r$  - liczbę blokowych wierszy,  $s$  - liczbę blokowych kolumn macierzy Hankela. Jeżeli spełnione są warunki  $s > n$  i  $r > n$  to właściwością macierzy Hankela jest to, że w przypadku pomiarów pozbawionych szumów rząd macierzy Hankela jest równy rzędowi systemu oraz dwukrotnej liczbie modów systemu.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{k-1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_k & \mathbf{Y}_{k+1} & \dots & \mathbf{Y}_{k+s-1} \\ \mathbf{Y}_{k+1} & \mathbf{Y}_{k+2} & \dots & \mathbf{Y}_{1+k+s-1} \\ \mathbf{Y}_{k+2} & \mathbf{Y}_{k+3} & \dots & \mathbf{Y}_{2+k+s-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{r-1+k} & \mathbf{Y}_{r-1+k+1} & \dots & \mathbf{Y}_{r-1+k+s-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{B} & \dots & \mathbf{C}\mathbf{A}^{k+s-2}\mathbf{B} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^{k+1}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{C}\mathbf{A}^{k+1+s-2}\mathbf{B} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{k+1}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^{k+2}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{C}\mathbf{A}^{k+3+s-2}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{r-2+k}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^{r-2+k+1}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{C}\mathbf{A}^{r+k+s-3}\mathbf{B} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{rm \times sp} \quad (3.109) \\ &= \mathbf{P}_r \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{Q}_s \quad \text{dla } k \geq 1 \end{aligned}$$

Macierze  $P_r$  i  $Q_s$  to odpowiednio macierze obserwacji i sterowania układu i są zdefiniowane następująco:

$$\mathbf{P}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{r-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_s = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{s-1}\mathbf{B}] \quad (3.110)$$

Problem wyboru wartości parametrów  $s$  i  $r$  nie jest ściśle rozwiązany. Zestawienie różnych badań dotyczących doboru parametrów projektowych przedstawił w pracy Szafrański 2013. Na pewno należy spełnić zależność  $s > n$  i  $r > n$ . Z uwagi na występowanie w sygnale pomiarowym szumów i niepewności związanych ze wstępny oszacowaniem rzędu modelu parametry trzeba zawyżyć. Jednym z powszechniej używanych zaleceń jest przyjęcie  $r = (5 \div 10)n$   $s = (2 \div 3)r$  (Dudek 2008). Część badaczy zaleca aby parametr  $s$  dobrać tak, żeby macierz Hankela zawierała większość lub wszystkie parametry Markova odpowiadające wyraźnemu sygnałowi  $s = (\frac{2}{3} \div 1)N_s - r - 2$  gdzie  $N_s$  oznacza liczbę próbek wyraźnego sygnału (Caicedo 2011; Nayeri i in. 2009).

<sup>5</sup>Macierz blokową można opisać jako macierz złożoną z innych macierzy. Na przykład mając 4 macierze  $N \times N$ :  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$ ,  $\mathbf{A}_3$ ,  $\mathbf{A}_4$ , można sformułować macierz  $2N \times 2N$  postaci  $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_4]$ , która posiada dwa blokowe wiersze i dwie blokowe kolumny.

<sup>6</sup>W ogólności macierzą Hankela nazywamy taką macierz  $\mathbf{A}$  o wymiarach  $r \times s$ , że spełniona jest równość:  $\mathbf{A}_{r+1,s-1} = \mathbf{A}_{r-1,s+1}$

### Realizacja minimalna modelu w przestrzeni stanów

Jak już wspomniano realizacją układu nazywamy zestaw macierzy  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ . Podstawowym zdaniem jest znalezienie takiej realizacji, dla której zmierzona odpowiedź układu będzie możliwa od odtworzenia przez równania modelu w przestrzeni stanów. W przypadku odpowiedzi swobodnej, nie ma miejsca dodatkowe wymuszenie w trakcie pomiaru, więc prawdziwa jest zależność  $\mathbf{D} = \mathbf{Y}_0$ . Wszystkich możliwych realizacji, pozwalających spełnić powyższy warunek, jest nieskończoność (Jernan Juang i Richard S Pappa 1985). Naturalnym wyzwaniem jest więc znalezienie takiej realizacji, dla której rząd modelu będzie minimalny, a rząd modelu jest wprost związany z wymiarami macierzy  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ . Pierwsze prace dotyczące poszukiwania realizacji minimalnej zostały podane w (Kalman 1963; Ho i Kálmán 1966).

Aby ułatwić zrozumienie poszukiwania minimalnej realizacji przywołajmy twierdzenia o obserwowalności i sterowalności realizacji:

**Twierdzenie o obserwowalności.** Realizacja w postaci zestawu macierzy  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  nazywana jest obserwowalną jeżeli macierz obserwacji  $\mathbf{P}_r$  jest rzędu  $n$ , gdzie  $n$  jest rzędem systemu. Jeżeli realizacja jest obserwowalna to zawsze możliwe jest odtworzenie początkowego stanu  $s_0$  na podstawie znanych odpowiedzi i wymuszenia układu dla  $k > 0$ .

**Twierdzenie o sterowalności.** Realizacja w postaci zestawu macierzy  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  nazywana jest sterowalną jeżeli macierz sterowania  $\mathbf{Q}_s$  jest rzędu  $n$ , gdzie  $n$  jest rzędem systemu. Jeżeli realizacja jest sterowalna to zawsze możliwe jest takie przyjęcie parametrów wymuszenia, żeby w skończonej liczbie kroków doprowadzić układ ze stanu początkowego, do pożądanego stanu.

Dodatkowo Kalman sformułował następujące twierdzenie: Realizacja  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  jest minimalna, wtedy i tylko wtedy gdy jest sterowalna i obserwowalna. Podsumowując, minimalna realizacja musi spełniać warunki sterowalności i obserwowalności. Aby to zapewnić odpowiednie wymiary macierzy Hankela. W przypadku gdybyśmy zbudowali macierz Hankela z parametrów Markova pozbawionych szumów, rząd macierzy byłby równy rzędowi modelu  $n$ , pod warunkiem, że wymiary  $rm$  i  $sp$  są większe niż  $n$ . W rzeczywistości, pomiary obarczone są szumami związanymi z pracą aparatury pomiarowej i samym przebiegiem pomiaru. Dodatkowo w rzeczywistych konstrukcjach zawsze występuje pewien stopień nieliniowości i model liniowy być może nigdy nie jest w stanie perfekcyjnie jej opisać. Konsekwencją wystąpienia szumów w pomierzonym sygnale jest powiększenie rzędu model wzgldem układu odpowiadającego sygnałom nie obarczonych szumem. Zadaniem analityka jest więc określić najmniejszy rząd modelu, dla którego realizacja pozwoli na wystarczająco wierny opis układu, przy jednoczesnym spełnieniu kryteriów błędu.

### Dekompozycja według wartości osobliwych (SVD)

Pierwszym właściwym krokiem algorytmu ERA jest sformułowanie macierzy Hankela  $\mathbf{H}_0$  oraz  $\mathbf{H}_1$ . Posługując się wzorem (3.109) sformułujmy:

$$\mathbf{H}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_0 & \mathbf{Y}_1 & \dots & \mathbf{Y}_{s-1} \\ \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 & \dots & \mathbf{Y}_s \\ \mathbf{Y}_2 & \mathbf{Y}_3 & \dots & \mathbf{Y}_{s+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{r-1} & \mathbf{Y}_r & \dots & \mathbf{Y}_{r+s-2} \end{bmatrix} \quad (3.111)$$

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 & \dots & \mathbf{Y}_s \\ \mathbf{Y}_2 & \mathbf{Y}_3 & \dots & \mathbf{Y}_{s+1} \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4 & \dots & \mathbf{Y}_{s+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_r & \mathbf{Y}_{r+1} & \dots & \mathbf{Y}_{r+s-1} \end{bmatrix} \quad (3.112)$$

Wykorzystując opis macierzy Hankela za pomocą macierzy obserwacji i sterowania możemy zapisać że:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0 &= \mathbf{P}_r \mathbf{A}^{1-1} \mathbf{Q}_s = \mathbf{P}_r \mathbf{Q}_s \\ \mathbf{H}_1 &= \mathbf{P}_r \mathbf{A}^{2-1} \mathbf{Q}_s = \mathbf{P}_r \mathbf{A} \mathbf{Q}_s \end{aligned} \quad (3.113)$$

Zauważmy, że dwie kolejne macierze Hankela pozwalają na proste wyznaczenie macierzy systemu  $\mathbf{A}$ . Jako metodę do oceny rzędu macierzy Hankela wykorzystano algorytm rozkładu według wartości osobliwych SVD (*eng. Singular Value Decomposition*). Dla macierzy  $\mathbf{H}_0$  zapiszemy:

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{R} \Sigma \mathbf{S}^T = [\mathbf{R}_1 \quad \mathbf{R}_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^T \\ \mathbf{S}_2^T \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

w którym,  $\Sigma$  jest prostokątną macierzą diagonalną o wymiarach  $(rm \times s)$  i zawiera wartości osobliwe macierzy  $\mathbf{H}_0$ . Wartości osobliwe  $d_i$  rozmieszczone na przekątnej ułożone są w sposób niemalejący, tak że  $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq \dots \geq d_n$ . Z kolei kolumny macierzy  $\mathbf{R}$  i  $\mathbf{S}$  są ortonormalnymi wektorami osobliwymi odpowiadającymi poszczególnym wartościom osobliwym  $\mathbf{d}_i$ . Macierz wartości osobliwych można zapisać w następującej formie:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\Sigma} \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

gdzie  $\Sigma_1$  jest macierzą diagonalną o  $n$  wartościach niezerowych na przekątnej, a pozostałe elementy macierzy  $\Sigma$  są zerowe. Taką formę będzie miała macierz w przypadku braku szumów w sygnale i perfekcyjnym spełnieniu wszystkich założeń identyfikacji. Liczba wartości osobliwych będzie równa rzędowi macierzy Hankela i rzędowi modelu. Niestety w rzeczywistości takie warunki nie mają nigdy miejsca. W takim przypadku liczba niezerowych wartości osobliwych będzie większa niż  $n$ . Analiza SVD pozwala jednak efektywnie ocenić rzad macierzy. Wartości osobliwe, które odpowiadają fizycznej informacji na temat systemu są zawsze relatywnie duże, a wartości wywołane przez nieidealne warunki pomiaru relatywnie małe. Ostatecznie można dokonać podziału na wartości znaczące (oznaczające rzad modelu) i nieznaczące. Za pomocą macierzy można tę sytuację odwzorować następująco:

$$\Sigma_N = \begin{bmatrix} \Sigma_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\Sigma} \end{bmatrix} = \text{diag}[d_1, d_2, d_3, \dots, d_n, d_{n+1}, \dots, d_N] \quad (3.116)$$

gdzie  $d_i (i = 1, \dots, n)$  oznaczają istotne, a  $d_i (i = n+1, \dots, N)$  nieistotne wartości osobliwe. Postawienie wyraźnej granicy pomiędzy wartościami istotnymi i nieistotnymi nie jest oczywiste. Rozrysowując wartości osobliwe na wykresie, zwykle widać miejsce gdzie dwie kolejne wartości różnią się istotnie. Taki skok utożsamiany jest z końcem wartości istotnych. Niestety nie jest to regułą i aby w pełni odwzorować układ wartości nieznacznie zwiększyć rzad modelu w trakcie identyfikacji (Szafrański 2013; Hollkamp i Gordon 2001). Podobnie zapiszmy dla macierzy  $\mathbf{S}$  i  $\mathbf{R}$ :

$$\mathbf{R}_N = [\mathbf{R}_n \quad \bar{\mathbf{R}}] \quad \mathbf{S}_N = [\mathbf{S}_n \quad \bar{\mathbf{S}}] \quad (3.117)$$

Porównując równania (3.109) i (3.114) i przyjmując  $k = 1$  otrzymamy:

$$\mathbf{P}_r \mathbf{Q}_s = \mathbf{R} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{S}^T = \mathbf{R} \boldsymbol{\Sigma}^{1/2} \boldsymbol{\Sigma}^{1/2} \mathbf{S}^T \quad (3.118)$$

Następnie wykorzystując powyższy podział i równanie 3.113 otrzymamy następującą zależność:

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{R} \boldsymbol{\Sigma}^{1/2} \mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma}^{1/2} \mathbf{S}^T \quad (3.119)$$

Przekształcenia pozwalają uzyskać formułę na wyznaczenie macierzy systemu  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2} \mathbf{R}^T \mathbf{H}_1 \mathbf{S} \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2} \quad (3.120)$$

Zakładając że  $\mathbf{0}_i$  jest macierzą zerową rzędu  $i$ , a  $\mathbf{I}_i$  jest macierzą jednostkową rzędu  $i$  zdefiniujmy macierze pomocnicze:

$$\mathbf{E}_p^T = [\mathbf{I}_p \quad \mathbf{0}_p \quad \dots \quad \mathbf{0}_p] \quad \mathbf{E}_m^T = [\mathbf{I}_m \quad \mathbf{0}_m \quad \dots \quad \mathbf{0}_m] \quad (3.121)$$

Po wykorzystując wzór (3.109) i wykonując przekształcenia możliwe jest wyznaczenie macierzy systemu będących minimalną realizacją. Po wykonaniu SVD i przyjęciu jedynie istotnych wartości osobiwych jako rzędu modelu  $n$  zapisać można równania na przybliżone wartości macierzy modelu w przestrzeni stanów, które dla odróżnienia oznaczono przez ( $\hat{\cdot}$ ):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}} &= \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1/2} \mathbf{R}_n^T \mathbf{H}_1 \mathbf{S}_n \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1/2} \\ \hat{\mathbf{B}} &= \boldsymbol{\Sigma}_n^{1/2} \mathbf{S}_n^T \mathbf{E}_m \\ \hat{\mathbf{C}} &= \mathbf{E}_p^T \mathbf{R}_n \boldsymbol{\Sigma}_n^{1/2} \end{aligned} \quad (3.122)$$

Przybliżone macierze dla wybranego rzędu  $n$  są wartościami estymowanymi w sensie metody najmniejszych kwadratów (Jer-Nan Juang 1994; Rainieri i Fabbrocino 2014).

### Identyfikacja parametrów modalnych

Rozwiązując zagadnienie własne dla macierzy  $\hat{\mathbf{A}}$  otrzymamy zestaw niezależnych zespółonych wartości własnych  $\lambda_i$  i wektorów własnych  $\phi_i$ . Zestawiając je podobnie jak macierz widmową  $\boldsymbol{\Lambda}$  (??) i modalną  $\boldsymbol{\Phi}$  (??) otrzymamy minimalną realizację ( $\hat{\mathbf{A}}$ ,  $\hat{\mathbf{B}}$ ,  $\hat{\mathbf{C}}$ ) we współrzędnych modalnych ( $\boldsymbol{\Lambda}$ ,  $\boldsymbol{\Phi}^{-1} \hat{\mathbf{B}}$ ,  $\hat{\mathbf{C}} \boldsymbol{\Phi}$ ). Poszczególne elementy realizacji we współrzędnych modalnych dostarczają różnych informacji na temat zidentyfikowanych charakterystyk modalnych.  $\boldsymbol{\Lambda}$  zawiera informacje o tłumieniu i częstotliwościach drgań własnych układu.  $\boldsymbol{\Phi}^{-1} \hat{\mathbf{B}}$  definiuje początkowe amplitudy modalne. Z kolei  $\hat{\mathbf{C}} \boldsymbol{\Phi}$  zawiera w sobie postaci drgań własnych wyznaczone dla punktów pomiarowych (P. Li, Hu i H. J. Li 2011). Przed wyznaczeniem częstości drgań własnych i tłumienia należy przetrańformować macierz  $\boldsymbol{\Lambda}$  z formy dyskretnej do formy ciągłej  $\boldsymbol{\Lambda}_c$  (Szafrański 2013).

$$\boldsymbol{\Lambda}_c = \frac{1}{\Delta t} \ln \boldsymbol{\Lambda} \quad (3.123)$$

w którym  $\Delta t$  oznacza krok czasowy próbkowania, taki że  $\Delta t = 1/f_s$  dla  $f_s$  będącej częstotliwością próbkowania pomiaru. Częstość drgań własnych  $\omega_{ni}$  oraz tłumienie  $\xi_i$  wyznaczyć można na podstawie wartości własnych zebranych w macierzy  $\boldsymbol{\Lambda}_c$ , a postaci drgań własnych  $\psi_i$  z macierzy  $\boldsymbol{\Phi}$  za pomocą następujących formuł:

$$\omega_{ni} = |\lambda_{ci}| = \sqrt{\operatorname{Re}(\lambda_{ci})^2 + \operatorname{Im}(\lambda_{ci})^2} \quad (3.124)$$

$$\xi_i = -\frac{\operatorname{Re}(\lambda_{ci})}{\omega_{ni}} \quad (3.125)$$

$$\psi_{j,i} = |\phi_{j,i}| \operatorname{sign}\left(\operatorname{Re}(\phi_{j,i})\right) \quad (3.126)$$

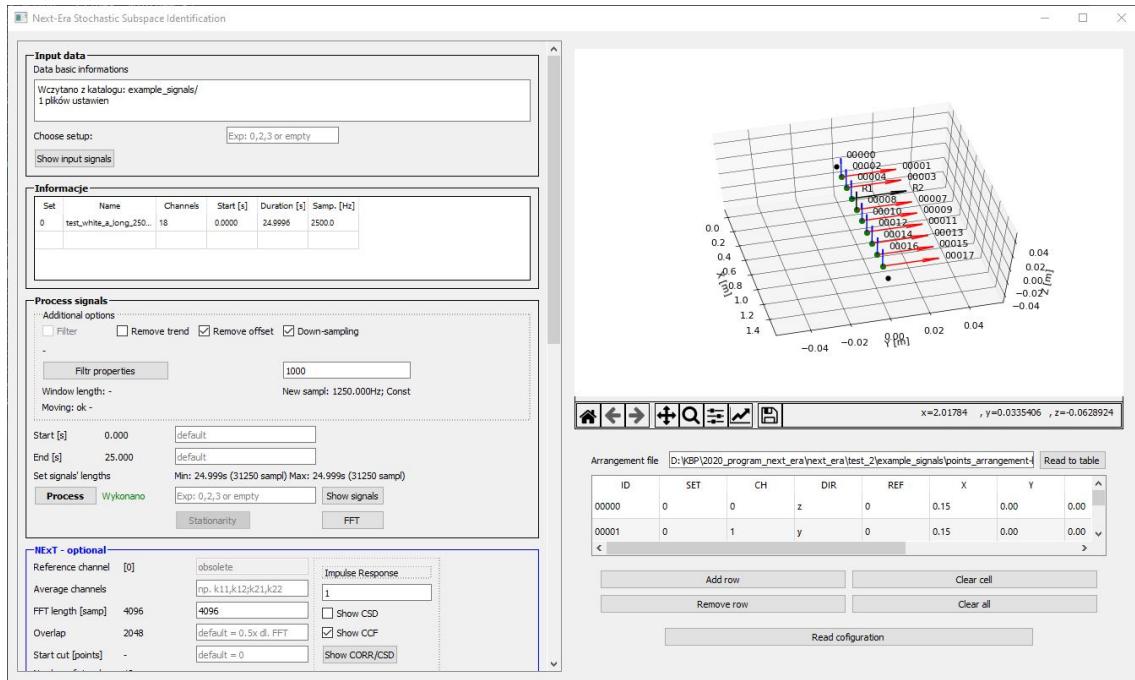
gdzie  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  ( $n$  - rząd modelu),  $j = 1, 2, 3, \dots, m$ , ( $m$  - liczba punktów pomiarowych),  $|\cdot|$  oznacza moduł liczby zespolonej,  $\operatorname{Re}(\cdot)$  i  $\operatorname{Im}(\cdot)$  oznaczają odpowiednio część rzeczywistą i urojoną liczby zespolonej, a  $\operatorname{sign}(\cdot)$  jest funkcją zwracającą +1 dla liczb dodatnich i -1 dla liczb ujemnych.

## 3.7 Implementacja programu

Na rynku istnieją komercyjne aplikacje komputerowe, stworzone do identyfikacji modalnej. Należą do nich przede wszystkim ARTeMIS - SVS i MACEC - dodatek do programu MATLAB. Programy te służą zarówno naukowcom jak i szeroko pojętemu przemysłowi. Nie powinno więc dziwić, że są skomercjalizowane i płatne. W trakcie realizacji pracy doktorskiej podjęto decyzję o napisaniu własnej aplikacji komputerowej służącej identyfikacji modalnej. Zdaniem autora takie podejście zapewnia pełną kontrolę nad algorytmem i parametrami identyfikacji oraz nad sposobem przedstawienia wyników. Niebagatelnym profitem napisania programu autorskiego jest również lepsze zrozumienie mechanizmów i wrażliwości elementów algorytmu. W początkowej fazie tworzenia zaplanowano następującą funkcjonalność programu:

- wczytywanie i podgląd sygnałów pomiarowych, grupowanie sygnałów w serie pomiarowe, ze wskazaniem sygnałów referencyjnych i lokalizacją punktów pomiarowych,
- przetwarzanie sygnałów: okienkowanie, usuniecie składowej stałej i trendu, filtrowanie, zmiana próbkowania,
- wyznaczenie funkcji odpowiedzi impulsowych sygnałów wykorzystując algorytm NExT, z możliwością podziału na serie pomiarowe z punktem referencyjnym oraz uśredniania serii pomiarowych,
- identyfikacja modalna za pomocą algorytmu ERA,
- elementy kontroli obliczeń: zmiana parametrów metod, wybór elementów przetwarzania sygnałów,
- elementy wizualizacji wyników: wykresy sygnałów, animacja postaci drgań własnych, postaci we współrzędnych biegunkowych, diagramy stabilizacyjne metody NExT-ERA.

Aplikację napisano w języku Python 3.6 głównie z użyciem bibliotek NUMPY i SCIPY do obliczeń oraz MATPLOTLIB do wizualizacji rezultatów. Dodano interfejs graficzny wykorzystujący technologię Qt. Elementy interfejsu pokazano na rysunku 3.5.



Rysunek 3.5: Widok na okno główne stworzonej aplikacji do identyfikacji modalnej

### 3.7.1 Algorytm programu

Algorytm programu przedstawiono na grafice []. Poniżej omówiono podstawowe informacje na temat użytych metod przetwarzania sygnałów.

Wstępnie sygnały wyjściowe mogą być poddane standardowemu przetwarzaniu sygnału. Do zastosowanych metod należy filtrowanie, usuwanie składowej stałej i obniżenie próbkowania (*eng. downsampling, resampling*). Filtrowanie może posłużyć do odrzucenia niechcianych składowych z sygnału i ograniczyć identyfikację jedynie do określonego obszaru. Odcięcie składowej stałej jest koniecznym elementem przygotowania sygnałów do identyfikacji. Bez tego zabiegu, tak jak w przypadku Transformaty Fouriera występuje istotny pik na zerowej odciętej, tak utrudnia ona może być identyfikacja modów o niskiej częstotliwości. Zmiana częstotliwości próbkowania jest bardzo przydatną funkcją. Podobnie do filtrowania zmniejsza zakres analizowanej dziedziny, ale w odróżnieniu do filtrowania zmniejsza również liczbę próbek sygnału. Należy pamiętać, że resampling nie jest tożsamym pominięciu części próbek z sygnału. Wpływ obróbki sygnału na wyniki identyfikacji oraz zalecenia dotyczące przyjmowanych parametrów opisał Caicedo 2011

Pierwszym głównym etapem w algorytmie NExT-ERA jest wyznaczenie funkcji korelacji wprowadzonych sygnałów. Wyznaczanie funkcji korelacji metodą bezpośrednią jest wymagające obliczeniowo. Z tego powodu wykorzystuje się zależność pomiędzy gęstością widmową mocy, a funkcją korelacji (3.76 i 3.77). Wyznaczenie gęstości widmowej mocy jest możliwe za pomocą znacznie bardziej efektywnych algorytmów. Jednym z nich jest metoda Welch'a (Welch 1967; Brincker i C. E. Ventura 2015), którą zastosowano w programie. Umożliwiono również łączenie i uśrednianie wielu serii pomiarowych w jeden wynik identyfikacji. Wykorzystano do tego algorytm przedstawiony w Brownjohn i in. 2010. W przypadku łączenia serii pomiarowych w jeden wynik, konieczne jest zastosowanie punktów referencyjnych. Punkty referencyjne są to punkty stałe w trakcie całych pomiarów, muszą występować w każdej serii

pomiarowej i nie mogą znajdować się w węźle żadnej postaci drgań. Innymi słowy punkt referencyjny musi mieć niezerową wartość w wektorze określającym postać drgań, którą należy zidentyfikować. W zastosowanym algorytmie istnieje możliwość wyboru po jednym punkcie referencyjnym dla każdego z kierunków drgań: X, Y, Z. Łączenie serii pomiarowych odbywa się w następujący sposób:

- Algorytmem Welch'a wyznaczane są funkcje wzajemnych gęstości widmowych mocy pomiędzy sygnałem referencyjnym, a pozostałymi sygnałami na powiązanym kierunku. Wzajemne gęstości widmowe związane z danym punktem referencyjnym są zestawione w jeden wektor.
- Wyznaczane są funkcje auto gęstości widmowych mocy dla sygnałów w punktach referencyjnych. Użyty jest do tego ten sam algorytm co w przypadku wzajemnych funkcji gęstości widmowej mocy, z tą różnicą że sygnały wejściowe są identyczne.
- Funkcje wzajemnej gęstości widmowej mocy zestawione w jednym wektorze dzielone są przez funkcję auto gęstości widmowej punktu referencyjnego. W tym przypadku wymagane jest aby długość wektora wszystkich wektorów była równa. Identycznie postępuje się z każdym wektorem gęstości widmowych mocy.
- Auto gęstości widmowe mocy dla danego punktu referencyjnego są uśredniane. Auto gęstości widmowe mocy są sumowane ze wszystkich ustawień, a wynik jest podzielony przez liczbę ustawień.
- Po procesie uśredniania gęstości widmowych mocy punktów referencyjnych następuje działanie odwrotne. Wcześniej podzielone wzajemne gęstości widmowe mocy mnożone są przez uśrednione auto gęstości widmowe mocy punktów referencyjnych.
- Wynikowe gęstości widmowe mocy przekształcane są za pomocą odwrotnej Transformaty Fouriera do sygnałów w dziedzinie czasu. Otrzymany wynik odpowiada funkcjom cross-korelacji i może być użyty w metodzie ERA.

Uśrednianie serii pomiarowych z tym samym ustawieniem punktów pomiarowych odbywa się przez sumowanie gęstości widmowych mocy z powtarzonych serii pomiarowych i podzieleniu przez liczbę powtarzonych serii. Pomimo zestawienia funkcji gęstości widmowych mocy w wektory, wszystkie wspomniane wyżej operacje mnożenia i dzielenia funkcji gęstości widmowych mocy polegają na działaniu na poszczególne prążki spektrum, a nie na klasycznym rozumieniu mnożenia i dzielenia wektorów.

### 3.7.2 Elementy oceny poprawności rozwiązania

Ważnym elementem w procesie identyfikacji modalnej jest ocena poprawności używanego rozwiązania. W tym celu najczęściej wykorzystywane są diagramy stabilizacyjne. W przypadku pomiarów obarczonych szumem, przyjęty rząd modelu musi być zadeklarowany jako większy niż miało by to miejsce w idealnych warunkach. Diagram stabilizacyjny pozwala na określenie minimalnego rzędu modelu, przy którym występują wszystkie interesujące mody i są one stabilne. Zastosowanie diagramów

stabilizacyjnych opisano między innymi w (!!). W programie zastosowano dwie wersje diagramów: niefiltrowaną i filtrowaną. Wersja niefiltrowana obrazuje wszystkie wyznaczone mody: rzeczywiste i fikcyjne. Odróżnia je w zależności od wyników dla niższego rzędu modelu. Jeśli istnieje w modelu o rzędzie niższym mod spełniający odpowiednie kryteria to jest on uznany za rzeczywisty. Zastosowane w programie domyślne kryteria to:

- częstotliwość w dwóch kolejnych krokach nie może się różnić o więcej niż 1%,
- tłumienie w dwóch kolejnych krokach nie może się różnić o więcej niż 5%,
- parametr MAC dla postaci w dwóch kolejnych krokach musi być większy niż 0.9,
- parametr MPC postaci modu musi być większy niż 0.8.

Diagram niefiltrowany obrazuje rozkład zidentyfikowanych modów w domenie częstotliwości. Wstępnie pozwala ocenić czy istnieją mody stabilne (częstotliwość i tłumienie), o rzeczywistych wektorach postaci (MPC) i o niezmiennej formie (MAC). W przypadku dużego rzędu modelu i bliskich sobie modów trudno jednoznacznie odnaleźć jedynie poprawne rozwiązania. Z tego względu stworzono również wersję filtrowaną diagramu stabilizacyjnego. Diagram filtrowany w znacznie bardziej czytelny sposób pozwala przedstawić jedynie mody uznane za rzeczywiste. Jego generacja opiera się na następujących krokach:

- Podział dziedziny częstotliwości na wąskie pasma (np. 1% dolnej granicy pasa) i podział wszystkich punktów według przynależności do poszczególnych pasm,
- Odrzucenie punktów, dla których tłumienie jest zbyt duże ( $LDT \geq 0.3$ ) lub ujemne,
- Wyznaczenie parametru MAC pomiędzy wszystkimi punktami w paśmie oraz parametru MPC dla każdego modu w paśmie.
- Wyznaczenie wartości średniej i odchylenia standardowego częstotliwości, tłumienia i parametrów MAC i MPC dla punktów pasa. Jeżeli wartości średnie pomniejszone o odchylenie standardowe są spełniają dopuszczalne warunki, to zestaw punktów uznany jest za określający rzeczywisty mod. Jeżeli nie, wyszukiwany jest punkt charakteryzujący się najgorszym parametrem MAC lub MPC albo zbyt różniąca się liczbą tłumienia i jest odrzucany. Następnie ponownie oceniana jest wartość średnia i odchylenie standardowe. Proces ten toczy się do momentu odrzucenia wszystkich punktów lub spełnienia kryteriów uznania mod za rzeczywisty.
- Ostatecznie jako rzeczywiste i stabilne określone są mody, dla których liczba punktów w paśmie jest większa od wartości minimalnej. Domyślnie jest to 20% maksymalnego rzędu modelu na diagramie.

Wskaźniki MAC i MPC są istotną częścią algorytmu programu i służą ocenie poprawności wyników. Poniżej przytoczono ich definicje i podstawowe właściwości.

### Model Phase Colinearity (MPC)

Wynikiem przeprowadzonej analizy modalnej są postaci i częstotliwości o wartościach zespolonych. Postaci zidentyfikowane na podstawie pomiarów wartości rzeczywistych powinny stanowić wektory o współrzędnych rzeczywistych. W przypadku modów normalnych wszystkie punkty konstrukcji drgają dokładnie w fazie lub w przeciwną fazie względem siebie. Przeciwnie, kiedy postaci są wektorami zespolonymi, przemieszczenia osiągają wartości ekstremalne w różnych chwilach czasowych dla różnych stopni swobody. Ewins 2000; Chopra 2012 podają przykładowe przyczyny powstania postaci o wektorach zespolonych. Są to m.in. efekt żyroskopowy, efekty aerodynamiczne, nieliniowość czy nieproporcjonalne tłumienie. Zidentyfikowane mody zwykle występują w postaci zespolonej. Wynika to z relatywnie niskiego wskaźnika sygnału do szumu (Rainieri i Fabbrocino 2014). Mimo to, stopień zespolenia” jest zwykle niewielki i w praktycznych zastosowaniach błęd wynikający z tej cechy może być zaniedbany. Mimo to ważnym jest żeby rozróżnić, które mody są normalne, a które w dużej mierze zespolone. Jedną z najprostszych metod jest wykreślenie współrzędnych składników postaci w układzie biegunkowym. Metoda została szerzej opisana w (Ewins 2000). Zasadą jest, że jeśli w konstrukcji występuje tłumienie proporcjonalne to składniki danej postaci układają się na linii prostej w zespolonym układzie współrzędnych (Rainieri i Fabbrocino 2014)). Do ilościowego określenia stopnia przestrzennej spójności modu Richard S Pappa, Elliott i Schenk 1992 opracowali wskaźnik MPC (*Modal Phase Collinearity*). Jest on dla  $i$ -tego moda określony wzorem 3.131

$$S_{xx} = \Phi_i'^\top \Phi_i' \quad S_{yy} = \Phi_i''^\top \Phi_i'' \quad S_{xy} = \Phi_i'^\top \Phi_i'' \quad (3.127)$$

$$\mu = \frac{S_{xx} - S_{yy}}{2S_{xy}} \quad \beta = \mu + \operatorname{sgn}(S_{xy}\sqrt{\mu^2 + 1}) \quad \tau = \tan^{-1}(\beta) \quad (3.128)$$

$$\lambda_1 = S_{xx} + \frac{S_{xy}(2(\mu^2 + 1)\sin^2(\tau) - 1)}{\mu} \quad (3.129)$$

$$\lambda_2 = S_{yy} + \frac{S_{xy}(2(\mu^2 + 1)\sin^2(\tau) - 1)}{\mu} \quad (3.130)$$

$$\text{MPC}_i = \left[ 2 \cdot \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} - 0.5 \right) \right]^2 \quad (3.131)$$

gdzie  $\operatorname{sgn}(\cdot)$  oznacza funkcję zwracającą znak liczby. Wskaźnik MPC jest bezwymiarowy i przyjmuje wartości z zakresu od 0 (dla modów z zupełnie nieskorelowanymi kątami fazowymi) do 1 (dla modów jednofazowych). Przykłady zastosowania tego wskaźnika zaprezentowano w pracach (!!!).

### Modal Assurance Criterion (MAC)

Kryterium MAC (Modal Assurance Criterion) pozwala ocenić miarę dopasowania (stopień liniowości) dwóch wektorów modalnych (Randall J Alleman i Brown 1982). Jest to podstawowe i najbardziej popularne kryterium służące porównaniu wektorów modalnych Rainieri i Fabbrocino 2014. Jego wartość waha się od 0 (dla braku dopasowania) do 1 (dla idealnego dopasowania). Definicja wskaźnika dana jest wzorem 3.132.

$$MAC_n = \frac{(\psi_{n,a}^H \psi_{n,e})^2}{\psi_{n,a}^H \psi_{n,a} \psi_{n,e}^H \psi_{n,e}} \quad (3.132)$$

gdzie  $\psi_{n,a}$  i  $\psi_{n,e}$  to wektory postaci drgań własnych, a  $(\cdot)^H$  oznacza sprzężenie Hermitowskie wektora. Należy pamiętać, że kryterium MAC nie wskazuje czy rozwiązanie jest poprawne lub czy wektory modalne są ortogonalne. Wynik pokazuje jedynie dopasowanie dwóch wektorów. Wskaźnik MAC jest nieodporny na błędy zawarte jednocześnie w obu wektorach. Z tego względu za każdym razem należy kontrolować założenia metody. Zbiór wskazówek do stosowania kryterium MAC w swojej pracy zaważył Randall J. Allemand 2003. Poza swoistą instrukcją użycia wskaźnika, wskazuje on następujące główne przyczyny niemiarodajnych wyników przy korzystaniu z kryterium MAC:

- traktowanie kryterium MAC jako informacji o ortogonalności wektorów,
- nieprawidłowe matematyczne sformułowanie kryterium, głównie zastąpienie sprzężenia Hermitowskiego transpozycją. Zmiana ta jest słuszna wyłącznie przy rzeczywistych wektorach modalnych,
- duże różnice w wartościach współrzędnych wektorów. Kryterium jest bardzo wrażliwe na duże wartości, a niewrażliwe na małe wartości,
- przyjęcie zbyt małej liczby współrzędnych wektora,
- wypełnienie zerami współrzędnych wektora, na temat których nie ma żadnej informacji.

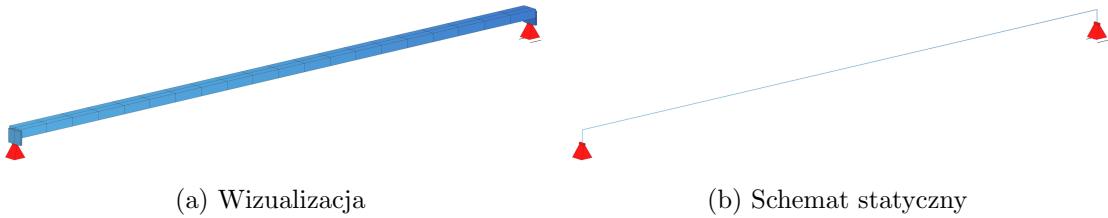
Ze względu na ograniczenia kryterium MAC, od momentu jego powstania powstały szereg pokrewnych wskaźników. Są to między innymi: Coordinate Modal Assurance Criterion (COMAC) (Ewins 2000), Enhanced Coordinate Modal Assurance Criterion (ECOMAC) (Hunt 1992) czy Inverse Modal Assurance Criterion (IMAC) (MITCHELL 1998). Każde z kryteriów zostało zmodyfikowane w celu wyeliminowania konkretnego ograniczenia oryginalnej wersji. Zestawienie i opis wielu z nich przedstawiono miedzy innymi w pracach (Randall J. Allemand 2003; Rainieri i Fabbrocino 2014; Szafrański 2013; Salamak 2003)

Poza diagramem stabilizacyjnym, w niniejszej pracy kryterium MAC zostało również użyte przy doborze lokalizacji czujników w trakcie pomiarów na konstrukcji rzeczywistej. Jest to kolejne z popularnych zastosowań współczynnika MAC (Randall J. Allemand 2003). Polega na takim doborze punktów pomiarowych, aby zidentyfikowane w tych punktach postaci drgań były od siebie maksymalnie różne. Opis przyjętego rozwiązania i wyniki obliczeń przedstawiono w wynikach badań w rozdziale (!!).

### 3.8 Testy numeryczne metody NEX-T-ERA

Każda aplikacja komputerowa przed użyciem powinna być poddana testom. W przypadku aplikacji służącej celom naukowym, gdzie zakłada się pewien poziom wiedzy i świadomości użytkownika zdecydowano, że testom poddane zostanie jedynie jądro programu - algorytm NExT-ERA. W tym celu założono wykonanie dwóch testów: numerycznego i laboratoryjnego. Test numeryczny ma opierać się na wykonaniu modelu obliczeniowego w oprogramowaniu MES, a następnie obciążeniu go losowo (w przybliżeniu szumem białym) i wykonaniu analizy dynamicznej. Test laboratoryjny

ma polegać na pomiarze i analizie drgań środowiskowych rzeczywistego obiektu badawczego. Przedmiotem badań była konstrukcja o schemacie statycznym bliskim belce swobodnie podpartej. Model numeryczny wykonano w programie MES bazując na inwentaryzacji wymiarów obiektu laboratoryjnego. Szczegółowe założenia testów, ich przebieg i rezultaty podano poniżej. Test numeryczny wykonano na modelu ramy przestrzennej o zewnętrznym schemacie statycznym bliskim belce swobodnie podpartej. Model wykonano w środowisku MES SOFiSTiK z użyciem jednowymiarowych elementów belkowych. Wizualizację oraz schemat statyczny pokazano na rysunku 3.6.



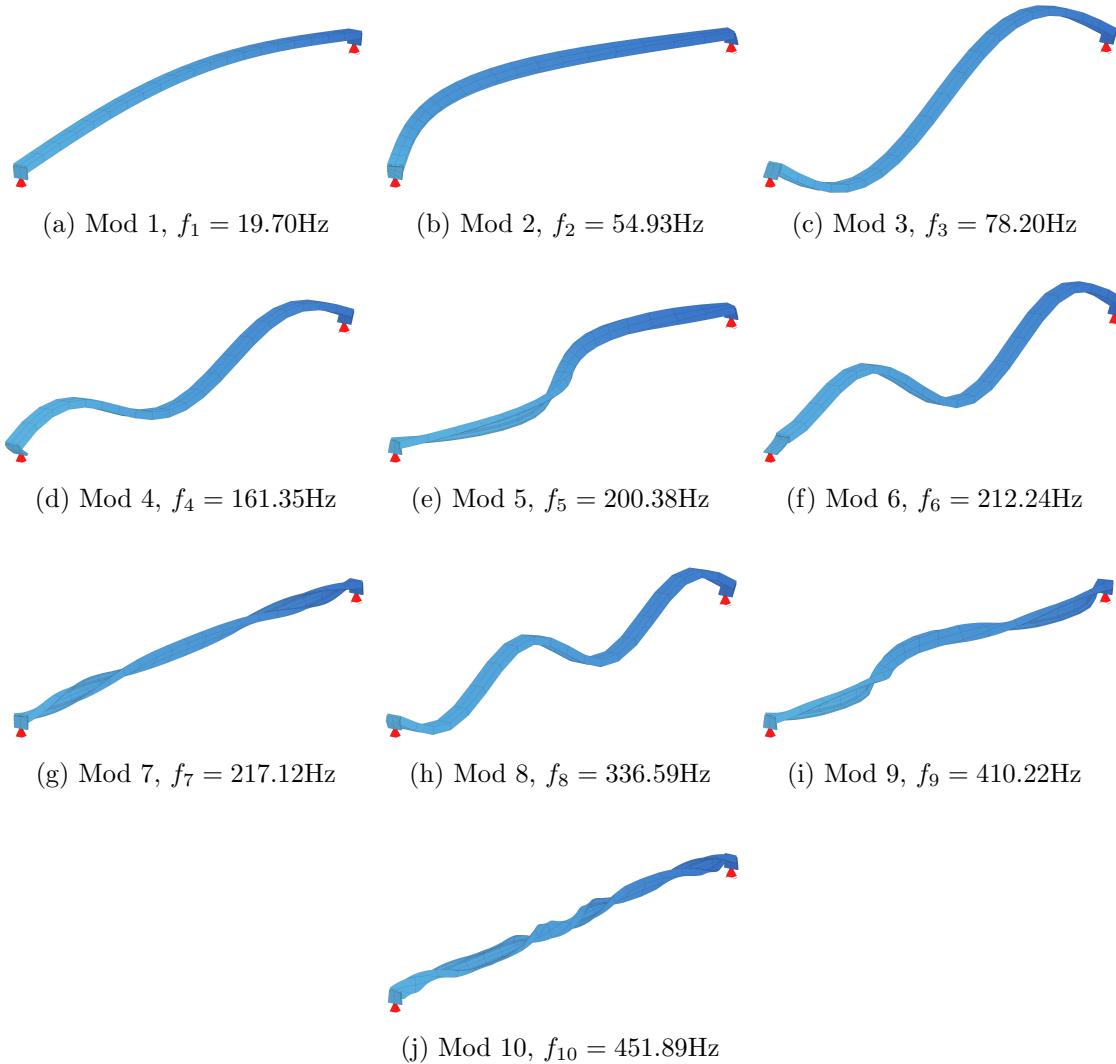
Rysunek 3.6: Wizualizacja i schemat statyczny testowego modelu numerycznego

Przed przystąpieniem do analizy wygenerowano 5000 losowych przypadków obciążenia. Losowy charakter uzyskano za pomocą następujących założeń dla każdego przypadku obciążenia:

- w każdym węźle pośrednim może, ale nie musi, być przyłożona siła pionowa lub poprzeczna,
- jeśli siła została przyłożona, jej wartość jest losowana z zakresu od -3 do 3 N dla każdego węzła indywidualnie,
- w trakcie analizy, w każdym kroku czasowym losowany jest jeden przypadek obciążenia z wygenerowanych 5000.

Rozwiązano problem własny dynamiki przedmiotowego modelu i otrzymano rezultaty jak na rysunku 3.7.

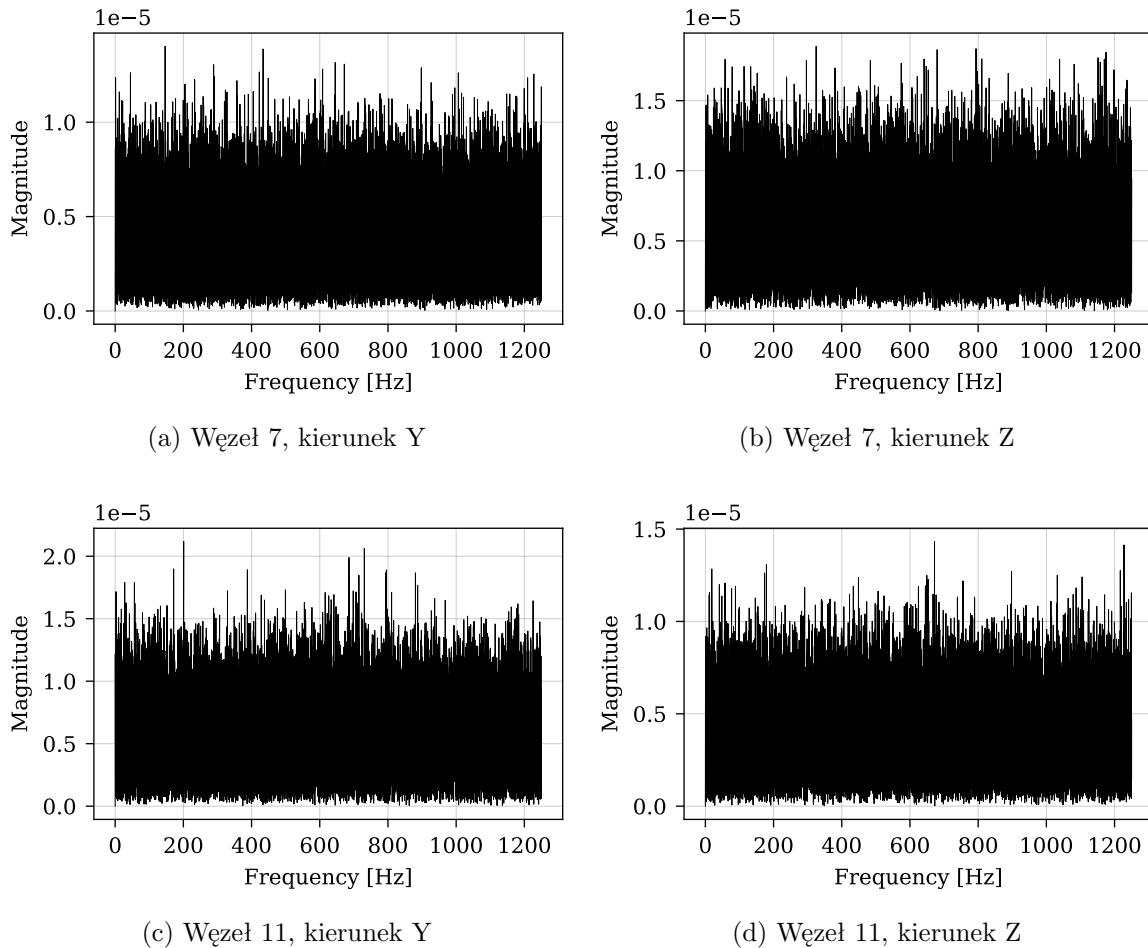
Odpowiedź konstrukcji na wymuszenie losowe wyznaczono metodą time-step Newmarka-Wilsona. Zdecydowano o sprawdzeniu modów w zakresie do około 250Hz. Z tego względu przyjęto krok całkowania jako  $\Delta t = 1/2500s$ . Zgodnie z kryterium Nyquista taki krok pozwala identyfikować drgania teoretycznie do częstotliwości 1250 Hz. Niemniej jednak, sygnał wyjściowy powinien zostać nadpróbkowany znacznie bardziej niż dwukrotnie. Aby zapewnić dokładność rezultatu, odpowiedź z rozwiązania numerycznego powinna być wyznaczona z próbkowaniem ok 10-15 razy większym niż częstotliwość najwyższej, interesującego modu (Żółtowski, Binczyk i Kalitowski 2017). Większość modów odczytanych z analizy modalnej mieści się w zamierzonym zakresie do 250 Hz. Kilka modów powyżej 250 Hz zostanie również uwzględnione w analizie dla pokazania zmniejszenia dokładności z uwagi na zbyt rzadkie próbkowanie. W każdym kroku struktura była obciążana losowym przypadkiem obliczeniowym z bazy 5000 wcześniejszych wygenerowanych. Tłumienie konstrukcji przyjęto jako masowo-sztywnościowe według metody Rayleigha (3.41). Współczynniki metody wyznaczono zakładając tłumienie LDT = 3% dla częstotliwości 20 Hz



Rysunek 3.7: Rozwiązań analizy modalnej modelu testowego

i 160 Hz. Chcąc sprawdzić charakter obciążenia wykonano analizę FFT sygnału złożonego z wartości obciążenia czterech węzłów w funkcji czasu. Widma częstotliwościowe przedstawiono na rysunku 3.8. Całkowity czas analizy przyjęto równy 25s ( $25 * 2500 = 62500$  kroków czasowych). Widmo częstotliwościowe nie ujawnia żadnej dominującej częstotliwości i można uznać je za równe w całym zakresie.

Dla obliczonego modelu odczytano przebieg przyspieszeń w dziewięciu węzłach pośrednich, na kierunku pionowym i poprzecznym. Do programu wprowadzono stworzone sygnały z informacją o lokalizacji punktów odczytu. Jako punkt referencyjny na kierunku Y wybrano punkt odległy o 0.3L od podpory, a na kierunku pionowym Z punkt odległy o 0.4L od podpory. O wyborze punktów referencyjnych decyduje warunek, że nie mogą one znajdować się w węzłach żadnej analizowanej postaci drgań. Dobór parametrów identyfikacji dokonano przy pomocy diagramu stabilizacyjnego (Rys. 3.9). Na ostatecznym diagramie w wersji filtrowanej (Rys. 3.9b) wyraźnie widać 8 zidentyfikowanych, stabilnych mody. Odczytano minimalny rzęd modelu zawierający wszystkie stabilne mody o wartości  $n = 20$ . Diagram tworzony iteracyjnie pozwolił ostatecznie wyznaczyć parametry metody, które przynoszą pewne, stabilne rozwiązanie. Dobrane parametry użyto w pojedynczym przebiegu algorytmu metody



Rysunek 3.8: Transformaty Fouriera funkcji wymuszenia przykładowych węzłów w modelu testowym

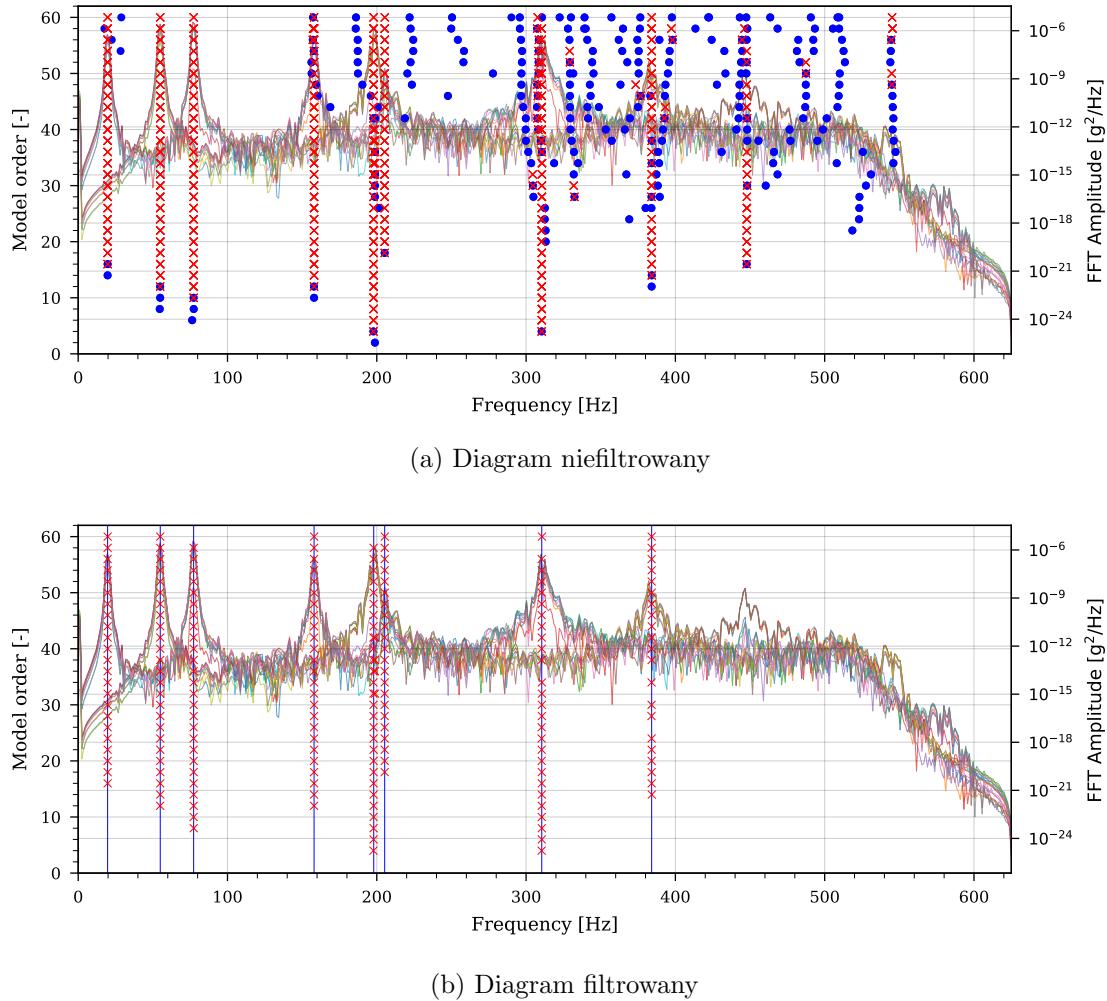
NExT-ERA w celu uzyskania pełnego rozwiązania.

Wprowadzono wyznaczone parametry do programu. Uzyskano odpowiedzi impulsowe dla każdego punktu, których przykłady wraz z odpowiadającą im transformatą Fouriera przedstawiono na rysunku 3.10.

Funkcje posiadają wyraźnie gasnący, okresowy charakter. Następnie wyznaczone funkcje IRF zostały wprowadzone do metody ERA. Wyniki obliczono dla rzędu modelu równego  $n = 20$  zgodnie ze wskazaniami diagramu stabilizacyjnego (Rys. 3.9). Spośród wszystkich modów wybrano te, które na diagramie ujawniają się jako rzeczywiste i stabilne. Wyniki w formie postaci drgań własnych na kierunku pionowym  $Z$  i poprzecznym  $Y$  oraz dla obu kierunków w układzie biegunkowym przedstawiono na rysunku 3.11.

### 3.9 Testy eksperymentalne metody NEXT-ERA

W warunkach laboratoryjnych wykonano pomiary na belce rzeczywistej (Rys. !!!). Belka została zamocowana do podłoża tak, żeby jedna z podpór miała możliwość przesuwu wzdłuż osi podłużnej. System pomiarowy składał się z wzmacniacza pomiarowego PMX firmy HBP, kabli i niskoszumowych, piezorezystywnych czujni-



Rysunek 3.9: Diagram stabilizacyjny metody NExT-ERA testowego modelu numerycznego: (a) diagram niefiltrowany, (b) diagram filtrowany

ków akcelerometrycznych firmy TE CONNECTIVITY. Do obsługi wzmacniacza i akwizycji danych użyto program HBM Catman Easy. Czujniki przyjmocowano magnetycznie do belki. Zastosowano czujniki 3 osiowe, ale rejestrowano jedynie przyspieszenia pionowe i poprzeczne. Zakres pomiarowy akcelerometrów wynosi  $\pm 2\text{g}$ , a gwarantowane szумy są określone jako mniejsze niż  $25\mu\text{g}$  RMS. Punkty pomiarowe przyjęto w punktach odpowiadających węzłom modelu, w których odczytywano przyspieszenia w testach numerycznych. Częstotliwość próbkowania w trakcie rejestracji przyjęto jako 2400 Hz. Wymuszenia belki odbywały przez delikatne dotknięcie i gładzenie belki palcami. Czas serii pomiarowej przyjęto zgodnie z zaleceniami opisanyimi w Brincker i C. E. Ventura 2015. Według autorów minimalny czas gwarantujący poprawne określenie tłumienia, bez ryzyka negatywnego wpływu obciążen metodą Welch'a, musi być dłuższy niż 20 okien czasowych użytych przy wyznaczaniu funkcji korelacji. Z tego względu zalecana minimalna długość pomiaru dana jest nierównością 3.133.

$$T_{tot} > \frac{20}{2\zeta f_{min}} = \frac{10}{\zeta f_{min}} \quad (3.133)$$

gdzie  $f_{min}$  oznacza najniższą częstotliwość drgań własnych układu. Dla podanego układu minimalna częstotliwość drgań własnych wyznaczona teoretycznie wynosi

Tablica 3.2: Porównanie zidentyfikowanych parametrów modalnych obiektu testowego

	Analiza modalna	Zakładane tłumienie	Model MES						Badania			
			Częst.	LDT	Częst.	Stosunek	LDT	Stosunek	Częst.	Stosunek	LDT	Stosunek
			[Hz]	[-]	[Hz]	[%]	[-]	[%]	[Hz]	[%]	[-]	[%]
Mod 1	19.77	0.0303	19.701	100%	0.0291	96%						
Mod 2	54.93	0.0189	54.958	100%	0.0232	123%						
Mod 3	78.2	0.0199	77.331	99%	0.0190	96%						
Mod 4	161.35	0.0302	157.995	98%	0.0240	79%						
Mod 5	200.38	0.0361	197.881	99%	0.0325	90%						
Mod 6	212.24	0.0379	205.290	97%	0.0410	108%						
Mod 7	217.12	0.0386	-	-	-	-	-	-				
Mod 8	336.59	0.0577	310.834	92%	0.0473	82%						
Mod 9	410.22	0.0697	384.619	94%	0.0628	90%						
Mod 10	451.89	0.0765	-	-	-	-	-	-				

$f_{min} = 19.7\text{Hz}$ , a przewidywana liczba tłumienia wynosi  $\zeta \approx 0.005$ . Minimalna długość serii pomiarowej wynosi więc  $T_{min} = \frac{10}{0.005 \cdot 19.7} = 101.5\text{s}$ .

Wyznaczono również stosunek poziomu sygnału do szumu posługując się wzorem (???)

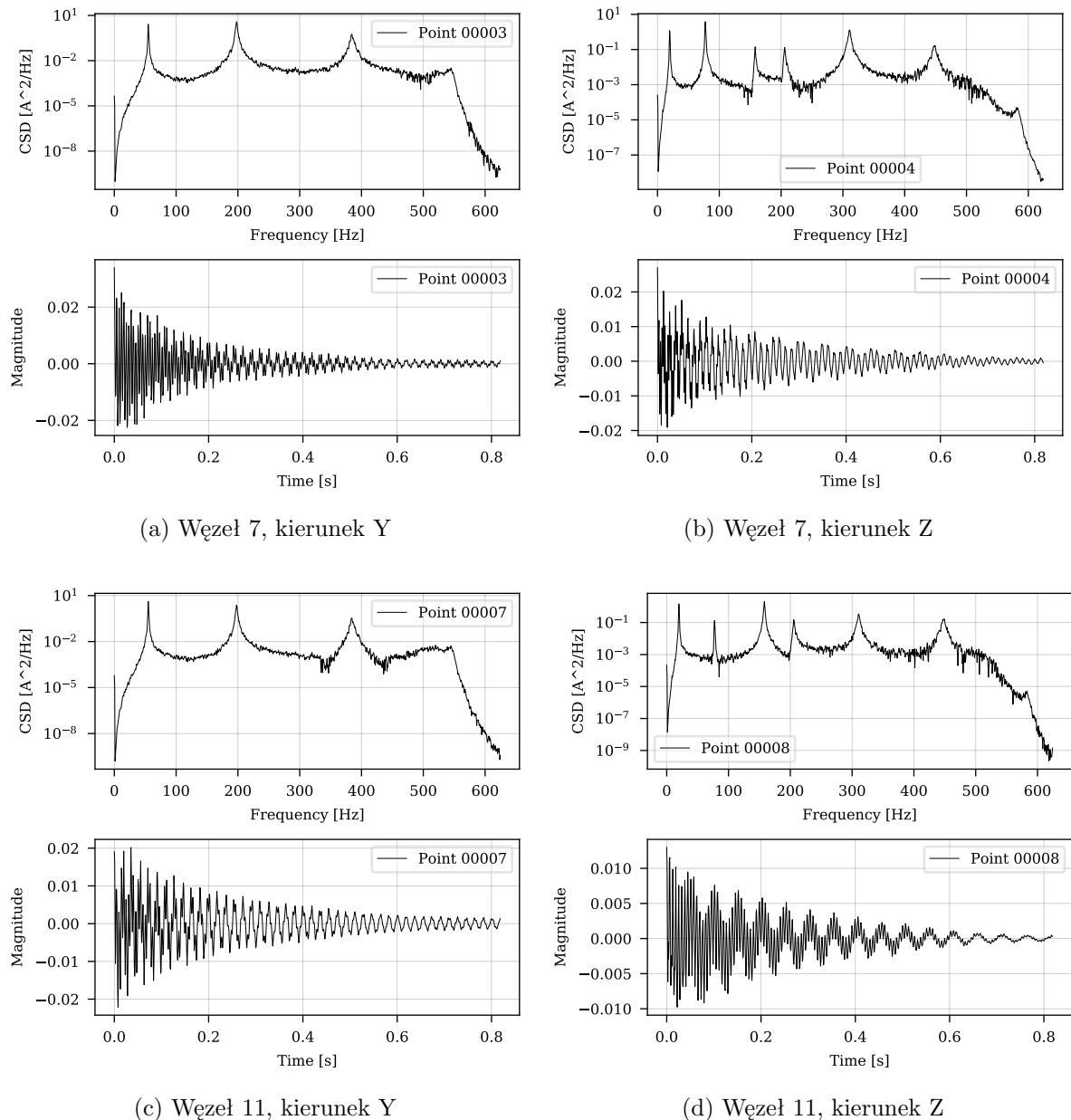
$$SN = 20 \log \frac{y_{max}}{\sigma_n} \quad (3.134)$$

gdzie  $y_{max}$  oznacza maksymalną chwilową wartość sygnału, którą układ jest w stanie zarejestrować bez zniekształceń, a  $\sigma_n$  jest wartością RMS szumu tła. Według zaleceń ANSI S2.47 wartość ta nie powinna być mniejsza niż 10 dB. Brincker i C. E. Ventura 2015 zalecają by w przypadku OMA stosunek sygnału do szumu nie był mniejszy niż 40 dB. Dla zastosowanego systemu pomiarowego zmierzony szum charakteryzuje się wartością RMS  $\sigma_n =$

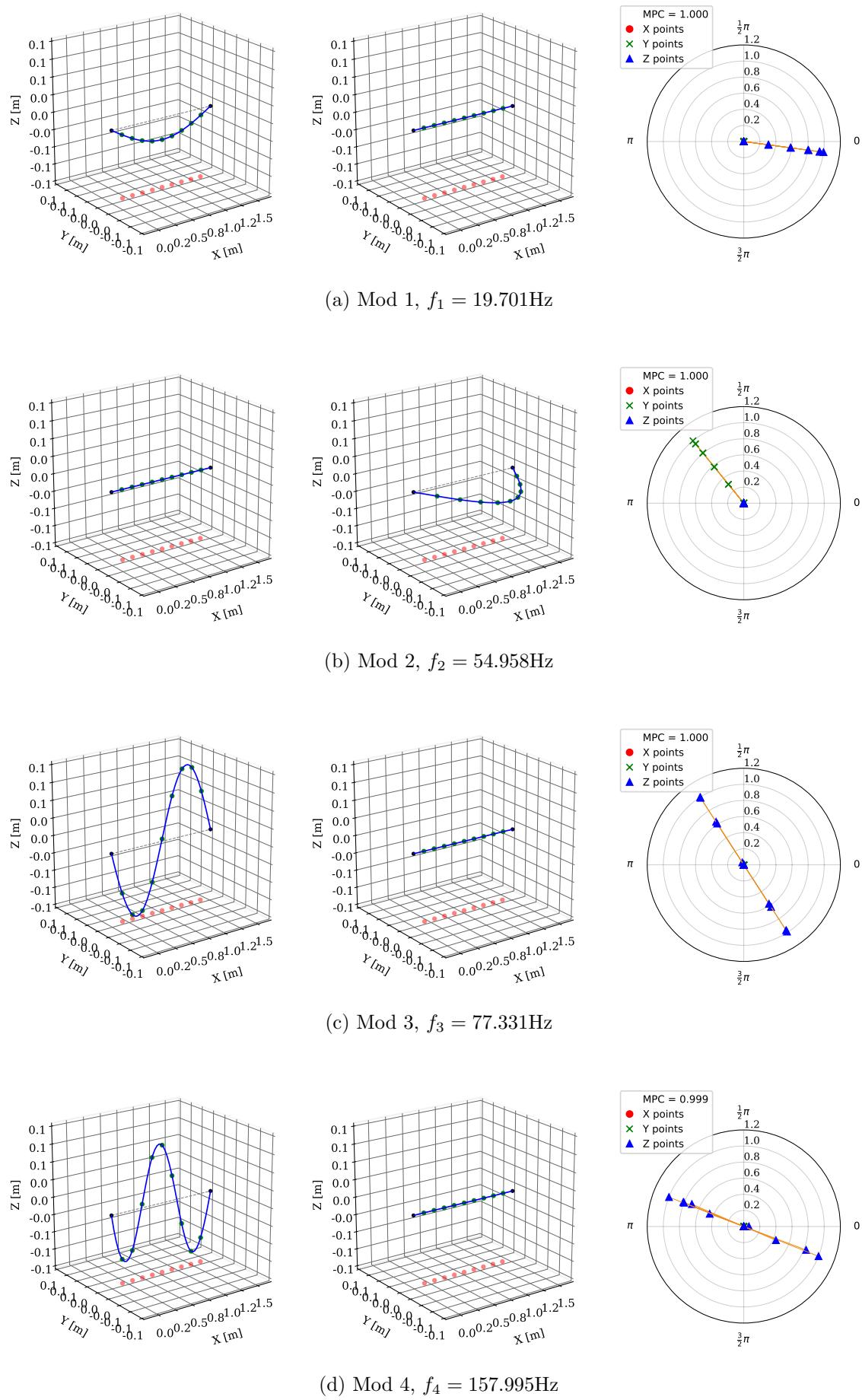
Przeprowadzono analizę sygnałów analogicznie jak dla modelu numerycznego. Diagramy stabilizacyjne pokazano na rysunku (!!). Zidentyfikowane częstotliwości i postaci drgań zamieszczono na rysunku (!!!).

## 3.10 Podsumowanie

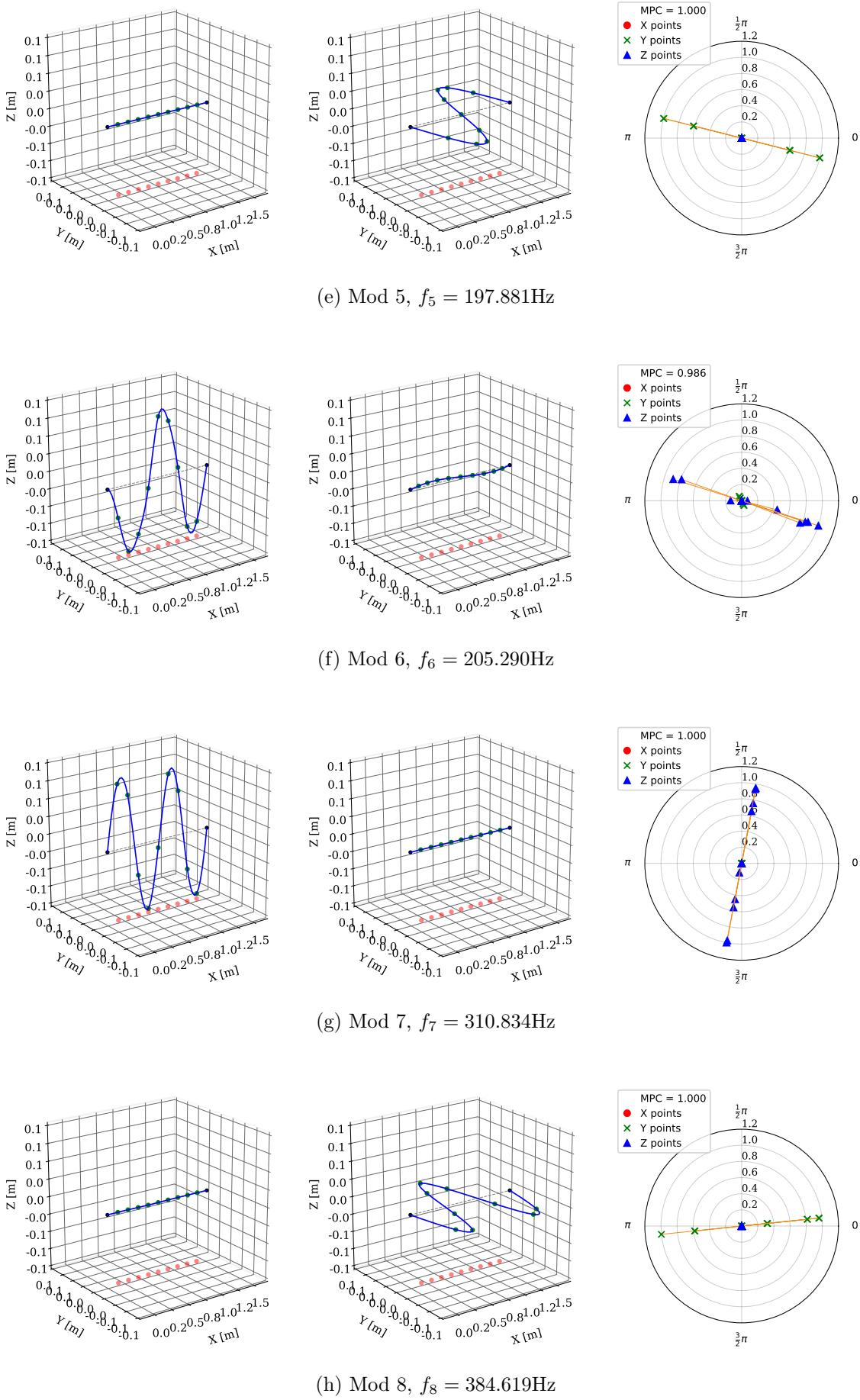
Zidentyfikowane częstotliwości drgań własnych oraz tłumienia zestawiono w tabeli 3.2. Obserwując uzyskane z analizy modalnej postaci można zauważyć, że Mod 7 i Mod 10 mają charakter skrętny. Posługując się modelem belkowym i odczytując przyspieszenia węzłów na kierunku  $Y$  i  $Z$  nie ma możliwości zaobserwować tych postaci. Przeprowadzona identyfikacja potwierdza ten fakt, nie wskazując tych modów jako stabilnych rozwiązań. Z tego względu w tabeli zbiorczej zostały one oznaczone jako brakujące. Jak pokazano w tabeli ...



Rysunek 3.10: Przykłady otrzymanych funkcji cross-korelacji w dziedzinie częstotliwości i dziedzinie czasu



Rysunek 3.11: Zidentyfikowane charakterystyki modalne belki testowej



Rysunek 3.11: Zidentyfikowane charakterystyki modalne belki testowej kont.

## Rozdział 4

# Optymalizacja metodą roju cząstek - Particle Swarm Optimizaton

4.1 Wprowadzenie: metody optymalizacji w tym „nieróżniczkowe”.

Particle Swarm optimization - opis, przegląd.  
Wielokryterialne PSO - opis przegląd.

Opis implementacji.

## Rozdział 5

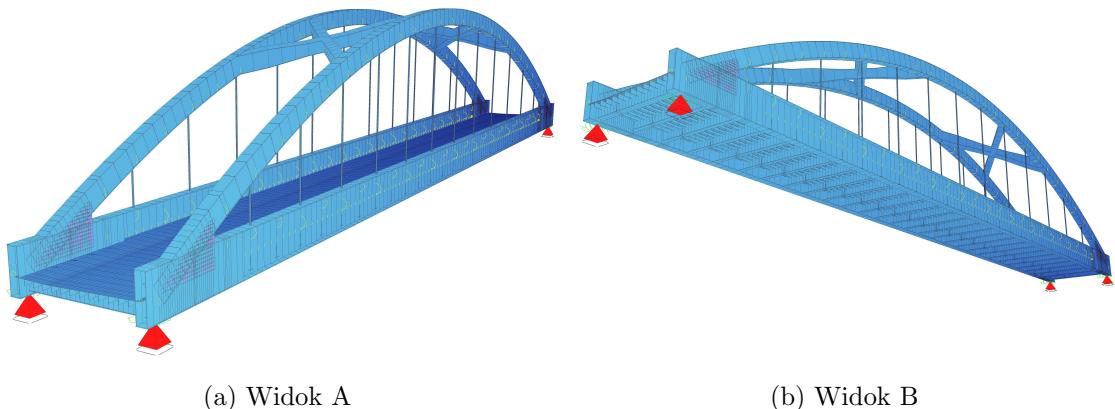
# Wiadukt WK2 w ciągu Pomorskiej Kolei Metropolitalnej

### 5.1 Budowa modelu numerycznego

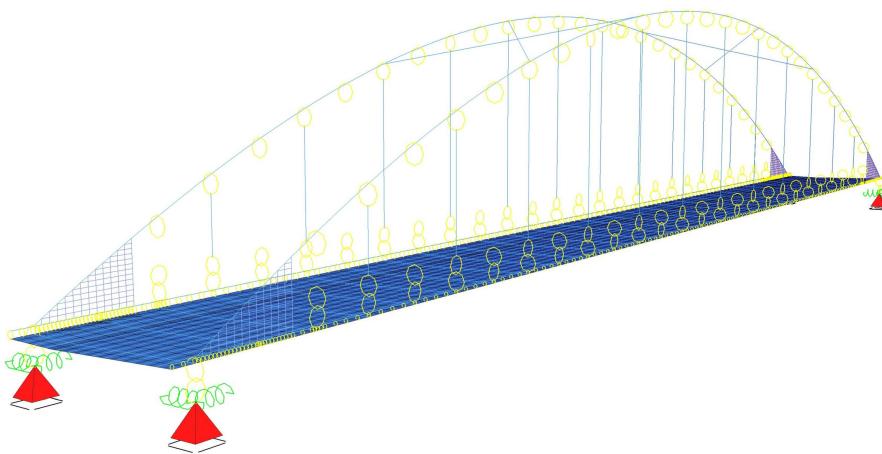
Na potrzeby analiz numerycznych zbudowano model MES w środowisku SOFiSTiK (rys. 5.1) Model przestrzenny składa się kilku rodzajów elementów skończonych. Z jednowymiarowych elementów belkowych wykonano łuki, stężenia, belki ściągu, wzmocnienia wezgłowii i żebra pomostu ortotropowego. Z elementów kratowych stworzono wieszaki. Blachę pomostu wykonano z czterowęzłowych elementów powłokowych. Połączenia pomiędzy końcami wieszaków i osiami łuku oraz ściągu zrealizowano przez połączenia kinematyczne translacji i rotacji węzłów. Podparcia pionowe w miejscach łożysk mostu zrealizowano za pomocą sztywnych więzów węzłów. Nie zablokowano przesuwów podłużnych i poprzecznych za pomocą blokady przemieszczeń. Zamiast tego na obu kierunkach wstawiono elastyczne elementy o dużej sztywności. Usztywnienia wezgłowii zamodelowano za pomocą rusztu elementów belkowych o przekroju składającym się z dwóch blach odsuniętych od siebie na szerokość przekroju skrzynkowego łuku. Elementy strukturalne konstrukcji (takie jak ściągi, pomost, dźwigary łukowe, elementy podparcia itd.) podzielono w modelu na grupy pozwalające odnosić się do nich indywidualnie na przykład w przypadku modyfikacji sztywności.

### 5.2 Badania - identyfikacja modalna: wybór punktów, opis badań, wyniki identyfikacji

Zastosowane kryteria: max mac 0.6, równe na obie strony, maksymalna średnia z wektorów punktów. Dodac zmienność w kombinacjach maksymalnego momentu jako przestroge.



Rysunek 5.1: Wizualizacja przestrzennego modelu numerycznego wiaduktu WK2  
Pomorskiej Kolei Metropolitalnej



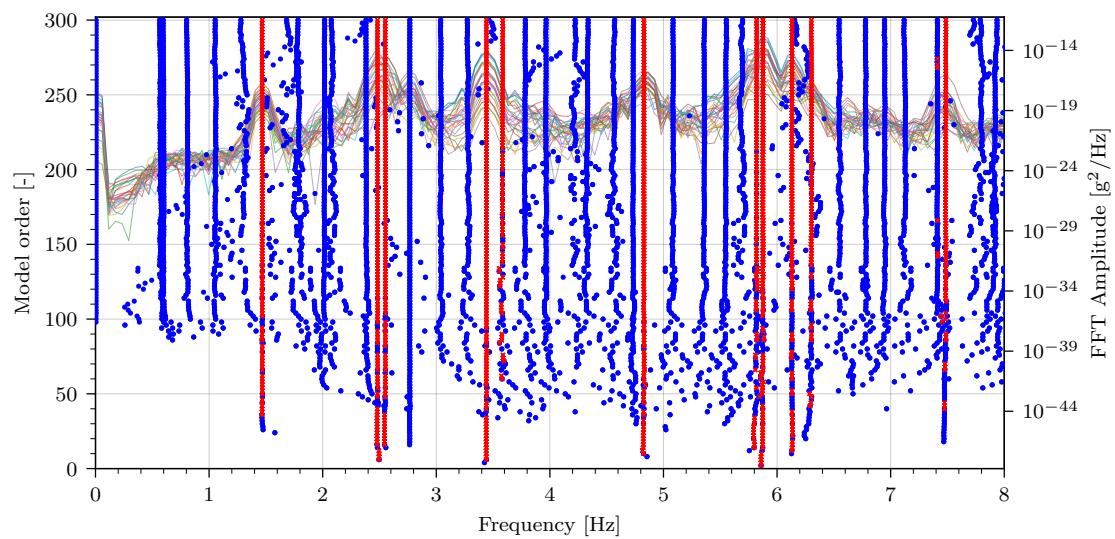
Rysunek 5.2: Schemat statyczny modelu numerycznego wiaduktu WK2 Pomorskiej Kolei Metropolitalnej

### 5.3 Kalibracja modelu numerycznego z wykorzystaniem PSO

## 5.4 Wielokryterialna optymalizacja modelu: opis + wyniki

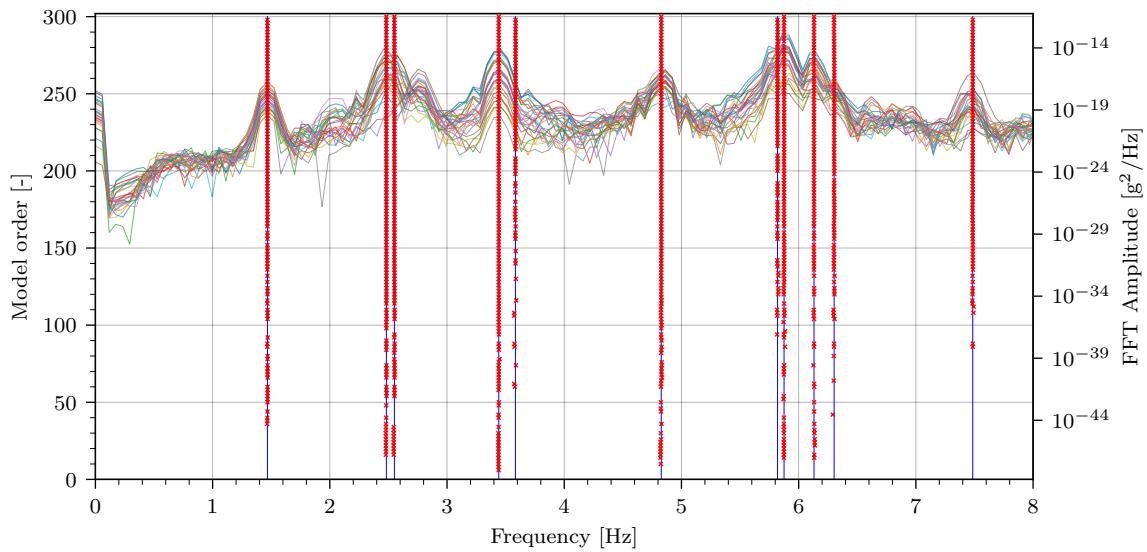


Rysunek 5.3: Diagram AUTOMAC dla pierwszych dziesięciu wektorów postaci drgań własnych, odczytanych z modelu dla wybranych punktów pomiarowych

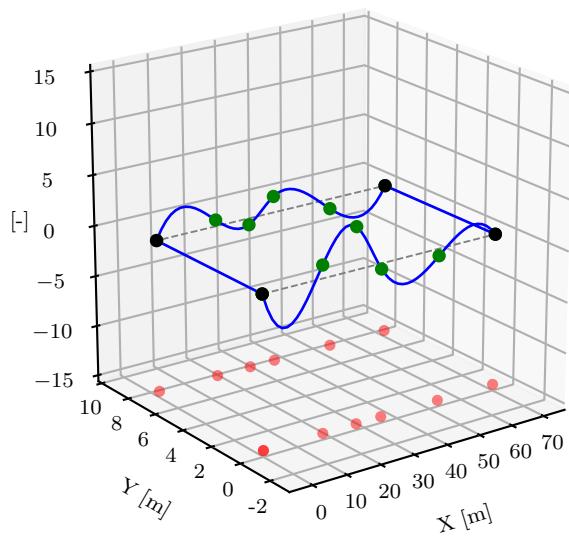


Rysunek 5.4: Diagram stabilizacyjny metody NExT-ERA.

#### 5.4. WIELOKRYTERIALNA OPTYMALIZACJA MODELU: OPIS + WYNIKI63



Rysunek 5.5: Diagram stabilizacyjny metody NExT-ERA.



Rysunek 5.6: Diagram stabilizacyjny metody NExT-ERA.

## **Rozdział 6**

### **Podsumowanie i wnioski**

Podsumowania wnioski

Some claim (**szafranski'oddzialywania'2013; rucka'dynamika'2014**) Parametry metody NeXT-ERA: (**caicedo'practical'2011**) 1) Długość okna użytego przy transformacie Fouriera 2) Wybór kanału referencyjnego 3) Wielkość macierzy Hankela – alfa i beta 4) Liczba biegunów do identyfikacji 5) Długość i częstotliwość próbkowania sygnału wejściowego

Wykres dwóch pierwszych momentów sygnału – średniej i odchylenie standarde. Wskazówka do określenia stacjonarności – jeśli wartości są prawie stałe. (**caicedo'practical'2011; bendat'random'2011**)

Wybór sygnałów: parametry częstotliwości próbkowania, noise-to-signal ratio i stacjonarność

Blisko położone piki – zmniejszenie częstotliwości próbkowania (**caicedo'practical'2011**)

Częstotliwość próbkowania – obniżenie – wartość ok 2 razy większa niż interesujące częstotliwości (**caicedo'practical'2011**)

Liczba punktów funkcji kros korelacji jest równa liczbie punktów użytych w FFT, a częstotliwość próbkowania jest równa częstotliwości użytych sygnałów (**caicedo'practical'2011**)

MAC kryterium doboru punktów pomiarowych dla testów dynamicznych

Metoda Welcha (**welch'use'1967**)

Oś pionowa oznaczona jako  $g^2$  (**caicedo'practical'2011**)

Alfa i beta – numer column 4x liczba modów (2x liczba biegunów). Numer wierszy – numer punktów w cross spectral density? (**caicedo'practical'2011**). Ostatecznie chodzi o to by uwzględnić tyle danych z CCF żeby nie ująć ani za dużo ani za mało.

Algorytm filtrowanego diagramu stabilizacyjnego (**caicedo'practical'2011**)

Parametry alfa i beta (**brownjohn'ambient'2010; caicedo'practical'2011; hollkamp'modal'2001; nayeri'study'2009; siringoringo'system'2008; szafrański'oddzialywania'2013; rucka'dynamika'2014**) przyjmować tak żeby alfa zawierała ok dwukrotność liczby biegunów (4x liczba modów) a parametr beta swoim zakresem obejmował odpowiednią liczbę sygnałów)

# Bibliografia

- Allemang, Randall J i David L. Brown (1982). "A correlation coefficient for modal vector analysis". W: *Proceedings of the 1st international modal analysis conference. Vol. 1.* SEM Orlando, s. 110–116.
- Allemang, Randall J. (2003). "The Modal Assurance Criterion—Twenty Years of Use and Abuse." W: *Sound & Vibration* 37.8, s. 14–23. ISSN: 15410161. URL: <http://files/129/Allemang%20-%202003%20-%20The%20Modal%20Assurance%20Criterion%E2%80%94Twenty%20Years%20of%20Use%20.pdf>.
- Bachmann, Hugo i in. (2012). *Vibration Problems in Structures: Practical Guidelines*. en. Birkhäuser, s. 248. ISBN: 978-3-0348-9231-5. URL: <https://books.google.pl/books?id=pth5BgAAQBAJ>.
- Bathe, Klaus-Jürgen (2006). *Finite element procedures*. Prentice Hall. ISBN: 978-0-9790049-5-7.
- Boashash, Boualem (2015). *Time-frequency signal analysis and processing: a comprehensive reference*. Academic Press. ISBN: 0123985250.
- Brincker, Rune, C Ventura i Palle Andersen (2001). "Damping estimation by frequency domain decomposition". W: *Proceedings of the 19th international modal analysis conference (IMAC)*. T. 1. Orlando, FL, USA, s. 698–703.
- Brincker, Rune i Carlos E. Ventura (2015). *Introduction to Operational Modal Analysis*. English. Chichester, West Sussex: Wiley, s. 1–360. ISBN: 978-1-119-96315-8. DOI: 10.1002/9781118535141.
- Brincker, Rune, Lingmi Zhang i P Andersen (2000). "Modal identification from ambient responses using frequency domain decomposition". W: *Proc. of the 18\*International Modal Analysis Conference (IMAC), San Antonio, Texas*.
- Brincker, Rune, Lingmi Zhang i Palle Andersen (2001). "Modal identification of output-only systems using frequency domain decomposition". W: *Smart materials and structures* 10.3, s. 441. ISSN: 0964-1726.
- Brownjohn, J. M.W. W i in. (sierp. 2010). "Ambient vibration re-testing and operational modal analysis of the Humber Bridge". en. W: *Engineering Structures* 32.8, s. 2003–2018. ISSN: 01410296. DOI: 10.1016/j.engstruct.2010.02.034. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2010.02.034%20https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0141029610000878%20http://files/1054/Brownjohn%20et%20al.%20-%202010%20-%20Ambient%20vibration%20re-testing%20and%20operational%20modal.pdf%20http://files/685/Brownjohn%20i%20in.%20-%202010%20-%20A>.
- Caicedo, Juan M. (2011). "Practical guidelines for the natural excitation technique (NExT) and the eigensystem realization algorithm (ERA) for modal identification using ambient vibration". W: *Experimental Techniques* 35.4, s. 52–58. ISSN: 0732-8818. DOI: 10.1111/j.1747-1567.2010.00643.x. URL: <http://>

- //files/95/Caicedo%20-%202011%20-%20Practical%20Guidelines%20for%20the%20Natural%20Excitation%20Te.pdf.
- Caughey, T K i M E J O'kelly (1961). "Effect of damping on the natural frequencies of linear dynamic systems". W: *The Journal of the Acoustical Society of America* 33.11, s. 1458–1461. ISSN: 0001-4966.
- Chmielewski, Tadeusz i Zbigniew Zembaty (1998). *Podstawy dynamiki budowli. Arkady*. ISBN: 83-213-4072-5.
- Chopra, Anil K (2012). *Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering*. en. 4th ed. Upper Saddle River, N.J: Prentice Hall, s. 944. ISBN: 978-0-13-285803-8.
- Clough, Ray W i Joseph Penzien (1975). *Dynamics of structures*. New York: McGraw-Hill, s. 634. ISBN: 978-0-07-011392-3.
- Dudek, Marcin (2008). "Identyfikacja parametrów dynamicznych konstrukcji mostowych na bazie drgań wywołanych obciążeniem środowiskowym : [rozprawa doktorska]". Prac. dokt. URL: [http://files/7/MD\\_PhD\\_06032008.pdf](http://files/7/MD_PhD_06032008.pdf).
- Ewins, David J. (2000). *Modal testing: theory, practice and application*. Baldock: RESEARCH STUDIES PRESS LTD. ISBN: 0863802184.
- Extractor ARTeMIS (1999). "Structural vibration solutions". W: *Aalborg, Denmark*.
- Felber, Andreas Johann (1994). "Development of a hybrid bridge evaluation system". en. Prac. dokt. THE UNIVERSITY OF BRITISH COLUMBIA, s. 297.
- Fialko, Sergey (2000). "High-preformance aggregation element-by-element Ritz-gradient method for structure dynamic response analysis". W: *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences* 7.4, s. 537–550. ISSN: 1232-308X.
- Frýba, Ladislav (lut. 1999). *Vibration of Solids and Structures under Moving Loads*. en. Third edit. T. 23. Thomas Telford Publishing, s. 548–556. ISBN: 978-0-7277-3996-4. DOI: 10.1680/vosasuml.35393. URL: <http://www.icevirtuallibrary.com/doi/book/10.1680/vosasuml.35393%20http://files/843/epdf.pub-vibration-of-solids-and-structures-under-moving-lo.pdf>.
- Giorcelli, E i in. (1994). "Modal Analysis and system identification using ARMAV models". W: *SPIE*. T. 2251, s. 676. ISBN: 0277-786X.
- Golub, Gene H i Charles F Van Loan (2013). "Matrix computations, 4th". W: *Johns Hopkins*.
- Ho, L i Rudolf E Kálmán (1966). "Effective construction of linear state-variable models from input/output functions". W: *at-Automatisierungstechnik* 14.1-12, s. 545–548. ISSN: 2196-677X.
- Hollkamp, J. J. i R. W. Gordon (2001). "Modal test experiences with a jet engine fan model". W: *Journal of Sound and Vibration* 248.1, s. 151–165. ISSN: 0022-460X. DOI: 10.1006/jsvi.2001.3758. URL: <http://files/150/Hollkamp%20i%20Gordon%20-%202001%20-%20Modal%20test%20experiences%20with%20a%20jet%20engine%20fan%20model.pdf>.
- Huang, C S (2000). "Modal identification of structures using ARMAV model for ambient vibration measurement". W: *12th World Conference on Earthquake Engineering, Auckland, New Zealand, paper*. 1702.
- Hughes, Thomas (1987). *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.
- Hunt, David L (1992). "Application of an enhanced coordinate modal assurance criterion". W: *Proc 10th international modal analysis conference*. T. 1. San Diego, CA, s. 66–71.

- Ibrahim, Samir R. (1983). "TIME DOMAIN MODAL PARAMETER IDENTIFICATION AND MODELING OF STRUCTURES." W: *Proceedings of the American Control Conference*. T. 3. IEEE, s. 989–996. DOI: 10.23919/acc.1983.4788259.
- Inman, Daniel J i Gerard Lallement (1995). "A TUTORIAL ON COMPLEX EIGENVALUES". en. W: *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*. January 1995, s. 7.
- James, G H, Thomas G Carne i James P Lauffer (1995). "The natural excitation technique (NExT) for modal parameter extraction from operating structures". W: *Modal Analysis-the International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis* 10.4, s. 260. ISSN: 1055-0763.
- James, GH H, Thomas G Carne i James P Lauffer (1993). "The Natural Excitation Technique (NExT) for Modal Parameter Extraction From Operating Wind Turbines". W: *NASA STI/Rec on Technical Report N* 93.4, s. 260–277. ISSN: 1055-0763.
- Juang, J-N i Hideto Suzuki (1988). "An eigensystem realization algorithm in frequency domain for modal parameter identification". W: *Journal of vibration, acoustics, stress, and reliability in design* 110.1, s. 24–29. ISSN: 0739-3717.
- Juang, J. N. i R. S. Pappa (1986). "Effects of noise on modal parameters identified by the eigensystem realization algorithm". W: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 9.3, s. 294–303. ISSN: 07315090. DOI: 10.2514/3.20106.
- Juang, Jer-Nan (1994). *Applied system identification*. Prentice-Hall, Inc. ISBN: 013079211X.
- Juang, Jer-Nan i Richard S Pappa (1985). "An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction". W: *Journal of guidance, control, and dynamics* 8.5, s. 620–627. ISSN: 0731-5090.
- Kaczorek, Tadeusz i in. (2016). *Podstawy teorii sterowania*. Wydawnictwo WNT. ISBN: 8301185910.
- Kalman, Rudolf Emil (1963). "Mathematical description of linear dynamical systems". W: *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series A: Control* 1.2, s. 152–192. ISSN: 0887-4603.
- Kennedy, J i R Eberhart (lip. 1995). "Particle swarm optimization". en. W: *ICNN'95 - International Conference on Neural Networks*. T. 4. IEEE, s. 1942–1948. ISBN: 978-0-7803-2768-9. DOI: 10.1109/ICNN.1995.488968.
- Lengvarský, Pavol i Jozef Bocko (2013). "Theoretical basis of modal analysis". W: *American Journal of Mechanical Engineering* 1.7, s. 173–179.
- Li, P., S. L.J. J Hu i H. J. Li (2011). "Noise issues of modal identification using eigensystem realization algorithm". W: *Procedia engineering* 14, s. 1681–1689. ISSN: 1877-7058. DOI: 10.1016/j.proeng.2011.07.211. URL: <http://files/157/Li%20i%20in.%20-%20202011%20-%20Noise%20issues%20of%20modal%20identification%20using%20eigensy.pdf>.
- Maia, Nuno Manuel Mendes i Julio Martins Montalvao Silva (1997). *Theoretical and Experimental Modal Analysis*. Research Studies Press, s. 488. ISBN: 978-0-863-80208-9.
- MITCHELL, L. (1998). *Increasing the sensitivity of the modal assurance criteria (MAC) to small mode shape changes : The IMAC*. Santa Barbara CA.
- Nayeri, Reza D. i in. (2009). "Study of time-domain techniques for modal parameter identification of a long suspension bridge with dense sensor arrays". W: *Journal of engineering mechanics* 135.7, s. 669–683. ISSN: 0733-9399. DOI: 10.1061/

- (ASCE) 0733 – 9399 (2009) 135 : 7 (669). URL: <http://files/148/Nayeri%20i%20in.%20-%202009%20-%20Study%20of%20time-domain%20techniques%20for%20modal%20paramete.pdf>.
- Newmark, Nathan M (1959). “A method of computation for structural dynamics”. W: *Journal of the engineering mechanics division* 85.3, s. 67–94.
- Norton, John P (2009). *An introduction to identification*. Courier Corporation. ISBN: 0486469352.
- Papadrakakis, Manolis (1993). *Solving large-scale problems in mechanics*. Wiley.
- Pappa, R S i J N Juang (1985). “An Eigensystem Realization Algorithm (ERA) for modal parameter identification and model reduction”. W: JPL Proc. of the Workshop on Identification i Control of Flexible Space Struct., Vol. 3.
- Pappa, Richard S, Kenny B Elliott i Axel Schenk (1992). *A consistent-mode indicator for the Eigensystem Realization Algorithm*. Hampton, Va. : [Springfield, Va. : National Aeronautics i Space Administration, Langley Research Center ; For sale by the National Technical Information Service, 1992. URL: <http://files/97/Pappa%20i%20in.%20-%201992%20-%20A%20consistent-mode%20indicator%20for%20the%20Eigensystem%20Re.pdf>.
- Pappa, Richard S i Samir R Ibrahim (1985). “A parametric study of the Ibrahim time domain modal identification algorithm”. W:
- Peeters, Bart (2000). “System Identification and Damage Detection in Civil Engineering”. Prac. dokt.
- Peeters, Bart i Guido De Roeck (1999). “Reference-based stochastic subspace identification for output-only modal analysis”. W: *Mechanical systems and signal processing* 13.6, s. 855–878. ISSN: 0888-3270. DOI: [10.1006/mssp.1999.1249](https://doi.org/10.1006/mssp.1999.1249).
- Peeters, Bart i Herman Van der Auweraer (2005). “PolyMAX: a revolution in operational modal analysis”. W: *Proceedings of the 1st International Operational Modal Analysis Conference, Copenhagen, Denmark*.
- Phan, Minh, Jer-Nan Juang i Richard W Longman (1991). *On Markov parameters in system identification*. Spraw. tech. Hampton, Virginia: NASA Langley Research Center.
- Rainieri, C i G Fabbrocino (2014). *Operational Modal Analysis of Civil Engineering Structures: An Introduction and Guide for Applications*. Italy, Europe: Springer-Verlag. ISBN: 9781493907670.
- Reynders, Edwin, Mattias Schevenels i Guido De Roeck (2014). “MACEC 3.2: A Matlab toolbox for experimental and operational modal analysis”. W: *Department of Civil Engineering, KU Leuven*.
- Rucka, Magdalena i Krzysztof Wilde (2014). *Dynamika budowli : z przykładami w środowisku MATLAB®*. Gdańsk : Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, 2014. ISBN: 978-83-7348-588-4.
- Salamak, Marek (2003). “Doświadczalne metody określania poziomu tłumienia drgań w kładkach dla pieszych”. Prac. dokt. URL: <http://files/105/Salamak%20-%202003%20-%20Do%7B%5C%7Bs%7D%7Dwiadczalne%20metody%20okre%7B%5C%7Bs%7D%7Dlania%20poziomu%20t%7B%5C1%7Dumienia%20.pdf%20http://han.bg.pg.edu.pl/han/ebsco/sea>.
- Schutter, B.De (kw. 2000). “Minimal state-space realization in linear system theory: an overview”. en. W: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 121.1–2, s. 331–354. ISSN: 03770427. DOI: [10.1016/S0377-0427\(00\)00341-1](https://doi.org/10.1016/S0377-0427(00)00341-1). URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0377042700003411>

- 20http://files/102/Schutter%20-%202000%20-%20Minimal%20state-space%20realization%20in%20linear%20system%20t.pdf.
- SHEN, F i in. (2003). "USING THE CROSS-CORRELATION TECHNIQUE TO EXTRACT MODAL PARAMETERS ON RESPONSE-ONLY DATA". W: *Journal of Sound and Vibration* 259.5, s. 1163. ISSN: 0022460X.
- Shi, D i W Stühler (1987). "Modal analysis with AR (ARMA) model and unknown excitation". W: *International Modal Analysis Conference, 5 th, London, England*, s. 1171–1176.
- Szafraniński, Marek (2013). "Odziaływanie taboru na mosty kolejowe przy zmiennych parametrach ruchu". Prac. dokt.
- Van Overschee, P i Bart De Moor (1996). *Subspace Identification for Linear Systems: Theory, Implementation, Applications*.
- Verboven, P i in. (2005). "A comparison of frequency-domain transfer function model estimator formulations for structural dynamics modelling". W: *Journal of sound and vibration* 279.3-5, s. 775–798. ISSN: 0022-460X.
- Vold, Harvard i in. (1982). "A multi-input modal estimation algorithm for mini-computers". W: *SAE Transactions*, s. 815–821. ISSN: 0096-736X.
- Welch, Peter (1967). "The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra: a method based on time averaging over short, modified periodograms". W: *IEEE Transactions on audio and electroacoustics* 15.2, s. 70–73. ISSN: 0018-9278.
- Wilson, Edward L (1997). *Three dimensional dynamic analysis of structures: with emphasis on earthquake engineering*. Computers i Structures Incorporated.
- Wilson, Edward L i Tetsuji Itoh (1983). "An eigensolution strategy for large systems". W: *Computers & structures* 16.1-4, s. 259–265. ISSN: 0045-7949.
- Yamaguchi, Hiroki i Manabu Ito (1997). "Mode-dependence of structural damping in cable-stayed bridges". W: *Journal of wind engineering and industrial aerodynamics* 72, s. 289–300. ISSN: 0167-6105.
- Zhang, Lingmi, Rune Brincker i Palle Andersen (2004). "An overview of major developments and issues in modal identification". W: *Proceeding of the 22nd IMAC 1*, s. 1–8. ISSN: 0888-3270.
- Zieliński, Tomasz Piotr (2002). *Od teorii do cyfrowego przetwarzania sygnałów*. Wydział EAIiE AGH. ISBN: 978-83-88309-55-7.
- Żółtowski, Krzysztof, Mikołaj Binczyk i Przemysław Kalitowski (2017). "Footbridges. Dynamic Design–Selected Problems". W: ISSN: 3981896807. URL: [http://files/639/footbridges-dynamic-design-selected-problems\\_142027-1.html](http://files/639/footbridges-dynamic-design-selected-problems_142027-1.html).