

Przęsło łukowe wiaduktu kolejowego. Wpływ  
schematu statycznego i rozwiązań konstrukcyjnych  
na własności dynamiczne.

Przemysław Kalitowski

22 marca 2021

# Spis treści

<b>Wprowadzenie</b>	<b>5</b>
<b>1 Kolejowe, łukowe przęsła mostowe</b>	<b>6</b>
1.1 Przegląd . . . . .	6
1.2 Układy statyczne (pomosty,wieszaki,łuki,ściągi) . . . . .	6
1.3 Zachowanie dynamiczne, problemy, unormowania . . . . .	6
<b>2 Dynamiczna analiza konstrukcji</b>	<b>7</b>
2.1 Wiadomości wstępne . . . . .	7
2.2 Klasyfikacja metod analizy modalnej . . . . .	9
2.3 Modele teoretyczne układów dynamicznych . . . . .	11
2.3.1 Zagadnienie własne . . . . .	12
2.3.2 Transformacja do współrzędnych normalnych . . . . .	15
2.3.3 Odpowiedź systemów dynamicznych o jednym stopniu swobody	15
2.3.4 Odpowiedź systemów dynamicznych o skończonej liczbie stopni swobody (MDOF) . . . . .	18
2.3.5 Mała dawka tłumienia . . . . .	21
2.4 Dynamiczne obciążenie kolejowe . . . . .	22
2.4.1 Efekty dynamiczne w mostach kolejowych . . . . .	23
2.4.2 Tabor realny i modele . . . . .	24
2.4.3 Oddziaływanie dynamiczne taboru na mostach kolejowych . .	24
2.4.4 Modele obciążenia . . . . .	26
2.4.5 Przepisy normowe i wytyczne. . . . .	26
2.5 Analiza dynamiczna w Metodzie Elementów Skończonych . . . . .	26
2.5.1 Analiza modalna . . . . .	26
2.5.2 Odpowiedź konstrukcji . . . . .	26
2.5.3 Kalibracja modeli numerycznych . . . . .	26
<b>3 Identyfikacja cech dynamicznych konstrukcji</b>	<b>27</b>
3.1 Operacyjna analiza modalna (OMA) . . . . .	27
3.1.1 Koncepcja OMA . . . . .	27
3.1.2 Metody operacyjnej analizy modalnej . . . . .	28
3.2 Przykłady zastosowań (literatura i własne) . . . . .	30
3.3 Metoda NExT-ERA . . . . .	30
3.3.1 Funkcje korelacji, a odpowiedź swobodna układu . . . . .	31
3.3.2 Eigenystem Realization Algorithm . . . . .	38
3.4 Aplikacja do identyfikacji modalnej OMA . . . . .	45
3.4.1 Algorytm programu . . . . .	46
3.4.2 Elementy oceny poprawności rozwiązania . . . . .	48

3.4.3	Testy numeryczne metody NEXT-ERA . . . . .	50
3.4.4	Testy eksperimentalne metody NEXT-ERA . . . . .	55
3.5	Podsumowanie testów metody NExT-ERA . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Optymalizacja metodą roju cząstek - Particle Swarm Optimizaton</b>	<b>63</b>
4.1	Klasyfikacja problemów i metod optymalizacji . . . . .	64
4.2	Określenie funkcji celu i wybór metody optymalizacji . . . . .	66
4.3	Particle Swarm Optimization . . . . .	66
4.4	Zastosowania optymalizacji algorytmem PSO . . . . .	73
4.4.1	Przykład teoretyczny . . . . .	73
4.5	Optymalizacja wielokryterialna . . . . .	75
4.6	Optymalizacja wielokryterialna rojem cząstek . . . . .	78
4.6.1	Przykład teoretyczny . . . . .	80
4.7	Optymalizacja wspomagana uczeniem maszynowym . . . . .	83
<b>5</b>	<b>Wiadukt WK2 w ciągu Pomorskiej Kolei Metropolitalnej</b>	<b>85</b>
5.1	Charakterystyka obiektu . . . . .	85
5.2	Budowa modelu numerycznego . . . . .	88
5.3	Identyfikacja modalna wiaduktu WK2 . . . . .	91
5.4	Kalibracja modelu numerycznego z wykorzystaniem PSO . . . . .	101
5.4.1	Funkcja celu . . . . .	103
5.4.2	Zmienne projektowe . . . . .	104
5.4.3	Algorytm kalibracji . . . . .	105
5.4.4	Rezultaty kalibracji . . . . .	106
5.5	Wpływ wymiarów elementów konstrukcyjnych na odpowiedź dynamiczną przęsła . . . . .	110
5.5.1	Model uproszczony do analizy dynamicznej . . . . .	112
5.5.2	Założenia do optymalizacji . . . . .	114
5.5.3	Algorytm rozwiązania problemu . . . . .	116
5.6	Rezultaty optymalizacji . . . . .	118
5.6.1	Wariant 1: wieszaki proste, 160 km/h . . . . .	118
5.6.2	Wariant 1: wieszaki proste, 200 km/h . . . . .	118
5.6.3	Wariant 1: wieszaki proste, 300 km/h . . . . .	118
5.6.4	Wariant 2: wieszaki ukośne, 160 km/h . . . . .	118
5.6.5	Wariant 2: wieszaki ukośne, 200 km/h . . . . .	118
5.6.6	Wariant 2: wieszaki ukośne, 300 km/h . . . . .	118
5.6.7	Wariant 3: Network, 160 km/h . . . . .	118
5.6.8	Wariant 3: Network, 200 km/h . . . . .	118
5.6.9	Wariant 3: Network, 300 km/h . . . . .	118
<b>6</b>	<b>Podsumowanie i wnioski</b>	<b>121</b>

# **Symbole i oznaczenia**

# **Wprowadzenie**

# Rozdział 1

## Kolejowe, łukowe przęsła mostowe

1.1 Przegląd

1.2 Układy statyczne (pomosty, wieszaki, łuki, ściągi)

1.3 Zachowanie dynamiczne, problemy, unormowania

# Rozdział 2

## Dynamiczna analiza konstrukcji

### 2.1 Wiadomości wstępne

Podstawowym celem pracy jest określenie zależności pomiędzy przyjętymi rozwiązaniami konstrukcyjnymi mostów kolejowych, a ich zachowaniem dynamicznym. Prädycja odpowiedzi, jak wspomniano wcześniej, możliwa jest dzięki rozwiązaniom numerycznym modeli MES poddanych odpowiednim obciążeniom. Na każdym etapie analiz trzeba zdawać sobie sprawę z niepewności, które mogą wystąpić przy konstruowaniu założeń. **Brincker2015** zestawili różnego rodzaju parametry występujące w modelu i stopień niepewności, który im towarzyszy na etapie modelowania. Niepewności te przytoczono w tabeli 2.1. Wyraźnie widać, że przyjęcie niektórych parametrów modelu w sposób bezkrytyczny może prowadzić do zupełnie nieodpowiednich rezultatów. Niektóre, związane np ze sztywnością szeroko rozumianych podpór czy połączeń śrubowych, mogą wypaczyć rezultaty i wprowadzić badacza w błąd na temat stanu i zachowania konstrukcji. Aby zbudować model, który będzie efektywnie odwzorowywał rzeczywiste zachowanie należy dołożyć wszelkich starań aby wyeliminować możliwe niepewności. Model taki może zostać poddany validacji i kalibracji. Oba te pojęcia zostaną rozwinięte w następnych rozdziałach. Niemniej, aby model dostosować do rzeczywistych warunków należy mieć punkt odniesienia. W przypadku analizy statycznej takim odniesieniem mogą być pomiary statyczne ugięć, np. w trakcie próbnego obciążenia. W przypadku analizy dynamicznej, do porównania będą służyć charakterystyki modalne: częstotliwości i postaci drgań własnych oraz tłumienia. Parametry te można zaczerpnąć z literatury i doświadczenia na etapie projektowania. Na etapie badania rzeczywistej konstrukcji warto sięgnąć po narzędzie zwane identyfikacją modalną. Poniższy rozdział przytoczy podstawowe zagadnienia związane z analizą modalną, obliczeniami odpowiedzi dynamicznej i identyfikacją charakterystyk modalnych układu. Informacje te zostaną w dalszej części pracy zastosowane w obliczeniach numerycznych i optymalizacyjnych.

**GDZIEŚ DO WSTĘPU:** Drgania towarzyszą ludzkości od zawsze. Jakkolwiek trywialnie nie brzmiałoby to zdanie, wibracje występują w naszym otoczeniu przejawiając się często w sposób niepożądany: wywołują dyskomfort użytkowania, są odbierane jako hałas, powodują zjawiska zmęczeniowe czy w skrajnej sytuacji wywołują uszkodzenia i zniszczenia (**Maia1997**). Wciąż postępujący rozwój nauki połączony z komputeryzacją i informatyzacją sprawiają, że używane materiały są coraz wytrzymalsze. Jednocześnie rośnie zapotrzebowanie na coraz większe, spektakularne konstrukcje. Te dwa czynniki połączone ze sobą sprawiają, że zachowanie dynamiczne

Tablica 2.1: Niepewności najistotniejszych parametrów modeli numerycznych i modalnych na podstawie **Brincker2015**

Własność fizyczna	Poziom niepewności [%]
Moduł sprężystości i gęstość masy dla stali i innych metali	1-5
Moduł sprężystości i gęstość masy dla betonu, drewna i zbrojonych włóknami materiałów	5-20
Warunki brzegowe z podłożem	10-nieskończoność
Połączenia śrubowe	10-nieskończoność
Połączenia spawane	2-10
Masa całkowita	1-5
Okręślana częstotliwość drgań własnych	0.1-0.05
Pomierzona odpowiedź	0.2-2
Okręślone postaci drgań własnych	2-5
Okręślone tłumienie	5-20
Współczynnik skalujący postaci drgań własnych	5-30

struktury często decyduje o właściwościach użytkowych i wytrzymałościowych konstrukcji.

W odpowiedzi na zapotrzebowanie, w sposób naturalny rozwinięła się dziedzina nauki zajmująca się opisem i modelowaniem zjawisk dynamicznych. Podstawowym narzędziem służącym identyfikacji parametrów modalnych i zachowania dynamicznego jest analiza modalna (*eng. modal analysis*). Często Analiza modalna bywa określana jako identyfikacja modalna (*eng. modal identification*). (**Zhang2004**) w pracy definiuje identyfikację modalną jako gałąź szerszego pojęcia identyfikacji systemów, a jej celem jest budowa modelu matematycznego systemu dynamicznego poprzez pomiar i analizę zestawu danych wejściowych i wyjściowych. Z kolei **Chmielewski1998** zwięzle preczyzuje pojęcie modelu matematycznego dla zagadnień dynamiki budowli jako żówanie lub zbiór równań, które opisują ruch modelu obliczeniowego". **Ewins2000** podaje trzy główne cele przeprowadzania analizy modalnej:

- ocena źródła drgań i ich przebiegu,
- weryfikacja modeli teoretycznych i przewidywanie zjawisk dynamicznych,
- identyfikacja charakterystyk materiałowych ciała poddanego wymuszeniu dynamicznemu (np. tłumienie, tarcie, wytrzymałość zmęczeniowa).

Każdy z powyższych celów może być jedynie środkiem do osiągnięcia zupełnie innego celu. W rzeczywistości tak właśnie jest najczęściej o czym świadczy mnogość aplikacji analizy modalnej w bardzo różnych zagadnieniach dotyczących konstrukcji.

W poniższej pracy, tak jak w zdecydowanej większości innych opracowań, modele matematyczne będą oparte na trzech głównych zasadach (**Maia1997**):

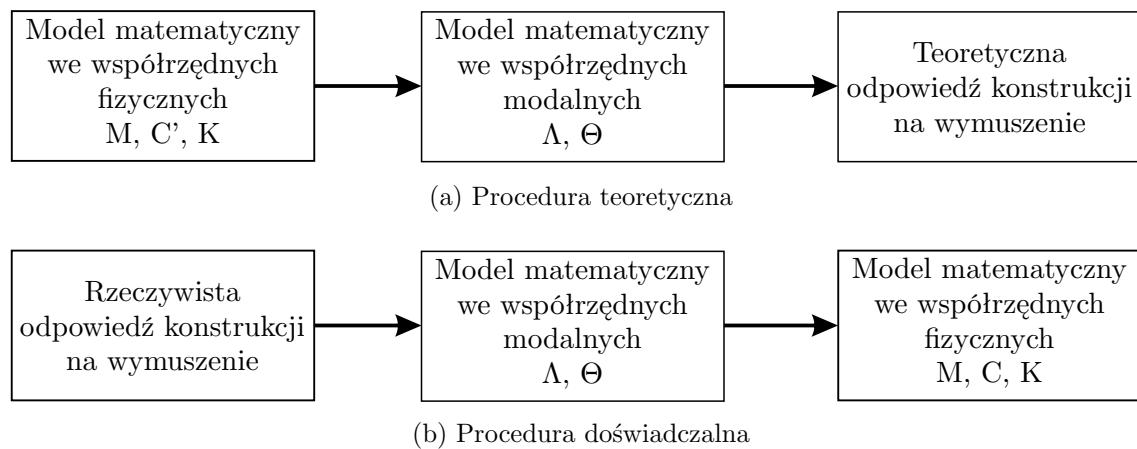
- system jest liniowy,
- obowiązuje zasada wzajemności Maxwell'a,
- system jest niezależny od czasu.

## 2.2 Klasyfikacja metod analizy modalnej

Identyfikacja modalna jest zbiorem technik, które są rozwijane dynamicznie od lat 60' XX w. Gwałtowny przyrost zainteresowania tym tematem wywołał głównie rozwój technik cyfrowych (**Ewins2000**). Do tej pory powstało wiele różnych technik, których krótką klasyfikację z podziałem na główne kryteria podano w tym podrozdziale.

Matematyczne modele modalne mogą charakteryzować się różnym stopniem skomplikowania. Parametrami, które mogą opisywać model są postaci drgań własnych oraz powiązane z nimi częstotliwości i tłumienia modalne, a także masa i sztywność modalna. Z kolei metody analizy modalnej również różnią się pod względem informacji, którą mogą dostarczyć. Z tego względu wybór odpowiedniej metody powinien być świadomy i poparty przeglądem wielu technik, z których wybrana zostanie ta optymalna. Aspektami mogącymi wpływać na wybór metody są m.in.: czas potrzebny do implementacji (pierwszego użycia), informacje możliwe do uzyskania z modelu, możliwy wpływ założeń i uproszczeń, liczba parametrów potrzebnych do stworzenia modelu czy też stabilność rozwiązania. Przedstawiony podział opiera się na klasycznych kryteriach stosowanych przy klasyfikacji metod analizy modalnej. Istnieje wiele pozycji literaturowych, w których zainteresowany znajdzie dokładny opis wielu metod ze wskazówkami do ich użycia (**Ewins2000; Maia1997; Zhang2004; Brincker2015; Rainieri2014**).

Najogólniej analizę modalną można podzielić na dwie główne gałęzie zależne od typu stosowanej procedury, jej danych wejściowych i rezultatów: teoretyczną i eksperymentalną (**Lengvarsky2013**). W niniejszej pracy wielokrotnie używane będą oba podejścia, dlatego autor zdecydował się na krótki ich opis. Ogólny schemat procedur teoretycznej i doświadczalnej analizy modalnej pokazano na rysunku 2.1.



Rysunek 2.1: Porównanie procedur teoretycznej i doświadczalnej analizy modalnej

Metody teoretyczne opierają się na rozwiązańach analitycznych lub numerycznych (rys. 2.1a). Badanie zachowania dynamicznego rozpoczyna się od definicji struktury, najczęściej za pomocą modelu dyskretnego opisanego macierzami  $M$ ,  $C'$ ,  $K$  oznaczającymi odpowiednio macierz mas, tłumienia i sztywności. Macierz tłumienia, w przypadku metod teoretycznych, jest to niewyznaczalna analitycznie macierz bazująca na doświadczeniach i rezultatach badań, stąd została oznaczona apostrofem  $C'$ . Za pomocą przekształceń matematycznych (skrótnie opisanych w dalszej

części tekstu) tworzony jest model matematyczny we współrzędnych modalnych. Uzyskiwane są charakterystyki modalne układu  $\Lambda$  i  $\Phi$  odpowiednio częstości drgań własnych, postaci drgań własnych i dodatkowo parametry opisujące przyjęty model tłumienia. Po uzyskaniu modelu matematycznego opisanego współrzędnymi modalnymi możliwe jest wyznaczenie odpowiedzi konstrukcji w czasie przy jej znanym wymuszeniu. Powyższy opis przedstawia pełną procedurę teoretyczną zakończoną wyznaczeniem odpowiedzi układu. Jednakże, jak wspomniano wcześniej, analiza modalna oraz jej metody są zróżnicowane z punktu widzenia skomplikowania. Zazwyczaj wybór metody zależy od zapotrzebowania na rezultaty. Zwłaszcza w przypadkach obliczeń inżynierskich często poprzestaje się na wyznaczeniu charakterystyk modalnych, które są następnie oceniane z punktu widzenia zagrożenia nadmiernymi efektami dynamicznymi. Metody analityczne znajdują realne zastosowanie w przypadku obiektów, których opis ciągły nie jest złożony, a dyskretny ograniczony jedynie do niewielkiej liczby stopni swobody. Rzeczywiste konstrukcje są układami o nieskończonej liczbie stopni swobody. Niemniej, sprowadzenie ich do skończonej (choć zazwyczaj bardzo dużej) liczby stopni swobody pozwala otrzymać zadowalająco poprawne rezultaty. W przypadku dużej liczby stopni swobody najszerzej stosowane są metody przybliżone opierające się obliczeniach numerycznych, takie jak: metoda różnic skończonych (MRS) czy metoda elementów skończonych (MES). Teoretyczna analiza modalna ma wiele zalet. Pozwala uzyskać rezultaty relatywnie szybko i tanio. Wynika to z powszechności narzędzi do modelowania i obliczania konstrukcji. W obrębie modelowania realnych struktur współczesne oprogramowanie pozwala budować modele numeryczne praktycznie bez ograniczeń. Stosowane preprocesory graficzne pozwalają użytkownikowi na odwzorowanie nawet skomplikowanych kształtów geometrycznych. Rosnąca moc obliczeniowa komputerów przestaje być ograniczeniem, zwłaszcza przy obliczeniach statycznych modeli o znaczającej liczbie stopni swobody. Niepodważalną zaletą jest również dowolność sposobów obciążania i modyfikacji modelu numerycznego. Pomimo wielu niewątpliwych zalet, teoretyczna analiza modalna posiada ograniczenia, z których należy zdawać sobie sprawę. Przede wszystkim jakość rezultatów zależy wprost od jakości wprowadzonych przez użytkownika danych. (Potrzebne przykłady). W przypadku zagadnień dynamicznych kolejnym bardzo ważnym ograniczeniem jest brak analitycznej możliwości określenia tłumienia konstrukcji. Taką możliwość daje jedynie badanie doświadczalne na rzeczywistej konstrukcji. Metody analityczne i numeryczne są obszernie opisane w wielu publikacjach (**Chmielewski 1998; Chopra 2012a; Rucka 2014**). W dalszej części rozdziału zaprezentowano absolutne podstawy i założenia analitycznej analizy dynamicznej.

Doświadczalna analiza w odróżnieniu od wersji teoretycznej angażuje do identyfikacji warsztat badawczy. **Ewins 2000** definiuje ją jako zespół procesów związanych z badaniem elementów konstrukcji w celu uzyskania matematycznego opisu ich zachowania dynamicznego. Jest to definicja zbliżona do ogólniejszej podanej przez **Zhang 2004**, ale stawia szczególnie mocny akcent na aspekt badawczy. Jak przedstawiono na rysunku (rys. 2.1b) ten typ analizy ma niejako odwrotny kierunek niż teoretyczna analiza modalna. W tym przypadku odpowiedź konstrukcji jest mierzona i na jej podstawie wyznaczane są wielkości opisujące model matematyczny:  $\Lambda$  i  $\Phi$ . Następnie na dopiero ich podstawie możliwe jest przekształcenie na model matematyczny wyrażony we współrzędnych fizycznych:  $\mathbf{M}, \mathbf{C}', \mathbf{K}$ . Doświadczalna analiza modalna dzieli się na dwie główne odnogi związane z zakresem rejestrowanych danych w trakcie wykonywania eksperymentu. Pierwsza z nich to Ekspe-

rymentalna Analiza Modalna (EMA) (*eng. Experimental Modal Analysis*) wymaga pomiaru sił wymuszających oraz odpowiedzi konstrukcji na to wymuszenie. Druga to Operacyjna Analiza Modalna (OMA) (*eng. Operational Modal Analysis*), która estymuje parametry modalne wyłącznie na podstawie pomierzonych efektów nieznanego wymuszenia. Wymuszenie to jednak nie może być dowolne, a ograniczenia przedstawione zostaną w dalszej części pracy.

Kwestia pomiaru sił wymuszających wpływa na podstawowe różnice pomiędzy dwoma rodzinami metod: EMA i OMA. EMA najczęściej prowadzona jest w kontrolowanych warunkach i przez to pozwala dostarczyć bardziej szczegółowych i dokładniejszych informacji na temat zachowania dynamicznego konstrukcji. Jednakże w przypadku rzeczywistych konstrukcji inżynierskich (np. mosty) trudno jest stworzyć takie kontrolowane warunki. Obiekt musi zostać na czas pomiarów wyłączony z eksploatacji. Okazuje się to często niemożliwe z przyczyn proceduralnych, a na pewno kosztowne. Drugim zasadniczym ryzykiem jest potrzeba stworzenia takiego systemu wymuszenia, które wywoła mierząną odpowiedź konstrukcji. W przypadku dużych konstrukcji inżynierskich może okazać się to trudne do zrealizowania ponieważ oddziaływanie środowiskowe mogą wywoływać efekty oddziaływań porównywane z kontrolowanym wymuszeniem. OMA praktycznie pozbywa się negatywnych skutków potrzeby kontroli wymuszenia. Badania prowadzone mogą być przy normalnej eksploatacji, a losowe oddziaływanie środowiskowe zazwyczaj polepsza jakość wyników. Oczywiście odbywa się to kosztem dokładności rezultatów. Teoretyczne założenia metody są spełnione tylko w sposób przybliżony. Z tego względu serie pomiarowe zwykle muszą trwać znacznie dłużej, a interpretacja wyników wymaga większego doświadczenia.

### Połączenie obu typów analiz

Obszerność zagadnień dotyczących analizy teoretycznej i identyfikacji modalnej wypełnia wiele tomów specjalistycznej literatury. Mimo chęci nie sposób przytoczyć je wszystkie z zadowalającą dokładnością. W rozdziale opisano najważniejsze według autora pojęcia których zrozumienie było kluczowe do przeprowadzenia badań i analiz numerycznych.

## 2.3 Modele teoretyczne układów dynamicznych

Metody teoretycznej analizy modalnej są obszernie opisane w literaturze przedmiotu (cytowania). Ze względu na złożoność rzeczywistych konstrukcji, w praktyce mają one zastosowanie głównie w formie rozwiązań numerycznych. Według przedstawionej na rysunku 2.1a procedury metody teoretycznej analizy modalnej służą głównie dwóm celom: identyfikacji charakterystyk modalnych (częstotliwości i postaci drgań własnych) i wyznaczaniu odpowiedzi układu. Dla zrozumienia zagadnienia, metody analityczne najczęściej przedstawione są dla najprostszego przypadku układu z jednym stopniem swobody. Układ ten z reguły łatwo daje się uogólnić do układu o wielu stopniach swobody. Macierzowe równanie drgań wymuszonych dla tłumionego układu o skończonej liczbie stopni swobody przedstawiono we wzorze 2.1.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (2.1)$$

gdzie  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  to odpowiednio macierze mass, tłumienia i sztywności,  $\mathbf{x}$  to wektor współrzędnych uogólnionych (przemieszczeń lub obrotów punktu),  $\mathbf{F}(t)$  to wektor

uogólnionych sił wymuszających. Wzór 2.1 odpowiadający formule 2.2 pozbawionej składnika reprezentującego opory ruchu opisuje ruch nietłumiony układu.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (2.2)$$

Drgania swobodne są procesem fizycznym spowodowanym zaburzeniem stanu równowagi, przez zaistnienie warunków początkowych. Macierzowe równanie ruchu drgań swobodnych, tłumionych opisane jest wzorem 2.3, a nietłumionych wzorem 2.4. Od równań ruchu drgań wymuszonych, równania te różnią się brakiem składnika sił wymuszających.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

Okazuje się, że parametry modalne systemu są ścisłe powiązane z rozwiązaniem algebraicznego problemu własnego równań drgań własnych.

### 2.3.1 Zagadnienie własne

Identyfikacja modalna modelu matematycznego polegająca na wyznaczeniu częstotliwości i postaci drgań własnych najczęściej sprowadza się do rozwiązania zagadnienia własnego. Bardzo pozytywnym aspektem tej zależności jest to, że istnieje wiele prostych w aplikacji, wydajnych i dokładnych algorytmów pozwalających rozwiązać numerycznie zagadnienie własne (**Golub2013**). Dzięki temu, właśnie ta metoda identyfikacji modalnej cieszy się największą popularnością wśród producentów oprogramowania do obliczania konstrukcji. Użytkownicy oprogramowania mogą bez większego wysiłku dokonać identyfikacji parametrów modalnych nawet złożonych modeli matematycznych.

#### Układ nietłumiony

Z reguły przyjmuje się, że rozwiązanie zagadnienia własnego wykorzystuje równanie drgań swobodnych nietłumionych (2.4). Należy zaznaczyć, że drgania własne nie opisują procesu fizycznego, a są jedynie matematyczną idealizacją drgań układu. W przypadku nietłumionym, dla każdego z modów, układ oscyluje wokół położenia równowagi z częstotliwością drgań własnych, a wszystkie stopnie swobody drgają w tej samej fazie. Oznacza to, że każdy z punktów osiąga swoje ekstremalne położenie w tej samej chwili. Podobnie wszystkie punkty znajdują się w położeniu równowagi w tym samym czasie. Poniżej przedstawiono rozwiązanie dla nietłumionego układu  $N$  dynamicznych stopni swobody.

Założono rozwiązanie 2.4 w postaci  $\mathbf{x}(t) = \phi e^{j\omega t}$  gdzie  $\omega$  to częstotliwość drgań własnych,  $j = \sqrt{-1}$ , a  $\phi$  to niezerowy wektor postaci drgań własnych. Po podstawieniu rozwiązania i jego drugiej pochodnej ( $\ddot{\mathbf{x}}(t) = -\phi\omega^2 e^{j\omega t}$ ) do równia 2.4 otrzymamy równanie 2.5.

$$-\mathbf{M}\phi\omega^2 e^{j\omega t} + \mathbf{K}\phi e^{j\omega t} = \mathbf{0} \quad (2.5)$$

Dzieląc strony równania przez niezerową wartość  $e^{j\omega t}$  otrzymujemy układ liniowych równań algebraicznych:

$$-\mathbf{M}\omega^2\phi + \mathbf{K}\phi = \mathbf{0} \quad (2.6)$$

w którym dwie niewiadome do ustalenia to:  $\phi$  - niezerowy wektor postaci drgań własnych oraz  $\omega$  - częstość drgań własnych. Równanie to można zapisać w formie 2.7 z indeksami określającymi poszczególne mody drgań własnych. Liczba par odpowiadających sobie częstości  $\omega_i$  i postaci drgań własnych  $\phi_i$  jest równa liczbie  $N$  stopni swobody.

$$\omega_i^2 \mathbf{M} \phi_i = \mathbf{K} \phi_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.7)$$

Z kolei równanie 2.8 to reprezentacja uogólnionego problemu własnego, w którym  $\lambda_i$  to wartość własna, a  $u_i$  to wektor własny. Z porównania wzorów 2.7 i 2.8 wyraźnie widać powiązanie  $\lambda_i = \omega_i^2$ . Wynika z tego, że rozwiązanie numeryczne uogólnionego problemu własnego pozwala wprost uzyskać częstości ( $\lambda_i = \omega_i^2$ ) i postaci drgań własnych ( $\phi_i$ ).

$$\lambda_i \mathbf{A} u_i = \mathbf{B} u_i \quad (2.8)$$

Układ równań (2.7) ma nietrywialne rozwiązania tylko jeśli

$$\det[\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}] = 0 \quad (2.9)$$

Formuła 2.9 jest znana jako równanie charakterystyczne zagadnienia własnego. Jeśli rozwiniąć wyznacznik, otrzymamy wielomian stopnia  $N$  względem  $\omega_i^2$ . Pierwiastkami równania 2.9 są częstości drgań własnych  $\omega_i$ . Znając częstości własne  $\omega_i$  z równania 2.7 można obliczyć odpowiadające wektory własne  $\phi_i$  z dokładnością do stałego czynnika. Taki wynik bywa nieprzystępny w ocenie więc wektory poddawane mogą być normalizacji. Do najczęściej stosowanych metod normalizacji należy taka modyfikacja wektora tak aby maksymalna wartość bezwzględna spośród wszystkich elementu była równa jedności. Innym przykładem może być normalizacja wektorów tak aby wartość elementu dla danego stopnia swobody, we wszystkich wektorach była równa jedności.

Jeżeli macierze  $\mathbf{M}$  i  $\mathbf{K}$  ( $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$  wg 2.6) są symetryczne i dodatnio określone o wartościach rzeczywistych to wartości oraz wektory własne są również rzeczywiste. W przypadku konstrukcji budowlanych macierz  $\mathbf{K}$  jest zawsze dodatnio określona ponieważ warunki brzegowe zapewniają brak ruchu ciała jako bryły sztywnej. Nie jest to oczywiste dla innych niż budowlane struktur, takich jak np. samolot w locie (Chopra2012a).

Postaci drgań własnych (wektory własne) odpowiadające różnym częstościom własnym spełniają warunki ortogonalności. W przypadku gdy  $\omega_i \neq \omega_j$  prawdziwe są zależności 2.10. Ortogonalność wektorów własnych może być wykorzystana do weryfikacji obliczonych wektorów.

$$\phi_i^T \mathbf{K} \phi_j = 0 \quad \phi_i^T \mathbf{M} \phi_j = 0 \quad (2.10)$$

Obliczone z równania 2.9 wartości oraz wektory własne możemy przedstawić w postaci dwóch specjalnych macierzy.  $N$  obliczonych wartości własnych zestawionych w macierz diagonalną tworzy tak zwaną macierz widmową (2.11). Z kolei  $N$  wektorów własnych zestawionych kolumnowo nazywamy macierzą modalną (2.12).

$$\Omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_N^2 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$\boldsymbol{\phi} = [\phi_{i,j}] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1N} \\ \phi_{12} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{N1} & \phi_{N2} & \dots & \phi_{NN} \end{bmatrix} \quad 1 \leq i, j \leq N. \quad (2.12)$$

Dla układu o  $N$  stopniach swobody możemy wyznaczyć  $N$  par częstotliwości i postaci drgań własnych. Jednak w rzeczywistości rozwiążanie ogranicza się do wyznaczenia jedynie ograniczonej do kilkunastu (maksymalnie kilkuset) pierwszych par. Określenie "pierwszych" właściwe jest w przypadku kiedy wyznaczone częstotliwości uporządkujemy w szeregu rosnącym

$$0 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \dots \omega_{N-1} \leq \omega_N \quad (2.13)$$

W większości przypadków zagadnienie własne jest rozwiązywane numerycznie za pomocą maszyn cyfrowych. Metody numeryczne wykorzystują iteracyjne algorytmy do rozwiązywania zagadnienia własnego. **Chopra2012a** definiuje trzy główne kategorie algorytmów:

- Metody iteracji wektora wykorzystujące właściwości równania (2.7),
- Metody transformacyjne korzystające z ortogonalności wektorów własnych,
- Metody iteracyjne wykorzystujące równanie charakterystyczne (2.9).

Dla dużych systemów korzystne okazuje się łączenie algorytmów z tej samej bądź różnych kategorii co podnosi wydajność metody rozwiązywania. W oprogramowaniu komercyjnym stosowane są złożone algorytmy takie jak metoda iteracji podprzestrzeni, metoda Lanczosa czy metoda gradientów Ritza. Wybór metody zależy również od wybranego solvera (silnika programu rozwiązywającego równania). Algorytmy te różnią się pod względem wydajności, maksymalnej dokładności rozwiązywania czy zbieżności. Ich wydajność może zależeć od liczby zadanych do wyznaczenia wartości własnych czy wielkości zadania. Więcej szczegółów odnośnie stosowanych metod rozwiązywania zagadnienia własnego można odnaleźć w literaturze (**Bathe2006**; **Wilson1983**; **Wilson1997**; **Fialko2000**; **Papadrakakis1993**; **Hughes1987**; **Chopra2012a**). W przypadku dobrej jakości oprogramowania komercyjnego informacje na temat używanych algorytmów powinny dostępne w pomocy do programu.

## Układ tłumiony

Drgania swobodne tłumione układu określone są równaniem (2.3), które przytoczono ponownie poniżej:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

Rozwiązywanie tego równania jest uzależnione od postaci tłumienia: klasycznego lub nieklasycznego. Tłumienie klasyczne zwane również proporcjonalnym (*eng. classical damping, proportional damping*) występuje w przypadku kiedy spełnione jest równanie (2.15).

$$\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = \mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \quad (2.15)$$

Kiedy macierz  $\mathbf{C}$  jest diagonalna to warunek (2.15) jest spełniony. W takim przypadku wszystkie częstotliwości drgań własnych są rzeczywiste i identyczne do tych wyznaczonych dla układu nietłumionego. W przeciwnym mamy do czynienia

z tłumieniem nieklasycznym bądź nieproporcjonalnym (*eng. nonclassical damping, nonproportional damping*). Dla tej sytuacji macierz  $\mathbf{C}$  nie jest diagonalna, a wartości własne są zespolone. Szczegółowe informacje oraz metody rozwiązania przypadków dynamiki konstrukcji nieklasycznie tłumionych podano w (**Caughey1961; Chopra2012a**). **Inman1995** na przykładzie pokazali, że obliczanie struktur charakteryzujących się tłumieniem nieklasycznym za pomocą zagadnienia własnego bez uwzględnienia macierzy tłumienia może prowadzić do błędnych rezultatów. Tak wyznaczone częstotliwości drgań będą różnić się od rzeczywistych, co może pociągnąć za sobą błędne wnioski odnośnie zakresu częstotliwości grożących rezonansem.

### 2.3.2 Transformacja do współrzędnych normalnych

Rozważmy ponownie równanie ruchu układu MDOF (2.14). Wiemy, że każdy wektor o długości  $N$  może być przedstawiony jako kombinacja liniowa  $N$  liniowo niezależnych wektorów. Przedstawmy zatem wektor przemieszczeń  $\mathbf{x}$  jako kombinację wektorów własnych  $\phi$ .

$$\mathbf{x} = \sum_{r=1}^N \phi_r q_r = \boldsymbol{\phi} \mathbf{q} \quad (2.16)$$

gdzie współczynniki  $q_r$  nazywane są współrzędnymi normalnymi (*eng. modal coordinates, normal coordinates*) i  $\mathbf{q} = \langle q_1 \ q_2 \ \dots \ q_N \rangle^T$ . Założymy, że zagadnienie własne zostało rozstrzygnięte i wyznaczyliszyliśmy macierz modalną  $\boldsymbol{\phi}$  (2.12). Aby uzyskać wartości współczynników  $q_n$  dla danego  $\mathbf{x}$ , przemnożmy obie strony równania 2.16 przez  $\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M}$ :

$$\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M} \mathbf{x} = \sum_{r=1}^N (\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_r) q_r \quad (2.17)$$

Ortogonalność wektorów własnych (2.10) sprawia, że wszystkie składniki powyżej sumy są równe 0 poza tymi, w których  $r = n$ . Pomiśmy więc znak sumy i zapiszmy

$$\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M} \mathbf{x} = (\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n) q_n \quad (2.18)$$

$$q_n = \frac{\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M} \mathbf{x}}{\boldsymbol{\phi}_n^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n} \quad (2.19)$$

Transformacja do współrzędnych normalnych jest istotnym elementem przewidywania odpowiedzi wymuszonych, liniowych układów MDOF z tłumieniem proporcjonalnym (p. 2.3.4).

### 2.3.3 Odpowiedź systemów dynamicznych o jednym stopniu swobody

Przegląd metod pozwalających wyznaczyć odpowiedź konstrukcji poddanej wymuszeniu wypada zacząć klasycznie od układu z jednym stopniem swobody. W przypadku liniowego układu SDOF obciążonego siłą zewnętrzną, równanie ruchu jest liniowym równaniem różniczkowym drugiego rzędu (2.20). Znając warunki początkowe  $x(0)$  i  $\dot{x}(0)$  możemy traktować zadanie jako w pełni sformułowane. Dla konstrukcji wstępnie nieobciążonej dynamicznie przemieszczenie i prędkość początkowe można przyjąć jako równe zeru.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (2.20)$$

Dla tak sformułowanego problemu istnieją cztery podstawowe metody wyznaczenia odpowiedzi dynamicznej:

- klasyczne rozwiązywanie równań różniczkowych,
- wykorzystanie całki Duhamela,
- rozwiązywanie w dziedzinie częstotliwości,
- wykorzystanie metod numerycznych.

Dla porządku powyższe metody zostaną w dalszej części krótko opisane. Dokładny opis metod jest przedstawiony w wielu podstawowych pozycjach literaturowych dotyczących dynamiki budowli (**Clough1975; Chmielewski1998; Chopra2012a**).

### Metoda klasyczna

Rozwiązywanie liniowego równania różniczkowego o stałych współczynnikach jakim jest równanie ruchu składa się z rozwiązywania całki ogólnej i szczególnej, a następnie zsumowania ich. Równanie ruchu jest rzędu drugiego stąd do wyznaczenia pozostały dwie zmienne całkowania. Z kolei do ich wyznaczenia wykorzystane są warunki początkowe. **OGRANICZENIA**

### Całka Duhamela

Metoda rozwiązywania równania ruchu układu SDOF za pomocą całki Duhamela polega na przekształceniu funkcji obciążenia  $f(t)$  na sekwencję nieskończonie krótkich impulsów. Przykładając impulsowe, jednostkowe wymuszenie (delta Diraca) do układu (2.20), dla odpowiednich warunków początkowych otrzymuje się rozwiązanie w postaci odpowiedzi impulsowej, inaczej zwanej impulsową funkcją przejścia (*eng. unit response function*). Aby uzyskać odpowiedź układu w czasie  $t$  sumuje się wszystkie odpowiedzi impulsowe do chwili czasowej  $t$ . W przypadku całkowalnej funkcji wymuszenia, całka Duhamela może być alternatywą do rozwiązywania metodą klasyczną. Dla eksperymentalnych funkcji wymuszenia, całkę Duhamela można wyznaczyć metodami numerycznymi. W tym przypadku odpowiedź będzie wyznaczona w dyskretnych chwilach czasowych. Należy jednak wspomnieć, w przypadku angażowania metod numerycznych całka Duhamela nie jest najwydajniejszym rozwiązaniem. Dodatkowo, ze względu na wykorzystywaną superpozycję, rozwiązanie to jest ograniczone wyłącznie do układów liniowych.

### Metoda przejścia do dziedziny częstotliwości

Metoda przejścia do dziedziny częstotliwości (*eng. frequency-domain method*) wykorzystuje właściwości przekształceń Laplace'a lub Fourier'a. Dla układu SDOF (2.20) wykonuje się wybrane przekształcenie funkcji wymuszenia  $f(t)$  uzyskując  $F(\omega)$ .  $F(\omega)$  można określić jako amplitudy wszystkich składników harmonicznych, które składają się na wymuszenie  $f(t)$ . Przekształcenie  $X(\omega)$  rozwiązania równania różniczkowego  $x(t)$  można z kolei opisać następująco

$$X(\omega) = H(\omega)F(\omega) \quad (2.21)$$

gdzie  $H(\omega)$  to odpowiedź zespolona w dziedzinie częstotliwości nazywana też funkcją przenoszenia lub transmitancją (*eng. complex frequency-response function (FRF)*).

Funkcja przenoszenia  $H(\omega)$  opisuje odpowiedź układu w dziedzinie częstotliwości przy wymuszeniu harmonicznym. Ostatnim krokiem metody jest wyznaczenie rozwiązania  $x(t)$  poddając  $X(\omega)$  odwrotnemu przekształceniu (Fourier'a bądź Laplace'a). Tak uzyskany rezultat  $x(t)$  można traktować jako określenie odpowiedzi harmonicznych układu na każdy z składników wymuszenia. Te cząstkoweg odpowiedzi te są następnie sumowane w celu uzyskania całkowitej odpowiedzi  $x(t)$ . Ponownie, metoda ta bezpośrednio może być stosowana tylko dla prostych funkcji wymuszenia  $f(t)$ . Jeżeli funkcja wymuszenia jest określona numerycznie, odpowiednie przekształcenia można przeprowadzić np. z użyciem algorytmu dyskretnej transformaty Fouriera w wariancie szybkiej transformaty Fourier'a (*eng. Fast Fourier Transform (FFT)*).

### Metody numeryczne

Zastosowanie powyższych trzech metody wyznaczania odpowiedzi dynamicznej ograniczone jest tylko do układów liniowych. Wspomniano również, że stają się niepraktyczne lub wręcz niemożliwe do zastosowania w przypadku skomplikowanych, zmiennych w czasie funkcji wymuszenia  $f(t)$ . W takich niekorzystnych okolicznościach z pomocą przychodzą metody numeryczne. Co więcej, okazuje się, że w przypadkach liniowych układów metody te są również konkurencyjne dla metod analitycznych.

Stworzono wiele metod i algorytmów numerycznych służących skutecznemu rozwiązyaniu równań ruchu. Powstało również wiele pozycji traktujących o tym zagadnieniu (LITERATRA). Z tego względu przytoczono tylko podstawowe pojęcia i założenia dotyczące istoty rozwiązań numerycznych.

Metody numeryczne w głównej mierze opierają się na mechanizmie kroku czasowego (*eng. time-step*) (p. 2.3.4). Zwykle nie jest to rozwiązanie ścisłe. Metody dostarczają jedynie przybliżonych rozwiązań, dlatego też muszą spełniać następujące kryteria:

- zbieżności (*eng. convergence*) - wraz ze zmniejszeniem kroku czasowego, rozwiązanie powinno zmierzać do rozwiązania dokładnego,
- stabilności (*eng. stability*) - rozwiązanie powinno być stabilne pomimo występowania błędów zaokrągleń,
- dokładności (*eng. accuracy*) - rozwiązanie powinno być dostatecznie bliskie rozwiązanie dokładnego.

Wśród metod numerycznych, które okazały się skuteczne w rozwiązaniach problemów możemy wyróżnić trzy główne:

- metoda interpolacji funkcji wymuszającej,
- metoda różnic skończonych,
- metoda średniego lub liniowego przyspieszenia w przedziale różnicowym, oparte na metodzie Newmark'a.

Pomimo, że powyższe metody są opisane dla układu SDOF, są łatwo uogólniane i praktycznie wykorzystywane do obliczania układów MDOF. Algorytm metody Newmark'a jest najpowszechniej używany w obliczeniach konstrukcji inżynierskich oraz został wykorzystany w niniejszej pracy. Stąd w następnym podrozdziale zawarto zwięzły opis jego działania.

### 2.3.4 Odpowiedź systemów dynamicznych o skończonej liczbie stopni swobody (MDOF)

Systemy o skończonej liczbie stopni swobody mogą charakteryzować się tłumieniem klasycznym (proporcjonalnym) bądź nieklasycznym (nieproporcjonalnym). Mogą być liniowe lub nieliniowe geometrycznie lub materiałowo. Czynniki te mają wpływ na wybór metody przewidywania odpowiedzi takiego układu. Macierzowe równanie ruchu dla układu o  $N$  stopniach swobody możemy zapisać jako  $N$  równań różniczkowych w formie (2.22)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (2.22)$$

Modelem z tłumieniem proporcjonalnym, z wystarczającym przybliżeniem, można opisać większość badanych struktur. Odpowiedź układów ograniczonych do kilku stopni swobody może być wyznaczana przez rozwiązywanie równania różniczkowego 2.22. W przypadku większej liczby stopni swobody zwykle wykorzystuje się metody numeryczne. Jak wiemy z rozdziału 2.3, dla takich układów zawsze możliwe jest wyznaczenie częstotliwości i postaci drgań własnych. Co więcej, opisujące je macierzowe równanie ruchu można przekształcić za pomocą metody transformacji własnej do postaci zależnej od współrzędnych modalnych. W takiej formie równanie to jest zbiorem równań rozwikłanych. Z tego względu można wyznaczyć odpowiedź dla każdego modu (zestawu jednej częstotliwości i postaci własnej oraz towarzyszącego tłumienia) osobno, a następnie złożyć ją w celu wyznaczenia odpowiedzi całkowitej. Dodatkowo, każda odpowiedź modalna może być wyznaczona jako funkcja czasu przez analizę układu SDOF. Równania SDF mogą być oczywiście rozwiązane wszystkimi przytoczonymi wcześniej wymienionymi metodami - w tym numerycznymi.

W przypadku kiedy mamy do czynienia z układem o tłumieniu nieproporcjonalnym, klasyczne parametry modalne nie mogą być wyznaczone, a równania ruchu nie mogą być rozwikłane. Takie systemy można analizować dwiema metodami: poprzez przekształcenie równań ruchu na wektory własne obliczone w zespołolonym zagadnieniu własnym lub poprzez bezpośrednie całkowanie nierożwikłanych równań różniczkowych. Druga metoda wykorzystuje metody numeryczne co wynika z braku zamkniętych rozwiązań analitycznych nawet dla analitycznie opisanych funkcji obciążenia. Metody numeryczne muszą być stosowane również w przypadku kiedy układ jest nieliniowy (niezależnie czy materiałowo, czy geometrycznie). W przypadku braku założenia o liniowości wybór metody nie jest uzależniony od tego, czy tłumienie jest proporcjonalne, czy też nie jest.

Zachowując porządek i kompletność wynodu poniżej przedstawiono krótki zarys dwóch podstawowych metod wyznaczania odpowiedzi układów dyskretnych o skończonej liczbie stopni swobody.

#### **Metoda superpozycji modalnej**

Rozpatrzmy układ MDOF, liniowy o tłumieniu proporcjonalnym dany równaniem 2.22. Wiemy, że wektor przemieszczeń  $\mathbf{x}$  może być zapisany za pomocą współrzędnych normalnych (p. 2.3.2) co powtórzono dla wygody poniżej:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{r=1}^N \boldsymbol{\phi}_r q_r(t) = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{q}(t) \quad (2.23)$$

Podstawmy 2.23 do równania 2.22

$$\sum_{r=1}^N \mathbf{M}\phi_r \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^N \mathbf{C}\phi_r \dot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^N \mathbf{K}\phi_r q_r(t) = \mathbf{F}(t) \quad (2.24)$$

Następnie przemnóżmy z lewej strony każdy składnik przez  $\phi_n^T$  otrzymując:

$$\sum_{r=1}^N \phi_n^T \mathbf{M}\phi_r \ddot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^N \phi_n^T \mathbf{C}\phi_r \dot{q}_r(t) + \sum_{r=1}^N \phi_n^T \mathbf{K}\phi_r q_r(t) = \phi_n^T \mathbf{F}(t) \quad (2.25)$$

Podobnie jak w punkcie 2.3.2, ortogonalność wektorów własnych  $\phi$  sprawia, że wszystkie składniki sum, w których  $r \neq n$ , zerują się. Możemy więc zapisać zredukowane równanie w postaci

$$(\phi_n^T \mathbf{M}\phi_n) \ddot{q}_n(t) + (\phi_n^T \mathbf{C}\phi_n) \dot{q}_n(t) + (\phi_n^T \mathbf{K}\phi_n) q_n(t) = \phi_n^T \mathbf{F}(t) \quad (2.26)$$

Zauważmy, że iloczyny zawarte w nawiasach są skalarami. Uprośćmy więc zapis do następującej formy:

$$\mathcal{M}_n \ddot{q}_n(t) + \mathcal{C}_n \dot{q}_n(t) + \mathcal{K}_n q_n(t) = \mathcal{F}_n(t) \quad (2.27)$$

gdzie:

$$\mathcal{M}_n = \phi_n^T \mathbf{M}\phi_n \quad \mathcal{C}_n = \phi_n^T \mathbf{C}\phi_n \quad \mathcal{K}_n = \phi_n^T \mathbf{K}\phi_n \quad \mathcal{F}_n(t) = \phi_n^T \mathbf{F}(t) \quad (2.28)$$

Okazuje się, że wszystkie powyższe przekształcenia doprowadzają do tego, że (2.27) jest równaniem o jednym stopniu swobody dla  $n$ -tej współrzędnej normalnej odpowiadającej  $n$ -tej postaci drgań. Z tego względu współczynniki  $\mathcal{M}_n$ ,  $\mathcal{C}_n$ ,  $\mathcal{K}_n$ ,  $\mathcal{F}_n(t)$  nazywane są odpowiednio uogólnioną masą, uogólnionym tłumieniem, uogólnioną sztywnością i uogólnioną siłą dla  $n$ -tej postaci własnej (*eng. generalized mass, generalized damping, generalized stiffness, generalized force*). Równanie to możemy rozwiązać wszystkimi metodami dotyczącymi układów SDOF przedstawionymi w (p. 2.3.3). Warto też zwrócić uwagę, że wartości  $\mathcal{M}_n$ ,  $\mathcal{C}_n$ ,  $\mathcal{K}_n$ ,  $\mathcal{F}_n(t)$  są uzależnione jedynie od pojedynczej postaci drgań  $\phi_n$ . Naturalnie więc, jeśli znamy tylko jeden mod  $\phi_n$ , możemy wyznaczyć odpowiadający mu parametr  $q_n$  bez znajomości pozostałych modów. Jeśli współczynniki normalne  $q_n$  zostały wyznaczone dla  $N'$  wybranych (najczęściej kilku istotnych) modów, to wkład  $n$ -tego modu w całkowitą wartość przemieszczeń  $\mathbf{x}(t)$  wyznaczyć można następująco

$$\mathbf{x}_n(t) = \phi_n q_n(t) \quad (2.29)$$

a wykorzystując równania (2.23) i (2.29) obliczyć przemieszczenie całkowite

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{r=1}^{N'} \mathbf{x}_n(t) \quad (2.30)$$

Sumowanie wkładu poszczególnych postaci drgań w przemieszczenie całkowite jest par excellence superpozycją. Stąd też nazwa: "metoda superpozycji modalnej". Należy wspomnieć o paru istotnych założeniach mogących wpłynąć na zastosowanie tej metody. Jak już wcześniej wspomniano, może być ona wykorzystana tylko w układach liniowych (ze względu na superpozycję) i tłumionych proporcjonalnie. W przypadku tłumienia nieproporcjonalnego przekształcenie równania (2.25) do (2.26) nie będzie prawdziwe. Warto również pamiętać, że wynikowe przemieszczenia  $\mathbf{x}(t)$  są niezależne od normalizacji wektorów własnych, natomiast współrzędne normalne  $q_n(t)$  są od niej ścisłe zależne.

### Metoda całkowania bezpośredniego równań ruchu - Newmarka

Metoda Newmarka jest algorytmem opartym na koncepcji kroku czasowego i metodach numerycznych. Zgodnie z koncepcją kroku czasowego całkowity czas podzielony jest na serię kroków czasowych  $\Delta t$ . Konsekwencją tego jest dyskretyzacja siły wymuszającej i odpowiedzi układu poprzez określenie ich wyłącznie w wybranych chwilach czasowych. Rozpatrzmy ponownie równanie ruchu MDOF:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}(t) \quad (2.31)$$

Dokonajmy dyskretyzacji i przedstawmy siłę wymuszającą  $\mathbf{F}(t)$  określoną dla  $t \in <0, t_k>$  jako zestaw dyskretnych wartości w chwilach czasowych  $t_i$ :

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}(t_i) \quad i = 0, 1, 2 \dots N-1, N \quad (2.32)$$

gdzie  $t_N \leq t_k$ . Krokiem czasowym nazywamy różnice pomiędzy kolejnymi zdyskretyzowanymi chwilami czasowymi:

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i \quad (2.33)$$

Krok czasowy jest zazwyczaj przyjmowany jako stały, ale nie jest to konieczne. Tak jak wymuszenie, odpowiedź również podlega dyskretyzacji w chwilach  $t_i$ , a więc równanie ruchu można zapisać w nowej formie

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}_i + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}_i + \mathbf{K}\mathbf{x}_i = \mathbf{F}_i \quad (2.34)$$

Znając warunki początkowe  $\mathbf{x}(0)$  i  $\dot{\mathbf{x}}(0)$  algorytmy wykorzystywane w metodach numerycznych potrafią wyznaczyć rozwiązania równania w kolejnych krokach  $i = 1, 2 \dots N-1, N$ . Należy zaznaczyć, że w metodzie "kroku czasowego" rozwiązanie ruchu nie jest spełnione w całej dziedzinie czasu, a jedynie w określonych krokiem  $\Delta t$  chwilach czasowych  $t_i$ .

Rodzina metod numerycznych opartych na koncepcji kroku czasowego została rozwinięta przez Nathana M. Newmarka (**Newmark1959**). Wykorzystuje ona dwa podstawowe równania:

$$\dot{\mathbf{x}}_{i+1} = \dot{\mathbf{x}}_i + [(1-\gamma)\Delta t]\ddot{\mathbf{x}}_i + (\gamma\Delta t)\ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \quad (2.35a)$$

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + (\Delta t)\dot{\mathbf{x}}_i + [(0.5-\beta)(\Delta t)^2]\ddot{\mathbf{x}}_i + (\beta(\Delta t)^2)\ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \quad (2.35b)$$

gdzie współczynniki  $\beta$  i  $\gamma$  definiują zmienność przyspieszeń w trakcie kroku czasowego i istotnie wpływają na stabilność i dokładność metody. Ze względu na oba te warunki, przy braku modyfikacji algorytmu, parametry powinny mieć następujące wartości:  $\gamma = \frac{1}{2}$ , a  $\frac{1}{6} \leq \beta \leq \frac{1}{4}$ . Na skrajach zalecanego przedziału wartości parametru  $\beta$  występują dwa przypadki szczególne, w których przyspieszenie ma określony charakter w kroku czasowym:

- przyspieszenie stałe -  $\gamma = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = \frac{1}{4}$
- przyspieszenie zmienne liniowo -  $\gamma = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = \frac{1}{6}$

Metoda numeryczna do wyznaczenia trzech niewiadomych  $\ddot{\mathbf{x}}_{i+1}$ ,  $\dot{\mathbf{x}}_{i+1}$  i  $\mathbf{x}_{i+1}$  wymaga układu trzech równań macierzowych. Zatem dwa zaproponowane równania 2.35a i 2.35b, połączone z równaniem równowagi (2.34) zapewnionym na końcu kroku czasowego, pozwalają wyznaczyć przemieszczenia, prędkość i przyspieszenia w chwili  $t_{i+1}$ . Ze względu na występowanie w równaniach (2.35) składników w chwili czasowej  $i+1$  po obu stronach równania, algorytm musi mieć charakter iteracyjny. Jednakże istnieją modyfikacje równań, które dla układów liniowych pozwalają rozwiązać układ w jednym kroku.

### 2.3.5 Mała dawka tłumienia

Drgania układów rzeczywistych nierozerwalnie związane są tłumieniem. Wśród polskich autorów obszerne rozważania na temat tłumienia drgań mostów przeprowadził **Salamak2003**. Określa on tłumienie drgań jako rozproszenie energii mechanicznej drgającego układu. Tłumienie można podzielić ze względu na źródło na konstrukcyjne i zewnętrzne. W przypadku liniowych układów zazwyczaj przyjmuje się tłumienie klasyczne, proporcjonalne opisane jak w równaniu 2.22. Obecnie nie ma możliwości analitycznego wyznaczenia wartości tłumienia dla projektowanej konstrukcji. Istnieją opracowania poparte badaniami informujące o zalecanych wartościach tłumienia jakie należy przyjąć przy projektowaniu danej konstrukcji. Przykładowe wartości oraz wzory empiryczne można odnaleźć w pracach (**Salamak2003; Fryba1999; Bachmann2012; Yamaguchi1997**). W literaturze można odnaleźć kilka miar tłumienia. Pierwszą z nich jest liczba tłumienia (*eng. damping ratio*) nazywana również ułamkiem tłumienia lub tłumieniem względym. Definiuje się ją jako stosunek współczynnika tłumienia wiskotycznego do tłumienia krytycznego. Dla jednego stopnia swobody (por. (2.20)) liczbę tłumienia można zapisać formułą (2.36).

$$\zeta = \frac{c}{c_{kr}} = \frac{c}{2m\omega} \quad (2.36)$$

Tłumieniem krytycznym nazywamy wartość tłumienia, po przekroczeniu której ruch staje się aperiodyczny. Dla tłumienia równego tłumieniu krytycznemu liczba tłumienia jest równa 1. W przypadku mostów liczba tłumienia zwykle nie przekracza 10% (**Salamak2003**).

Inną miarą tłumienia jest Logarytmiczny Dekrement Tłumienia (LDT). Określa się go jako logarytm naturalny stosunku dwóch kolejnych amplitud drgań swobodnych danego modu (2.37).

$$LDT = \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} \quad (2.37)$$

Przy małym tłumieniu wartości dwóch kolejnych amplitud mogą różnić się nieznacznie, a więc błąd powstały przy odczycie może być duży. W takim przypadku zalecane jest wyznaczenie średniego dekrementu z odległszych w czasie amplitud. Odczytując wartość  $n$ -tej amplitudy i  $n+m$ -tej amplitudy wartość LDT można wyznaczyć z równania:

$$LDT = \frac{1}{m} \ln \frac{a_n}{a_{n+m}} \quad (2.38)$$

Zależność pomiędzy LDT, a liczbą tłumienia określona jest następująco:

$$LDT = \ln \frac{q(t)}{q(t+T)} = \ln \frac{e^{-\zeta\omega t}}{e^{-\zeta\omega(t+T)}} = \ln e^{\zeta\omega T} = \zeta\omega T = \zeta\omega \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (2.39)$$

gdzie:  $\omega_d$  - częstotliwość drgań tłumionych ( $\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}$ ),  $T$  - okres drgań tłumionych  $T = \frac{2\pi}{\omega_d}$ . W przypadku drgań konstrukcji budowlanych liczba tłumienia jest z reguły niewielka ( $\zeta < 0.1$ ). Z tego względu częstotliwość drgań własnych tłumionych i nietłumionych są zbliżone. W takim przypadku zależność pomiędzy LDT, a liczbą tłumienia często upraszcza się do postaci przybliżonej:

$$LDT \approx 2\pi\zeta \quad (2.40)$$

Spośród metod pozwalających na uwzględnienie tłumienia w obliczeniach najpopularniejszą jest tłumienie masowo-sztynnościowe Rayleigh'a (**Chopra2012a**).

Opiera się ono na stworzeniu macierzy tłumienia  $\mathbf{C}$  bazując na liniowej kombinacji macierzy mas  $\mathbf{M}$  i macierzy sztywności  $\mathbf{K}$  (por. 2.22):

$$\mathbf{C} = a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{K} \quad (2.41)$$

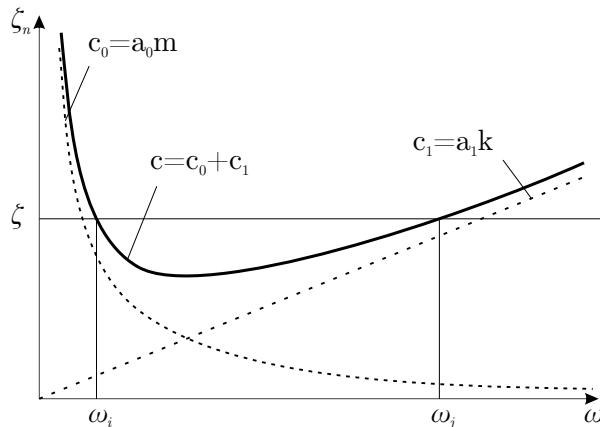
W przypadku zastosowania tłumienia Rayleigh'a liczba tłumienia odpowiadająca danemu modowi wyznaczona jest z wzoru:

$$\zeta_n = \frac{a_0}{2} \frac{1}{\omega_n} + \frac{a_1}{2} \omega_n \quad (2.42)$$

Z kolei przyjmując liczbę tłumienia o określonej wartości można wyznaczyć wartości parametrów  $a_0$  i  $a_1$ . Dla danych częstotliwości  $\omega_i$  i  $\omega_j$  współczynniki Rayleigh'a wyznaczyć można z wzorów (2.43).

$$a_0 = \zeta \frac{2\omega_i \omega_j}{\omega_i + \omega_j} \quad a_1 = \zeta \frac{2}{\omega_i + \omega_j} \quad (2.43)$$

Wpływ składowych macierzy tłumienia pochodzących od macierzy mas i macierzy sztywności najlepiej zobrazować na przykładzie jednego stopnia swobody. Jakościowo wpływ przedstawiono na rysunku 2.2. Z rysunku 2.2 można wysnuć przydatne



Rysunek 2.2: Wizualizacja wpływu masy i sztywności na macierz tłumienia według Rayleigh'a

z praktycznego punktu widzenia wnioski. Założone tłumienie  $\zeta$  jest spełnione jedynie dla dwóch użytych w formułach 2.43 częstotliwości  $\omega_i$  i  $\omega_j$ . Składnik  $c_1 = a_1 k$  wzrasta liniowo wraz ze wzrostem częstotliwości. Z kolei składnik  $c_0 = a_0 m$  maleje nieliniowo wraz ze wzrostem częstotliwości. Sumaryczna wartość obu składników z reguły gwarantuje dla wąskiego przedziału częstotliwości  $\langle \omega_i, \omega_j \rangle$  tłumienie zbliżone do zakładanego.

## 2.4 Dynamiczne obciążenie kolejowe

Ryzyko nadmiernych drgań mostów kolejowych jest rozpatrywane od samych początków budowy dróg szynowych w Anglii na początku XIX w (**Ladislav 1996**). Historię tę zwięźle przedstawił w swojej pracy **Szafranski 2013**, opierając się na obszernych studiach literatury. Podsumowując doświadczenia naukowców i inżynierów, poza wyjątkowymi przypadkami wykolejeń i uderzeń pociągów w elementy konstrukcyjne,

wywołanie niebezpiecznych amplitud drgań mostów związane jest głównie ze zjawiskiem rezonansu. Rezonans mechaniczny może wystąpić w przypadku kiedy pojawia się obciążenie cykliczne, którego częstotliwość oddziaływanego pokrywa się z częstotliwością drgań własnych konstrukcji mostu. Kiedy obciążenie jest długotrwałe i w układzie nie ma tłumienia amplitudy drgań mogą teoretycznie rosnąć w nieskończoność. W rzeczywistych konstrukcjach, nie mają możliwości bezgranicznego wzrostu amplitud, z uwagi na tłumienie układu i skończony czas oddziaływania obciążen ruchomych. Niemniej jednak konstrukcje mostowe charakteryzują się zazwyczaj małym tłumieniem, a obciążenia kolejowe mogą charakteryzować się stosunkowo długim czasem oddziaływania o stałej częstotliwości wymuszenia. W połączeniu z ciągłym rozwojem zarówno taboru kolejowego jak i dróg szynowych, problem wprowadzenia mostu kolejowego w drgania, nawet w normalnych warunkach eksploatacji, wymaga od inżynierów ciągłej pracy badawczej.

#### 2.4.1 Efekty dynamiczne w mostach kolejowych

Obecnie rozważania dotyczące oddziaływań taboru na mostu kolejowe skupiają się przede wszystkim na obiektach projektowanych wzdłuż Linii Dużych Prędkości (LDP). Oczywiście od wielu lat w przypadku wszystkich mostów kolejowych należy sprawdzić dwa główne kryteria: wytrzymałości i odporności konstrukcji oraz bezpiecznego i komfortowego użytkowania. W ramach pierwszego sprawdzane są zwykłe naprężenia i deformacje konstrukcji. ZMĘCZENIE? (**Ladislav2008**)

Drugie kryterium jest znacznie bardziej złożone i restrykcyjne w przypadku mostów w ciągu LDP. Poza relatywnie prostym w zrozumieniu komfortem pasażera, wymaga ono sprawdzenia bezpieczeństwa nawierzchni kolejowej na moście. Zakłada się, że nawierzchnia jest bezpieczna jeśli jest stabilna i wskutek przejazdu nie nastąpi ryzyko zerwania kontaktu pomiędzy szyną i kołem (**Ramondenc2008**). Przy regularnym utrzymywaniu torze, utrata stabilności nawierzchni może nastąpić przede wszystkim w przypadku rozluźnienia podszypki wskutek ścierania się tarczni. Pierwszy raz z tym problemem zetknęto się w trakcie utrzymania obiektów mostowych w ciągu trasy francuskiego TGV (**Ramondenc1998**). Niestateczność podszypki może skutkować zmniejszeniem siły w styku koła i szyny, a w skrajnym wariancie wykolejeniem się pociągu. Kolejną klasę problemów mogących wpłynąć na zaburzenie styku koła z szyną są zmiany geometrii toru wywołane przejazdem taboru po obiekcie. Mogą one wynikać z ugięcia wspornika za osią podparcia mostu, z obrotu konstrukcji na łożysku w skutek ugięcia przęsła, ze skręcenia toru po długości obiektu czy ze zmiany krzywizny w planie (**Niemierko**). Dodatkowo z uwagi na

Duża prędkość taboru, a w związku z tym wzmożone kryteria bezpieczeństwa i komfortu pasażerów wymagają sprawdzenia szeregu czynników. Z uwagi na bezpieczeństwo ruchu już na etapie projektowania należy rozważyć następujące wartości (**Niemierko**):

- przyspieszenia przęsła,
- pionowych ugięcia pomostu,
- reakcje (uniemożliwić odrywanie na łożyskach),
- przemieszczenia wspornika przęsła poza osią podparcia,
- kąty skręcenia przęsła,
- kąty obrotu na łożyskach,
- przemieszczenia wzdłuż osi podłużnej mostu,

- ugięcie w poprzek mostu,
- kąt obrotu przęsła w poziomie,
- częstotliwości drgań własnych konstrukcji.

### 2.4.2 Tabor realny i modele

(Goicolea i Gabaldón 2008)

### 2.4.3 Oddziaływanie dynamiczne taboru na mostach kolejowych

W trakcie bogatej historii badań nad interakcją taboru kolejowego i konstrukcji mostów rozpoznano kilka oddziaływań charakteryzujących się cyklicznością i długim czasem działania, co spełnia znamiona ryzyka rezonansu (**Fryba2001**). Warto zaznaczyć, że ryzyko to nie dotyczy jedynie oddziaływań pionowych, ale również poprzecznych do osi toru. Opisując kompleksowo zagadnienie, należy rozpocząć od historycznych oddziaływań, niewystępujących już z uwagi na rozwój techniki. Pierwszym z nich był efekt niedokładnego wyważenia kół osi napędowych lokomotywy parowej. Koło takie posiada przeciwwagę dla elementów połączenia z wiązarami, łączącymi koło z osią silnikową. W przypadku braku idealnego wyważenia, koło takie oddziałuje na szynę sinusoidalną siłą. Drugie historyczne oddziaływanie było związane z występowaniem połączeń szyn na obiekcie mostowym. Równo i blisko rozmieszczone koła przejeżdżające przez przerwę połączenia szyn wywoływały cykliczne uderzenie i w konsekwencji drgania całej konstrukcji. To oddziaływanie również nie występuje już w rzeczywistości, ponieważ obecne przepisy zabraniają łączenia szyn na obiektach mostowych. Poniżej wymieniono obecnie występujące oddziaływanie grożące nadmiernymi drganiom mostów.

Pierwszą przyczyną pośrednią są duże i wciąż rosnące prędkości eksploatacyjne pociągów. Przy równomiernym lub niemal równomiernym rozstawie osi i przy stałej prędkości przejazdu, siły przekazywane przez koła na szynę pojawiają się okresowo na obiekcie. Istnieje więc ryzyko, że przy rozstawie osi  $d$  i przy prędkości taboru  $c$  czas potrzebny na pojawienie się kolejnych osi na obiekcie  $t$  będzie równy okresowi drgań  $T_i$ . Okres  $T_i$  odpowiada częstotliwości drgań własnych konstrukcji  $T_i = f_i$ . Jednakże wzbudzenie może nastąpić również dla wielokrotności (lub ułamka)  $k$  okresu drgań. W takim przypadku kolejne siły przykładowe są do obiektu co  $k$ -te wychylenie konstrukcji z położenia równowagi. Prędkość związana z niekorzystną koincydencją  $t = kT_i$  nazywana jest prędkością krytyczną (eng. *critical speed*). Równaniem (2.44) opisano równość czasu  $t$  i okresu  $T_i$ :

$$t = \frac{d}{c} = \frac{k}{f_i} = T_i \quad \text{dla } \begin{cases} i = 1, 2, 3 \dots \\ k = 1, 2 \dots, 1/2, 1/3, \dots \end{cases} \quad (2.44)$$

Na podstawie równania (2.44) wyznaczyć można prędkość krytyczną  $c_{cr}$ :

$$c_{cr} = \frac{df_i}{k} \quad \text{dla } \begin{cases} i = 1, 2, 3 \dots \\ k = 1, 2 \dots, 1/2, 1/3, \dots \end{cases} \quad (2.45)$$

Częstotliwość pojawiania się kolejnych osi jest oczywiście związana z prędkością  $c$  i rozstawem osi  $d$ . **Fryba2001** podaje również drugą formułę na prędkość krytyczną,

której osiągnięcie grozi destabilizacją przesła. Wzór na tę prędkość wyznaczony dla belki swobodnie podparty podano następujący:

$$c_{cr} = \frac{2lf_j}{j} \quad \text{dla } j = 1, 2, 3 \dots \quad (2.46)$$

Jak podaje autor, prędkości powodujące destabilizację przesła są aktualnie zbyt wysokie i nieosiągalne w praktyce, ale należy je rozważyć w kontekście rozwoju technologicznego transportu (**Ladislav2008**).

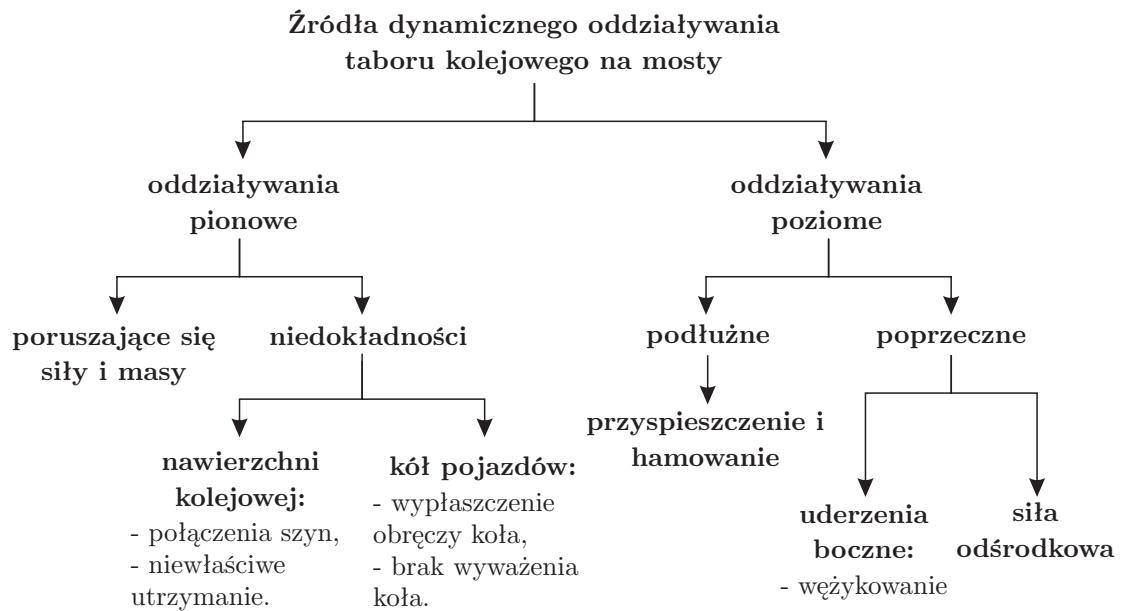
Drugim niebagatelnym czynnikiem wpływającym na drgania obiektu mostowego przy przejeździe taboru są nierównomierności jezdni (**Ladislav1996**). Są one wynikiem odchyleń wewnętrznych krawędzi szyn od idealnej, projektowanej geometrii. Dla danego punktu wzdłuż osi toru rozróżnia się cztery typy nierównomierności:

- nierównomierność wysokościowa:
  - średnia zmiana wysokości osi toru,
  - różnica wysokości toków szynowych,
- nierównomierność poprzeczna:
  - średnie przesunięcie poprzeczne osi toru,
  - zbliżenie/oddalenie się toków szynowych.

Nierównomierności wysokościowe wpływają głównie na pionowe drgania konstrukcji, a poprzeczne na poziome i skrętne. Każdy z typów może mieć charakter cykliczny lub losowy.

Nierównomierności cykliczne opisane mogą być za pomocą szeregiów Fouriera (**Ladislav1996**). Rozwiązywanie to pozwala również na opisanie jako nierównomierności toru pokrewnych, rzeczywistych efektów takich jak efekt wypłaszczenia powierzchni tocznej obręczy kół (**Zhou2020**) czy efekt zmiany sztywności jezdni na poprzecznikach i podkładach w pomoście z jezdnią otwartą (**Fryba1999**). Z drugiej strony, nierównomierności losowe najczęściej są efektem źle wykonanego lub źle utrzymywanej toru. Powyższe oddziaływanie wywołują z reguły pionowe drgania. Z kolei poprzeczne wzbudzenia związane mogą być z podłużnymi lub poprzecznymi siłami. Pierwsze z nich wynikają głównie z przyspieszenia bądź hamowania taboru na moście. Drgania poprzeczne związane są głównie z bocznymi ruchami pojazdu. Mają one swoje źródło w nierównomiernościach poprzecznych toru, mechanizmie węzykowania (**Babe2016**) i występowaniu siły odśrodkowej. Na rysunku 2.3 przedstawiono schemat podsumowujące rzeczywiste oddziaływanie.

Pierwsze z nich utożsamiane jest z normowym Stanem Granicznym Nośności, a drugie ze Stanem Granicznym Użytkowania (**PolskiKomitetNormalizacyjny2004**).



Rysunek 2.3: Zestawienie efektów dynamicznych działających na konstrukcję mostu w trakcie przejazdu taboru kolejowego (na podstawie (Ladislav1996))

#### 2.4.4 Modele obciążenia

#### 2.4.5 Przepisy normowe i wytyczne.

### 2.5 Analiza dynamiczna w Metodzie Elementów Skończonych

#### 2.5.1 Analiza modalna

#### 2.5.2 Odpowiedź konstrukcji

#### 2.5.3 Kalibracja modeli numerycznych

# Rozdział 3

## Identyfikacja cech dynamicznych konstrukcji

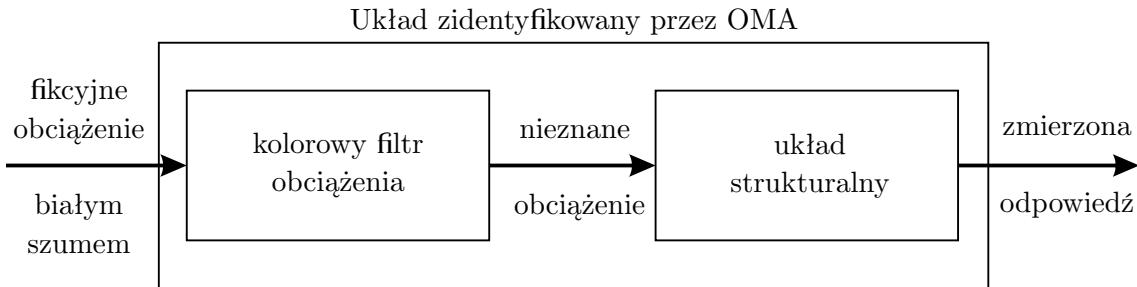
### 3.1 Operacyjna analiza modalna (OMA)

#### 3.1.1 Koncepcja OMA

W ogólności doświadczalna analiza modalna to proces korelacji charakterystyk dynamicznych modelu matematycznego, z fizycznymi właściwościami systemu opisanego rezultatami pomiarów. Przypomnijmy, że w OMA do procesu estymacji parametrów modalnych używane są tylko pomiary odpowiedzi konstrukcji. Różni ją to od EMA, w której mierzone są zarówno wymuszenia jak i odpowiedź. Fundamentem wszystkich metod OMA jest założenie, że badana struktura obciążona jest wymuszeniem o widmie zbliżonym do białego szumu. Oznacza to, że energia konstrukcji jest rozłożona w szerokim paśmie częstotliwości, które zawiera wszystkie interesujące badacza mody do identyfikacji. Z oczywistych względów idealne wymuszenie o charakterystyce białego szumu nie jest możliwe. Większość metod radzi sobie z tym brakiem, jednak najważniejsze jest, żeby wszystkie interesujące mody były odpowiednio wzbudzone, tak aby ich wkład był wychwycony przez przyrządy pomiarowe. **Brincker2015** tłumaczą tą koncepcję za pomocą fikcyjnego, kolorowego filtru obciążenia. Zaproponowano, że kolorowe obciążenie może być traktowanego jako wynik obciążenia kolorowego filtru (zgodnego z obciążeniem) przez idealnie biały szum. Udowodniono, że takie podejście nie zmienia fizycznych modów systemu. Należy jednak pamiętać, że metody OMA w tym przypadku dokonają identyfikacji modalnej zarówno struktury fizycznej, jak i filtra obciążenia. Koncepcję zaprezentowano na rysunku 3.1. Najważniejszą konsekwencją jest możliwość występowania wśród wyników identyfikacji nie tylko modów związanych z konstrukcją, ale też wynikających z warunków obciążenia. Należy pamiętać również, że pomierzone wartości obarczone są szumem pomiarowym. Nie niesie on żadnej istotnej, fizycznej informacji, ale jest nieunikniony w trakcie rzeczywistych pomiarów. Tak więc wynik identyfikacji zawiera w sobie trzy składowe:

- parametry modalne związane z drganiami własnymi konstrukcji,
- myślący filtr obciążenia, kolorujący biały szum do rzeczywistego, nieznanego obciążenia,
- szum pomiarowy.

W idealnych warunkach, kiedy filtr obciążenia ma biały kolor, a szum pomiarowy byłby zerowy, OMA zidentyfikuje wyłącznie mody konstrukcji.



Rysunek 3.1: Schemat układu identyfikowanego przez OMA przy koncepcji kolorowego filtra obciążenia

Operacyjna Analiza Modalna jest obwarowana pewnymi założeniami. Są one rozwinięciem założeń podanych w punkcie 2.1. Układ poddany analizie OMA musi spełniać następujące warunki:

- liniowość - odpowiedź układ na zadaną kombinację obciążień, jest sumą odpowiedzi odpowiadających każdemu obciążeniu traktowanemu osobno - zasada superpozycji,
- stacjonarność - charakterystyki dynamiczne konstrukcji nie zmieniają się w czasie. Innymi słowy, współczynniki równań różniczkowych opisujących odpowiedź struktury są niezależne od czasu.
- obserwonalność - dobór lokalizacji punktów pomiarowych musi być tak zaprojektowany, żeby był w stanie dostrzec interesujące obserwatora mody. Niezależnie od tego w trakcie analizy spełnione muszą być również kryteria obserwonalności sterowalności opisane w punkcie 3.3.2.

#### WARUNKI DOTYCZĄCE WYMUZENIA? Rainieri2014

### 3.1.2 Metody operacyjnej analizy modalnej

Metody identyfikacji modalnej dzielą się na dwa główne rodzaje związane z dziedziną w której działa algorytm:

- metody w dziedzinie czasu (*eng. time-domain methods (TDM)*),
- metody w dziedzinie częstotliwości (*eng. frequency-domain methods (FDM)*).

Metody EMA w dziedzinie czasu wykorzystują do estymacji parametrów modalnych funkcje odpowiedzi impulsowej (*eng. impulse response function (IRF)*). W OMA, nośnikiem informacji o odpowiedzi swobodnej układu (*eng. free decays*) są funkcje korelacji (*eng. correlation functions*). Identyfikacja parametrów polega w tym przypadku na dopasowaniu parametrów modalnych do informacji zawartej w funkcjach korelacji. Stosowane są do tego modele parametryczne wykorzystujące techniki

regresji. Główną różnicą pomiędzy dostępnymi algorytmami TD jest właśnie zastosowana metoda regresji. Zasadniczo wszystkie metody TD stosowane w EMA mogą być użyte w OMA właśnie z zastosowaniem funkcji korelacji.

Podobną analogię jak w metodach TD można zauważać dla metod w dziedzinie częstotliwości. W algorytmach EMA w dziedzinie częstotliwości bazą do identyfikacji są funkcje odpowiedzi częstotliwościowej (*eng. frequency-response function (FRF)*). W OMA rolę tę pełnią funkcje gęstości widmowej (*eng. spectral density functions*).

Przed wyborem dziedziny w której badacz chce się poruszać, warto poznać elementy charakterystyczne dla grupy algorytmów TD i FD. Podstawową wadą metod TD jest to, że wszystkie mody, które występują w sygnale są ujęte w funkcjach korelacji. W konsekwencji wszystkie mody zawsze są rozważane w trakcie rozwiązania problemu. Z kolei ich zaletą, w porównaniu do metod FD, jest większa odporność na wystąpienie błędów systematycznych w estymowanych parametrach modalnych. Niejako w kontrze do metod TD, zaletą metod FD jest to, że każdy z modów występuje w wąskim przedziale częstotliwości. Dzięki temu możliwe jest rozważanie tylko przedziałów częstotliwości, w których występują interesujące badacza mody. Z drugiej strony wadą metod FD jest wykorzystywanie do identyfikacji funkcje gęstości widmowej, które są wyznaczane za pomocą różnych metod (CYTOWANIE) obciążonych błędami systematycznymi. Błędy te nieuchronnie przenoszą się na wynikowe parametry modalne, a określenie ich wpływu jest problematyczne. **Maia1997** sugerują, że metody w dziedzinie czasu są z reguły lepszym wyborem w przypadku dużego przedziału interesujących badacza częstotliwości, albo dużej liczby modów w tym zakresie. Natomiast metody w dziedzinie częstotliwości dostarczają lepszych wyników kiedy zakres częstotliwości jest niewielki, a liczba modów relatywnie mała.

Drugie kryterium podziału algorytmów dotyczy liczby modów, które mogą być jednocześnie analizowane za pomocą danej metody. Podział jest zbliżony do tego dotyczącego teoretycznej analizy modalnej. Metoda może identyfikować albo jeden stopień swobody (*eng. single degree-of-freedom*) albo wiele stopni swobody (*eng. multiple degree-of-freedom*).

Metody TDM i FDM możemy podzielić również na bezpośrednie (*eng. direct*) i pośrednie (*eng. indirect*). Różnica polega na sposobie wyznaczania FRF. Metody bezpośrednie pozwalają wyznaczyć ją bezpośrednio z równania ruchu. Natomiast metody pośrednie estymują FRF na podstawie wcześniej zidentyfikowanego modelu modalnego.

Ostatnim ogólnie przyjętym kryterium podziału jest liczba punktów poddanych wymuszeniu i mierzonych w trakcie serii pomiarowej. Koresponduje to z liczbą analizowanych jednocześnie przez metodę identyfikacji funkcji FRF. Kiedy mówimy o jednoczesnej analizie tylko jednej funkcji FRF mamy do czynienia z metodą jedno-wejście-jedno-wyjście (SISO) (*eng. single-input-single-output*). Kiedy mierzymy wymuszenie w jednym punkcie, a odpowiedź badamy w kilku różnych punktach na konstrukcji, otrzymując kilka funkcji FRF, metodę klasyfikuje się jako jedno-wejście-wiele-wyjść (SIMO) (*eng. single-input-multi-output*). W powyższej technice obowiązuje założenie, że parametry modalne uzyskane z każdej funkcji FRF będą takie same. Innymi słowy są to parametry globalne dla całej konstrukcji. Naturalnym rozwińciem są metody które mogą analizować wszystkie dostępne funkcje FRF jednocześnie, uzyskane w skutek wymuszenia i pomiaru wielu różnych punktów. Metody te określone są jako wiele-wejście-wiele-wyjście (MIMO) (*eng. multi-input-multi-output*).

**Maia1997** opisali szczegółowo wiele z metod zarówno eksperymentalnej jak i

i doświadczalnej analizy modalnej. Z kolei **Brincker2015** sklasyfikowali najpopularniejsze, używane współcześnie metody identyfikacji OMA. Spośród algorytmów działających w dziedzinie czasu należy wymienić:

- Poly Reference (PR) (**Norton2009; Vold1982**),
- Autoregressive Moving Average (ARMA) (**Shi1987; Huang2000; Giorcelli1994**),
- Ibrahim Time Domain (ITD) (**Ibrahim1983; Pappa1985a**),
- Eigensystem Realization Algorithm (ERA) (**Juang1985; Pappa1985; Juang1988**),
- Stochastic Subspace Identification (SSI). (**VanOverschee1996; Peeters1999a; Peeters2000**).

Warto zaznaczyć, że metoda ERA przy zastosowaniu postulatów NExT stanowi jeden z pośrednich wariantów metody SSI, używający funkcji korelacji jako źródła informacji przy identyfikacji.

Z kolei najpopularniejsze algorytmy w dziedzinie częstotliwości to:

- Basic Frequency Domain (Peak-Picking) (**Felber1994**),
- Frequency-Domain-Decomposition (FDD) (**Brincker2000; Brincker2001a; Brincker2001b**),
- The Least Squares Complex Frequency Method (LSCF) (**Verboven2005**),
- The Poly-Reference Least Squares Complex Frequency Method (p-LSCF) (**Peeters2005**).

Wszystkie z powyższych algorytmów są bardzo dobrze opisane i udokumentowane w literaturze. Trudno orzec, który z nich jest obiektywnie najlepszy. Wiele zależy od doświadczenia i wiedzy autora oraz specyfiki zadania. Jak powiedział Sam Ibrahim: "Jeśli nie występują blisko położone mody i szum - wszystko zadziała" (*eng. If there are no closely spaced modes and no noise - everything works*). Wybór metody może więc zależeć od preferencji, umiejętności programowania czy dostępnych narzędzi. W literaturze można napotkać wiele indywidualnych aplikacji algorytów (CYTOWANIE). Istnieją również komercyjne programy, które pozwala na identyfikację modalną. Do najpopularniejszych należą ARTeMIS - SVS (**Extractor1999**) i MACEC - dodatek do programu MATLAB (**Reynders2014**).

Do identyfikacji parametrów modalnych konstrukcji, które są częścią tej pracy autor zdecydował o zastosowaniu algorytmu NExT-ERA. Wynika to z doświadczenia zespołu mostów Politechniki Gdańskiej przy stosowaniu tej metody oraz z dostępnej szerokiej literatury pokazującej skuteczne zastosowanie tej metody w przypadku badania mostów. W kolejnym rozdziale omówiono szczegółowo metody oraz implementację jej algorytmu w autorskiej aplikacji napisanej w języku python.

## 3.2 Przykłady zastosowań (literatura i własne)

### 3.3 Metoda NExT-ERA

Metoda NExT-ERA jest jedną z metod operacyjnej analizy modalnej. Składnik NExT pochodzi od słów Natural Excitation Technique. NExT jest właściwie klasą metodą OMA. Zawiera w sobie algorytmy początkowo stworzone do eksperymentalnej analizy modalnej wejście-wyjście (*eng. input-output*) (np. ERA, LSCE, ITD), a które następnie rozszerzone zostały do analizy problemu jedynie na podstawie sygnałów odpowiedzi konstrukcji (*eng. output-only*). Taką możliwość ujawniło odkrycie

faktu, że funkcje korelacji odpowiedzi konstrukcji, wywołanej losowymi wymuszeniami mogą być wyrażone jako suma zanikających sinusoid. Potwierdzono również, że funkcje korelacji zawierają informację na temat parametrów modalnych struktury. Zauważono więc, że można zastąpić tradycyjnie używane funkcje odpowiedzi impulsowej (IRF), funkcjami korelacji losowych drgań konstrukcji pod wymuszeniem środowiskowym. W ten sposób tradycyjne metody EMA zostały skutecznie zaadaptowane do OMA (**Rainieri2014**). W dalszej części rozdziału zostaną przedstawione najważniejsze zagadnienia dotyczące identyfikacji metodą NExT-ERA.

### 3.3.1 Funkcje korelacji, a odpowiedź swobodna układu

Przyjmijmy, że  $X$  oznacza zmienną losową, a  $x(t)$  realizację tej zmiennej losowej w czasie.  $x(t)$  w tej pracy może być utożsamiany z zaobserwowanym sygnałem. Wprowadźmy prostą definicję kowariancji. Jest to funkcja, która dostarcza informacji o zależności pomiędzy dwoma zmiennymi i dana jest wzorem:

$$\text{cov}[X, Y] = \text{E}[XY] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyp_{xy}(x, y) dx dy \quad (3.1)$$

gdzie:  $\text{E}[\cdot]$  - wartość oczekiwana,  $p_{xy}(x, y)$  - wspólna funkcja gęstości prawdopodobieństwa (*eng. joint probability density function*). Używając metody uśredniania w czasie  $[0, T]$  możemy zapisać kowariancję jako:

$$\text{cov}[x(t), y(t)] = \text{E}[x(t)y(t)] = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t) dt \quad (3.2)$$

Korelacją możemy określić zależność jak dla kowariancji, w której usunięto czynnik stały (wartość średnią) i opisać równaniem (3.3). W OMA zwykle sygnały na samym początku analizy są pozbawiane czynnika stałego, stąd użycie właśnie funkcji korelacji jest dla tej rodziny metod analizy modalnej kluczowe.

$$\text{cor}[x(t), y(t)] = \text{E}[(x(t) - \mu_x)(y(t) - \mu_y)] = \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - \mu_x)(y(t) - \mu_y) dt \quad (3.3)$$

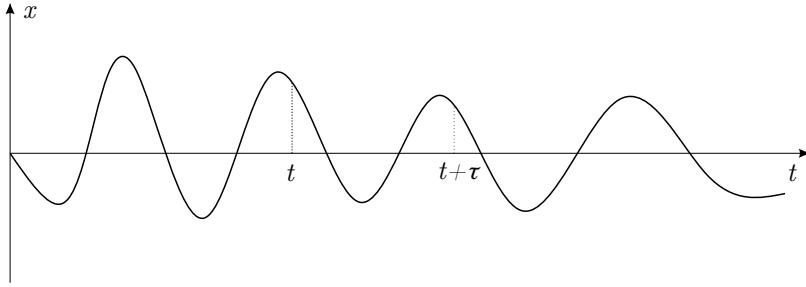
W OMA funkcja korelacji wykorzystywana jest jako autokorelacja (*eng. autocorrelation*) i cross-korelacja (*eng. cross-correlation*). Dla pojedynczego sygnału  $x(t)$  można rozważyć jak wygląda korelacja pomiędzy punktem  $x(t)$ , a punktem  $x(t+\tau)$ , czyli odległym w czasie o  $\tau$ . Przedstawienie graficzne problemu pokazano na rysunku 3.2. Intuicyjnie widać, że wartość korelacji dla punktów bliskich sobie będzie duża, a dla punktów bardzo od siebie odległych będzie maleć. Autokorelację nazwiemy funkcję daną równaniem (3.4), gdzie funkcję  $y$  w równaniu (3.3) zastąpiono  $x(t+\tau)$ .

$$R_x(\tau) = \text{E}[x(t)x(t+\tau)] \quad (3.4)$$

Funkcję cross-korelacji opiszemy analogicznie jak autokorelacji, z tą różnicą, że pod uwagę weźmiemy dwa losowe sygnały  $x(t)$  i  $y(t)$ .

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \text{E}[x(t)y(t+\tau)] \\ R_{yx}(\tau) &= \text{E}[y(t)x(t+\tau)] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Nie znając funkcji gęstości prawdopodobieństwa, funkcje autokorelacji i cross-korelacji można wyznaczyć za pomocą uśredniania w czasie co opisano równaniami



Rysunek 3.2: Autokorelacja, jako korelacja wartości funkcji  $x(t)$  w czasie  $t$  i  $t + \tau$

odpowiednio (3.6) i (3.7). W dalszej części pracy podane zostaną inne przykłady metod wyznaczania funkcji korelacji.

$$R_x = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t + \tau) dt \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} R_{xy} &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t + \tau) dt \\ R_{yx} &= \frac{1}{T} \int_0^T y(t)x(t + \tau) dt \end{aligned} \quad (3.7)$$

Jedną z istotnych właściwości funkcji korelacji jest możliwość wyznaczenia jej przez splot między sygnałem  $x(-t)$  i  $y(t)$ , co zapisano równaniem (3.8). Główną zaletą tego rozwiązania jest prostota obliczeń, ponieważ splot dwóch funkcji jest łatwy do wyznaczenia w dziedzinie częstotliwości (**Brincker2015**).

$$R_{xy}(\tau) = x(-t) * y(t) \quad (3.8)$$

W praktyce wykonywanych jest wiele pomiarów. Założymy, że dla zestawu  $N$  pomiarów, zmierzone odpowiedzi mogą być zestawione w wektor:

$$\mathbf{y}(t) = \{y_1(t), y_2(t), y_3(t), \dots, y_N(t)\}^T \quad (3.9)$$

Wyniki autokorelacji i cross-korelacji pomiędzy wszystkimi zmierzonymi sygnałami można zagregować i zapisać macierzowo (3.10). Na przekątnej macierzy znajdują się funkcje autokorelacji, a poza przekątną cross-korelacji.

$$\mathbf{R}^T(\tau) = E[\mathbf{y}(t)\mathbf{y}^T(t + \tau)] \quad (3.10)$$

Macierz korelacji (*eng. correlation matrix*) nazywa się macierz (3.10) dla  $\tau = 0$  co można zapisać wzorem (3.11).

$$\mathbf{C} = E[\mathbf{y}(t)\mathbf{y}^T(t)] = \mathbf{R}(0) \quad (3.11)$$

Funkcje korelacji posiadają dwie wspomniane wcześniej właściwości kluczowe dla OMA. Po pierwsze teoretycznie pozwalają wyodrębnić wszystkie informacje na temat parametrów modalnych konstrukcji z sygnału losowego. Po drugie mogą być utożsamiane z drganiami swobodnymi, gasącymi układu (**James1995**). Oba założenia zostały wyjaśnione i udowodnione poniżej.

Założenie o reprezentacji wszystkich parametrów modalnych przez funkcje korelacji opiera się na wykorzystaniu właściwości funkcji korelacji, rozkładu normalnego

oraz Centralnego Twierdzenia Granicznego (*eng. central limit theorem*). Centralne Twierdzenie Graniczne mówi, że dla niezależnych zmiennych losowych  $X_i$  o jednakowym rozkładzie, fluktuujących wokół wartości oczekiwanej  $\mu$  i o skończonej wariancji  $\sigma^2$  to wyrażenie (3.12)

$$\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^M X_i - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{M}}} \quad (3.12)$$

zbiega według rozkładu do rozkładu Gaussa przy nieskończonej liczbie M. **Brincker2015** przedstawili uzasadnienie użycia tego twierdzenia w przypadku OMA w następujący sposób. Rozważmy zestaw zmiennych losowych  $\{x_1, x_2, \dots, x_M\}$ , które są niezależne i posiadają identyczny rozkład, ze średnią wartością  $\mu$  i wariancją  $\sigma^2$ . Liniowa kombinacja tych zmiennych losowych jest dana wzorem:

$$y = \sum_{i=1}^M a_i x_i \quad (3.13)$$

Centralne twierdzenie graniczne mówi o tym, że dla dużej liczby zmiennych losowych  $M$  rozkład  $y$  jest w przybliżeniu normalny, z wartością średnią  $\mu_y = \mu \sum a_i$ , wariancją  $\sigma_y^2 = \sigma^2 \sum a_i^2$  i przy  $M \rightarrow \infty$  zbiega do rozkładu normalnego. Odwołując się do dynamiki budowli możemy zapisać, że odpowiedź układu  $y(t)$  jest splotem siły wymuszającej  $x(\tau)$  i funkcji odpowiedzi impulsowej  $h(t)$  co pokazano równaniem:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) x(\tau) d\tau \quad (3.14)$$

Dla sygnału dyskretnego z krokiem czasowym  $\Delta t$  i ograniczając się jedynie do  $N_m$  istotnych z punktu widzenia pamięci systemu próbek, zależność może być przedstawiona następująco:

$$y(n) = \sum_{k=n-N_m}^n h(n-k)x(k)\Delta t \quad (3.15)$$

Można zauważyć, że dla wymuszenia szumem białym odpowiedź dynamiczna  $y(n)$  jest sumą, którą można przedstawić wzorem (3.13), gdzie poszczególne składniki obciążenia  $x(k)$  nie muszą mieć rozkładu normalnego, ale ostateczna odpowiedź będzie mieć rozkład Gaussa. Wynika to wprost z Centralnego Twierdzenia Granicznego. Warto nadmienić, że założenie o wymuszeniu białym szumem zapewnia nam niezależność składników obciążenia  $x(k)$ .

Bazując na powyższym, w OMA zwykle zakładamy, że mierzone sygnały posiadają wartość średnią równą zero oraz są Gaussowskie (*eng. Gaussian signals*) lub bliskie Gaussowskim (**Brincker2015**). Przypomnijmy, że jednowymiarowa funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu normalnego dana jest wzorem:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.16)$$

, a przyjmując dodatkowo wartość średnią równą zero wzór można wyrazić następująco:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (3.17)$$

Dla wektora losowego, zawierającego zmienne losowe o zerowej wartości średniej  $\mathbf{x}^T = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_M\}$ , funkcja gęstości prawdopodobieństwa może być zapisana jako:

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{M}{2}} |\mathbf{C}|} e^{\mathbf{x}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{x} / 2} \quad (3.18)$$

gdzie  $|\mathbf{C}|$  jest wyznacznikiem macierzy korelacji (3.11). Podstawowym wnioskiem wynikającym z tej zależności jest to, że jednowymiarowy rozkład Gaussa może być opisany za pomocą średniej wartości, odchylenia standardowego i w przypadku wielowymiarowych danych o zerowej wartości średniej, jedynie przez macierz korelacji (3.18).

Aby wytłumaczyć dlaczego funkcje korelacji w OMA mogą być odpowiednikiem funkcji odpowiedzi impulsowej (IRF), a funkcje gęstości widmowej odpowiednikami funkcji odpowiedzi częstotliwościowej (FRF) przytoczymy wymagane definicje i zależności z dynamiki budowli. Szczegółowe wyprowadzenia i objaśnienia znajdują się między innymi w pracach (**Brincker2015; Rainieri2014; Chopra2012a; Ewins2000**). Funkcja odpowiedzi impulsowej układu, zwykle oznaczane jako  $h(t)$  jest odpowiedzią układu poddanego wymuszeniu przez impulsową siłę, o bardzo krótkim czasie działania, w chwili czasowej  $t = 0$ . Matematycznie impulsową siłę opisuje funkcja nazywaną deltą Diraca  $\delta(t)$ . Dla systemów liniowych i czasowo niezależnych, jeżeli przesunięta w czasie zostanie chwila przyłożenia impulsu o  $\tau$ , to otrzymamy odpowiedź  $y(t)$ , która będzie również przesunięta w czasie o  $\tau$ . Z definicji wiemy, że impuls jest iloczynem intensywności obciążenia i czasu jego działania. Rozważmy ciągłe obciążenie oznaczone jako  $x(t)$ , które jest superpozycją potoku impulsów o zmiennej amplitudzie, ale o równie krótkich czasach trwania. W takim przypadku impuls siły od czasu  $\tau$  do  $\tau + d\tau$  obliczamy jako  $x(\tau)d\tau$ , a odpowiedź układu jako  $h(t - \tau)x(\tau)d\tau$ . Układ jest liniowy a więc obowiązuje zasada superpozycji. Wynika z tego, że suma wpływu całego obciążenia może być wyznaczona jako suma wszystkich składowych odpowiedzi i opisana całką Duhamel'a jako (3.19) oraz w postaci splotu (3.20) między funkcją IRF  $h(t)$  i wymuszeniem  $x(t)$ .

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)x(\tau)d\tau \quad (3.19)$$

$$y(t) = h(t) * x(t) \quad (3.20)$$

Funkcję IRF można wyznaczyć wykonując przekształcenie Laplace'a równania ruchu przedstawionego równaniem (2.2). Dla przejrzystości przytoczono je poniżej (3.21), dla układu z jednym stopniem swobody, wymuszenia deltą Diraca i podstawiając w miejsce odpowiedzi układu funkcję IRF:

$$m\ddot{h}(t) + c\dot{h}(t) + kh(t) = \delta(t) \quad (3.21)$$

Wykonując transformatę Laplace'a obu stron otrzymamy:

$$(ms^2 + cs + k)H(s) = 1 \quad (3.22)$$

Wykorzystując właściwości transformaty i przekształcając odpowiednio równanie (3.22) otrzymamy formułę (3.23). Na jej podstawie można wprost wyznaczyć funkcje IRF podaną równaniem (3.24).

$$H(s) = \frac{1}{m(s - \lambda)(s - \lambda^*)} \quad (3.23)$$

$$h(t) = \frac{1}{m} \frac{e^{\lambda t} - e^{\lambda^* t}}{\lambda - \lambda^*} \quad (3.24)$$

Z kolei funkcja FRF w sensie fizycznym reprezentuje amplitudę i przesunięcie fazowe drgań ustalonych systemu SDOF, poddanego wymuszeniu harmonicznemu o jednostkowej amplitudzie i częstotliwości  $\omega_d$ . Matematycznie FRF  $H(\omega)$  można opisać również jako transformatę Laplace'a z IRF obliczoną dla urojonej współrzędnej  $s = i\omega$  (3.23) i zapisać następująco:

$$H(\omega) = \frac{1}{m(i\omega - \lambda)(i\omega - \lambda^*)} \quad (3.25)$$

Podobnie jak IRF, FRF łączy wymuszenie z odpowiedzią układu. Jeśli równanie ruchu (2.2) stronami przekształcimy transformatą Fouriera to otrzymamy:

$$(m(i\omega)^2 + ci\omega + k)Y(\omega) = X(\omega) \quad (3.26)$$

Szczegółowe rozwiązanie za pomocą reprezentacji biegunów układu można znaleźć w literaturze (**Brincker2015**). Ostatecznie otrzymujemy:

$$m(i\omega - \lambda)(i\omega - \lambda^*)Y(\omega) = X(\omega) \quad (3.27)$$

Po przekształceniu wyraźnie widać relację pomiędzy odpowiedzią, a wymuszeniem układu za pośrednictwem FRF:

$$Y(\omega) = \frac{1}{m(i\omega - \lambda)(i\omega - \lambda^*)}X(\omega) = H(\omega)X(\omega) \quad (3.28)$$

gdzie  $X(\omega)$  i  $Y(\omega)$  są odpowiednio transformatami Fouriera wymuszenia  $x(t)$  i odpowiedzi  $y(t)$  układu. Porównując równania (3.26)(3.28) łatwo można zauważać że FRF zawiera w sobie informację na temat bezwładności, tłumienia i sztywności układu.

Zarówno IRF jak i FRF można uogólnić do układów MDOF o  $N$  stopniach swobody. Zapis zależności wymuszenie-odpowiedź dla układu MIMO (wiele-wejście-wiele-wyjście) przedstawiono dla dziedziny czasu (3.29) i częstotliwości (3.30).

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}(t) * \mathbf{x}(t) \quad (3.29)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}(\omega) = \tilde{\mathbf{H}}(i\omega)\tilde{\mathbf{x}}(\omega) \quad (3.30)$$

gdzie  $\mathbf{H}(t)$  jest macierzą zawierającą funkcje IRF,  $\mathbf{x}(t)$  jest wektorem sił wymuszających,  $\tilde{\mathbf{y}}(\omega)$  i  $\tilde{\mathbf{x}}(\omega)$  są transformatami Fouriera odpowiednio  $\mathbf{x}(t)$  i  $\mathbf{y}(t)$ , a  $\tilde{\mathbf{H}}(i\omega)$  jest macierzą FRF. Wyrażenia na odpowiednio IRF  $\mathbf{H}(t)$  i FRF  $\tilde{\mathbf{H}}(i\omega)$  podano poniżej.

$$\mathbf{H}(t) = \sum_{n=1}^N (\mathbf{A}_n e^{\lambda_n t} + \mathbf{A}_n^* e^{\lambda_n^* t}) \quad (3.31)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}(i\omega) = \sum_{n=1}^N \left( \frac{\mathbf{A}_n}{i\omega - \lambda_n} + \frac{\mathbf{A}_n^*}{i\omega - \lambda_n^*} \right) \quad (3.32)$$

gdzie  $\mathbf{A}_n = Q_n \boldsymbol{\psi}_n \boldsymbol{\psi}_n^T$ ,  $\boldsymbol{\psi}_n$  to n-ta postać drgań własnych,  $Q_n$  to współczynnik skalujący mody, a  $\lambda_n = \sigma_n + i\omega_{d,n}$  jest n-tym biegunem układu zawierającym informacje na temat częstotliwości drgań własnych tłumionych  $f_{d,n} = \omega_{d,n}/(2\pi)$  i liczby tłumienia  $\xi_r = -\sigma_n/\sqrt{\sigma_n^2 + \omega_{d,n}^2}$  n-tego moda.

Gęstość widmowa jest kolejnym kluczowym pojęciem potrzebnym do pełnego zrozumienia znaczenia funkcji korelacji dla OMA. Gęstość widmowa (*eng. auto spectral density*) dla przebiegu czasowego  $x(t)$  jest zdefiniowana jako transformata Fouriera z funkcji korelacji  $R_x(\tau)$  3.33. Istnieje również zależność odwrotna, w której odwrotną transformata Fouriera z gęstości widmowej pozwala otrzymać funkcję korelacji 3.34. Początkowy wyraz funkcji korelacji  $R_x(0)$  jest reprezentacją twierdzenia Parsevela i pozwala stwierdzić, że gęstość widmowa pokazuje rozkład energii w funkcji częstotliwości. Stąd gęstość widmową nazywa się również zamiennie gęstością widmową mocy (*eng. power spectral density*) (Brincker2015).

$$G_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (3.33)$$

$$R_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (3.34)$$

Podobnie zdefiniować można gęstość widmową pomiędzy dwoma sygnałami  $x(t)$  i  $y(t)$  (*eng. cross spectral density*), jako przekształcenie Fouriera funkcji cross-korelacji  $R_{xy}(t)$ .

$$G_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (3.35)$$

$$R_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{xy}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (3.36)$$

Wykorzystanie właściwości splotu funkcji korelacji (3.8) i splotu<sup>1</sup> oraz symetrii Hermitowskiej<sup>2</sup> transformaty Fouriera pozwala uzyskać następującą właściwość gęstości widmowej (3.37). Należy nadmienić, że zależność ta będzie spełniona przy założeniu okresowego (lub bardzo długiego) sygnału (Brincker2015).

$$G_{xy}(\omega) = X^*(\omega)Y(\omega) \quad (3.37)$$

Rozważamy ponownie układ SISO o odpowiedzi  $y(t)$  przy wzbudzeniu  $x(t)$ :  $y(t) = x(t) * h(t)$  (3.20). Wykorzystując równanie (3.37) zapiszemy równanie na gęstość widmową odpowiedzi:

$$G_y(\omega) = Y^*(\omega)Y(\omega) \quad (3.38)$$

Wykorzystując transformatę Fouriera oraz przemiennosć i łączność splotu zapisać można następujące równanie pokazujące zależność pomiędzy gęstością widmową odpowiedzi i wymuszenia układu.

$$G_y(\omega) = G_x(\omega)|H^*(i\omega)|^2 \quad (3.39)$$

Równanie (3.39) jest nazywane twierdzeniem podstawowym (*eng. fundamental theorem*) metody OMA. Dla układu MIMO twierdzenie to przyjmuje następującą formę w dziedzinie częstotliwości:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_y(\omega) &= \tilde{\mathbf{H}}^*(i\omega)\mathbf{G}_x(\omega)\tilde{\mathbf{H}}^T(i\omega) \\ &= \tilde{\mathbf{H}}^*(i\omega)\mathbf{G}_x(\omega)\tilde{\mathbf{H}}^T(i\omega) \end{aligned} \quad (3.40)$$

<sup>1</sup>Transformata Fouriera splotu dwóch funkcji w dziedzinie czasu  $h(t)$  i  $g(t)$  jest równa iloczynowi transformat Fouriera każdej z funkcji osobno. Innymi słowy transformacie Fouriera wyrażenia  $h(t)*g(t)$  odpowiada iloczyn  $H_k G_k$ , gdzie:  $H_k$  - transformata Fouriera funkcji  $h(t)$ ,  $G_k$  - transformata Fouriera funkcji  $g(t)$ .

<sup>2</sup>Jeżeli  $H(\omega)$  jest transformatą Fouriera rzeczywistej funkcji  $h(t)$ , to prawdziwe jest równanie  $H(\omega) = H^*(-\omega)$ . Równanie to jest nazywane symetrią Hermitowską (Boashash2015).

z kolei w dziedzinie czasu odpowiadająca macierz korelacji przedstawia się następująco:

$$\mathbf{R}_y(\tau) = \mathbf{H}(-\tau) * \mathbf{R}_x(\tau) * \mathbf{H}^T(\tau) \quad (3.41)$$

Jak już wielokrotnie wspomniano, w OMA zakłada się wymuszenie Gaussowskim, stacjonarnym szumem białym o zerowej wartości średniej. Podstawowym efektem tego założenia wymuszenia  $x(t)$  w postaci białego szumu jest brak korelacji pomiędzy wymuszeniem w chwili  $t$  i w chwili  $t+\tau$ . Wyjątkiem jest przypadek  $\tau = 0$ . Stąd sygnał posiada zerową wartość średnią, a funkcja korelacji jest deltą Diraca co zapiszemy:

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] = 2\pi G_{x0}\delta(\tau) \quad (3.42)$$

gdzie  $G_{x0}$  jest współczynnikiem skalującym. Zakładając dalej, że biały szum działa jedynie w ograniczonym spektrum od 0 do  $B$ , a  $\sigma_x^2$  to niezmienne wariancja sygnału, otrzymamy przekształconą wersję () funkcji korelacji. Na jej podstawie można stwierdzić, że PSD wymuszenia (będąca transformatą Fouriera funkcji korelacji) jest wartością stałą<sup>3</sup>.

$$R_x(\tau) = 2\pi \frac{\sigma_x^2}{2B} \delta(\tau) \quad (3.43)$$

Chcąc rozwinać tę zależność do układu MIMO założymy sygnały wymuszenia  $x_1(t)$  i  $x_2(t)$  jako szумy białe. Sformułowanie macierzy korelacji z wykorzystaniem równania (3.43) prowadzi do następującej zależności:

$$\mathbf{R}_x(\tau) = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t+\tau)] = 2\pi \frac{\delta(\tau)}{2B} \mathbf{C} \quad (3.44)$$

gdzie  $\mathbf{C}$  jest macierzą kowariancji sygnałów. Macierz gęstości widmowej sygnałów wymuszenia szumem białym ma postać:

$$\mathbf{G}_x(\omega) = \begin{cases} \frac{\mathbf{C}}{2B}, & 0 \leq \omega \leq B \\ 0, & \omega > B \end{cases} \quad (3.45)$$

Podsumowując powyższy ciąg myślowy możliwa jest dekompozycja równania (3.41) w dziedzinie czasu i równania (3.40) w dziedzinie częstotliwości. Dekompozycję w dziedzinie czasu przeprowadzili po raz pierwszy **James1993; James1995**. Z kolei dekompozycję w dziedzinie częstotliwości przedstawili **Brincker2000; Brincker2001a**. W powyższych pracach przedstawiono pełny tok postępowania. Poniżej przytoczono rezultaty końcowe w postaci opisu macierzy korelacji sygnałów odpowiedzi układu (3.46) i macierzy korelacji gęstości widmowej odpowiedzi (3.47).

$$\mathbf{R}_y(\tau) = \begin{cases} \sum_{n=1}^N (\boldsymbol{\phi}_n \boldsymbol{\gamma}_n^T e^{\lambda_n \tau} + \boldsymbol{\phi}_n^* \boldsymbol{\gamma}_n^H e^{\lambda_n^* \tau}), & \tau \geq 0 \\ \sum_{n=1}^N (\boldsymbol{\gamma}_n \boldsymbol{\phi}_n^T e^{-\lambda_n |\tau|} + \boldsymbol{\gamma}_n^* \boldsymbol{\phi}_n^H e^{-\lambda_n^* |\tau|}), & \tau < 0. \end{cases} \quad (3.46)$$

$$\mathbf{G}_y(\omega) = \sum_{n=1}^N \frac{\boldsymbol{\phi}_n \boldsymbol{\gamma}_n^T}{i\omega - \lambda_r} + \frac{\boldsymbol{\phi}_n^* \boldsymbol{\gamma}_n^H}{i\omega - \lambda_r^*} + \frac{\boldsymbol{\gamma}_n \boldsymbol{\phi}_n^T}{-i\omega - \lambda_r} + \frac{\boldsymbol{\gamma}_n^* \boldsymbol{\phi}_n^H}{-i\omega - \lambda_r^*} \quad (3.47)$$

gdzie oznaczenia przyjęto jak w równaniach (3.31) i (3.32), a  $\boldsymbol{\gamma}_n$  oznacza wektor referencyjny związanego z n-tym modelem. Wektor ten zależny jest od wszystkich parametrów modalnych systemu oraz lokalizacji i macierzy korelacji wymuszeń (**Rainieri2014; Peeters2000**).

<sup>3</sup>Transformata Fouriera delty Diraca jest równa jedności:  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{i\omega t} dt = e^{-i\omega \times 0} = 1$  (**Zielinski2002**)

Równanie (3.46) pokazuje, że funkcje korelacji odpowiedzi mogą być wyrażone za pomocą sumy zespółonych funkcji eksponencjalnych. **SHEN2003** wskazują na podobieństwo jego formy do równania (3.31). **Kennedy1995**, w swojej kluczowej dla metody NExT pracy, rozwinęli to równanie do postaci ukazującej funkcję korelacji jako sumę zanikających sinusoid, o charakterystyce takiej samej jak w przypadku IRF. Podsumowując, funkcje korelacji mogą być użyte jako funkcje odpowiedzi impulsowej (IRF) w metodach TD identyfikacji parametrów modalnych.

### 3.3.2 Eigenystem Realization Algorithm

Metoda ERA została opracowana w latach 80' XX w. przez naukowców z NASA Langley Research Center: Richarda Pappa i Jer-Nan Juang'a. Przedstawili oni koncept identyfikacji modalnej i redukcji modelu układu dynamicznego na podstawie danych pomiarowych. Nowością, którą wprowadzili autorzy było połączenie pojęć z teorii kontroli i algorytmu rozkładu względem wartości osobliwych. Fundamentalne prace opisujące metodą zostały opisane w (**Pappa1985; Juang1985; Juang1988; Juang1994**). Algorytm ERA był wielokrotnie testowany, na przykład pod względem odporności na zaszumienie danych pomiarowych (**Juang1986; Li2011**). Spośród polskich autorów, szczegółowy opis metody zawarli w swoich pracach **Szafranski2013** i **Dudek2008**.

#### Liniowy model dynamiczny w przestrzeni stanów

Model przestrzeni stanów<sup>4</sup> (*eng. state-space model*) używany jest do przekształcenia równania różniczkowego drugiego rzędu (2.1), do dwóch równań rzędu pierwszego. Dla przejrzystości macierzowe równanie ruchu przytoczono ponownie poniżej:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (3.48)$$

gdzie:  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  to odpowiednio macierze mas, tłumienia i sztywności,  $\mathbf{x}(t)$  jest wektorem przemieszczenia, a  $\mathbf{F}(t)$  jest wektorem wymuszenia. Wektor wymuszenia można poddać faktoryzacji do macierzy  $\bar{\mathbf{B}}$  oraz wektora  $\mathbf{u}(t)$  (??). Macierz  $\bar{\mathbf{B}}$  opisuje lokalizację punktów wymuszenia, a wektor  $\mathbf{u}(t)$  intensywność tego wymuszenia w funkcji czasu.

$$\mathbf{F}(t) = \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) \quad (3.49)$$

Macierzowe równanie ruchu może więc mieć przekształcone następująco:

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{M}^{-1}\bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) \quad (3.50)$$

Zdefiniujmy wektor stanu jako:

$$\mathbf{s}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{x}(t) \end{Bmatrix} \quad (3.51)$$

---

<sup>4</sup>Według **Kaczorek2016** stanem układu nazywamy zbiór liniowo niezależnych wielkości  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  określających w pełni skutki przeszłych oddziaływań ( $t < t_0$ ) na układ, który jest wystarczający do wyznaczenie przebiegów chwilowych dowolnych wielkości w tym układzie dla  $t > t_0$ , gdy znane są wymuszenia i parametry obwodu. Wielkości  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  nazywa się zmiennymi stanu, a wektor  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]$  wektorem stanu tego obwodu.

Liczba komponentów tworzących wektor stanu jest nazywana rzędem modelu. Podstawiając go do równania (3.50) dodatkowo wykorzystując oczywistą równość  $\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{M}\dot{\mathbf{x}}(t)$  otrzymamy:

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{s}(t) + \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\bar{\mathbf{B}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (3.52)$$

Stąd możemy zdefiniować następujące macierze:  $\mathbf{A}_c$  i  $\mathbf{B}_c$ :

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

$$\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\bar{\mathbf{B}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Dzięki tak sformułowanym elementom zapiszmy równanie stanu (*eng. state equation*) następująco:

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{s}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \quad (3.55)$$

W równaniu (3.55)  $\mathbf{s}(t)$  jest wektorem stanu (3.51), czyli zestawem wielkości opisujących w sposób jednoznaczny stan modelowanego układu, a  $\mathbf{u}(t)$  jest wektorem wejścia (sterowania) i opisuje sygnał wejściowy. Macierze  $\mathbf{A}_c$  i  $\mathbf{B}_c$ , nazywane są odpowiednio macierzą stanu (systemu) (*eng. state matrix*) i macierzą wejścia (*eng. input influence matrix*). Są to macierze stałych współczynników, które odwzorowują modelowany układ dynamiczny i parametry elementów tworzących ten układ.

Drugim równaniem pozwalającym na stworzenie modelu w przestrzeni stanów jest równanie obserwacji (*eng. observation equation*) lub inaczej równanie wyjścia. W ogólności ma ono postać:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_a \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}_v \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}_d \mathbf{x}(t) \quad (3.56)$$

gdzie:  $\mathbf{y}(t)$  jest wektorem mierzonej odpowiedzi w  $m$  punktach pomiarowych, a  $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  i  $\mathbf{x}(t)$  to odpowiednio mierzone przyspieszenia, prędkości i przemieszczenia w danych  $m$  punktach. Z kolei macierze  $\mathbf{C}_a$ ,  $\mathbf{C}_v$  i  $\mathbf{C}_d$  określają lokalizację mierzonych, odpowiadających im przyspieszeń, prędkości i przemieszczeń. Należy zaznaczyć, że rzeczywista konstrukcja składa się z nieskończonej liczby stopni swobody. Nawet w przypadku dyskretyzacji do układu MDOF, jak to ma miejsce w przypadku obliczeń numerycznych, liczba stopni swobody jest ogromna. Z tego względu, w trakcie pomiarów znacznie redukuje się liczbę mierzonych stopni swobody właśnie do  $m$ . Podstawiając równanie (3.50) do (3.56), po przekształceniach można otrzymać następujące równanie obserwacji:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_c \mathbf{s}(t) + \mathbf{D}_c \mathbf{u}(t) \quad (3.57)$$

w którym:

$$\mathbf{C}_c = [\mathbf{C}_v - \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \quad \mathbf{C}_d - \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}] \quad (3.58)$$

$$\mathbf{D}_c = \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \bar{\mathbf{B}} \quad (3.59)$$

Macierz  $\mathbf{C}_c$  jest nazywana macierzą wyjścia (*eng. output influence matrix*), a  $\mathbf{D}_c$  macierzą przenoszenia lub transmisyjną (*eng. direct transmission matrix*). Równania stanu (3.55) i obserwacji (3.57) łącznie tworzą ciągły, deterministyczny model przestrzeni stanów:

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{s}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \quad (3.60)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_c \mathbf{s}(t) + \mathbf{D}_c \mathbf{u}(t)$$

Wielkości mierzone w trakcie eksperymentu są próbkiowane jedynie w dyskretnych chwilach czasowych. W takim razie, naturalnym dla rzeczywistych zastosowań jest przekształcenie modelu ciągłego przestrzeni stanów w model dyskretny. Zakładając stały czas próbkowania równy  $\Delta t$ , równania ciągłe mogą być zdyskretyzowane i rozwiązane jedynie w chwilach czasowych  $t_k = k\Delta t$  dla  $k \in N$ . Dla poprawności zapisu dyskretnego, wymagane jest założenie o stałych wartościach elementów wektora wejścia  $\mathbf{u}(t)$  w trakcie pojedynczego kroku czasowego, tj.  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_k$  dla  $t \in [k\Delta t, (k+1)\Delta t]$ . Przy spełnieniu powyższych założeń możemy zapisać dyskretny model przestrzeni stanów:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{s}}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{s}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}\mathbf{s}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k\end{aligned}\quad (3.61)$$

gdzie macierze  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  są odpowiednio macierzami stanu, wejścia, wyjścia i przenoszenia dla dyskretnego modelu przestrzeni stanów.

### Odpowiedź impulsowa w przestrzeni stanów

Przyjmijmy układ dynamiczny opisany równaniem (3.61), w którym  $\mathbf{s}_k$  - jest n-wymiarowym wektorem stanu,  $\mathbf{u}_k$  - m-wymiarowym wektorem sterowania, a  $\mathbf{y}_k$  - p-wymiarowym wektorem obserwacji. Parametry Markova takiego systemu  $\mathbf{G}_k$  można zdefiniować następująco (**Schutter2000**):

$$\mathbf{G}_k = \begin{cases} \mathbf{D}, & \text{dla } k = 0 \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}, & \text{dla } k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.62)$$

Jeżeli spełnione jest równanie (3.62) to zestaw macierzy  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  jest realizacją łańcucha  $G(k)$  dla  $k = 1, 2, \dots, \infty$ . Realizację nazywa się minimalną, kiedy rząd modelu jest minimalny (3.51).

Zakładając warunek początkowy  $\mathbf{s}(0) = \mathbf{0}$  i wymuszenie wszystkich punktów układu jednostkowym impulsem w postaci:

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & \text{dla } k = 0 \\ 0, & \text{dla } k > 0 \end{cases} \quad (3.63)$$

otrzymamy odpowiedź układu postaci:

$$\mathbf{Y}_k = \begin{cases} \mathbf{D}, & \text{dla } k = 0 \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}, & \text{dla } k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.64)$$

Równanie (3.64) nazywa się odpowiedzią impulsową układu. Można zauważyć, że elementy sekwencji parametrów Markova odpowiadają wprost elementom odpowiedzi impulsowej układu (**Phan1991**). W przypadku identyfikacji modalnej rzeczywistej konstrukcji wyznaczenie macierzy opisujących układ jest celem. Dysponując pomierzonym sygnałem odpowiedzi swobodnej (wzbudzonej impulsem) możliwe jest sformułowanie parametrów Markova i poszukiwanie rozwiązania w postaci macierzy układu. W przypadku OMA odpowiedź impulsowa układu może być zastąpiona funkcjami korelacji co udowodniono w (3.3.1). Niezależnie od źródła danych, sygnały można złożyć w parametry Markova w identyczny sposób. W dalszej części wywodu elementy algorytmu ERA opisywane będą w sposób tradycyjny, operując na sygnale z odpowiedzi swobodnej układu.

Załóżmy, że  $y_k^i$  jest odpowiedzią konstrukcji w chwili czasowej  $k\Delta t$ , zmierzoną w punkcie pomiarowym  $n$ , jednym z wszystkich  $m$  punktów pomiarowych. Parametry Markova  $\mathbf{Y}_k$  zdefiniujemy zestawiając odpowiedź układu z wszystkich punktów pomiarowych dla danej chwili czasowej  $k\Delta t$ :

$$\mathbf{Y}_k = \begin{Bmatrix} y_k^1 \\ y_k^2 \\ y_k^3 \\ \vdots \\ y_k^m \end{Bmatrix}, \quad \text{dla } k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.65)$$

### Sformułowanie macierzy Hankela

Algorytm metody ERA rozpoczyna się od sformułowania uogólnionej, blokowej<sup>5</sup> macierzy Hankela<sup>6</sup> dyskretnego układu dynamicznego  $\mathbf{H}$  o wymiarach  $r \times s$ . Wy- miary  $r$  i  $s$  nazywane są parametrami projektowymi (**Szafranski2013**) i oznaczają:  $r$  - liczbę blokowych wierszy,  $s$  - liczbę blokowych kolumn macierzy Hankela. Jeżeli spełnione są warunki  $s > n$  i  $r > n$  to właściwością macierzy Hankela jest to, że w przypadku pomiarów pozbawionych szumów rząd macierzy Hankela jest równy rzędowi systemu oraz dwukrotnej liczbie modów systemu.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{k-1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_k & \mathbf{Y}_{k+1} & \dots & \mathbf{Y}_{k+s-1} \\ \mathbf{Y}_{k+1} & \mathbf{Y}_{k+2} & \dots & \mathbf{Y}_{1+k+s-1} \\ \mathbf{Y}_{k+2} & \mathbf{Y}_{k+3} & \dots & \mathbf{Y}_{2+k+s-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{r-1+k} & \mathbf{Y}_{r-1+k+1} & \dots & \mathbf{Y}_{r-1+k+s-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{B} & \dots & \mathbf{C}\mathbf{A}^{k+s-2}\mathbf{B} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^{k+1}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{C}\mathbf{A}^{k+1+s-2}\mathbf{B} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{k+1}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^{k+2}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{C}\mathbf{A}^{k+3+s-2}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{r-2+k}\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^{r-2+k+1}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{C}\mathbf{A}^{r+k+s-3}\mathbf{B} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{rm \times sp} \\ &= \mathbf{P}_r \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{Q}_s \quad \text{dla } k \geq 1 \end{aligned} \quad (3.66)$$

Macierze  $P_r$  i  $Q_s$  to odpowiednio macierze obserwacji i sterowania układu i są zdefiniowane następująco:

$$\mathbf{P}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{r-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_s = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{s-1}\mathbf{B}] \quad (3.67)$$

Problem wyboru wartości parametrów  $s$  i  $r$  nie jest ściśle rozwiązany. Zestawienie różnych badań dotyczących doboru parametrów projektowych przedstawił w pracy

<sup>5</sup>Macierz blokową można opisać jako macierz złożoną z innych macierzy. Na przykład mając 4 macierze  $N \times N$ :  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$ ,  $\mathbf{A}_3$ ,  $\mathbf{A}_4$ , można sformułować macierz  $2N \times 2N$  postaci  $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_4]$ , która posiada dwa blokowe wiersze i dwie blokowe kolumny.

<sup>6</sup>W ogólności macierzą Hankela nazywamy taką macierz  $\mathbf{A}$  o wymiarach  $r \times s$ , że spełniona jest równość:  $\mathbf{A}_{r+1,s-1} = \mathbf{A}_{r-1,s+1}$

**Szafranski2013.** Na pewno należy spełnić zależność  $s > n$  i  $r > n$ . Z uwagi na występowanie w sygnale pomiarowym szumów i niepewności związanych ze wstępny oszacowaniem rzędu modelu parametry trzeba zawyżyć. Jednym z powszechnie używanych zaleceń jest przyjęcie  $r = (5 \div 10)n$   $s = (2 \div 3)r$  (**Dudek2008**). Część badaczy zaleca aby parametr  $s$  dobrać tak, żeby macierz Hankela zawierała większość lub wszystkie parametry Markova odpowiadające wyraźnemu sygnalowi  $s = (\frac{2}{3} \div 1)N_s - r - 2$  gdzie  $N_s$  oznacza liczbę próbek wyraźnego sygnału (**Caicedo2011; Nayeri2009**).

### Realizacja minimalna modelu w przestrzeni stanów

Jak już wspomniano realizacją układu nazywamy zestaw macierzy  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ . Podstawowym zdaniem jest znalezienie takiej realizacji, dla której zmierzona odpowiedź układu będzie możliwa od odtworzenia przez równania modelu w przestrzeni stanów. W przypadku odpowiedzi swobodnej, nie ma miejsca dodatkowe wymuszenie w trakcie pomiaru, więc prawdziwa jest zależność  $\mathbf{D} = \mathbf{Y}_0$ . Wszystkich możliwych realizacji, pozwalających spełnić powyższy warunek, jest nieskończenie wiele (**Juang1985**). Naturalnym wyzwaniem jest więc znalezienie takiej realizacji, dla której rząd modelu będzie minimalny, a rząd modelu jest wprost związany z wymiarami macierzy  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ . Pierwsze prace dotyczące poszukiwania realizacji minimalnej zostały podane w (**Kalman1963; Ho1966**).

Aby ułatwić zrozumienie poszukiwania minimalnej realizacji przywołajmy twierdzenia o obserwowalności i sterowalności realizacji:

**Twierdzenie o obserwowalności.** Realizacja w postaci zestawu macierzy  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  nazywana jest obserwowną jeżeli macierz obserwacji  $\mathbf{P}_r$  jest rzędu  $n$ , gdzie  $n$  jest rzędem systemu. Jeżeli realizacja jest obserwowna to zawsze możliwe jest odtworzenie początkowego stanu  $s_0$  na podstawie znanych odpowiedzi i wymuszenia układu dla  $k > 0$ .

**Twierdzenie o sterowalności.** Realizacja w postaci zestawu macierzy  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  nazywana jest sterowną jeżeli macierz sterowania  $\mathbf{Q}_s$  jest rzędu  $n$ , gdzie  $n$  jest rzędem systemu. Jeżeli realizacja jest sterowna to zawsze możliwe jest takie przyjęcie parametrów wymuszenia, żeby w skończonej liczbie kroków doprowadzić układ ze stanu początkowego, do pożądanego stanu.

Dodatkowo Kalman sformułował następujące twierdzenie: Realizacja  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  jest minimalna, wtedy i tylko wtedy gdy jest sterowna i obserwowna. Podsumowując, minimalna realizacja musi spełniać warunki sterowalności i obserwowalności. Aby to zapewnić odpowiednie wymiary macierzy Hankela. W przypadku gdybyśmy zbudowali macierz Hankela z parametrów Markova pozbawionych szumów, rząd macierzy byłby równy rzędowi modelu  $n$ , pod warunkiem, że wymiary  $rm$  i  $sp$  są większe niż  $n$ . W rzeczywistości, pomiary obarczone są szumami związanymi z pracą aparatury pomiarowej i samym przebiegiem pomiaru. Dodatkowo w rzeczywistych konstrukcjach zawsze występuje pewien stopień nieliniowości i model liniowy być może nigdy nie jest w stanie perfekcyjnie jej opisać. Konsekwencją wystąpienia szumów w pomierzonym sygnale jest powiększenie rzędu model względem układu odpowiadającego sygnałom nie obarczonych szumem. Zadaniem analityka jest więc określić najmniejszy rząd modelu, dla którego realizacja pozwoli na wystarczająco wierny opis układu, przy jednoczesnym spełnieniu kryteriów błędu.

### Dekompozycja według wartości osobliwych (SVD)

Pierwszym właściwym krokiem algorytmu ERA jest sformułowanie macierzy Hankela  $\mathbf{H}_0$  oraz  $\mathbf{H}_1$ . Posługując się wzorem (3.66) sformułujmy:

$$\mathbf{H}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_0 & \mathbf{Y}_1 & \dots & \mathbf{Y}_{s-1} \\ \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 & \dots & \mathbf{Y}_s \\ \mathbf{Y}_2 & \mathbf{Y}_3 & \dots & \mathbf{Y}_{s+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{r-1} & \mathbf{Y}_r & \dots & \mathbf{Y}_{r+s-2} \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 & \dots & \mathbf{Y}_s \\ \mathbf{Y}_2 & \mathbf{Y}_3 & \dots & \mathbf{Y}_{s+1} \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4 & \dots & \mathbf{Y}_{s+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_r & \mathbf{Y}_{r+1} & \dots & \mathbf{Y}_{r+s-1} \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

Wykorzystując opis macierzy Hankela za pomocą macierzy obserwacji i sterowania możemy zapisać że:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0 &= \mathbf{P}_r \mathbf{A}^{1-1} \mathbf{Q}_s = \mathbf{P}_r \mathbf{Q}_s \\ \mathbf{H}_1 &= \mathbf{P}_r \mathbf{A}^{2-1} \mathbf{Q}_s = \mathbf{P}_r \mathbf{A} \mathbf{Q}_s \end{aligned} \quad (3.70)$$

Zauważmy, że dwie kolejne macierze Hankela pozwalają na proste wyznaczenie macierzy systemu  $\mathbf{A}$ . Jako metodę do oceny rzędu macierzy Hankela wykorzystano algorytm rozkładu według wartości osobliwych SVD (*eng. Singular Value Decomposition*). Dla macierzy  $\mathbf{H}_0$  zapiszemy:

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{R} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{S}^T = [\mathbf{R}_1 \quad \mathbf{R}_2] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^T \\ \mathbf{S}_2^T \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

w którym,  $\boldsymbol{\Sigma}$  jest prostokątną macierzą diagonalną o wymiarach  $(rm \times s)$  i zawiera wartości osobliwe macierzy  $\mathbf{H}_0$ . Wartości osobliwe  $d_i$  rozmieszczone na przekątnej ułożone są w sposób niemalejący, tak że  $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq \dots \geq d_n$ . Z kolei kolumny macierzy  $\mathbf{R}$  i  $\mathbf{S}$  są ortonormalnymi wektorami osobliwymi odpowiadającymi poszczególnym wartościami osobliwym  $\mathbf{d}_i$ . Macierz wartości osobliwych można zapisać w następującej formie:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

gdzie  $\boldsymbol{\Sigma}_1$  jest macierzą diagonalną o  $n$  wartościach niezerowych na przekątnej, a pozostałe elementy macierzy  $\boldsymbol{\Sigma}$  są zerowe. Taką formę będzie miała macierz w przypadku braku szumów w sygnale i perfekcyjnym spełnieniu wszystkich założeń identyfikacji. Liczba wartości osobliwych będzie równa rzędowi macierzy Hankela i rzędowi modelu. Niestety w rzeczywistości takie warunki nie mają nigdy miejsca. W takim przypadku liczba niezerowych wartości osobliwych będzie większa niż  $n$ . Analiza SVD pozwala jednak efektywnie ocenić rzad macierzy. Wartości osobliwe, które odpowiadają fizycznej informacji na temat systemu są zawsze relatywnie duże, a wartości wywołane przez nieidealne warunki pomiaru relatywnie małe. Ostatecznie

można dokonać podziału na wartości znaczące (oznaczające rzad modelu) i nieznaczące. Za pomocą macierzy można tę sytuację odwzorować następująco:

$$\Sigma_N = \begin{bmatrix} \Sigma_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\Sigma} \end{bmatrix} = \text{diag}[d_1, d_2, d_3, \dots, d_n, d_{n+1}, \dots, d_N] \quad (3.73)$$

gdzie  $d_i (i = 1, \dots, n)$  oznaczają istotne, a  $d_i (i = n+1, \dots, N)$  nieistotne wartości osobliwe. Postawienie wyraźnej granicy pomiędzy wartościami istotnymi i nieistotnymi nie jest oczywiste. Rozrysowując wartości osobliwe na wykresie, zwykle widać miejsce gdzie dwie kolejne wartości różnią się istotnie. Taki skok utożsamiany jest z końcem wartości istotnych. Niestety nie jest to reguła i aby w pełni odwzorować układ wartości nieznacznie zwiększyć rzad modelu w trakcie identyfikacji (**Szafranski2013; Hollkamp2001**). Podobnie zapiszmy dla macierzy  $\mathbf{S}$  i  $\mathbf{R}$ :

$$\mathbf{R}_N = [\mathbf{R}_n \quad \bar{\mathbf{R}}] \quad \mathbf{S}_N = [\mathbf{S}_n \quad \bar{\mathbf{S}}] \quad (3.74)$$

Porównując równania (3.66) i (3.71) i przyjmując  $k = 1$  otrzymamy:

$$\mathbf{P}_r \mathbf{Q}_s = \mathbf{R} \Sigma \mathbf{S}^T = \mathbf{R} \Sigma^{1/2} \Sigma^{1/2} \mathbf{S}^T \quad (3.75)$$

Następnie wykorzystując powyższy podział i równanie 3.70 otrzymamy następującą zależność:

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{R} \Sigma^{1/2} \mathbf{A} \Sigma^{1/2} \mathbf{S}^T \quad (3.76)$$

Przekształcenia pozwalają uzyskać formułę na wyznaczenie macierzy systemu  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A} = \Sigma^{-1/2} \mathbf{R}^T \mathbf{H}_1 \mathbf{S} \Sigma^{-1/2} \quad (3.77)$$

Zakładając że  $\mathbf{0}_i$  jest macierzą zerową rzędu  $i$ , a  $\mathbf{I}_i$  jest macierzą jednostkową rzędu  $i$  zdefiniujmy macierze pomocnicze:

$$\mathbf{E}_p^T = [\mathbf{I}_p \quad \mathbf{0}_p \quad \dots \quad \mathbf{0}_p] \quad \mathbf{E}_m^T = [\mathbf{I}_m \quad \mathbf{0}_m \quad \dots \quad \mathbf{0}_m] \quad (3.78)$$

Po wykorzystując wzór (3.66) i wykonując przekształcenia możliwe jest wyznaczenie macierzy systemu będących minimalną realizacją. Po wykonaniu SVD i przyjęciu jedynie istotnych wartości osobliwych jako rzędu modelu  $n$  zapisać można równania na przybliżone wartości macierzy modelu w przestrzeni stanów, które dla odróżnienia oznaczono przez  $(\hat{\cdot})$ :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}} &= \Sigma_n^{-1/2} \mathbf{R}_n^T \mathbf{H}_1 \mathbf{S}_n \Sigma_n^{-1/2} \\ \hat{\mathbf{B}} &= \Sigma_n^{1/2} \mathbf{S}_n^T \mathbf{E}_m \\ \hat{\mathbf{C}} &= \mathbf{E}_p^T \mathbf{R}_n \Sigma_n^{1/2} \end{aligned} \quad (3.79)$$

Przybliżone macierze dla wybranego rzędu  $n$  są wartościami estymowanymi w sensie metody najmniejszych kwadratów (**Juang1994; Rainieri2014**).

### Identyfikacja parametrów modalnych

Rozwiążając zagadnienie własne dla macierzy  $\hat{\mathbf{A}}$  otrzymamy zestaw niezależnych zespolonych wartości własnych  $\lambda_i$  i wektorów własnych  $\phi_i$ . Zestawiając je podobnie jak macierz widmową  $\Lambda$  (??) i modalną  $\Phi$  (??) otrzymamy minimalną realizację

$(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}})$  we współrzędnych modalnych  $(\Lambda, \Phi^{-1}\hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}\Phi)$ . Poszczególne elementy realizacji we współrzędnych modalnych dostarczają różnych informacji na temat zidentyfikowanych charakterystyk modalnych.  $\Lambda$  zawiera informacje o tłumieniu i częstotliwościach drgań własnych układu.  $\Phi^{-1}\hat{\mathbf{B}}$  definiuje początkowe amplitudy modalne. Z kolei  $\hat{\mathbf{C}}\Phi$  zawiera w sobie postaci drgań własnych wyznaczone dla punktów pomiarowych (Li2011). Przed wyznaczeniem częstości drgań własnych i tłumienia należy przetranformować macierz  $\Lambda$  z formy dyskretnej do formy ciągowej  $\Lambda_c$  (Szafranski2013).

$$\Lambda_c = \frac{1}{\Delta t} \ln \Lambda \quad (3.80)$$

w którym  $\Delta t$  oznacza krok czasowy próbkowania, taki że  $\Delta t = 1/f_s$  dla  $f_s$  będącej częstotliwością próbkowania pomiaru. Częstość drgań własnych  $\omega_{ni}$  oraz tłumienie  $\xi_i$  wyznaczyć można na podstawie wartości własnych zebranych w macierzy  $\Lambda_c$ , a postaci drgań własnych  $\psi_i$  z macierzy  $\Phi$  za pomocą następujących formuł:

$$\omega_{ni} = |\lambda_{ci}| = \sqrt{\operatorname{Re}(\lambda_{ci})^2 + \operatorname{Im}(\lambda_{ci})^2} \quad (3.81)$$

$$\xi_i = -\frac{\operatorname{Re}(\lambda_{ci})}{\omega_{ni}} \quad (3.82)$$

$$\psi_{j,i} = |\phi_{j,i}| \operatorname{sign}(\operatorname{Re}(\phi_{j,i})) \quad (3.83)$$

gdzie  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  ( $n$  - rząd modelu),  $j = 1, 2, 3, \dots, m$ , ( $m$  - liczba punktów pomiarowych),  $|\cdot|$  oznacza moduł liczby zespolonej,  $\operatorname{Re}(\cdot)$  i  $\operatorname{Im}(\cdot)$  oznaczają odpowiednio część rzeczywistą i urojoną liczby zespolonej, a  $\operatorname{sign}(\cdot)$  jest funkcja zwracającą  $+1$  dla liczb dodatnich i  $-1$  dla liczb ujemnych.

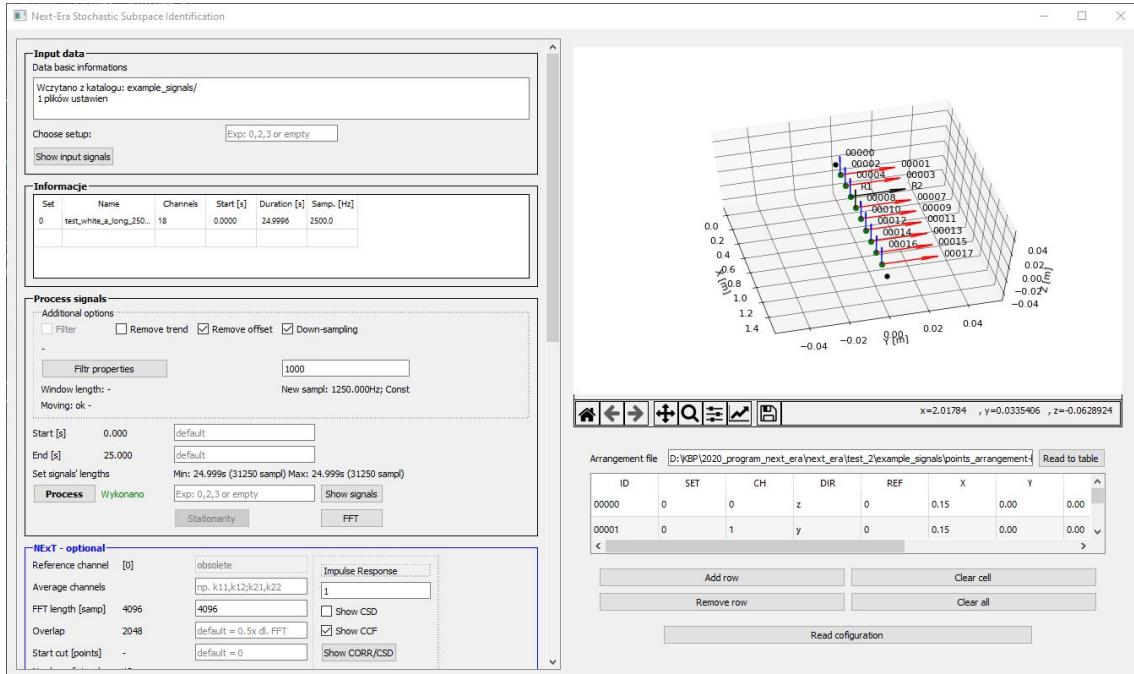
## 3.4 Aplikacja do identyfikacji modalnej OMA

Na rynku istnieją komercyjne aplikacje komputerowe, stworzone do identyfikacji modalnej. Należą do nich przede wszystkim ARTeMIS - SVS i MACEC - dodatek do programu MATLAB. Programy te służą zarówno naukowcom jak i szeroko pojętemu przemysłowi. Nie powinno więc dziwić, że są skomercjalizowane i płatne. W trakcie realizacji pracy doktorskiej podjęto decyzję o napisaniu własnej aplikacji komputerowej służącej identyfikacji modalnej. Zdaniem autora takie podejście zapewnia pełną kontrolę nad algorytmem i parametrami identyfikacji oraz nad sposobem przedstawienia wyników. Niebagatelnym profitem napisania programu autorskiego jest również lepsze zrozumienie mechanizmów i wrażliwości elementów algorytmu. W początkowej fazie tworzenia zaplanowano następującą funkcjonalność programu:

- wczytywanie i podgląd sygnałów pomiarowych, grupowanie sygnałów w serie pomiarowe, ze wskazaniem sygnałów referencyjnych i lokalizacją punktów pomiarowych,
- przetwarzanie sygnałów: okienkowanie, usunięcie składowej stałej i trendu, filtrowanie, zmiana próbkowania,
- wyznaczenie funkcji odpowiedzi impulsowych sygnałów wykorzystując algorytm NExT, z możliwością podziału na serie pomiarowe z punktem referencyjnym oraz uśredniania serii pomiarowych,
- identyfikacja modalna za pomocą algorytmu ERA,

- elementy kontroli obliczeń: zmiana parametrów metod, wybór elementów przetwarzania sygnałów,
- elementy wizualizacji wyników: wykresy sygnałów, animacja postaci drgań własnych, postaci we współrzędnych biegunkowych, diagramy stabilizacyjne metody NExT-ERA.

Aplikację napisano w języku Python 3.6 głównie z użyciem bibliotek NUMPY i SCIPY do obliczeń oraz MATPLOTLIB do wizualizacji rezultatów. Dodano interfejs graficzny wykorzystujący technologię Qt. Elementy interfejsu pokazano na rysunku 3.3.



Rysunek 3.3: Widok na okno główne stworzonej aplikacji do identyfikacji modalnej

### 3.4.1 Algorytm programu

Algorytm programu przedstawiono na grafice []. Poniżej omówiono podstawowe informacje na temat użytych metod przetwarzania sygnałów.

Wstępnie sygnały wyjściowe mogą być poddane standardowemu przetwarzaniu sygnału. Do zastosowanych metod należy filtrowanie, usuwanie składowej stałej i obniżenie próbkowania (*eng. downsampling, resampling*). Filtrowanie może posłużyć do odrzucenia niechcianych składowych z sygnału i ograniczyć identyfikację jedynie do określonego obszaru. Odcięcie składowej stałej jest koniecznym elementem przygotowania sygnałów do identyfikacji. Bez tego zabiegu, tak jak w przypadku Transformaty Fouriera występuje istotny pik na zerowej odciętej, tak utrudnia ona może być identyfikacja modów o niskiej częstotliwości. Zmiana częstotliwości próbkowania jest bardzo przydatną funkcją. Podobnie do filtrowania zmniejsza zakres analizowanej dziedziny, ale w odróżnieniu do filtrowania zmniejsza również liczbę próbek sygnału. Należy pamiętać, że resampling nie jest tożsamym pominięciu części próbek z sygnału. Wpływ obróbki sygnału na wyniki identyfikacji oraz zalecenia dotyczące przyjmowanych parametrów opisał **Caicedo2011**.

Pierwszym głównym etapem w algorytmie NExT-ERA jest wyznaczenie funkcji korelacji wprowadzonych sygnałów. Wyznaczanie funkcji korelacji metodą bezpośrednią jest wymagające obliczeniowo. Z tego powodu wykorzystuje się zależność pomiędzy gęstością widmową mocy, a funkcją korelacji (3.33 i 3.34). Wyznaczenie gęstości widmowej mocy jest możliwe za pomocą znacznie bardziej efektywnych algorytmów. Jednym z nich jest metoda Welch'a (**Welch1967; Brincker2015**), którą zastosowano w programie. Umożliwiono również łączenie i uśrednianie wielu serii pomiarowych w jeden wynik identyfikacji. Wykorzystano do tego algorytm przedstawiony w **Brownjohn2010**. W przypadku łączenia serii pomiarowych w jeden wynik, konieczne jest zastosowanie punktów referencyjnych. Punkty referencyjne są to punkty stałe w trakcie całych pomiarów, muszą występować w każdej serii pomiarowej i nie mogą znajdować się w węźle żadnej postaci drgań. Innymi słowy punkt referencyjny musi mieć niezerową wartość w wektorze określającym postać drgań, którą należy zidentyfikować. W zastosowanym algorytmie istnieje możliwość wyboru po jednym punkcie referencyjnym dla każdego z kierunków drgań: X, Y, Z. Łączenie serii pomiarowych odbywa się w następujący sposób:

- Algorytmem Welch'a wyznaczane są funkcje wzajemnych gęstości widmowych mocy pomiędzy sygnałem referencyjnym, a pozostałymi sygnałami na powiązanym kierunku. Wzajemne gęstości widmowe związane z danym punktem referencyjnym są zestawione w jeden wektor.
- Wyznaczane są funkcje auto gęstości widmowych mocy dla sygnałów w punktach referencyjnych. Użyty jest do tego ten sam algorytm co w przypadku wzajemnych funkcji gęstości widmowej mocy, z tą różnicą że sygnały wejściowe są identyczne.
- Funkcje wzajemnej gęstości widmowej mocy zestawione w jednym wektorze dzielone są przez funkcję auto gęstości widmowej punktu referencyjnego. W tym przypadku wymagane jest aby długość wektora wszystkich wektorów była równa. Identycznie postępuje się z każdym wektorem gęstości widmowych mocy.
- Auto gęstości widmowe mocy dla danego punktu referencyjnego są uśredniane. Auto gęstości widmowe mocy są sumowane ze wszystkich ustawień, a wynik jest podzielony przez liczbę ustawień.
- Po procesie uśredniania gęstości widmowych mocy punktów referencyjnych następuje działanie odwrotne. Wcześniej podzielone wzajemne gęstości widmowe mocy mnożone są przez uśrednione auto gęstości widmowe mocy punktów referencyjnych.
- Wynikowe gęstości widmowe mocy przekształcane są za pomocą odwrotnej Transformaty Fouriera do sygnałów w dziedzinie czasu. Otrzymany wynik odpowiada funkcjom cross-korelacji i może być użyty w metodzie ERA.

Uśrednianie serii pomiarowych z tym samym ustawieniem punktów pomiarowych odbywa się przez sumowanie gęstości widmowych mocy z powtarzonych serii pomiarowych i podzieleniu przez liczbę powtarzonych serii. Pomimo zestawienia funkcji gęstości widmowych mocy w wektory, wszystkie wspomniane wyżej operacje mnożenia i dzielenia funkcji gęstości widmowych mocy polegają na działaniu na poszczególne prążki spektrum, a nie na klasycznym rozumieniu mnożenia i dzielenia wektorów.

### 3.4.2 Elementy oceny poprawności rozwiązania

Ważnym elementem w procesie identyfikacji modalnej jest ocena poprawności uzy- skanego rozwiązania. W tym celu najczęściej wykorzystywane są diagramy stabiliza- cyjne. W przypadku pomiarów obarczonych szumem, przyjęty rząd modelu musi być zadeklarowany jako większy niż miało by to miejsce w idealnych warunkach. Dia- gram stabilizacyjny pozwala na określenie minimalnego rzędu modelu, przy którym występują wszystkie interesujące mody i są one stabilne. Zastosowanie diagramów stabilizacyjnych opisano między innymi w (!!). W programie zastosowano dwie ver- sje diagramów: niefiltrowaną i filtrowaną. Wersja niefiltrowana obrazuje wszystkie wyznaczone mody: rzeczywiste i fikcyjne. Odróżnia je w zależności od wyników dla niższego rzędu modelu. Jeśli istnieje w modelu o rzędzie niższym mod spełniający odpowiadnie kryteria to jest on uznany za rzeczywisty. Dla rzędu modelu  $n$  i obliczonego modu  $i$  zastosowane w programie domyślne kryteria to:

- częstotliwość  $f$  w dwóch kolejnych krokach nie może się różnić o więcej niż 1%,

$$\Delta f = \left| 1 - \frac{f_{n,i}}{f_{n+1,i}} \right| \leq 0.01 \quad (3.84)$$

- tłumienie  $\xi$  w dwóch kolejnych krokach nie może się różnić o więcej niż 5%,

$$\Delta \xi = \left| 1 - \frac{\xi_{n,i}}{\xi_{n+1,i}} \right| \leq 0.05 \quad (3.85)$$

- parametr MAC dla postaci w dwóch kolejnych krokach musi być większy niż 0.95,
- parametr MPC postaci modu musi być większy niż 0.9.

$$MAC_i^{n,n+1} \geq 0.95 \quad MPC_i \geq 0.90 \quad (3.86)$$

Diagram niefiltrowany obrazuje rozkład zidentyfikowanych modów w domenie czę- stotliwości. Wstępnie pozwala ocenić czy istnieją mody stabilne (częstotliwość i tłu- mienie), o rzeczywistych wektorach postaci (MPC) i o niezmiennej formie (MAC). W przypadku dużego rzędu modelu i bliskich sobie modów trudno jednoznacznie odnaleźć jedynie poprawne rozwiązania. Z tego względu stworzono również wersję filtrowaną diagramu stabilizacyjnego. Diagram filtrowany w znacznie bardziej czy- telny sposób pozwala przedstawić jedynie mody uznane za rzeczywiste. Jego gene- racja opiera się na następujących krokach:

- Podział dziedziny częstotliwości na wąskie pasma (np. 1% dolnej granicy pa- sma) i podział wszystkich punktów według przynależności do poszczególnych pasm,
- Odrzucenie punktów, dla których tłumienie jest zbyt duże ( $LDT \geq 0.3$ ) lub ujemne,
- Wyznaczenie parametru MAC pomiędzy wszystkimi punktami w paśmie oraz parametru MPC dla każdego modu w paśmie.
- Wyznaczenie wartości średniej i odchylenia standardowego częstotliwości, tłu- mienia i parametrów MAC i MPC dla punktów pasma. Jeżeli wartości średnie pomniejszone o odchylenie standardowe są spełniające dopuszczalne warunki, to zestaw punktów uznany jest za określający rzeczywisty mod. Jeżeli nie,

wyszukiwany jest punkt charakteryzujący się najgorszym parametrem MAC lub MPC albo zbyt różniący się liczbą tłumienia i jest odrzucany. Następnie ponownie oceniana jest wartość średnia i odchylenie standardowe. Proces ten toczy się do momentu odrzucenia wszystkich punktów lub spełnienia kryteriów uznania mod za rzeczywisty.

- Ostatecznie jako rzeczywiste i stabilne określone są mody, dla których liczba punktów w paśmie jest większa od wartości minimalnej. Domyslnie jest to 20% maksymalnego rzędu modelu na diagramie.

Wskaźniki MAC i MPC są istotną częścią algorytmu programu i służą ocenie po prawności wyników. Poniżej przytoczono ich definicje i podstawowe właściwości.

### Model Phase Colinearity (MPC)

Wynikiem przeprowadzonej analizy modalnej są postaci i częstotliwości o wartościach zespolonych. Postaci zidentyfikowane na podstawie pomiarów wartości rzeczywistych powinny stanowić wektory o współrzędnych rzeczywistych. W przypadku modów normalnych wszystkie punkty konstrukcji drgają dokładnie w fazie lub w przeciwnie fazie względem siebie. Przeciwnie, kiedy postaci są wektorami zespolonymi, przemieszczenia osiągają wartości ekstremalne w różnych chwilach czasowych dla różnych stopni swobody. **Ewins2000; Chopra2012a** podają przykładowe przyczyny powstania postaci o wektorach zespolonych. Są to m.in. efekt żyroskopowy, efekty aerodynamiczne, nieliniowość czy nieproporcjonalne tłumienie. Zidentyfikowane mody zwykle występują w postaci zespolonej. Wynika to z relatywnie niskiego wskaźnika sygnału do szumu (**Rainieri2014**). Mimo to, stopień zespolenia jest zwykle niewielki i w praktycznych zastosowaniach błęd wynikający z tej cechy może być zaniedbany. Mimo to ważnym jest żeby rozróżnić, które mody są normalne, a które w dużej mierze zespolone. Jedną z najprostszych metod jest wykreślenie współrzędnych składników postaci w układzie biegunkowym. Metoda została szerzej opisana w (**Ewins2000**). Zasadą jest, że jeśli w konstrukcji występuje tłumienie proporcjonalne to składniki danej postaci układają się na linii prostej w zespolonym układzie współrzędnych (**Rainieri2014**). Do ilościowego określenia stopnia przestrzennej spójności modu **Pappa1992** opracowali wskaźnik MPC (*Modal Phase Collinearity*). Jest on dla  $i$ -tego moda określony wzorem 3.91

$$S_{xx} = \Phi'^\top \Phi'_i \quad S_{yy} = \Phi''^\top \Phi''_i \quad S_{xy} = \Phi'^\top \Phi''_i \quad (3.87)$$

$$\mu = \frac{S_{xx} - S_{yy}}{2S_{xy}} \quad \beta = \mu + \operatorname{sgn}(S_{xy})\sqrt{\mu^2 + 1} \quad \tau = \tan^{-1}(\beta) \quad (3.88)$$

$$\lambda_1 = S_{xx} + \frac{S_{xy}(2(\mu^2 + 1)\sin^2(\tau) - 1)}{\mu} \quad (3.89)$$

$$\lambda_2 = S_{yy} + \frac{S_{xy}(2(\mu^2 + 1)\sin^2(\tau) - 1)}{\mu} \quad (3.90)$$

$$\text{MPC}_i = \left[ 2 \cdot \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} - 0.5 \right) \right]^2 \quad (3.91)$$

gdzie  $\operatorname{sgn}(\cdot)$  oznacza funkcję zwracającą znak liczby. Wskaźnik MPC jest bezwymiarowy i przyjmuje wartości z zakresu od 0 (dla modów z zupełnie nieskorelowanymi kątami fazowymi) do 1 (dla modów jednofazowych). Przykłady zastosowania tego wskaźnika zaprezentowano w pracach (!!!).

### Modal Assurance Criterion (MAC)

Kryterium MAC (Modal Assurance Criterion) pozwala ocenić miarę dopasowania (stopień liniowości) dwóch wektorów modalnych (**Allemand1982**). Jest to podstawowe i najbardziej popularne kryterium służące porównaniu wektorów modalnych **Rainieri2014**. Jego wartość waha się od 0 (dla braku dopasowania) do 1 (dla idealnego dopasowania). Definicja wskaźnika dana jest wzorem 3.92.

$$\text{MAC}_n = \frac{(\psi_{n,a}^H \psi_{n,e})^2}{\psi_{n,a}^H \psi_{n,a} \psi_{n,e}^H \psi_{n,e}} \quad (3.92)$$

gdzie  $\psi_{n,a}$  i  $\psi_{n,e}$  to wektory postaci drgań własnych, a  $(\cdot)^H$  oznacza sprzężenie Hermitowskie wektora. Należy pamiętać, że kryterium MAC nie wskazuje czy rozwiązanie jest poprawne lub czy wektory modalne są ortogonalne. Wynik pokazuje jedynie dopasowanie dwóch wektorów. Wskaźnik MAC jest nieodporny na błędy zawarte jednocześnie w obu wektorach. Z tego względu za każdym razem należy kontrolować założenia metody. Zbiór wskazówek do stosowania kryterium MAC w swojej pracy zaważył **Allemand2003**. Poza swoistą instrukcją użycia wskaźnika, wskazuje on następujące główne przyczyny niemiarodajnych wyników przy korzystaniu z kryterium MAC:

- traktowanie kryterium MAC jako informacji o ortogonalności wektorów,
- nieprawidłowe matematyczne sformułowanie kryterium, głównie zastąpienie sprzężenia Hermitowskiego transpozycją. Zmiana ta jest słuszna wyłącznie przy rzeczywistych wektorach modalnych,
- duże różnice w wartościach współrzędnych wektorów. Kryterium jest bardzo wrażliwe na duże wartości, a niewrażliwe na małe wartości,
- przyjęcie zbyt małej liczby współrzędnych wektora,
- wypełnienie zerami współrzędnych wektora, na temat których nie ma żadnej informacji.

Ze względu na ograniczenia kryterium MAC, od momentu jego powstania powstały szereg pokrewnych wskaźników. Są to między innymi: Coordinate Modal Assurance Criterion (COMAC) (**Ewins2000**), Enhanced Coordinate Modal Assurance Criterion (ECOMAC) (**Hunt1992**) czy Inverse Modal Assurance Criterion (IMAC) (**MITCHELL1998**). Każde z kryteriów zostało zmodyfikowane w celu wyeliminowania konkretnego ograniczenia oryginalnej wersji. Zestawienie i opis wielu z nich przedstawiono miedzy innymi w pracach (**Allemand2003; Rainieri2014; Szafranski2013; Salamak2003**)

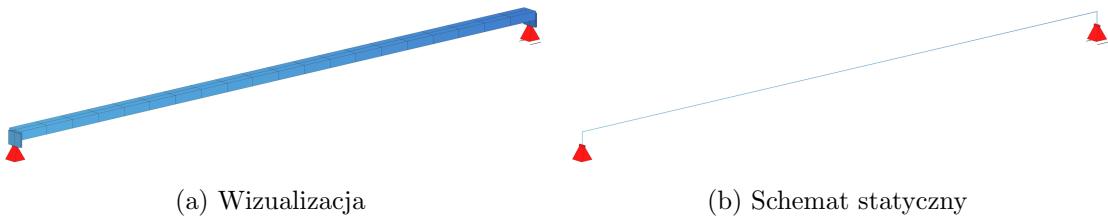
Poza diagramem stabilizacyjnym, w niniejszej pracy kryterium MAC zostało również użyte przy doborze lokalizacji czujników w trakcie pomiarów na konstrukcji rzeczywistej. Jest to kolejne z popularnych zastosowań współczynnika MAC (**Allemand2003**). Polega na takim doborze punktów pomiarowych, aby zidentyfikowane w tych punktach postaci drgań były od siebie maksymalnie różne. Opis przyjętego rozwiązania i wyniki obliczeń przedstawiono w wynikach badań w rozdziale 5.3.

#### 3.4.3 Testy numeryczne metody NEXT-ERA

Każda aplikacja komputerowa przed użyciem powinna być poddana testom. W przypadku aplikacji służącej celom naukowym, gdzie zakłada się pewien poziom wiedzy

i świadomości użytkownika zdecydowano, że testom poddane zostanie jedynie jądro programu - algorytm NExT-ERA. W tym celu założono wykonanie dwóch testów: numerycznego i laboratoryjnego. Test numeryczny ma opierać się na wykonaniu modelu obliczeniowego w oprogramowaniu MES, a następnie obciążeniu go losowo (w przybliżeniu szumem białym) i wykonaniu analizy dynamicznej. Test laboratoryjny ma polegać na pomiarze i analizie drgań środowiskowych rzeczywistego obiektu badawczego. Celem testu nie jest uzyskanie idealnej zgodności pomiędzy wynikami z badania numerycznego i laboratoryjnego, a jedynie sprawdzenie działania programu. Wyniki uzyskane z testu numerycznego są pozbawione wpływu wielu niedokładności, takich jak szumów, nieliniowych warunków brzegowych, nieosiowo ustawionych czujników czy wzajemnego wpływu składowych ortogonalnych na mierzone wartości. Dlatego traktowane są głównie jako test algorytmu. Mogą również służyć jako punkt odniesienia do wyników badań laboratoryjnych. Z kolei badania laboratoryjne pozwolą sprawdzić czy program i system pomiarowy są odporne na rzeczywiście występujące obciążenia procesu identyfikacji.

Przedmiotem badań była konstrukcja o schemacie statycznym bliskim belce swobodnie podpartej. Głównym elementem układu jest kształtownik stalowy o przekroju ceowym C40 i o długości 1.5m. Obiekt został opisany szerzej w punkcie 3.4.4). Model numeryczny wykonano w programie MES bazując na inwentaryzacji wymiarów obiektu laboratoryjnego. Założono, że głównym aspektem porównawczym z badaniami laboratoryjnymi mają być mody giętne pionowe. Z tego powodu znacznie uproszczono względem rzeczywistości strefy podporowe. Nie wykonano żadnej kalibracji modelu, aby odpowiadał lepiej strukturze rzeczywistej. Do budowy wykorzystano środowisko MES SOFiSTiK. Dla odwzorowania całego układu użyto jednowymiarowych elementów belkowych. Wizualizację oraz schemat statyczny pokazano na rysunku 3.4.

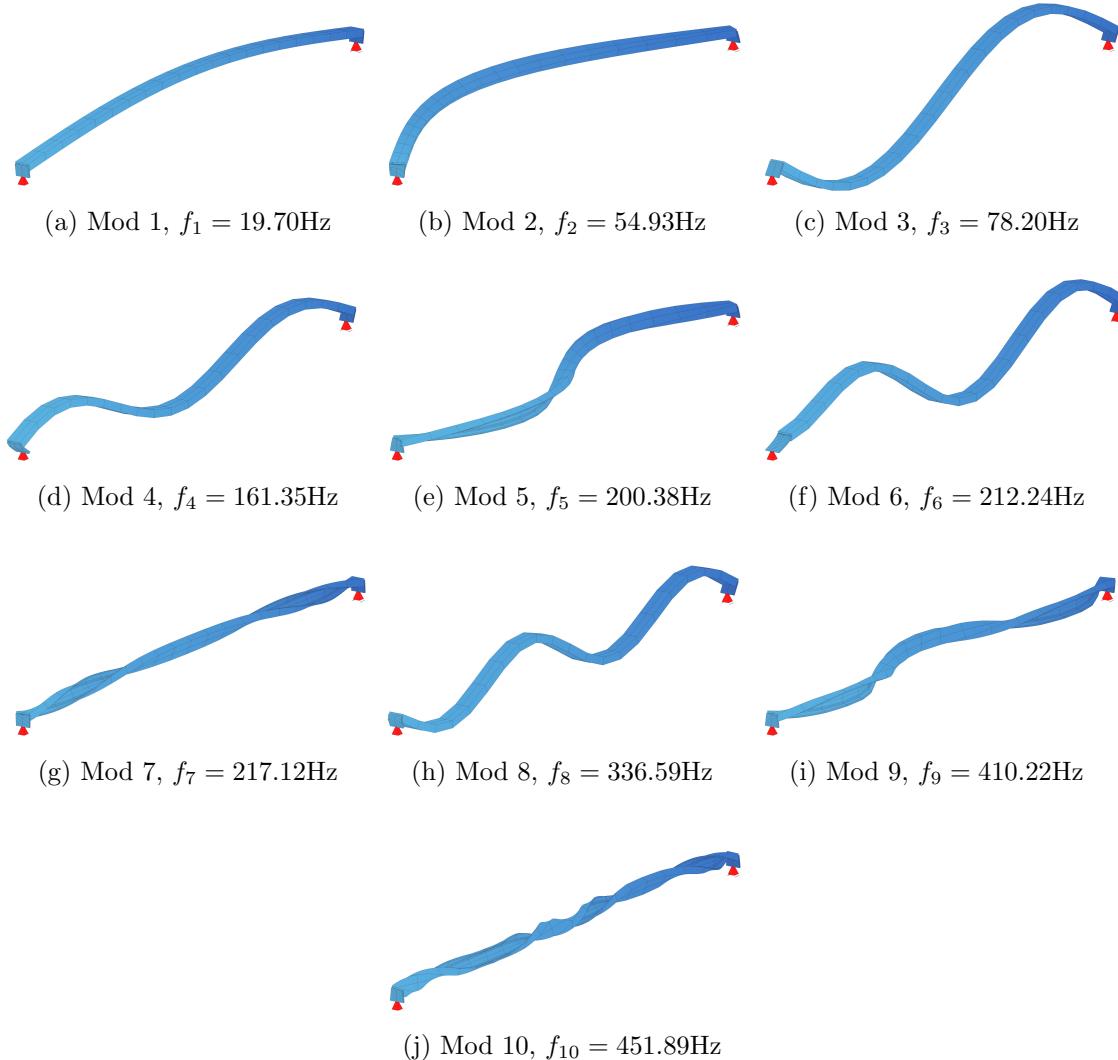


Rysunek 3.4: Wizualizacja i schemat statyczny testowego modelu numerycznego

Przed przystąpieniem do analizy wygenerowano 5000 losowych przypadków obciążenia. Losowy charakter uzyskano za pomocą następujących założeń dla każdego przypadku obciążenia:

- w każdym węźle pośrednim może, ale nie musi, być przyłożona siła pionowa lub poprzeczna,
- jeśli siła została przyłożona, jej wartość jest losowana z zakresu od -3 do 3 N dla każdego węzła indywidualnie,
- w trakcie analizy, w każdym kroku czasowym losowany jest jeden przypadek obciążenia z wygenerowanych 5000.

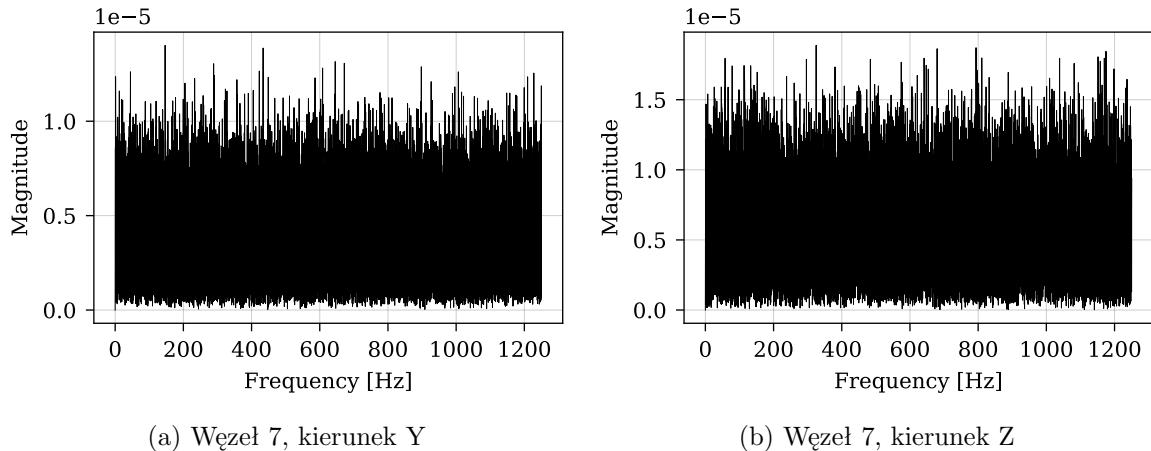
Rozwiązano problem własny dynamiki przedmiotowego modelu i otrzymano rezultaty jak na rysunku 3.5.



Rysunek 3.5: Rozwiążanie analizy modalnej modelu testowego

Odpowiedź konstrukcji na wymuszenie losowe wyznaczono metodą time-step Newmarka-Wilsona. Zdecydowano o sprawdzeniu modów w zakresie do około 250Hz. Z tego względu przyjęto krok całkowania jako  $\Delta t = 1/2500\text{s}$ . Zgodnie z kryterium Nyquista taki krok pozwala identyfikować drgania teoretycznie do częstotliwości 1250 Hz. Niemniej jednak, sygnał wyjściowy powinien zostać nadpróbkowany znacznie bardziej niż dwukrotnie. Aby zapewnić dokładność rezultatu, odpowiedź z rozwiązania numerycznego powinna być wyznaczona z próbkowaniem ok 10-15 razy większym niż częstotliwość najwyższej, interesującego modu (**Zotowski2017c**). Większość modów odczytanych z analizy modalnej mieści się w zamierzonym zakresie do 250 Hz. Kilka modów powyżej 250 Hz zostanie również uwzględnione w analizie dla pokazania zmniejszenia dokładności z uwagi na zbyt rzadkie próbkowanie. W każdym kroku struktura była obciążana losowym przypadkiem obliczeniowym z bazy 5000 wcześniej wygenerowanych. Tłumienie konstrukcji przyjęto jako masowsztywnościowe według metody Rayleigha (2.41). Współczynniki metody wyznaczono zakładając tłumienie LDT = 3% dla częstotliwości 20 Hz i 160 Hz. Chcąc sprawdzić charakter obciążenia wykonano analizę FFT sygnału złożonego z wartości obciążenia czterech węzłów w funkcji czasu. Widma częstotliwościowe przedstawiono na

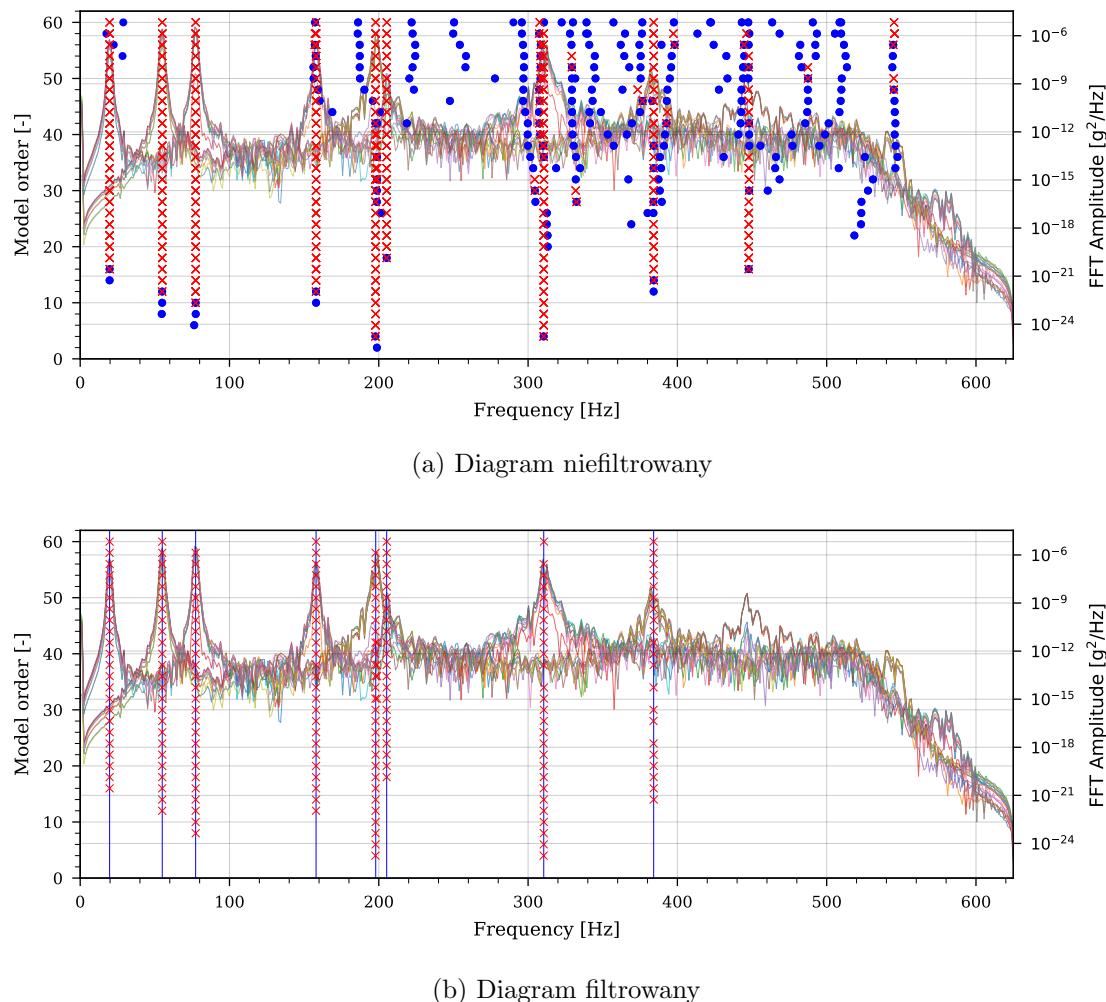
rysunku 3.6. Całkowy czas analizy przyjęto równy 25s ( $25 \cdot 2500 = 62500$  kroków czasowych). Widmo częstotliwościowe nie ujawnia żadnej dominującej częstotliwości i można uznać je za równe w całym zakresie.



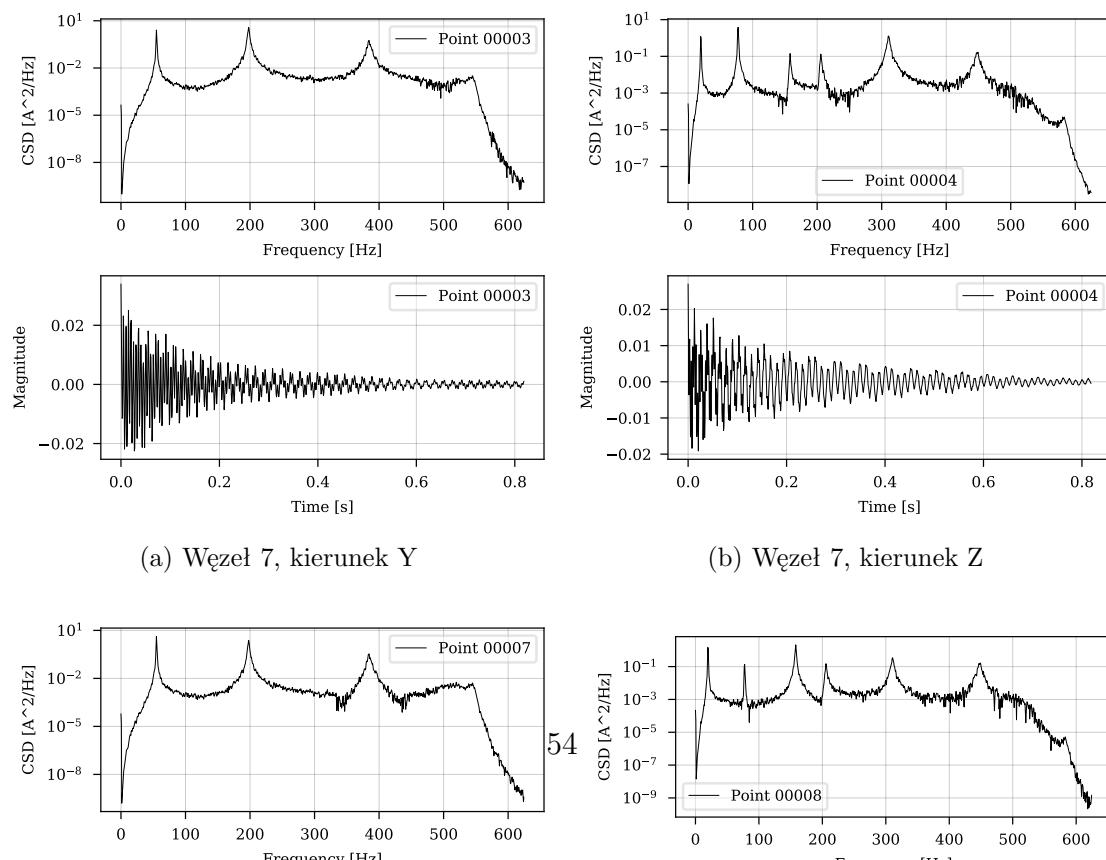
Rysunek 3.6: Transformaty Fouriera funkcji wymuszenia przykładowych węzłów w modelu testowym

Dla obliczonego modelu odczytano przebieg przyspieszeń w dziewięciu węzłach pośrednich, na kierunku pionowym i poprzecznym. Do programu wprowadzono stworzone sygnały z informacją o lokalizacji punktów odczytu. Jako punkt referencyjny na kierunku  $Y$  wybrano punkt odległy o  $0.3L$  od podpory, a na kierunku pionowym  $Z$  punkt odległy o  $0.4L$  od podpory. O wyborze punktów referencyjnych decyduje warunek, że nie mogą one znajdować się w węzłach żadnej analizowanej postaci drgań. Doboru parametrów identyfikacji dokonano przy pomocy diagramu stabilizacyjnego (Rys. 3.7). Na ostatecznym diagramie w wersji filtrowanej (Rys. 3.7b) wyraźnie widać 8 zidentyfikowanych, stabilnych modów. Odczytano minimalny rząd modelu zawierający wszystkie stabilne mody jako  $n = 20$ . Diagram tworzony iteracyjnie pozwolił ostatecznie wyznaczyć parametry metody, które przynoszą pewne, stabilne rozwiązanie. Dobre parametry użyto w celu wyznaczenia ostatecznego rozwiązania identyfikacji.

Wprowadzono wyznaczone parametry do programu. Uzyskano odpowiedzi impulsowe dla każdego punktu, których przykłady wraz z odpowiadającą im transformatą Fouriera przedstawiono na rysunku 3.8.



Rysunek 3.7: Diagram stabilizacyjny metody NExT-ERA testowego modelu numerycznego: (a) diagram niefiltrowany, (b) diagram filtrowany



Funkcje posiadają wyraźnie gasnący, okresowy charakter. Na odpowiadających im widmach zaznaczają się wyraźnie dominujące częstotliwości. Wyznaczone funkcje IRF zostały wprowadzone do metody ERA. Wyniki obliczono dla minimalnego rzędu modelu równego  $n = 20$  zgodnie ze wskazaniami diagramu stabilizacyjnego (Rys. 3.7). Spośród wszystkich modów wybrano te, które na diagramie ujawniają się jako rzeczywiste i stabilne. Wyniki w formie postaci drgań własnych na kierunku pionowym  $Z$  i poprzecznym  $Y$  oraz dla obu kierunków w układzie biegunkowym przedstawiono na rysunku 3.9.

### 3.4.4 Testy eksperymentalne metody NEXT-ERA

W warunkach laboratoryjnych wykonano pomiary na belce rzeczywistej (Rys. ??). Belka została usytuowana na stabilnym podłożu. Aby ograniczyć możliwość przesuwu elementów podparcia w trakcie oddziaływanego, punkty podparcia zostały dociążone ciężkimi stalowymi elementami. System pomiarowy składał się z wzmacniającego pomiarowego PMX firmy HBM (Hottinger Baldwin Messtechnik GmbH, Darmstadt, Germany), kabli i niskoszumnych, piezorezystywnych czujników akcelerometrycznych firmy TE CONNECTIVITY. Do obsługi wzmacniacza i akwizycji danych użyto program HBM Catman Easy. Czujniki przyjmocowano magnetycznie do belki. Zastosowano dwa czujniki 3-osiowe (traktowane jako 2-osiowe) i jeden 1-osiowy. Zakres pomiarowy akcelerometrów wynosi  $\pm 2g$ , a gwarantowane szумy są określone jako mniejsze niż  $25\mu g$  RMS. Stanowisko pomiarowe zostało zaprezentowane na rysunku 3.11, a szczegóły konstrukcyjne belki i jej podparcia na rysunku 3.10

#### Częstotliwość próbkowania

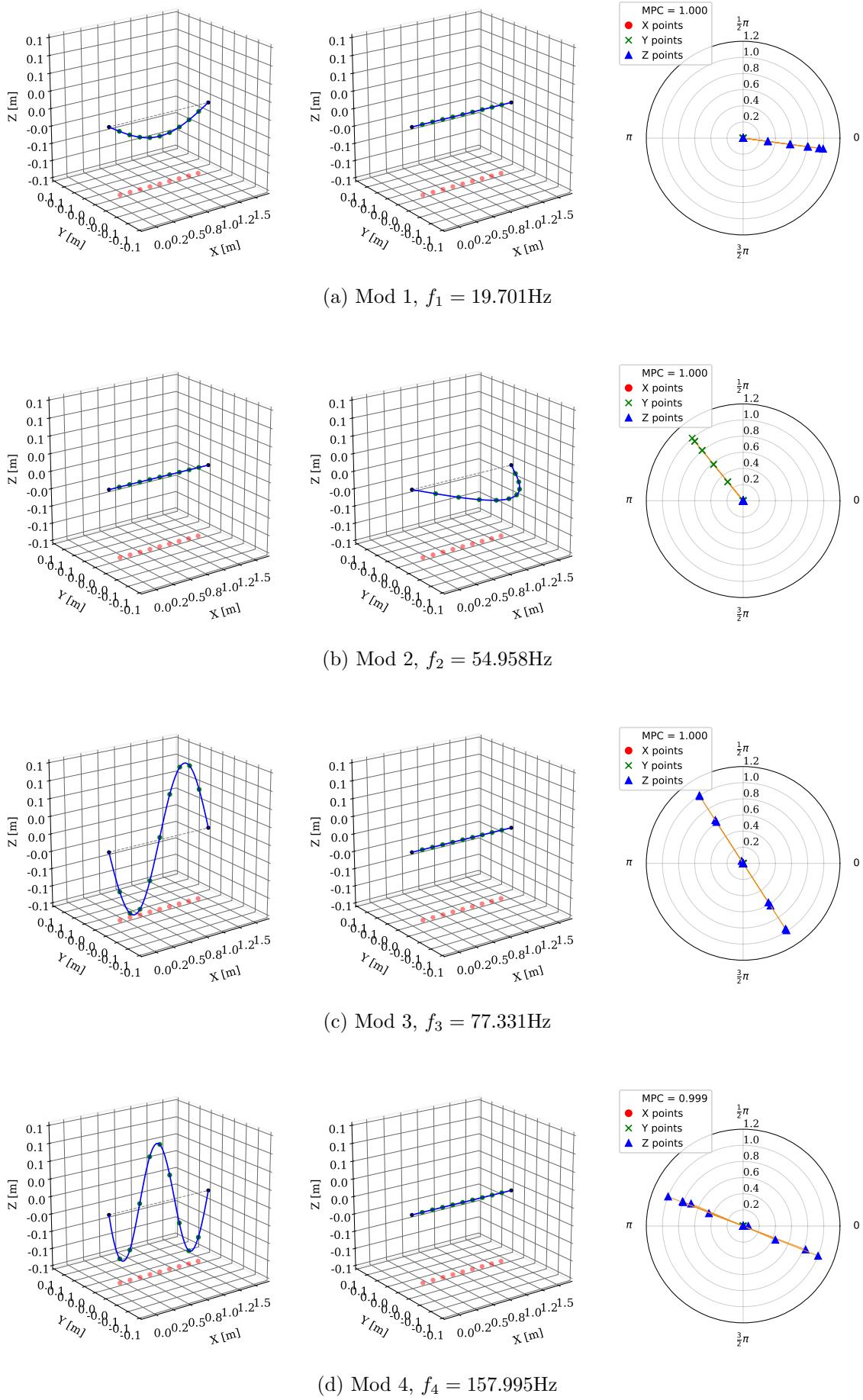
Częstotliwość próbkowania  $f_s$  określa jak często rejestrowana będzie wartość mierzoną. Zwykle zakłada się równy odstęp pomiędzy próbkami  $\Delta t$ . W kontekście pomiarów dynamicznych konstrukcji ważne jest aby zarejestrować drgania o wszystkich interesujących częstotliwościach. Teoretycznie gwarantuje to przyjęcie dwukrotnie większej częstotliwości próbkowania  $f_s$  niż najwyższa interesująca częstotliwość odpowiedzi układu  $f_{max}$ . Graniczna częstotliwość nazywa się częstotliwością Nyquista i wynosi  $f_N = 0.5f_s$ . Jednakże systemy akwizycji danych najczęściej posiadają filtry antialiasingowe, które mają swoje odbicie w pobliżu częstotliwości Nyquista. **Brincker2015** podają, że z tego względu częstotliwość Nyquista musi o 20% większa niż wymagana teoretycznie. Podsumowując minimalna zaleca częstotliwość próbkowania powinna być równa:

$$f_s > 2.4f_{max} \quad (3.93)$$

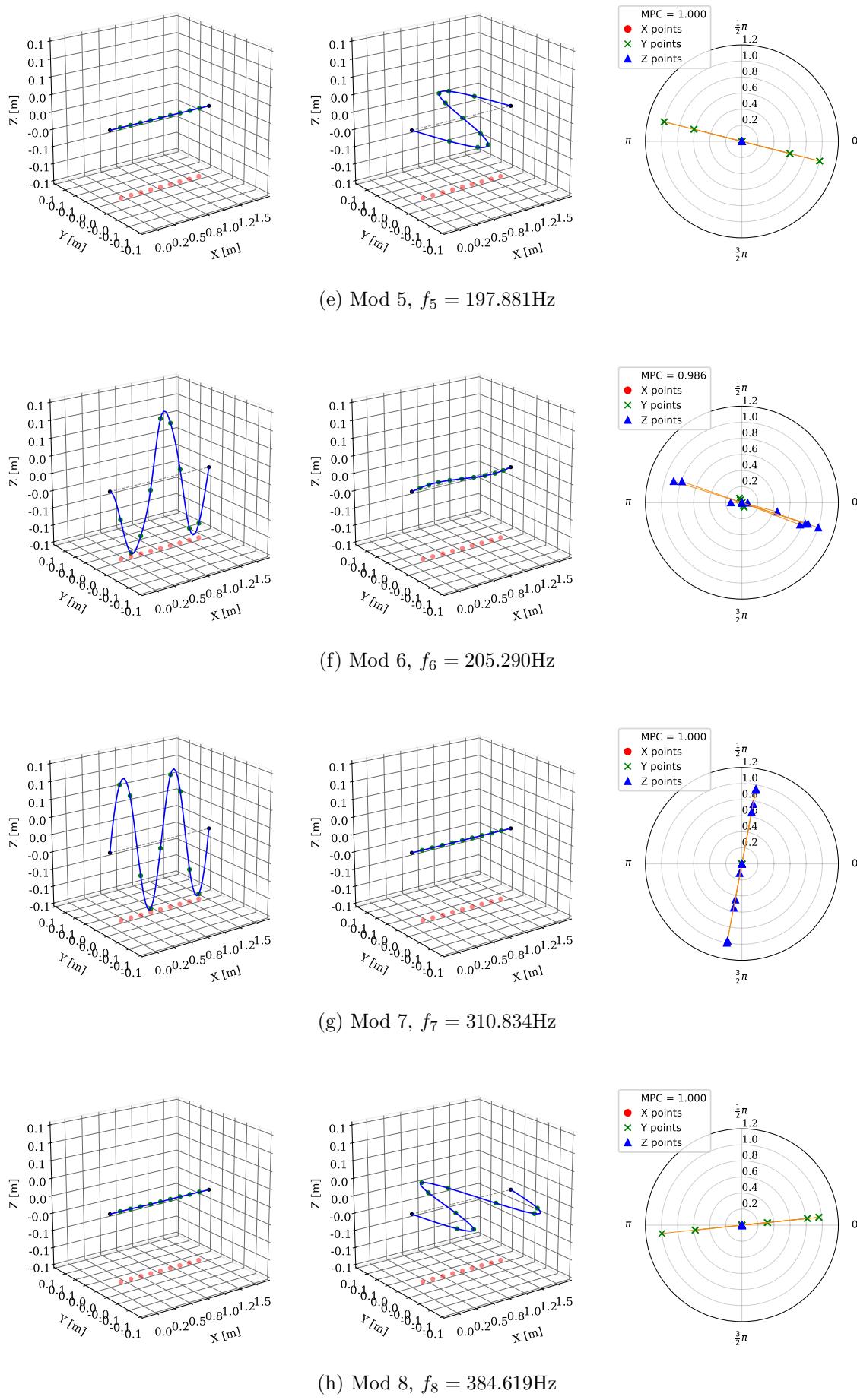
Przyjmując założoną minimalną granicę interesujących modów jako 250Hz wyliczono częstotliwość próbkowania jako  $f_{s,min} = 2.4 \cdot 250\text{Hz} = 600\text{Hz}$ . W badaniach przyjęto znacznie wyższą częstotliwość równą  $f_s=2400\text{Hz}$  chcąc, podobnie jak w przypadku modelu teoretycznego, móc zidentyfikować również kilka wyższych modów.

#### Długość pomiarów

Czas serii pomiarowej przyjęto zgodnie z zaleceniami opisanymi w **Brincker2015**. Według autorów minimalny czas gwarantujący poprawne określenie tłumienia, bez ryzyka negatywnego wpływu obciążen metody Welch'a, musi być dłuższy niż 20



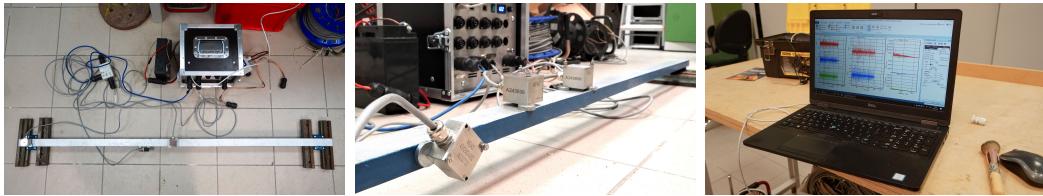
Rysunek 3.9: Zidentyfikowane charakterystyki modalne belki testowej



Rysunek 3.9: Zidentyfikowane charakterystyki modalne belki testowej kont.



Rysunek 3.10: Szczegóły konstrukcyjne belki testowej



Rysunek 3.11: Elementy aparatury pomiarowej

okien czasowych użytych przy wyznaczeniu funkcji korelacji. Z tego względu zalecana minimalna długość pomiaru dana jest nierównością ??.

$$T_{tot} > \frac{20}{2\xi f_{min}} = \frac{10}{\xi f_{min}} \quad (3.94)$$

gdzie  $f_{min}$  oznacza najniższą częstotliwość drgań własnych układu. Dla podanego układu minimalna częstotliwość drgań własnych wyznaczona teoretycznie wynosi  $f_{min} = 19.7\text{Hz}$ , a przewidywana minimalna liczba tłumienia wynosi  $\xi \approx 0.005$ . Minimalna długość serii pomiarowej wynosi więc  $T_{min} = \frac{10}{0.005 \cdot 19.7} = 101.5\text{s}$ .

### Stosunek sygnału do szumu pomiarowego

Wyznaczono również stosunek poziomu sygnału do szumu posługując się wzorem:

$$SN = 20 \log \frac{\sigma_s}{\sigma_n} \quad (3.95)$$

gdzie  $\sigma_s$  oznacza wartość RMS sygnału zmierzonego, a  $\sigma_n$  jest wartością RMS szumu tła. Według zaleceń ANSI S2.47 wartość ta nie powinna być mniejsza niż 10 dB. **Brincker2015** zalecają by w przypadku OMA stosunek sygnału do szumu nie był mniejszy niż 30-40 dB.

### Przebieg badań

Przeprowadzono analizę sygnałów NExT-ERA podobnie jak miało to miejsce dla modelu numerycznego. Zastosowano dwa czujniki referencyjne. Jeden, mierzący pionowe i poprzeczne przyspieszenia w ciągu całych badań znajdował się w odległości 0.4L od podpory. Drugi, mierzący jedynie przyspieszenia poziome znajdował się w odległości 0.3L od podpory. Zwiększenie liczby czujników referencyjnych pozwala uniknąć sytuacji, gdzie jedyny czujnik referencyjny będzie znajdował się w węźle jakiegoś modu, co nie pozwoli go później zidentyfikować (**Caicedo2011**). W takiej sytuacji drugi czujnik może w innym wariancie identyfikacji posłużyć jako referencyjny, a wyniki z obu wariantów należy skalić. Trzeci, ruchomy czujnik był przedstawiany 10 razy tak, że ostatecznie zmierzono przyspieszenia na obu kierunkach w 11 punktach odpowiadających węzłom modelu numerycznego oraz punktom podporowym. .

Pomiary odbywały się w pomieszczeniu, w godzinach wieczornych. Z tego powodu amplitudy przyspieszeń wywołane oddziaływaniem otoczenia były znikome. Dla zastosowanego układu pomiarowego zmierzony w laboratorium szum charakteryzuje się wartością RMS  $\sigma_n = 0.00138 \text{ m/s}^2$ . Sygnał nie zmieniał swojej mocy niezależnie od tego czy czujnik był umieszczony na obiekcie czy na stabilnym podłożu. Z tego względu w badaniach zastosowano sztuczne wymuszenie. Brincker2015 w przypadku badań laboratoryjnych zalecają szuranie lub gładzenie obiektu. W badaniach szurano po strukturze zgniecionym papierem pakowym. Wiotka struktura elementu wymuszającego nie powinna wpłynąć na dodatkowe tłumienie drgań. RMS jednominutowego sygnału pomierzonego ze sztucznym wymuszeniem wyniósł  $\sigma_n = 0.0539 \text{ m/s}^2$ . Dla takich rezultatów obliczony wg formuły (3.95) stosunek sygnału do szumu jest równy  $SN = 20 \log \frac{0.0539}{0.0014} = 31.84 \text{ dB}$ . Wyznaczona wartość jest większa niż zalecana.

### Rezultaty badań

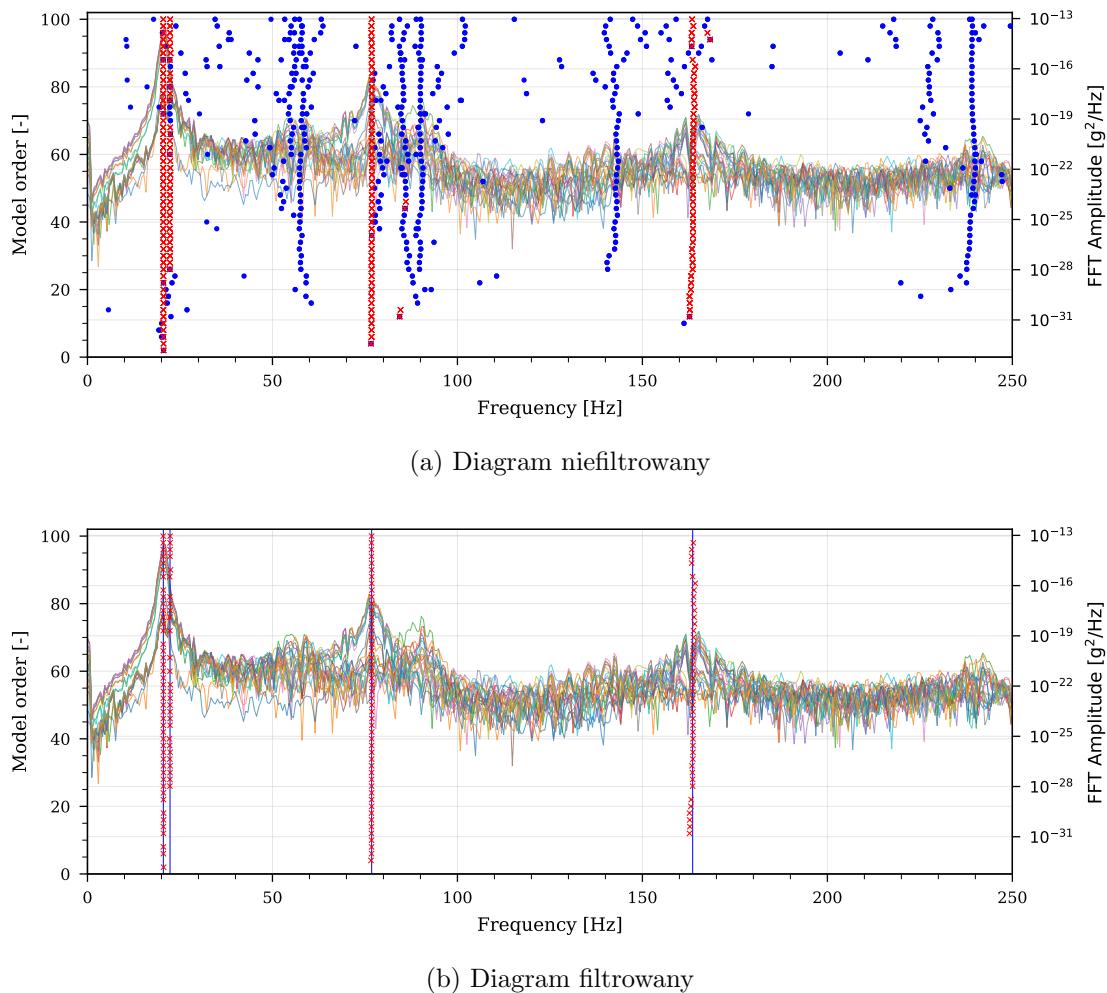
Diagramy stabilizacyjny metody NExT-ERA pokazano na rysunku 3.12. Zidentyfikowano 4 stabilne mody. Zidentyfikowane częstotliwości i postaci drgań zamieszczono na rysunku 3.13. Rezultaty porównano również z obliczeniami numerycznymi w tabeli 3.1.

Analizując rezultaty można zauważyć, że zidentyfikowano poprawnie 3 giętne pionowe postaci drgań. Pomimo bardzo dobrej zgodności częstotliwości i formy drgań ich tłumienie jest jednak znacznie większe niż zakładane LDT= 3% w modelu numerycznym. Z uwagi na dużą wartość tłumienia dokonano prostej weryfikacji. Na rysunku 3.14 pokazano przyspieszenia pionowe środkowego punktu belki, drgającego swobodnie po wymuszeniu siłą impulsową. Sygnał odfiltrowano do 25Hz uzyskując drgania w pierwszej postaci. Odczytano wartości kolejnych amplitud o numerach 1, 10 i 20. Dla obu przedziałów 1-10 i 10-20 wyznaczono logarytmiczny dekrement tłumienia:  $LDT_{1-10} = \frac{1}{10-1} \ln \frac{3.156}{1.378} = 0.092$   $LDT_{10-20} = \frac{1}{20-10} \ln \frac{1.378}{0.544} = 0.093$ . Wyznaczone tłumienia są zbliżone do wartości wynikającej z analizy NExT-ERA.

Jedyna giętna postać poprzeczna nie odpowiada strukturalnie żadnej z wyznaczonych w analizach numerycznych. Mimo to sklasyfikowano ją jako mod 2 w tabeli 3.1. Charakteryzuje się ona ruchem wszystkich punktów pomiarowych, w jednym kierunku i o zbliżonej amplitudzie. Dotyczy to także punktów nad miejscami podparcia. Mimo to mod został zidentyfikowany jako stabilny i charakteryzuje się bardzo wysokim tłumieniem (LDT= 0.44). Istnieje kilka elementów, które mogły wpływać na brak spodziewanej identyfikacji poziomych modów giętnych belki. Głównym jest różniąca się struktura fragmentów podporowych. Podpora belki laboratoryjnej była złożona z połączenia śrubowego i nie była sztywno przymocowana do podłożu. W modelu numerycznym w tym miejscu ustalono sztywne więzy w układzie belki swobodnie podpartej. Postać i wysokie tłumienie moda nr 2 może świadczyć, że belka wałała się na boki w całości i nie udało się wymusić drgań poprzecznych o bardzo wysokich częstotliwościach.

## 3.5 Podsumowanie testów metody NExT-ERA

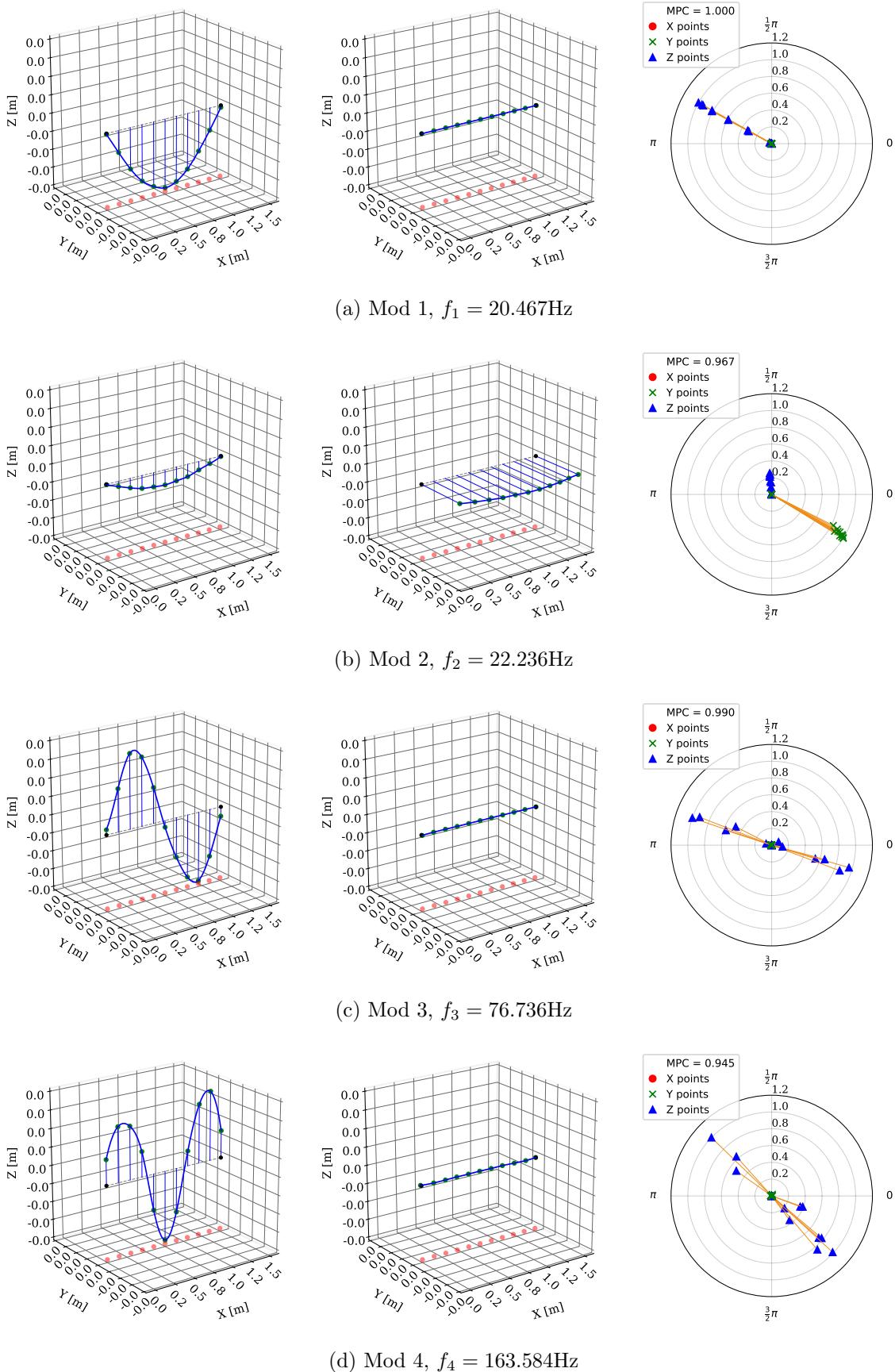
Zidentyfikowane częstotliwości drgań własnych oraz tłumienia zestawiono w tabeli 3.1.



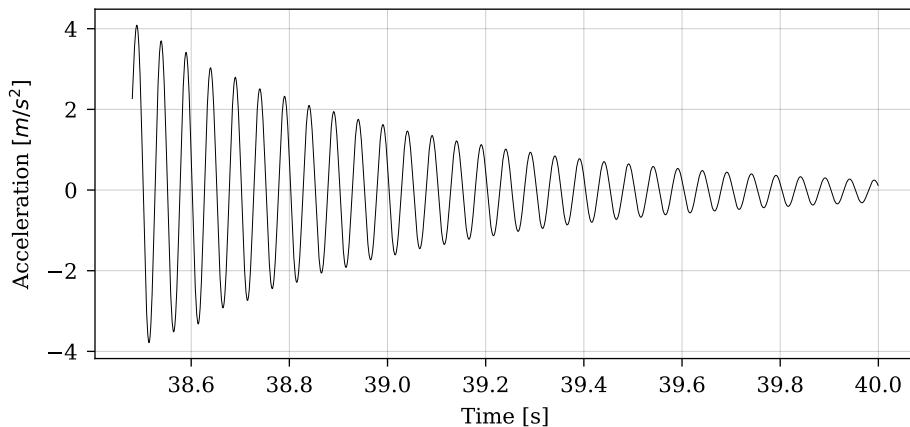
Rysunek 3.12: Diagram stabilizacyjny metody NExT-ERA rzeczywistej belki testowej: (a) diagram niefiltrowany, (b) diagram filtrowany

Częstotliwości wynikające z analizy modalnej i zidentyfikowane z odpowiedzi modelu numerycznego charakteryzują się bardzo dobrą zgodnością. Dla niskich częstotliwości różnice nie są większe niż 1%. Wraz ze wzrostem częstotliwości wzrastają również różnice do maksymalnie 8%. Jest to prawdopodobnie spowodowane zbyt niską częstotliwością próbkowania (zbyt dużym krokiem czasowym) dla modów o wysokich częstotliwościach. W takim przypadku różnica nie wynika z błędów identyfikacji tylko z błędów w wyznaczeniu odpowiedzi dynamicznej konstrukcji. Obserwując postaci uzyskane z analizy modalnej można zauważać, że Mod 7 i Mod 10 mają charakter skrętny. Posługując się modelem belkowym i odczytując przyspieszenia węzłów wyłącznie na kierunku  $Y$  i  $Z$  nie ma możliwości zaobserwować tych postaci. Przeprowadzona identyfikacja potwierdza ten fakt, nie wskazując tych modów jako stabilnych rozwiązań. Z tego względu w tabeli zbiorczej zostały one oznaczone myślnikiem jako brakujące. Zidentyfikowane tłumienia różnią się do maksymalnie do 23% od zakładanych wartości wynikających z formuł teoretycznych. Uzyskanie dobrej zgodności zidentyfikowanego tłumienia jest z reguły bardziej problematyczne niż ma to miejsce w przypadku częstotliwości. W przedmiotowym przypadku większość tłumień zidentyfikowanych nie różni się o więcej niż 10% od wartości teoretycznych.

W badaniach laboratoryjnych zidentyfikowano 4 stabilne mody. Model nume-



Rysunek 3.13: Zidentyfikowane charakterystyki modalne belki testowej



Rysunek 3.14: Odpowiedź swobodna belki testowej

Tablica 3.1: Porównanie zidentyfikowanych parametrów modalnych obiektu testowego

	Analiza modalna	Zakładane tłumienie	Model MES					Badania				
			Częst.	LDT	Częst.	Stosunek [%]	LDT	Stosunek [%]	Częst. [Hz]	Stosunek [%]	LDT [-]	Stosunek [%]
			[Hz]	[-]	[Hz]		[-]		[Hz]		0.097	333%
Mod 1	19.77	0.0303	19.701	100%	0.0291	96%	0.0291	96%	20.467	104%	0.097	333%
Mod 2	54.93	0.0189	54.958	100%	0.0232	123%	0.0232	123%	22.236	40%	0.440	2335%
Mod 3	78.20	0.0199	77.331	99%	0.0190	96%	0.0190	96%	76.739	98%	0.151	760%
Mod 4	161.35	0.0302	157.995	98%	0.0240	79%	0.0240	79%	163.584	101%	0.185	614%
Mod 5	200.38	0.0361	197.881	99%	0.0325	90%	0.0325	90%	-	-	-	-
Mod 6	212.24	0.0379	205.29	97%	0.0410	108%	0.0410	108%	-	-	-	-
Mod 7	217.12	0.0386	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Mod 8	336.59	0.0577	310.834	92%	0.0473	82%	0.0473	82%	-	-	-	-
Mod 9	410.22	0.0697	384.619	94%	0.0628	90%	0.0628	90%	-	-	-	-
Mod 10	451.89	0.0765	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

ryczny pomimo dobrego odwzorowania wymiarów geometrycznych konstrukcji nie był kalibrowany względem obiektu rzeczywistego. Niemniej, pomimo braku kalibracji modelu numerycznego, częstotliwości modów pionowych są bardzo bliskie wartościom z analizy modalnej. Maksymalna różnica wynosi 4%. Tłumienia modów pionowych są zdecydowanie większe niż zakładane teoretycznie. Ich porównanie jest podane orientacyjnie i nie ma daje podstaw do wyciągnięcia wniosków na temat identyfikacji. Dla sprawdzenia efektu identyfikacji tłumienia w warunkach rzeczywistych porównano Logarytmiczny Dekrement Tłumienia odpowiedzi swobodnej układu ze zidentyfikowanym tłumieniem pierwszego modu (Rys. 3.14). Stosunek obu wartości wynosi  $LDT_{\text{ident}}/LDT = 0.097/0.093 = 1.04$ . Zawarty w tabeli mod 2 nie ma odpowiednika w analizach teoretycznych co uzasadniono w punkcie 3.4.4 i jego wystąpienie uznano za efekt niedoskonałego eksperymentu. Warto zaznaczyć, że mod 1 i mod 2 są bliskie pod względem częstotliwości przy zastosowanym spektrum całkowitym, a ich identyfikacja i rozróżnienie nie sprawiło problemu. Podsumowując, na podstawie przytoczonych testów uznano zaimplementowany algorytm jako skuteczny i przystąpiono do badań właściwych. Identyfikacja modalna rzeczywistego obiektu mostowego została opisana w punkcie 5.3.

## Rozdział 4

# Optymalizacja metodą roju cząstek - Particle Swarm Optimizaton

### Wprowadzenie

Znalezienie najlepszej możliwej konfiguracji elementów konstrukcyjnych, zapewniającej poprawnie przeniesienie obciążen statycznych, zapewniającej komfort dynamiczny i najlepiej możliwie taniej jest zadaniem, które na co dzień towarzyszy projektantom mostów. Takie zadanie może kojarzyć się intuicyjnie z pojęciem optymalizacji, czyli wyborem najlepszego z wielu rozwiązań, pozwalającego osiągnąć cel lub cele. **Szymczak1995** określa następuje elementy, jakie powinno zawierać poprawnie sformułowane zadanie optymalizacji

- kryteria optymalizacji - miarę spełnienia danego celu,
- parametry optymalizacji - parametry systemu, które są stałe lub niezależne od projektanta,
- zmienne projektowe - parametrów systemu zależne od projektanta,
- ograniczenia - elementy określające zakres dopuszczalnych rozwiązań.

Kryterium optymalizacji powinno w sposób wymierny pozwolić na ocenę danego rozwiązania. Podstawowymi kryteriami stosowanymi w przypadku konstrukcji może być koszt jej wykonania, ilość materiału czy nakład pracy. Kryterium, które decyduje o wyborze najlepszego rozwiązania nazywane jest funkcją celu. W przypadku wielu kryteriów, jednym z rozwiązań upraszczających proces optymalizacji jest stworzenie jednej funkcji celu, łączącej wszystkie kryteria z zastosowaniem wag dla poszczególnych elementów. Odbywa się to zazwyczaj na zasadzie kombinacji liniowej:

$$F = \sum_{i=1}^n w_i F_i \quad (4.1)$$

gdzie  $w_i$  to współczynnik określający wagę kryterium  $F_i$ . W pracy została zastosowane rozwiązanie optymalizacji wielokryterialnej. W takim przypadku optymalizacja polega na minimalizowaniu lub maksymalizowaniu jednocześnie kilku funkcji celu. Zagadnienie zostanie omówione teoretycznie w punkcie 4.5.

W przypadku konstrukcji, parametry projektowe to założone wartości opisujące urząd, które nie ulegają zmianie w procesie optymalizacji. Mogą być one narzucone przez względy technologiczne bądź normowe (**Szymczak1995**), lub wynikać

z innych założeń projektowych. Z kolei zmienne projektowe  $x_i$ , jak sama nazwa wskazuje, mogą się zmieniać w procesie optymalizacji i zależą od projektanta. Wybór konkretnych  $m$  zmiennych projektowych tworzy rozwiązanie w postaci wektora  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$ , będącego punktem w przestrzeni  $m$ -wymiarowej.

Z reguły wartości zmiennych projektowych muszą spełniać szereg obostrzeń. Wykują one ponownie ze względów technologicznych, normowych lub innych uznanych za istotne przez projektanta. Z tego powodu, na zmienne projektowe  $\mathbf{x}$  narzucone są ograniczenia. Wektor, który spełnia wszystkie ograniczenia nazywany jest dopuszczalnym. W analizie konstrukcji budowlanych ograniczeniami mogą być wymogi wytrzymałościowe, eksploatacyjne - zarówno statyczne jak i dynamiczne - czy też warunki stateczności.

## 4.1 Klasyfikacja problemów i metod optymalizacji

Wszystkie powyższe elementy definiują problem optymalizacji. Każdy z nich może przyjmować różne postaci co będzie miało znaczący wpływ przede wszystkim na wybór metody rozwiązań problemu. **Tesch2016** zaproponował następującą klasyfikację problemów optymalizacji zależnie od elementów charakterystycznych je definiujących:

- Liczba funkcji celu
  - pojedyncza funkcja celu,
  - wiele funkcji celu.
- Liczba ekstremów lokalnych
  - funkcja unimodalna - funkcja jest ciągła i posiada jedno ekstremum w rozpatrywanym przedziale,
  - funkcja multimodalna - problem posiada więcej niż jedno ekstremum lokalne w rozpatrywanym zakresie,
- Liniowość funkcji celu
  - problem programowania liniowego - funkcja celu i ograniczenia są liniowe,
  - problem programowania nieliniowego - funkcja celu lub ograniczenia nie są liniowe,
- Rodzaj zmiennych projektowych
  - ciągłe - zmienne projektowe są liczbami rzeczywistymi w zadanym przedziale,
  - dyskretne - zmienne projektowe są liczbami całkowitymi w zadanym przedziale,
  - mieszane - w problemie występują zarówno zmienne ciągłych jak i dyskretnych ,

Klasyfikacje zawarte w klasycznych pozycjach dotyczących optymalizacji podają również ogólny podział ze względu na to czy zmienne projektowe są liczbami czy funkcjami (**Szymczak1995; Findeisen1980**).

Rodzaj problemu optymalizacji ogranicza wybór metody, którą można użyć do jego rozwiązywania. W literaturze algorytmy tradycyjne dzielone są ze względu na sposób przeszukiwania na: analityczne, enumeratywne oraz losowe (**Goldberg1995**). W skrócie, pierwsze opierają się na stworzeniu i rozwiązywaniu układu równań, powstałego przez przyrównanie gradientu funkcji celu do zera. Metody te wymagają obliczenia pochodnych funkcji i mają charakter lokalny, szukając optymalnego rozwiązania wokół punktu, a nie w całym dopuszczalnym obszarze. W realnych przypadkach są to trudne do zaakceptowania warunki i metody te mają raczej ograniczony zakres zastosowań. Metody enumeracyjne polegają na obliczaniu funkcji celu dla kolejnych rozwiązań dopuszczalnych. W literaturze przedmiotu inną spotykana nazwą tej metody jest „systematyczne przeszukiwanie”. Pomimo naturalności metody i jej prostoty jest to najmniej efektywna klasa metod, co jest jej główną wadą. Działanie metod losowych jest podobne do systematycznego przeszukiwania, z tą różnicą że kolejne rozwiązania są dobierane w sposób losowy, a nie uporządkowany. Metody losowe w ogólności nie pozwalają efektywniej uzyskać optymalnego rozwiązania niż enumeratywne. Przedstawione konwencjonalne metody są albo wysoce wyspecjalizowane i swoim zastosowaniem obejmują wąskie spektrum problemów, albo są mało efektywne w szerokim zakresie zastosowań. Znając ograniczenia metod tradycyjnych, poszukiwano innych, które dzięki wykorzystaniu maszyn cyfrowych mogą stać się jednocześnie znacznie bardziej efektywne niż metody enumeratywne oraz jednocześnie pozwalają na rozwiązywanie znacznie bardziej różnorodnych zadań niż metody analityczne. W odpowiedzi powstały algorytmy, które doboru coraz lepszego rozwiązania dokonują wykorzystując zwykle randomizację, ale nie są w zupełności losowe. Są to tak zwane algorytmy heurystyczne i w rozwiniętej wersji metaheurystyczne (**Blum2003**). Cechują się one konkretną strategią, która przewodzi przeszukiwaniu przestrzeni w poszukiwaniu rozwiązania optymalnego. Powinny być uniwersalne i nie nakierowane jedynie na konkretny typ problemu. Wykorzystują one doświadczenie powstałe na bazie przeprowadzonych prób i uczą się na ich podstawie szukając coraz lepszego wyniku. Ponadto, większość algorytmów metaheurystycznych ma charakter globalny i nie ogranicza się do funkcji unimodalnych. Niemniej jednak, pomimo niewątpliwych zalet, należy pamiętać że algorytmy metaheurystyczne są z natury przybliżone. W związku z tym nie gwarantują, że optymalny wynik zostanie w ogóle odnaleziony. Najbardziej popularne algorytmy metaheurystyczne są inspirowane zachowaniami zaobserwowanymi w naturze (**FisterJr.2013**). Główne mechanizmy ich działania mogą być zaczerpnięte z praw fizyki (np. Algorytm Przeszukiwania Grawitacyjnego (**Rashedi2009**)), biologii (np. Algorytmy Genetyczne (**Goldberg1995**)) czy inteligencji stadnej (np. Optymalizacja Rojem Cząstek (**Kennedy1995; Eberhart2001**)). Podsumowując i odwołując się do wyżej przytoczonej klasyfikacji problemów optymalizacji, algorytmy ich rozwiązań **Tesch2016** podzielił według następujących kryteriów:

- Różniczkowalność funkcji celu
  - Wymagające pochodnej - algorytmy tej kategorii wymagają istnienia dwukrotnej pochodnej funkcji celu.
  - Niewymagające pochodnej - algorytmy tej klasy nie wymagają ciągłości funkcji celu oraz jej pochodnej.
- Liczba jednocześnie rozważanych rozwiązań
  - Jednopunktowe - w jednej chwili rozważane jest jedno rozwiązanie. W

kolejnych krokach algorytmu jest ono modyfikowane w celu uzyskania lepszego rozwiązania.

- Wielopunktowe - jednocześnie odbywa się analiza wielu rozwiązań, które mają wpływ na wynik końcowy.

- Mechanizmy losowości

- Deterministyczne - rozwiązania są wyznaczane jedynie na podstawie danych wejściowych i wyznaczonych parametrów.
- Stochastyczne - zmienne projektowe są wybierane z uwzględnieniem czynnika losowego.
- Hybrydowe - algorytm zawiera oba mechanizmy wyboru kolejnego rozwiązania.

## 4.2 Określenie funkcji celu i wybór metody optymalizacji

Wpływ poszczególnych rozwiązań konstrukcyjnych obiektu na jego odpowiedź dynamiczną zalicza się do zagadnień złożonych. Pierwszą funkcją celu postawionego problemu może być minimalizacja przyspieszeń pionowych pomostu w trakcie przejazdu. Jest to najbardziej najczęściej decydujący warunek eksploatacyjny mostu narzucony przez normę Europejską. Drugą pożądaną cechą może być poszukiwanie najtańszego obiektu (w uproszczeniu najmniejszej ilości materiału), przy spełnieniu wszystkich innych warunków wytrzymałościowych. Wybór metody optymalizacji, która została wykorzystana dokonano przez analizę rozpatrywanego zadania. Z uwagi na brak funkcyjnego opisu odpowiedzi dynamicznej modelu numerycznego zaniechano użycia metod analitycznych, wymagających obliczania pochodnych. Dodatkowo problem ma charakter globalny i nie wolno dopuścić do zakończenia poszukiwania w ekstremum lokalnym. Odrzucono również metody losowe i systematycznego przeszukiwania z uwagi na długotrwałe wyznaczanie funkcji celu i bardzo nieefektywny algorytm. Kolejnym kryterium była uniwersalność algorytmu, ponieważ zaplanowano użycie go w dwóch zupełnie różnych problemach: kalibracji modelu i optymalizacji konstrukcji z punktu widzenia zachowania dynamicznego. Ostatnim kryterium była udokumentowana w literaturze skuteczność metody, w tym wykorzystanie jej w przypadkach analizy i oceny konstrukcji. Powyższe warunki spełniają metody metaheurystyczne. Spośród opisanych w literaturze wybrano metodę optymalizacji rojem cząstek. Spośród opisanych w literaturze wybrano metodę optymalizacji rojem cząstek.

## 4.3 Particle Swarm Optimization

Optymalizacja rojem cząstek (*eng. Particle Swarm Optimization (PSO)*) jest metaheurystycznym, inspirowanym naturą algorytmem optymalizacji. W bazowej wersji powstał w roku 1995 (**Kennedy1995a; Eberhart1995**) i od tamtej pory ulegał wielu modyfikacjom, udoskonaleniom i rozszerzeniom. Metoda zakłada istnienie pewnej populacji - roju składającego się z  $M$  cząstek. Każda cząstka o indeksie  $i$  posiada trzy informacje ( $\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{p}_i$ ).  $\mathbf{x}_i$  i  $\mathbf{p}_i$  są wektorami o długości  $D$  oznaczającymi punkt w przeszukiwanej przestrzeni  $\mathbf{X}$ , gdzie  $D$  jest liczbą zmiennych projektowych problemu.  $\mathbf{x}_i$  oznacza aktualną pozycję cząstki w przestrzeni  $\mathbf{X}$ . Z kolei  $\mathbf{p}_i$  określa

najlepsze dotychczasowe położenie cząstki  $i$  (*eng. personal best (pbest)*). Jakość położenia określana jest przez wyznaczenie funkcji celu dla danej cząstki (np. zakładając minimalizację, mniejsza wartość funkcji celu jest lepsza od większej). Jeżeli funkcja celu dla nowego położenia cząstki jest lepsza niż zachowana w pamięci (pbest) to wektor  $\mathbf{p}_i$  jest aktualizowany do nowej wartości.  $\mathbf{v}_i$  jest również wektorem o długości  $D$  i oznacza różnicę pomiędzy nowym położeniem w chwili  $t + 1$  i poprzedzającym w chwili  $t$ :

$$\mathbf{x}_i^{t+1} = \mathbf{x}_i^t + \mathbf{v}_i^{t+1} \quad (4.2)$$

Jako że wektor  $\mathbf{v}_i$  decyduje o kolejnym położeniu cząstki nazywany jest również wektorem prędkości. Współrzędne wektora  $\mathbf{v}_i$  z kroku  $t$  uaktualniane są w kolejnej iteracji  $t + 1$  w następujący sposób:

$$\mathbf{v}_i^{t+1} = \theta \mathbf{v}_i^t + \alpha \mathbf{u}_1^t \circ (\mathbf{n}_i^t - \mathbf{x}_i^t) + \beta \mathbf{u}_2^t \circ (\mathbf{p}_i^t - \mathbf{x}_i^t) \quad (4.3)$$

gdzie wektory  $\mathbf{u}_1^t$  i  $\mathbf{u}_2^t$  zawierają zestawy losowych liczb o rozkładzie jednostajnym z zakresu  $[0,1]$ , ustalonych w chwili czasowej  $t$ . Symbol ( $\circ$ ) oznacza iloczyn skalarny. Parametry  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\theta$  w pierwotnej wersji algorytmu są stałymi. W zależności od zastosowanej topologii roju,  $\mathbf{n}_i$  oznacza najlepsze rozwiązanie  $\mathbf{p}_i$  spośród dostępnych sąsiadów. W jednej z najpopularniejszych i najbardziej intuicyjnych wersji stosowana jest topologia gbest, w której  $\mathbf{n}_i$  przyjmuje najlepszą wartość  $\mathbf{p}_i$  spośród wszystkich cząstek.

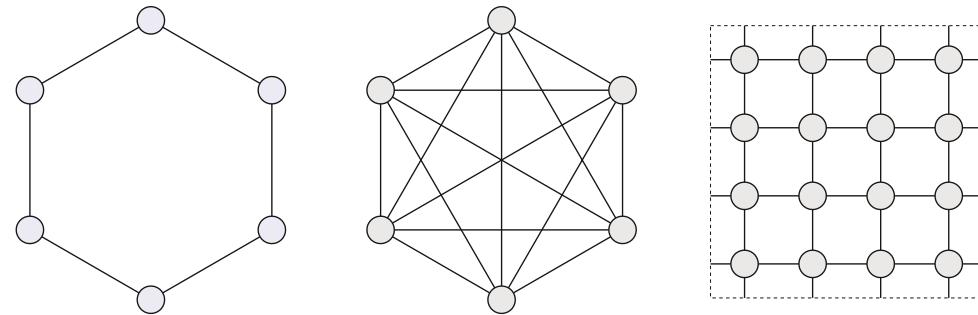
### Parametry algorytmu PSO

Każdy składnik prędkości spełnia określona rolę. Pierwszy jest związany z bezwładnością i utrzymuje on bieżącą trajektorię cząstki. Parametr  $\theta$  w ogólności zmniejsza prędkość, zapewniając lepszą zbieżność rozwiązania (**Blackwell2019**). Jego wartość może być stała lub zmienna w trakcie analizy. Współczynniki  $\alpha$  i  $\beta$  odpowiadają za przyspieszenie na bazie odpowiednio własnych i społecznych doświadczeń. **Clerc2002** wyznaczyli wartości  $\theta = 0.7968$ ,  $\alpha = 1.4962$  i  $\beta = 1.4962$  jako optymalne z punktu widzenia działania algorytmu. Przyjęcie równeści  $\alpha = \beta$  oznacza, że na prędkość cząstki równy wpływ mają doświadczenia własne i sąsiadów. Do podobnych rezultatów doszli **Shi1998**. **Xu2007** podaje przykład zmiennego wariantu, gdzie  $\theta$  zmniejsza swoją wartość liniowo od 0.9 do 0.4, a parametry  $\alpha$  i  $\beta$  są stałe i równe 2.0. **Poli2007** obszernie opisali metody wyznaczania wartości parametrów algorytmu.

### Topologie roju

Topologia roju odpowiada za zachowanie społeczne cząstek roju. Określa ona sąsiedztwo, z którym cząstka może się komunikować i wymieniać doświadczeniem. Definiuje również liderów, za którymi podążać będą pozostałe cząstki. Topologie dzielą się na dwie główne grupy: globalne (*eng. global best (gbest)*) i lokalne (*eng. local best (lbest)*). Schemat topologii można przedstawić za pomocą grafów, w których węzły oznaczają cząstki, a krawędzie możliwość komunikacji z inną cząstką. Trzy najczęściej występujące w literaturze przedmiotu topologie to:

- topologia pierścieniowa (Rys. 4.1a),
- topologia pełnego grafu (Rys. 4.1b),



(a) Topologia pierścieniowa (b) Topologia pełnego grafu (c) Topologia von Neumanna

Rysunek 4.1: Schematy wybranych topologii komunikacji pomiędzy cząstkami w metodzie optymalizacji rojem cząstek

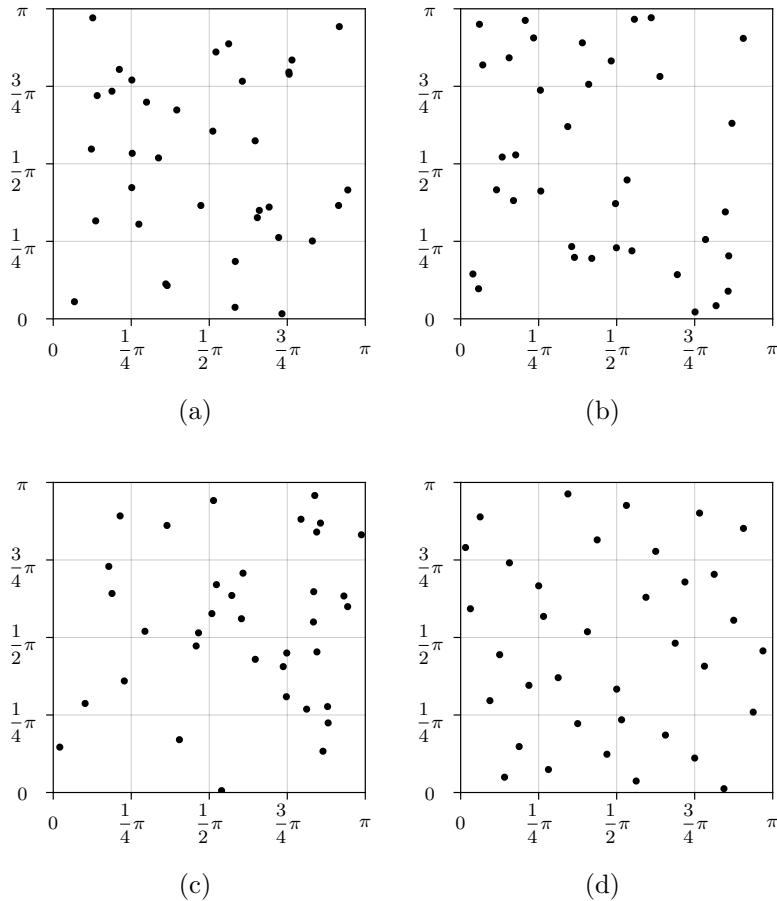
- topologia von Neumanna (Rys. 4.1c).

Przyjęta topologia roju ma istotny wpływ na zachowanie i efektywność algorytmu. Topologie należące do rodziny gbest osiągają szybciej zbieżność, ale istnieje większe ryzyko na utknięcie w minimum lokalnym gdy funkcja celu nie jest unimodalna. Innymi słowy przynosi ona precyzyjniejsze rozwiązanie, ale mniej dokładnie przeszukuje obszar. Przy wykorzystaniu rodziny lbest efekt jest odwrotny. Ograniczona jest komunikacja jedynie do wąskiego grona sąsiadów, przez co algorytm zbiega do rozwiązania wolniej. Zwiększa to szansę na dokładniejsze przeszukanie obszaru, ale zmniejsza precyzję ostatecznego wyniku. Topologie mogą być również podzielone na statyczne i dynamiczne. Pierwsze utrzymują swoją strukturę przez cały czas wykonywania algorytmu, drugie zmieniają swoje właściwości wraz z postępem obliczeń. Najczęściej topologią dynamiczną populacja rozpoczyna od małej liczby sąsiadów żeby w trakcie wykonywania algorytmu ich liczba stopniowo wzrastała (**Poli2007**). Warto podkreślić, że w klasycznej wersji algorytmu położenie cząstki w przestrzeni  $\mathbf{X}$  nie ma wpływu na początkowy wybór sąsiedztwa zgodnie z założoną topologią.

Jedyną topologią z rodziny gbest jest topologia pełnego grafu (Rys. 4.1b). Każda cząstka może przekazywać informację o najlepszym położeniu ze wszystkimi innymi. W tym wariantie wektor  $\mathbf{n}_i$  w formule (4.3) jest równy dla wszystkich cząstek i odpowiada najlepszemu dotychczasowemu położeniu całej populacji. Z kolei pierwszą i najprostszą topografią lbest jest topologia pierścieniowa (Rys. 4.1a). Komunikacja jest zapewniona jedynie pomiędzy najbliższymi sąsiadami: cząstka o indeksie  $i$  wymienia informację o najlepszym położeniu jedynie z cząstkami o indeksach  $i - 1$  i  $i + 1$ . Trzecia wymieniona topologia von Neumanna należy również do rodziny lbest, ale reprezentuje kompromis pomiędzy przypadkami skrajnymi: topografią pierścieniową i pełnego grafu (Rys. 4.1c). Pozwala ona na wymianę informacji z czterema sąsiadami. (**Kennedy2002**) wykonali szereg testów obliczeniowych dla zróżnicowanych problemów dla wielu topologii. W tym teście topologia von Neumanna otrzymała najwyższą sumaryczną notę i jest opisana jako uniwersalna. Obszerne porównanie topologii wraz z historycznym opisem i powstania oraz efektywnością zostało zawarte w pracy (**Blackwell2019**).

### Generacja populacji

Początkowa populacja roju jest rozmieszczana w  $D$ -wymiarowej przestrzeni rozwiązań  $\mathbf{X}$ . Przyjęcie właściwej liczby cząstek nie jest kwestią ściśle określona. **Piotrowski2020** przeprowadzili obszerne studium dotyczące przyjęcia wstępnej liczebności populacji. Posłużyli się oni kilkudziesięcioma rzeczywistymi i testowymi problemami optymalizacji i ocenili 8 różnych wersji algorytmu. Na bazie analizy statystycznej stwierdzono, że klasycznie zalecane przyjęcie od 20 do 50 (**Kennedy1995; Liang2006; Chen2012; Harrison2018**) cząstek jest w przypadku wielu rzeczywistych problemów niewystarczające. Taka liczba sprawdza się jedynie w przypadku stosunkowo prostych problemów unimodalnych. Dla złożonych zagadnień i wersji algorytmu opisanej w niniejszej pracy autorzy podali poprawny zakres od 70 do 500 cząstek. Jednocześnie sformułowano również generalną wskazówkę, że dla wszystkich wariantów algorytmu bezpiecznym rozwiązaniem jest przyjęcie od 70 do 100 cząstek. Liczebność populacji w trakcie całej analizy jest zazwyczaj stała, chociaż istnieją modyfikacje algorytmu, które pozwalają na dodawanie cząstek w trakcie działania algorytmu.



Rysunek 4.2: Przykłady rozkładu wygenerowanych populacji cząstek: (a)-(c) generacja losowa, (d) generacja z wykorzystaniem sekwencji Haltona

Rozwiązania realnych zagadnień inżynierskich zazwyczaj cechują pewne ograniczenia, które przekładają się na dopuszczalny zakres zmiennych projektowych. Jeżeli wektor minimalnych wartości dopuszczalnych zmiennych projektowych zebrany zostanie w wektorze  $x_{min}$ , a maksymalnych jako  $x_{max}$  to możliwe jest określenie hi-

perprostokąta o wierzchołkach ( $x_{min}, x_{max}$ ). Początkowe położenie cząstek odbywa się więc przez dobranie współrzędnych wektorów rozwiązań  $x_i$ , tak aby wszystkie cząstki znalazły się wewnątrz hiperprostokąta ( $x_{min}, x_{max}$ ). Pozycje początkowe mogą być wybierane przez użytkownika bądź losowane wewnątrz przestrzeni dopuszczalnych rozwiązań. Zakładając niewielką populację roju, istnieje spora szansa, że losowanie o jednorodnym rozkładzie nie zagwarantuje równomiernego pokrycia przestrzeni. Z tego powodu do generacji początkowej populacji niekiedy stosowane są deterministyczne algorytmy, które pozwalają uzyskać rozkład do złudzenia przypominający losowy, ale zapewniające jednocześnie równomierną dystrybucję w przestrzeni (**Saliby2002**). Jedną z takich metod jest wykorzystanie sekwencji Haltona (**Tesch2016**). Na rysunku 4.2 pokazano przykłady rozkładu 36 początkowych cząstek w przestrzeni dwuwymiarowej. Trzykrotnie wylosowano populację za pomocą generatora pseudolosowego (4.2a–4.2c). Dla kontrastu przedstawiono punkty wygenerowane za pomocą sekwencji Haltona w takim samym zbiorze 4.2d. W każdej z losowo wybranych populacji widoczne są obszary, które są gęsto pokryte i takie, w którym nie znajduje się żadna cząstka. Przy wykorzystaniu sekwencji Haltona przestrzeń jest pokryta znacznie bardziej równomiernie. Problem staje się tym bardziej istotny kiedy dotyczy małych populacji. Kiedy wyznaczenie funkcji celu jest bardzo kosztowne czasowo, a zadanie wielowymiarowe wykorzystanie sekwencji Haltona zwiększa pewność równomiernego rozkładu w całej przestrzeni.

## Warunki brzegowe

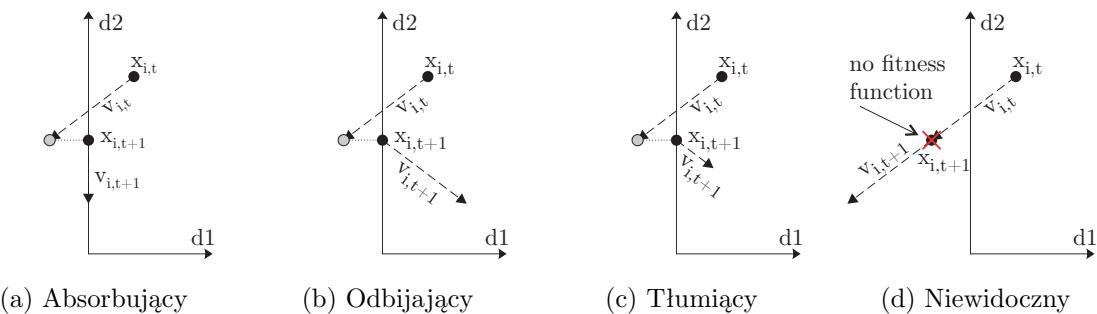
Początkowa populacja roju jest losowana wewnątrz przestrzeni dopuszczalnych rozwiązań. Następnie wykorzystana jest inteligencja roju do przeszukania przestrzeni w celu znalezienia globalnego ekstremum. W trakcie kolejnych iteracji położenie cząstek zmieniane jest według wzorów (4.3) i (4.2). W trakcie obliczeń, w oryginalnej wersji algorytmu użytkownik nie ingeruje w proces przemieszczania się cząstek. Istnieje więc możliwość że wyznaczona prędkość wyprowadzi cząstkę poza obszar dopuszczalnych rozwiązań. Jest to szczególnie prawdopodobne kiedy ekstremum globalne znajduje się w pobliżu granicy rozwiązań dopuszczalnych (**Xu2007**). Kiedy cząstka wyjdzie poza zakres dopuszczalnych rozwiązań jej wartość jest nieistotna ( błędna) dla projektanta i nie powinna wpływać negatywnie na wynik końcowy. Jednym z rozwiązań jest obciążenie takiej cząstki karą. Do funkcji celu dodawana jest wartość, która drastycznie oddali wynik od najlepszego rezultatu (dla minimizacji zwiększenie wyniku, a dla maksymalizacji pomniejszenie). Aby zniwelować efekt ucieczki z obszaru dopuszczalnego zastosowana może być prędkość maksymalna  $V_{max}$ , połączona ze współczynnikiem zaciskania (**Eberhart2001a**). Zalecana prędkość maksymalna może być powiązana z rozpiętością zakresu zmiennych projektowych  $V_{max} = X_{max} - X_{min}$ . Drugim stosowanym zabiegiem jest zdefiniowanie warunków brzegowych. Modyfikują one parametry cząstki (położenie lub prędkość) jeżeli znajdzie się ona poza obszarem dopuszczalnych rozwiązań. W literaturze spotykane są cztery podstawowe rodzaje warunków brzegowych: absorbujący (*eng. absorbing wall*), odbijający (*eng. reflecting wall*), tłumiący (*eng. damping wall*) i niewidoczny (*eng. invisible wall*) (**Robinson2004; Huang2005**). Efekt poszczególnych warunków brzegowych przy przekroczeniu przez cząstkę granicy danego wymiaru jest następujący:

- absorbujący - cząstka jest zatrzymywana na granicy, a składowa wektora prędkości jest równa zero

kości w danym wymiarze jest zerowana,

- odbijający - cząstka jest zatrzymywana na granicy, a znak składowej prędkości w danym wymiarze jest odwracany,
- tłumiący - cząstka jest zatrzymywana na granicy, a znak składowej prędkości w danym wymiarze jest odwracany i pomniejszany przez losowy mnożnik z zakresu  $(0, 1)$ ,
- niewidoczny - cząstka nie jest zatrzymywana na granicy, a wektor prędkości nie zmienia swojej definicji. Wartość funkcji celu nie jest wyznaczana.

Na rysunku pokazano efekt oddziaływania na cząstkę każdego z warunków brzegowych w przestrzeni 2D o zmiennych projektowych  $d_1$  i  $d_2$ . W swojej pracy, (**Xu2007**) zbadali dodatkowe warianty warunków opierające się powyższych założeniach, ale bez wymuszonej zmiany położenia cząstki, jedynie modyfikując prędkość. Autorzy podanych prac zgodnie określają warunek tłumiący jako najbardziej uniwersalny, a warunek niewidoczny jako najwydajniejszy w większości problemów.



Rysunek 4.3: Rodzaje warunków brzegowych wpływające na zachowanie cząstki wychodzącej poza zakres rozwiązań dopuszczalnych

## Warunki zakończenia

Algorytm PSO z każdą kolejną iteracją aktualizuje położenie cząstek i pamięć roju. Warunek zakończenia przeszukiwania przestrzeni może odbyć się w różny sposób. Najprostszą metodą jest określenie maksymalnej liczby aktualizacji roju, po której poszukiwanie zostanie zakończone. W tym przypadku na wstępie wiadomym jest ile iteracji zostanie wykonanych i przy znajomości czasu potrzebnego na oszacowanie funkcji celu możliwe jest określenie długości całego procesu optymalizacji. Podstawową wadą tego kryterium jest, że nie odnosi się w żaden sposób do jakości rozwiązania w ciągu trwania obliczeń. (**Zielinski2007**) przedstawili zestaw innych kryteriów, które uwzględniają zachowanie roju w trakcie poszukiwań. Wyróżniono następujące kryteria mogące wpływać na warunek zakończenie algorytmu:

- kryterium postępu - optymalizacja jest zatrzymywana kiedy w określonej liczbie kolejnych iteracji nie nastąpi znaczące polepszenie ekstremum globalnego,
- kryterium ruchu - optymalizacja jest zatrzymywana kiedy położenie bieżącego ekstremum globalnego nie zmienia się istotnie w określonej liczbie kolejnych iteracji,
- kryterium dystrybucji populacji - optymalizacja jest zatrzymywana kiedy cząstki zgrupują się w jednym miejscu. Dystrybucja może być mierzona m. in. przez

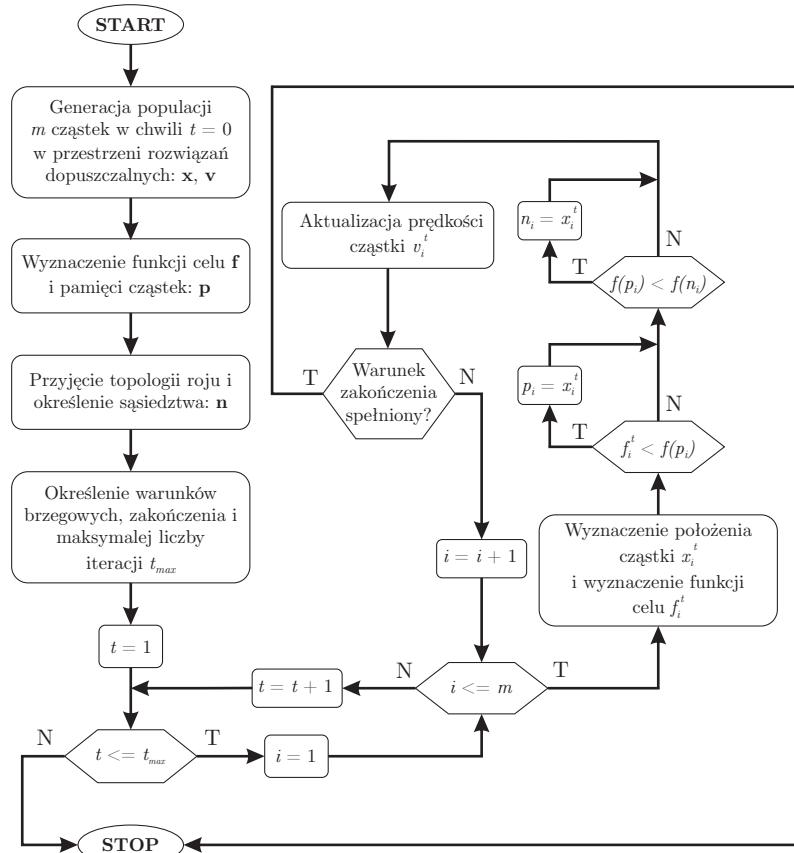
odchylenie standardowe położenia populacji, maksymalny dystans między częst-kami lub rozmiar roju mierzony przez długość boków hiperprostokąta, w któ-rym w całości się mieści.

- kryterium prędkości - optymalizacja jest zatrzymywana kiedy prędkość częstek roju spadnie poniżej wartości minimalnej i nie wzrośnie przez określoną liczbę kolejnych iteracji.

Wszystkie powyższe warunki mogą być łączone i użyte wedle potrzeb w zależności od specyfiki problemu optymalizacji. **Banach2017** określił kryterium prędkości jako najbardziej uniwersalne, ponieważ nie dotyczy położenia częstek roju i nie zależy od rozwiązywanego problemu optymalizacji. Uzasadnił, że nie wymaga ono znajomości wartości progowych najczęściej nieznanej funkcji celu oraz nie wymaga by wszystkie częstki zbiegły w tym samym miejscu.

## Schemat blokowy algorytmu

Podsumowując, algorytm podstawowej wersji metody optymalizacji rojem cząstek (PSO) przedstawiono na rysunku 4.4.



Rysunek 4.4: Podstawowy algorytm optymalizacji jednokryterialnej metodą roju czastek PSO. Przypadek minimalizacji

## 4.4 Zastosowania optymalizacji algorytmem PSO

W literaturze udokumentowano wiele zastosowań algorytmu PSO przy rozwiązywaniu rzeczywistych problemów optymalizacji. Dotyczą one różnych dziedzin nauki: inżynierii, informatyki i telekomunikacji, ekonomii czy medycyny. Przeglądowe prace podsumowujące prace związane z PSO takie jak: **Atyabi2011; CoelloCoello2006; Lalwani2013** wskazują ciągły wzrost liczby publikacji traktujących o wykorzystaniu algorytmów PSO. Nie sposób przytoczyć publikacje ze wszystkich wspomnianych dziedzin, dlatego wymieniono kilka dotyczących problemów inżynierii lądowej. **Hughes2018** zastosowali PSO w procesie kalibracji urządzenia kontrolującego odpowiedź dynamiczną mostu autostradowego. **Seyedpoor2011; Kang2012; Wei2018** wykorzystali optymalizację rojem częstek przy detekcji uszkodzeń konstrukcji. Ciekawe zastosowanie algorytmu przedstawili **Tran-Ngoc2018; Qin2018**, stosując algorytm optymalizacji przy kalibracji modelu numerycznego mostów, na podstawie badań in situ. Z kolei **Dan2015** użyli PSO do identyfikacji siły w wantach mostu podwieszonego, przy braku możliwości stosowania klasycznych rozwiązań z uwagi na dołączone tłumiki.

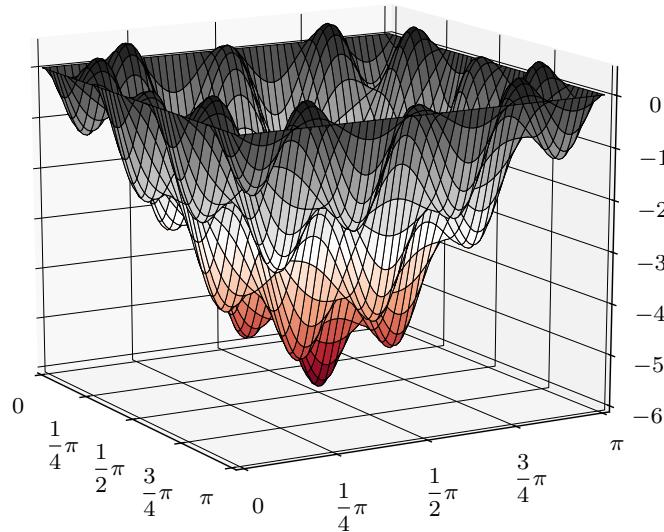
### 4.4.1 Przykład teoretyczny

W celu weryfikacji stosowanej metody przygotowano przykład teoretyczny. Zastosowano wariant minimalizacji funkcji celu za pomocą metody PSO. Zaimplementowano algorytm PSO w języku Python. Do testu wybrano funkcję multimodalną przedstawioną w pracy (**Tesch2016**) i daną wzorem:

$$f(x, y) = -5 \sin x \sin y - 5 \sin 7x \sin 7y \quad (4.4)$$

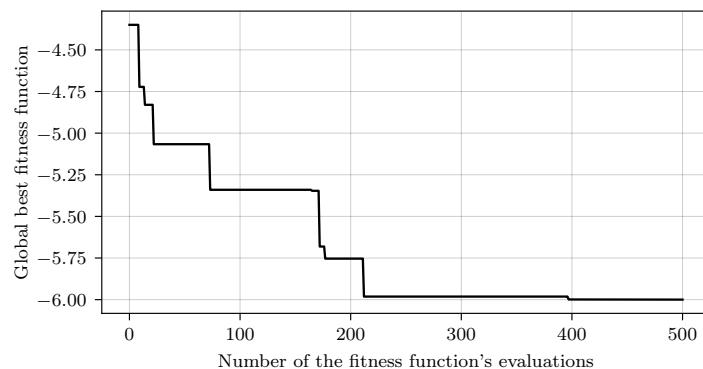
gdzie  $x, y$  tworzą wektor zmiennych projektowych, a wartość funkcji  $f(x, y)$  jest funkcją celu. Funkcję zwizualizowano w przestrzeni 3D na rysunku 4.5. Podobnie jak w pracy źródłowej przedział dopuszczalny dla każdej zmiennej projektowej to  $[0, \pi]$ . Wartość minimalna funkcji w tej dziedzinie jest znana i wynosi  $f_{\min} = -6$ , dla punktu  $(x, y) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

Wygenerowano populację złożoną z 20 częstek. Do generacji użyto wariant korzystający z sekwencji Haltona. Z uwagi na multimodalność funkcji celu zastosowano topologię z rodziny lbest - von Neumanna. Warunki brzegowe przyjęto typu niewidocznego. Parametry wektora prędkości (4.3) ustawiono domyślnie równe:  $\theta = 0.7968$ ,  $\alpha = 1.4962$  oraz  $\beta = 1.4962$ . Zatrzymanie algorytmu nastąpiło po wykonaniu założonej liczby aktualizacji całego roju równej 25. W konsekwencji całkowita liczba ewaluacji funkcji celu przez częstki wynosi  $25 \cdot 20 = 500$ . Na rysunku 4.6 zaprezentowano diagram poprawy najlepszego rozwiązania znalezionego przez rój. Na rysunku 4.7 pokazano 6 etapów z procesu poszukiwania przez rój minimum funkcji. Ostateczna znaleziona wartość minimum globalnego wynosi  $f_{\min, 25} = -5.99$ . Wartość ta została osiągnięta po około 400 ewaluacjach funkcji i jest bardzo bliska znanemu minimum globalnemu. Warto nadmienić, że już po 215 ewaluacjach odnaleziona zostało rozwiązanie o funkcji celu wynoszącej  $f = -5.98$ . Wizualizacja położenia częstek roju w kolejnych iteracjach pokazuje, że wraz z postępem algorytmu, częstki z rozproszonego układu skupiają się konsekwentnie wokół lidera. Topologia von Neumanna spowalnia ten proces. Opoźnia to znalezienie precyzyjnego rozwiązania, ale obszar dopuszczalny jest przeszukany dokładniej. Na kolejnych grafikach widać, że pomimo

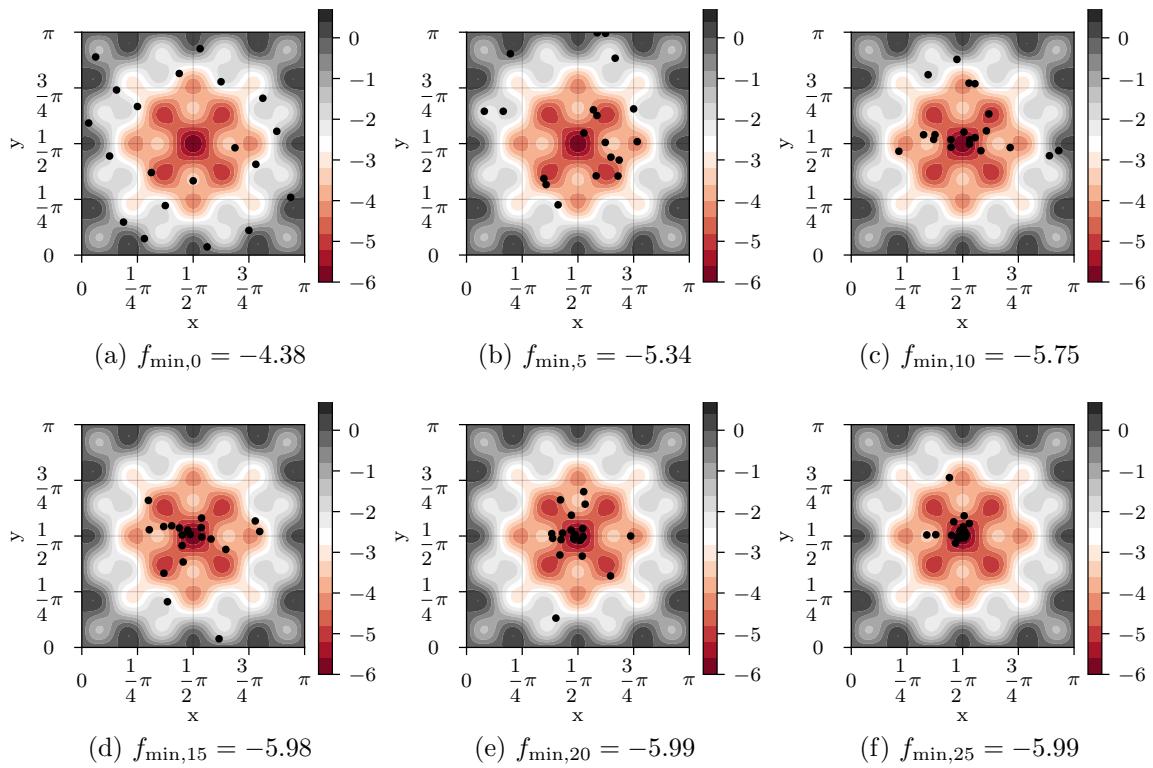


Rysunek 4.5: Wizualizacja funkcji testowej w przestrzeni trójwymiarowej

znalezienia punktu bliskiego teoretycznego minimum globalnego (Rys. 4.7b) wciąż pozostają cząstki, które eksplorują pozostały obszar. Na podstawie powyższego testu uznano, że zaimplementowany algorytm PSO działa poprawnie.



Rysunek 4.6: Diagram postępu roju cząstek w poszukiwaniu minimum globalnego funkcji testowej



Rysunek 4.7: Etapy rozwiązywania testowego problemu optymalizacji dwuwymiarowej za pomocą roju cząstek. Minimum globalne znalezione przez rój oznaczono przez  $f_{\min,t}$ , gdzie indeks  $t$  oznacza liczbę pełnych aktualizacji położenia roju. Za pomocą izomapy pokazano wartość funkcji celu na płaszczyźnie

## 4.5 Optymalizacja wielokryterialna

Jak wspomniano we wstępie rozdziału, rzeczywiste problemy inżynierskie rzadko sprowadzają się do jednego kryterium, którego optymalizacja dostarczy bezkompromisowo jedyne, idealne rozwiązanie. Najczęściej występuje kilka istotnych kryteriów stojących ze sobą w kontrze, które nie osiągają jednocześnie maksimum lub minimum dla tych samych wartości zmiennych projektowych. Przykładem dla konstrukcji budowlanych może być koszt i bezpieczeństwo. Pierwsze z kryteriów zazwyczaj jest minimalizowane, a drugie maksymalizowane. Niestety występuje między nimi konflikt. Z reguły prawidłowe zużycie większej ilości materiału zwiększa koszt i jednocześnie bezpieczeństwo. Przeciwnie mniejszy koszt poniesiony na budowę zmniejsza bezpieczeństwo. Osiągnięcie jednocześnie minimalnego kosztu i maksymalnego bezpieczeństwa jest więc niemożliwe i trzeba zgodzić się kompromis. Jedna z metod radzenia sobie w takich przypadkach została już opisana i polega na liniowej kombinacji kryteriów, sprowadzając problem optymalizacji de facto do jednej funkcji celu. Wadą tego rozwiązania jest konieczność ustalenia skali ważności poszczególnych kryteriów jeszcze przed rozpoczęciem optymalizacji. Poza koniecznością ustalenia wag składników sumy, niekiedy trudno ustalić związki między zmiennymi projektowymi i kryteriami, a następnie sprowadzić wszystkie kryteria do jednego porównawczego, jakim jest na przykład koszt wykonania lub ilość materiału (**Szymczak 1995**). Inną metodą jest rozwiązanie problemu optymalizacji jako wielokryterialnego. Polega ona

na jednoczesnej minimalizacji lub maksymalizacji więcej niż jednej funkcji celu. W konsekwencji zamiast pojedynczego optymalnego rozwiązania - jak to ma miejsce w przypadku optymalizacji jednokryterialnej - otrzymywany jest zestaw wielu rozwiązań. Każde z tych rozwiązań jest optymalne, ponieważ nie jest możliwe polepszenie jednego z kryteriów, bez osłabienia pozostałych. Jest to tak zwany zbiór Pareto, zawierający rozwiązania niezdominowane. Do wyjaśnienia powyższego zdania niezbędne jest przytoczenie kilku formalnych definicji (**CoelloCoello2006**).

Rozpatrzmy problem minimalizacji zestawu  $k$  funkcji celu  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  zależnych od  $D$ -wymiarowego wektora zmiennych projektowych  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})] \quad f_i : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, k \quad (4.5)$$

Dodatkowo niech zbiór  $\mathcal{N}$  jest zbiorem liczb naturalnych takich, że  $\mathcal{N} = [1, \dots, D]$ .

### Definicja 1 (Dominacja Pareto)

Niech dwa wektory  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  są zdefiniowane w przestrzeni  $\mathbb{R}^D$ . W przypadku minimalizacji, wektor  $\mathbf{x}_1$  dominuje nad wektorem  $\mathbf{x}_2$ , jeżeli każdy element  $x_{1,i}$  jest nie większy niż  $x_{2,i}$  dla  $i \in \mathcal{N}$  i istnieje taki element  $x_{1,j}$ , że  $x_{1,j}$  jest mniejszy niż  $x_{2,j}$  dla  $j \in \mathcal{N}$ . Dominację wektora  $\mathbf{x}_1$  nad  $\mathbf{x}_2$  oznacza się przez  $\mathbf{x}_1 \prec \mathbf{x}_2$ .

$$\forall_{i \in \mathcal{N}} x_{1,i} \leq x_{2,i} \wedge \exists_{j \in \mathcal{N}} x_{1,j} < x_{2,j} \quad (4.6)$$

Należy jednak nadmienić, że w kontekście optymalizacji wielokryterialnej, pojęcie dominacji dotyczy przestrzeni funkcji celu, a nie przestrzeni rozwiązań. Optymalny zbiór Pareto zawiera wszystkie rozwiązania  $\mathbf{x}$  w przestrzeni  $\mathbb{R}^D$ , dla których nie istnieje inny punkt dominujący w przestrzeni funkcji celu  $\mathbb{R}^k$ . Graficzną prezentację dominacji w sensie Pareto i Frontu Pareto przedstawiono na rysunku 4.8 dla przestrzeni dwóch funkcji celu.

### Definicja 2 (Zbiór Pareto)

Zbiór Pareto  $\mathcal{PS}$  rozwiązania, jest zbiorem punktów  $\mathbf{x}$ , dla których wśród zestawu rozwiązań dopuszczalnych  $\Omega$  nie istnieje inny punkt dominujący ze względu na wartość funkcji  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ .

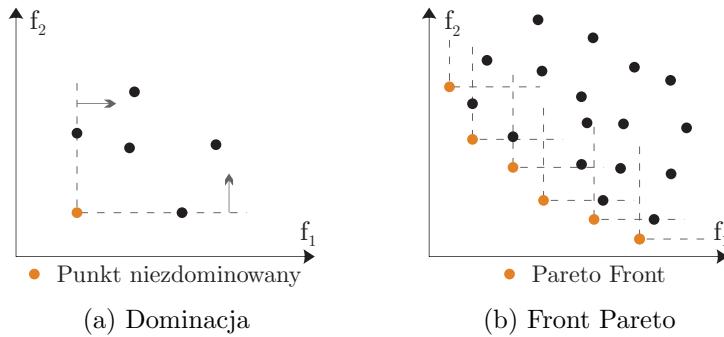
$$\mathcal{PS} = \left\{ \mathbf{x}_j \in \Omega : \forall_{\mathbf{x} \in \Omega} \left( \exists_{i \in \mathcal{N}} f_i(\mathbf{x}) > f_i(\mathbf{x}_j) \vee \forall_{i \in \mathcal{N}} f_i(\mathbf{x}) \geq f_i(\mathbf{x}_j) \right) \right\} \quad (4.7)$$

### Definicja 3 (Front Pareto)

Front Pareto  $\mathcal{PF}$  jest zbiorem punktów  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  w przestrzeni funkcji celu, wyznaczonych dla punktów  $\mathbf{x}$  należących do Zbioru Pareto  $\mathcal{PS}$ .

$$\mathcal{PF} = \left\{ \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^k : \mathbf{x} \in \mathcal{PS} \right\} \quad (4.8)$$

Przyjmując powyższe definicje optymalizacja wielokryterialna sprowadza się więc do znalezienia wszystkich rozwiązań należących do Zbioru Pareto. W ogólności, rozwiązaniem problemów optymalizacji wielokryterialnej może być Front Pareto składający się z ogromnej lub nieskończonej liczby punktów. Algorytmy służące optymalizacji wielokryterialnej działają najczęściej iteracyjnie - jednym z przykładów będzie zastosowany w pracy zmodyfikowany algorytm PSO. Konsekwencją tego,



Rysunek 4.8: Wizualizacja definicji dominacji i Frontu Pareto

w kolejnych iteracjach wyznaczane jest jedynie przybliżenie Frontu Pareto, reprezentowane przez skończony zestaw punktów niezdominowanych. Większość algorytmów wyposażonych jest w Archiwum, w którym przechowywane jest aktualne przybliżenie Frontu Pareto. Archiwum to ma najczęściej stałą, maksymalną objętość (**Banach2017**). W trakcie działania algorytmu wyznaczane są wartości funkcji celu dla nowo wskazanych rozwiązań. Za wskazywanie kandydatów odpowiedzialny jest osobny mechanizm na przykład oparty na PSO. Następnie algorytm sprawdza wzajemną dominację między elementami Archiwum i nowym rozwiązaniem. W przypadku lepszego przybliżenia Frontu Pareto przez nowy punkt, archiwum jest aktualizowane. Jeśli zachodzi taka sytuacja, rozwiązania zdominowane przez nowy wynik są odrzucane, a nowy rezultat jest dodawany do Archiwum. Algorytm powinien gwarantować coraz lepszą jakość rozwiązania. W porównaniu do optymalizacji jednokryterialnej, określenie jakości rozwiązania optymalizacji wielokryterialnej jest znacznie bardziej złożone. **Zitzler2000** podają następujące cele jakie powinny być postawione w problemie optymalizacji wielokryterialnej:

- odległość pomiędzy wyznaczonym rozwiązaniem przybliżonym, a rzeczywistym Frontem Pareto powinna być jak najmniejsza,
- dystrybucja wyznaczonych punktów Frontu Pareto powinna być odpowiednia - najczęściej równomierna,
- liczba wyznaczonych punktów Frontu Pareto powinna być jak największa.

**Banach2017** wskazuje, że warto by algorytm optymalizacji zwracał również uwagę na dobre rozmieszczenie rozwiązań w Zbiorze Pareto, a nie jedynie Frontie Pareto. Wynika to z tego, że wartość funkcji celu może być identyczna dla bardzo oddalonych od siebie rozwiązań w przestrzeni rozwiązań. Taka sytuacja możliwa jest w przypadku okresowych funkcji celu.

Zwięzłe podsumowanie prac z zakresu wykorzystania optymalizacji wielokryterialnej metodami metaheurystycznymi w problemach strukturalnych przedstawiły (**Zavala2014**). W niniejszej pracy zawarto jedynie podstawowe informacje dotyczące jednego z podejść rozwiązywania problemów optymalizacji wielokryterialnej. Szerszy przegląd i porównanie metod dostępne jest w literaturze przedmiotu: (**Miettinen1999; Zitzler2000; Elbeltagi2005; Abido2006; Coello2007; Lalwani2013; Zaman2019**).

## 4.6 Optymalizacja wielokryterialna rojem cząstek

Algorytm służący optymalizacji wielokryterialnej rojem cząstek (*eng. Multi-Objective Particle Swarm Optimization (MOPSO)*) jest modyfikacją oryginalnego algorytmu PSO. Pierwsza publikacja przedstawiająca ten zamysł ukazała się w 1999 roku (**Moore1999**). Następnie nastąpił gwałtowny przyrost prac wprowadzających nowe strategie wyboru liderów, topologie, systemy sprawdzania jakości rozwiązania lub modyfikujące istniejące elementy algorytmu. Szczegółowe podsumowanie prac nad wielokryterialną wersją algorytmu PSO do 2006 przedstawił (**CoelloCoello2006**). Wedle najlepszej wiedzy autora **Lalwani2013** prezentują najnowszy przegląd literatury dotyczący wielokryterialnej optymalizacji PSO. Przedstawili również szereg rzeczywistych problemów, które zostały rozwiązane za pomocą metody MOPSO. Z punktu widzenia algorytmu PSO, występują dwa dodatkowe aspekty, które są wyzwaniem w przypadku wersji optymalizacji wielokryterialnej (**Pulido2005OnTU**):

- wybór i aktualizacja lidera roju spośród wielu kandydatów,
- wskazanie nowych rozwiązań aby zachować dobrą dystrybucję Frontu Pareto.

Wybór lidera roju nie jest rzeczą oczywistą w kontekście wielokryterialnego algorytmu PSO i musi ulec modyfikacji. Wynika to z większej od jedności liczby równorzędnych optymalnych rozwiązań. Podstawowym i najprostszym podejściem przy doborze lidera roju jest wybór spośród wszystkich niezdominowanych rozwiązań. Jednakże zupełnie losowy wybór lidera z zestawu niezdominowanych rozwiązań może prowadzić do utraty odpowiedniej dystrybucji rozwiązań w Froncie Pareto. Istnieje wiele podejść pozwalających na ocenę jakości rozwiązania i w konsekwencji jego wyboru jako lidera. Popularnym jest ocena zagęszczenia rozwiązań niezdominowanych w przestrzeni funkcji celu. Aby zachować równomierność Frontu Pareto predestynowane do pozycji lidera są cząstki, występujące w małym zagęszczeniu. Wśród najpopularniejszych metod, zaproponowano pomiar zagęszczenia wprost przez ocenę odległości między sąsiednimi cząstkami (**Deb2002**). Polega on na posortowaniu wszystkich rozwiązań Frontu Pareto osobno względem poszczególnych funkcji celu. Następnie dla każdej funkcji celu tworzona jest lista odległości pomiędzy sąsiadami danej cząstki. Dla każdej cząstki, sumowane są wyliczone znormalizowane odległości między sąsiadami. Ostatnie kandydatami na lidera są cząstki charakteryzujące się największą sumą odległości, jako te, w których sąsiedztwo jest najmniej zagęszczone. Inną popularną metodą jest określenie zagęszczenia cząstek w przestrzeni przez funkcję rdzenia (**Deb1989**). Istniejące rozwiązania zostały zebrane i szerzej opisane w pracy (**CoelloCoello2006**). Warto również zwrócić uwagę na wybór najlepszego położenia przechowywanego w pamięci cząstki. W odróżnieniu do algorytmu jednokryterialnego, nowy wynik może być nie tylko *lepszy* lub *gorszy*, ale również *nieokreślony*. Kiedy nowe położenie cząstki jest dominujące w sensie Pareto względem dotychczas zapamiętanego, następuje aktualizacja pamięci. Kiedy nowe położenie jest zdominowane przez zapamiętane, aktualizacja nie ma miejsca. W trzecim przypadku, kiedy żadne z rozwiązań nie dominuje drugiego, **CoelloCoello2002** zaproponowali by wybrać losowo jedno z dwóch rozwiązań.

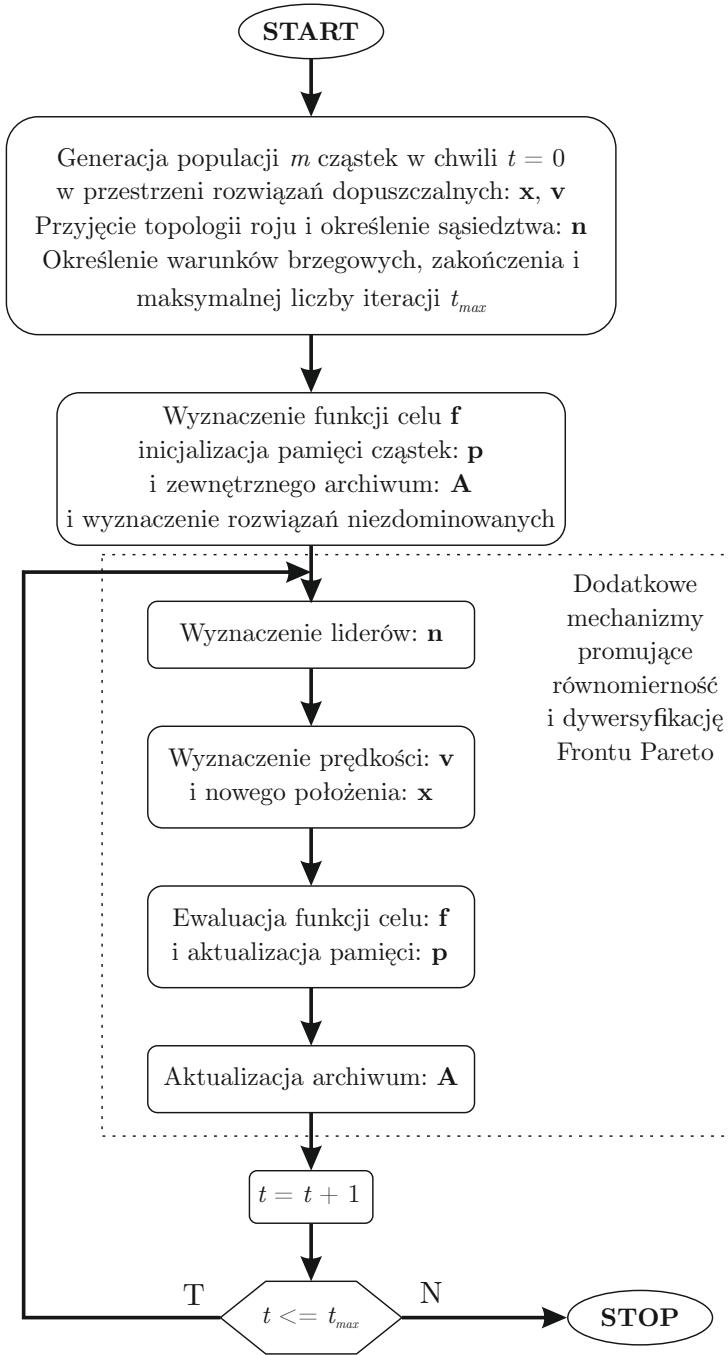
We ogólnym opisie podstaw optymalizacji wielokryterialnej nazwano zbiór przechowywanych rozwiązań niezdominowanych jako Archiwum. Ma ono za cel przechować niezdominowane rozwiązania w trakcie całego procesu optymalizacji i ostatecznie może służyć jako rezultat końcowy. Oczywistym rozwiązaniem jest przechowywa-

nie wszystkich otrzymanych wyników niezdominowanych, aktualizując je w trakcie przebiegu algorytmu. Aktualizacja musi zapewnić uwzględnienie nowych niezdominowanych rozwiązań w archiwum i usunięcie tych, które zostały zdominowane przez nowe częstki. Jednakże przechowywanie wszystkich wyników wiąże się z dużą złożonością obliczeniową aktualizacji. Aktualizacja musi być wykonywana po każdym przesunięciu wszystkich częstek roju, a jej koszt rośnie kwadratowo wraz ze wzrostem liczby rojów i liniowo z liczbą zmiennych decyzyjnych. Jak zasugerowano wcześniej, z tego względu archiwum najczęściej jest ograniczane do stałej, maksymalnej objętości (**Coello2007**). Przykładowe metody pozwalające na selekcję odrzucanych z archiwum elementów zostały opisane w (**Zitzler1999; Knowles2000**). Istnieją również inne, mniej popularne metody utrzymania i rozwoju dobrze rozłożonych rozwiązań niezdominowanych. Niemniej wśród wszystkich najbardziej popularnych jest stosowanie zewnętrznego archiwum. Opis pozostałych wykracza poza zakres tej pracy.

Wyborem nowych kandydatów w MOPSO zajmuje się oczywiście algorytm PSO. Jego potwierdzoną właściwością jest szybka zbieżność do optimum globalnego, co z reguły jest pożądaną cechą. Jednakże w przypadku optymalizacji wielokryterialnej niebezpieczne może być przedwczesne utknienie roju w minimum lokalnym. Z tego względu stosowane są dodatkowe mechanizmy zwiększające dywersyfikację częstek w przestrzeni. Pierwszy z nich został już wspomniany i polega na odpowiednim doborze liderów. Drugi jest oparty na określeniu cech algorytmu PSO, takich jak parametry prędkości oraz topologia roju, sprzyjających dywersyfikacji frontu Pareto i opóźnieniu zbiegania roju. Trzecia metoda oparta jest na zewnętrznej ingerencji w lot częstki. Mechanizm ten nazywany jest turbulencją (**Fieldsend**) i jest pewnego rodzaju odzwierciedleniem mutacji w algorytmach genetycznych. W ramach turbulencji do wzoru (4.3) dodawany jest składnik zupełnie losowy, niezależny od wcześniejszej trajektorii lotu częstki. Takie działanie potrafi wyrwać zastały w minimum lokalny rój. Jeśli częstka ulegająca turbulencji znajdzie w nowym położeniu lepsze rozwiązanie to zachęci resztę roju do podążania za nią. Dodatkowo, cały proces przeszukiwania przestrzeni z reguły odbywa się szybciej (**Stacey2003**).

## Schemat blokowy algorytmu MOPSO

Na rysunku 4.9 pokazano algorytm MOPSO stworzony na podstawie pracy (**CoelloCoello2002**). Jest to jedna z pierwszych prac, gdzie autorzy dokonali próby dostosowania algorytmu PSO do rozwiązywania problemów wielokryterialnych. Jednakże rozważając kolejne prace powstające na temat algorytmu MOPSO, przedstawiony algorytm jest najpopularniejszą bazą do niezliczonych modyfikacji. Można więc wnioskować, że struktura algorytmu nie straciła na aktualności co świadczy o jej uniwersalności.

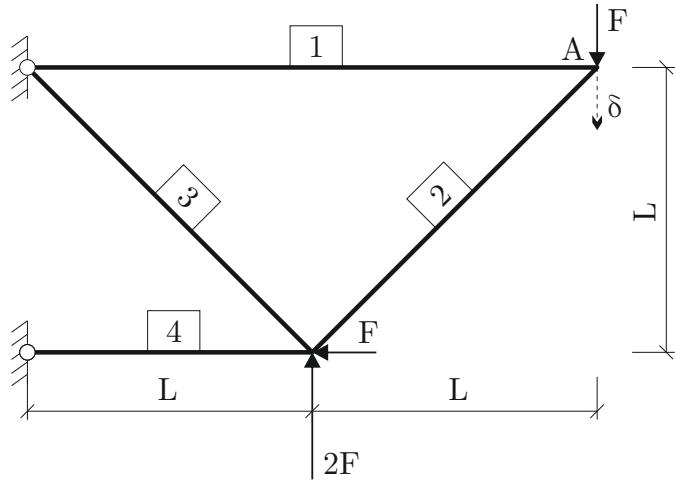


Rysunek 4.9: Bazowy algorytm wielokryterialnej optymalizacji rojem cząstek (MOPSO)

#### 4.6.1 Przykład teoretyczny

Podobnie jak w przypadku wersji jednokryterialnej optymalizacji, wykonano przykład teoretyczny sprawdzający działanie zaimplementowanego algorytmu MOPSO. Jako wzorzec zaczerpnięto rozwiązanie problemu optymalizacji z pracy (**Zavala2014**). Przedmiotem optymalizacji jest kratownica, składająca się z czterech prztów i obciążona jak na rysunku 4.10. Kratownica jest opisana na siatce kwadratowej o boku  $L$ . Problem optymalizacji opisany jest przez dwie funkcje celu:  $f_1(\mathbf{x})$  - objętość

materiału zastosowanego do budowy kratownicy i  $f_2(\mathbf{x})$  - przemieszczenie węzła A kratownicy pod obciążeniem zewnętrznym. Obie funkcje celu są minimalizowane. Wektor zmiennych projektowych stanowią pola przekrojów poszczególnych prętów  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]$ . Parametry systemu stanowią: długość  $L = 200 \text{ cm}$ , wartość obciążenia zewnętrznego  $F = 10 \text{ kN}$ , moduł sprężystości materiału  $E = 2 \cdot 10^5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$  oraz maksymalne naprężenia dopuszczalne  $\sigma = 10 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$ .

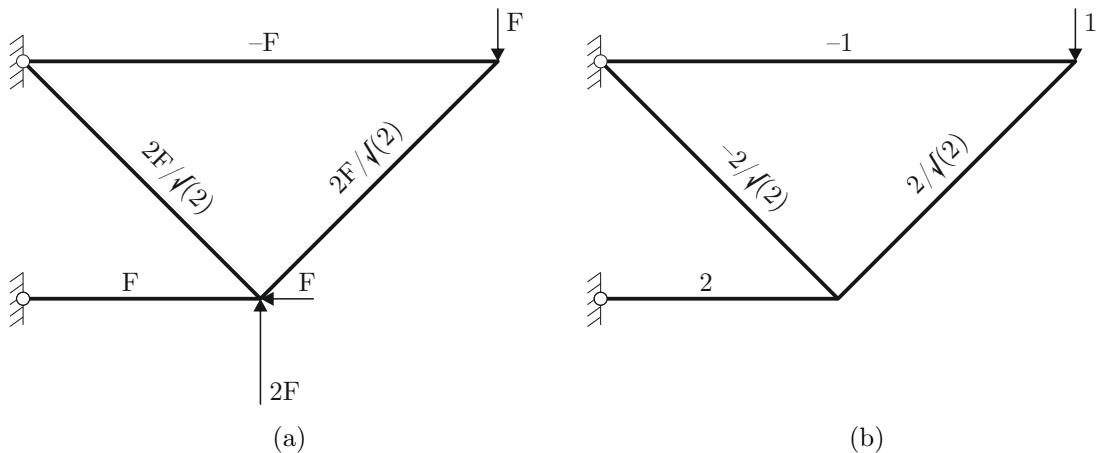


Rysunek 4.10

Wartość funkcji celu  $f_1$  została obliczona wprost przez iloczyn pól przekrojów i długości prętów:

$$f_1(\mathbf{x}) = L \cdot (2x_1 + \sqrt{2}x_2 + \sqrt{2}x_3 + x_4) \quad (4.9)$$

Aby uzależnić przemieszczenie węzła A od zmiennych projektowych posłużono się zasadą prac wirtualnych. Wyznaczono rozkład sił wewnętrznych od obciążenia zewnętrznego i obciążenia wirtualnego w miejscu badania przemieszczeń (Rys. 4.11). Następnie wyznaczono wartość przemieszczeń zgodnie z wzorem (4.10).



Rysunek 4.11: Wartości sił normalnych w prętach kratownicy: (a) od obciążień zewnętrznych, (b) od obciążenia wirtualnego

$$\begin{aligned}
 f_2(\mathbf{x}) = \delta &= \sum_{n=1}^4 \frac{N_i \bar{N}_i}{EA_i} L_i = \frac{1}{E} \left( \frac{2FL}{x_1} + \frac{4\sqrt{2}FL}{2x_2} - \frac{4\sqrt{2}FL}{2x_3} + \frac{2FL}{x_4} \right) \\
 &= \frac{2FL}{E} \left( \frac{1}{x_1} + \frac{\sqrt{2}}{x_2} - \frac{\sqrt{2}}{x_3} + \frac{1}{x_4} \right)
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Autorzy przykładu zaproponowali ograniczenie przestrzeni rozwiązań dopuszczalnych przez podanie dopuszczalnych maksymalnych i minimalnych naprężeń w pre-tach. Po przekształceniach ograniczenia dla zmiennych projektowych podano następujące:

$$\begin{aligned}
 \frac{F}{\sigma} &\leq x_1, x_4 \leq \frac{3F}{\sigma} \\
 \frac{\sqrt{2}F}{\sigma} &\leq x_2, x_3 \leq \frac{3F}{\sigma}
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Algorytm MOPSO oprogramowano w języku Python. Zastosowano wersję opisaną w punkcie ???. Parametry prędkości PSO zostały przyjęte tak samo jak w punkcie 4.4.1. Metodą z użyciem sekwencji Haltona wygenerowano populację 70 cząstek i wykonano 40 iteracji aktualizacji całej populacji. Z uwagi na niewymagające obliczeniowo funkcje celu nie założono maksymalnej objętości zewnętrznego archiwum i zawyżono potrzebną liczbę wszystkich iteracji. Dodatkowo wszystkie wyliczone rozwiązania zapisano w bazie rozwiązań (*eng. knowledgebase*). Wprowadzono modyfikację wyboru lidera roju, pozwalającą poprawić równomierność rozmieszczenia rozwiązań niezdominowanych. Mechanizm wzorowany był na pomiarze odległości pomiędzy częstками niezdominowanymi w przestrzeni wartości (**Deb2002**) i składał się z następujących kroków:

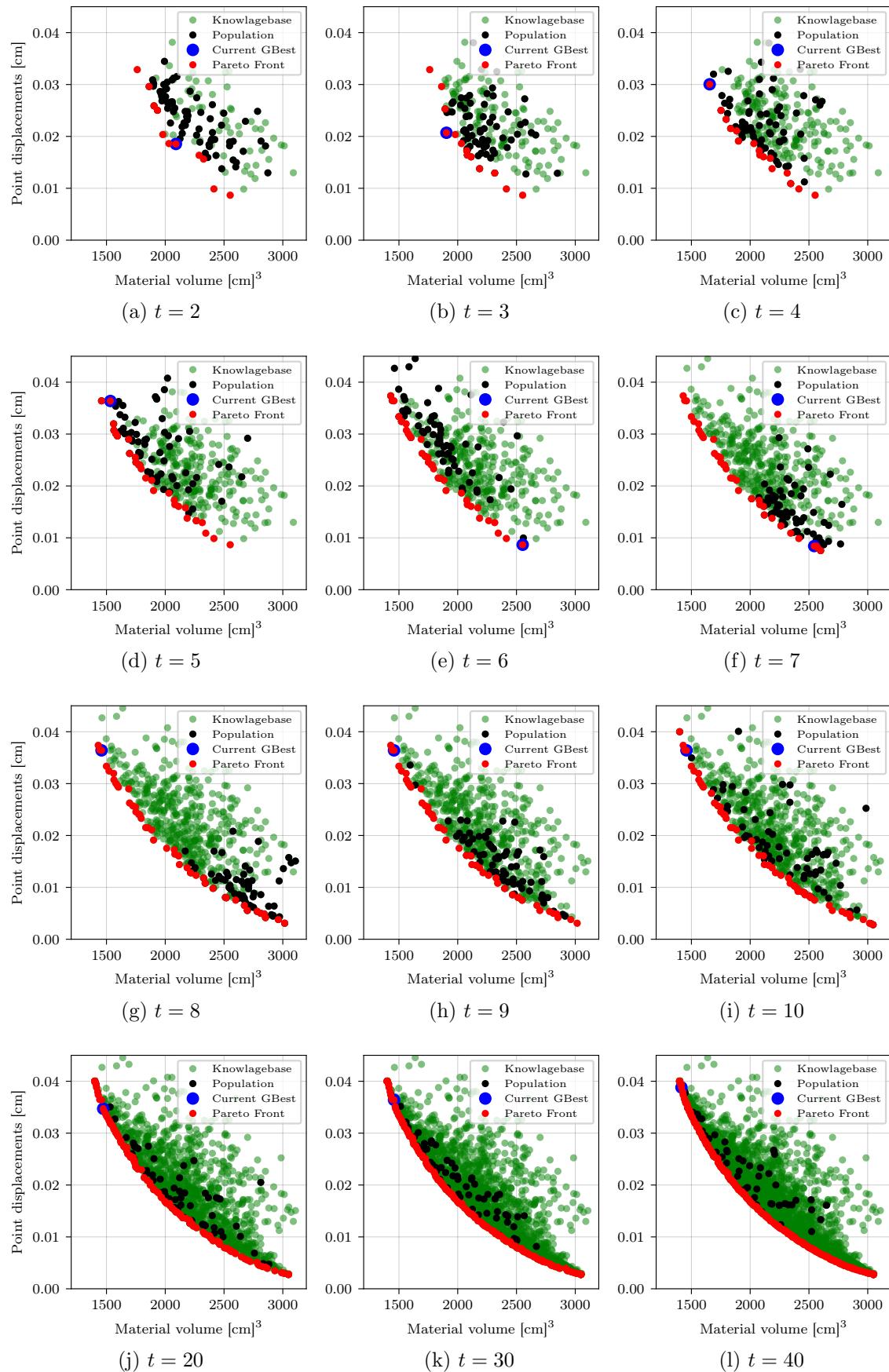
1. Posortowanie rozwiązań przechowywanych w archiwum według jednej z funkcji celu.
2. Normalizacja osi. Wyznaczenie różnicy pomiędzy największą, a najmniejszą wartością dla każdej funkcji celu oddzielnie. Następnie obliczenie ilorazu wartości danej funkcji celu przez odpowiadającą jej wyznaczoną w kroku 1. różnicę.
3. Wyznaczenie odległości w przestrzeni funkcji celu pomiędzy sąsiednimi, znormalizowanymi, posortowanymi według funkcji celu częstkom.
4. Losowy wybór pomiędzy częstkom cechującymi się największą wzajemną odlegością.

Normalizacja osi została dodana, ponieważ funkcje celu cechowały się innym rzędem wartości. Objętość materiału wyznaczana była w tysiącach, a przemieszczenie w dziesiątych częściach. Mimo zupełnie innego znaczenia powyższych liczb (inne jednostki), kiedy rozpatruje się odległości pomiędzy punktami wzduż Frontu Pareto, wartości dużo większe dominują nad mniejszymi. Przy stosowaniu mechanizmów opartych na pomiarze zagęszczenia i odległości zalecane jest takie zmodyfikowanie funkcji celu by wyznaczone wartości wszystkich funkcji celu były tego samego rzędu. Na rysunku 4.12 zaprezentowano wizualizację przebiegu procesu optymalizacji MOPSO. Każdy z wykresów prezentuje stan rozwiązania po podanej pełnej iteracji  $t$  zmiany położenia cząstek. Kolorem czarnym oznaczono aktualne położenie roju. Kolor czerwony pokazuje dotychczas znalezione rozwiązania niezdominowane - przybliżenie Frontu Pareto. Niebieskim punktem zaznaczono aktualnie obowiązującego lidera roju. Dodatkowo kolorem zielonym oznaczono historię wszystkich

dotychczasowych rozwiązań (knowlagebase). Rezultaty testu są zgodne z rozwiązaniem podanym w (**Zavala2014**). Można również stwierdzić, że Front Pareto został odwzorowany równomiernie oraz dokładnie.

## 4.7 Optymalizacja wspomagana uczeniem maszynowym

Optymalizacja wielokryterialna korzystająca nawet z szybko zbiegających algorytmów wymaga najczęściej wielokrotnych ewaluacji funkcji celu. W przypadku rzeczywistych problemów inżynierskich wyznaczanie wartości funkcji celu często jest złożonym procesem, który wymaga długotrwałych symulacji numerycznych. Ostatecznie otrzymanie dobrej jakości frontu Pareto może okazać się bardzo trudne, albo wręcz niemożliwe z uwagi na czas wymagany na rozwiązanie zadania. Generalnie stosowane są dwie ścieżki, które pozwalają poradzić sobie z tym problemem: zrównoleglenie obliczeń przez podział na podproblemy i zwiększenie efektywności algorytmu przez zatrudnienie surogatów (*eng. surrogates*) (**Haftka2016**). Autorzy definiują surogatów jako proste modele algebraiczne dopasowane do dotychczas wyznaczonych wartości funkcji i ograniczeń. Do przewidywania przybliżonego rozwiązania wykorzystywane są metody aproksymacji bazujące na Procesach Gaussowskich (*eng. Gaussian Process (GP)*) (**Rasmussen2006; Rasmussen2010**). Opierają się one na zbudowaniu bazy rozwiązań, na podstawie której algorytm uczy się i jest w stanie przewidywać wyniki bez standardowej ewaluacji funkcji celu. Każda funkcja celu jest modelowana niezależnie, a algorytm dostarcza wartość funkcji oraz miarę niepewności tego rozwiązania dla nowych zmiennych projektowych. W kontekście optymalizacji rojem częstek, przewidywane rozwiązania mogą być ocenione jako prawdopodobnie należące do frontu Pareto i zostać zaproponowane jako kandydaci do wyznaczenia funkcji celu w kolejnych iteracjach. Przykłady takiego podejścia pokazują metody: Pareto Active Learning (PAL) (**Zuluaga2013**) i w wersji rozbudowanej  $\epsilon$ -Pareto Active Learning ( $\epsilon$ -PAL) (**Zuluaga2016**) oraz Active Learning of Pareto Front (ALP) (**Campigotto2013**). **Lv2017; Lv2019** zaproponowali algorytm optymalizacji wielokryterialnej oparty na PSO i technice  $\epsilon$ -PAL: Multi-Objective Particle Swarm Algorithm (MOPSAL). Takie podejście potrafi znaczowo ograniczyć liczbę obliczeń funkcji celu i przyspieszyć optymalizację wymagających problemów nawet o 70% (**Zuluaga2016**).



Rysunek 4.12: Etapy rozwiązywania testowego problemu optymalizacji wielokryterialnej metodą roju cząstek

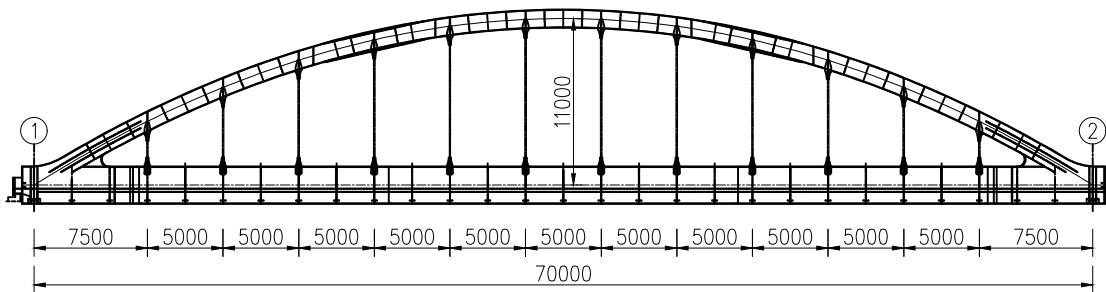
# Rozdział 5

## Wiadukt WK2 w ciągu Pomorskiej Kolei Metropolitalnej

### 5.1 Charakterystyka obiektu

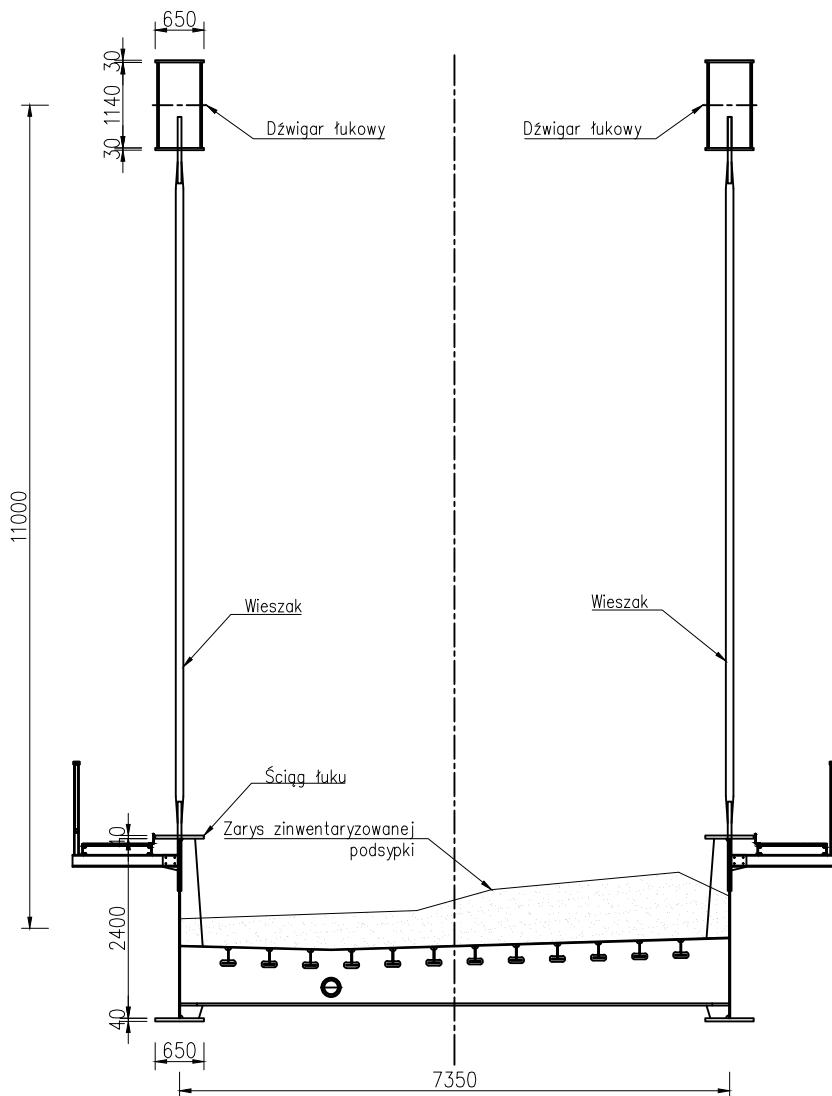
Obiekt badawczy stanowi kolejowy wiadukt łukowy w ciągu linii Pomorskiej Kolei Metropolitalnej w km 1+696,02. Przęsło wiaduktu stanowi stalowy ustój łukowy z jazdą dołem. Widok z boku na konstrukcję stalową wiaduktu pokazano na rysunkach 5.1. Główne wymiary charakteryzujące konstrukcję to:

- rozpiętość teoretyczna:  $L_t = 70.00\text{m}$ ,
- długość całkowita:  $L_c = 71,60\text{m}$ ,
- wysokość w kluczu:  $H = 11.00\text{m}$ ,
- rozstaw osiowy dźwigarów:  $B_t = 7.35\text{m}$ ,
- szerokość całkowita:  $B_c = 10.21\text{m}$ .



Rysunek 5.1: Widok z boku na konstrukcję stalową dźwigara łukowego wiaduktu WK3

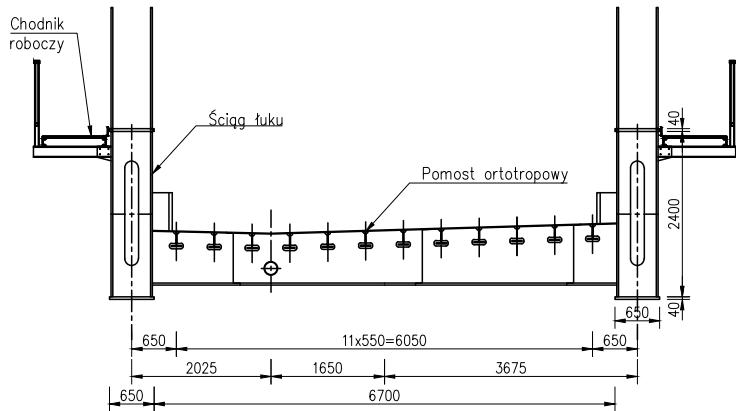
Przekrój poprzeczny dźwigarów łukowych zaprojektowano jako skrzynkowy (rys. 5.2). Pomost wykonano jako ortotropowy, z blachy wzmocnionej żebrami podłużnymi i poprzecznymi o przekroju teowym. Poprzecznice rozmieszczone w rozstawie 2.5 m. Ściąg łuku stanowią belki dwuteowe, po jednej dla każdego dźwigara łukowego. Przekrój ściągu zmienia się z dwuteowego na skrzynkowy w strefie podporowej. Na rysunku 5.3 przedstawiono przekrój poprzeczny pomostu i ściągu w strefie podporowej.



Rysunek 5.2: Przekrój poprzeczny konstrukcji stalowej wiaduktu WK2 w środku rozpiętości

W zrealizowanym wariantie pomost został podwieszony do łuku za pomocą prętowych, prostych wieszaków o średnicy 100 mm. Po każdej ze stron zamontowano 12 wieszaków w rozstawie co 5 m. Wieszaki zostały połączone z dźwigarem i ściągiem sztywnym połączeniem spawanym. Rzeczywisty widok zrealizowanego przęsła pokazano na rysunku 5.4, detale konstrukcyjne w obrębie strefy podporowej na rysunku 5.5, a połączenie wieszaka ze ściągiem na rysunku 5.6.

Na obiekcie po wybudowaniu przeprowadzono badania odbiorcze. Próbne obciążenia odbyły się w dniu 14.04.2015 i zostały przeprowadzone przez zespół naukowców z Politechniki Śląskiej i Politechniki Gdańskiej (**azinski2015**). Wykonano badania statyczne i dynamiczne. Wyniki jednych i drugich pomiarów posłużą jako elementy kalibracji modelu lub spełnią rolę punktu odniesienia dla wyników badań zrealizowanych w ramach tej pracy. W ramach pomiarów statycznych zrealizowano dwa interesujące, z punktu widzenia tej pracy, ustawienia obciążenia. Ustawienie U1 z obciążeniem zorientowanym symetrycznie na obiekcie oraz ustawienie U2 z obciążeniem wywołującym maksymalne ugięcia w 1/4 rozpiętości przęsła. Pomiary prze-



Rysunek 5.3: Przekrój poprzeczny przez pomost w strefie podporowej wiaduktu WK2



Rysunek 5.4: Widok od strony lotniska na wiadukt WK2

mieszczeń wykonywano w 6 punktach zlokalizowanych w 1/4, 1/2 i 3/4 rozpiętości przesła, po obu jego stronach. Czujniki zamocowano do konstrukcji w osiach ściągów, na dolnych lub górnych pasach. Obciążenie statyczne stanowiły dwie lokomotywy spalinowe typu: SM-48 i BR232. Pomierzone ugięcia statyczne zostaną użyte jako dodatkowe kryterium kalibracji modelu numerycznego. W ramach badań dynamicznych mierzono przyspieszenia konstrukcji po wymuszeniu obciążeniem impulsowym. Impuls generowany przez upadek jednej osi koparki dwudrogowej i zeskoków drezyny z progu. Na postawie przebiegów drgań swobodnych zidentyfikowano częstotliwości drgań własnych przesła i towarzyszące im tłumienia. Do identyfikacji użyto algorytmu ERA. Zidentyfikowane częstotliwości drgań i tłumienia przesła posłużą do porównania z wynikami badań przeprowadzonymi w ramach tej pracy.



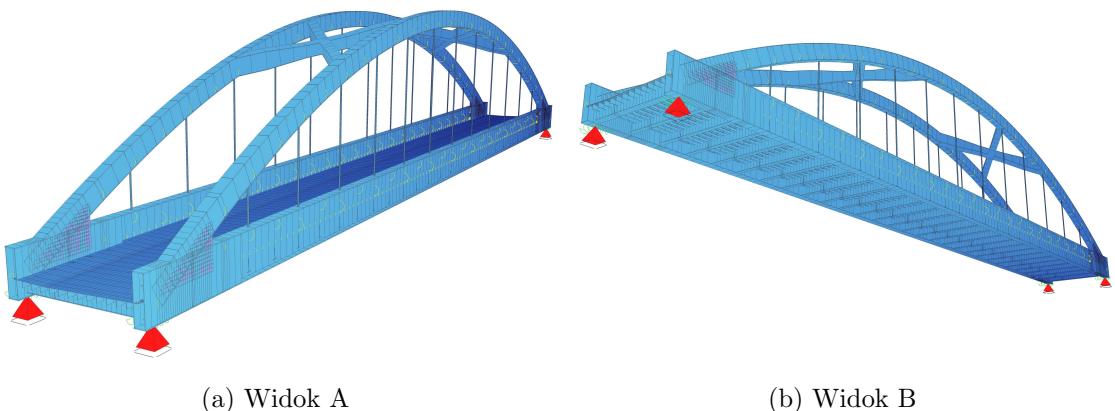
Rysunek 5.5: Szczegóły konstrukcyjne w obrębie połączenia łuku ze ściągiem



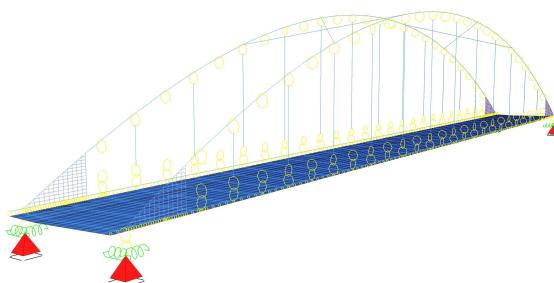
Rysunek 5.6: Detal połączenia wieszaka łuku z pomostem

## 5.2 Budowa modelu numerycznego

Na potrzeby analiz numerycznych zbudowano model MES w środowisku SOFiSTiK (rys. 5.7). Model przestrzenny składa się kilku rodzajów elementów skończonych. Z jednowymiarowych elementów belkowych wykonano łuki, stężenia, belki ściągu, wzmocnienia wezgłowii i żebra pomostu ortotropowego. Z elementów kratowych stworzono wieszaki. Blachę pomostu wykonano z czterowęzłowych elementów powłokowych. Połączenia pomiędzy końcami wieszaków i osiami łuku oraz ściągu zrealizowano przez połączenia kinematyczne translacji i rotacji węzłów. Podparcia pionowe w miejscach łożysk mostu zrealizowano za pomocą sztywnych więzów węzłów. Nie zablokowano przesuwów podłużnych i poprzecznych za pomocą blokady przemieszczeń. Zamiast tego na obu kierunkach zamocowano elastyczne elementy o bardzo dużej sztywności. Dostosowanie do istniejących warunków łożyskowania opisane zostało w dalszej części rozdziału. Usztywnienia wezgłowii zamodelowano za pomocą rusztu elementów belkowych o przekroju składającym się z dwóch blach odsuniętych od siebie na szerokość przekroju skrzynkowego łuku. Elementy strukturalne konstrukcji (takie jak ściągi, pomost, dźwigary łukowe, elementy podparcia itd.) podzielono w modelu na grupy pozwalające odnosić się do nich jako całości. Przekroje elementów belkowych przyjęto zgodnie z dostępną dokumentacją (!!). Wymiary przekrojów zmiennych po długości interpolowane liniowo. Widoczne na rysunku (5.8) dodatkowe połączenia kinematyczne są przygotowaniem dla możliwości podłączenia innych konfiguracji wieszaków.

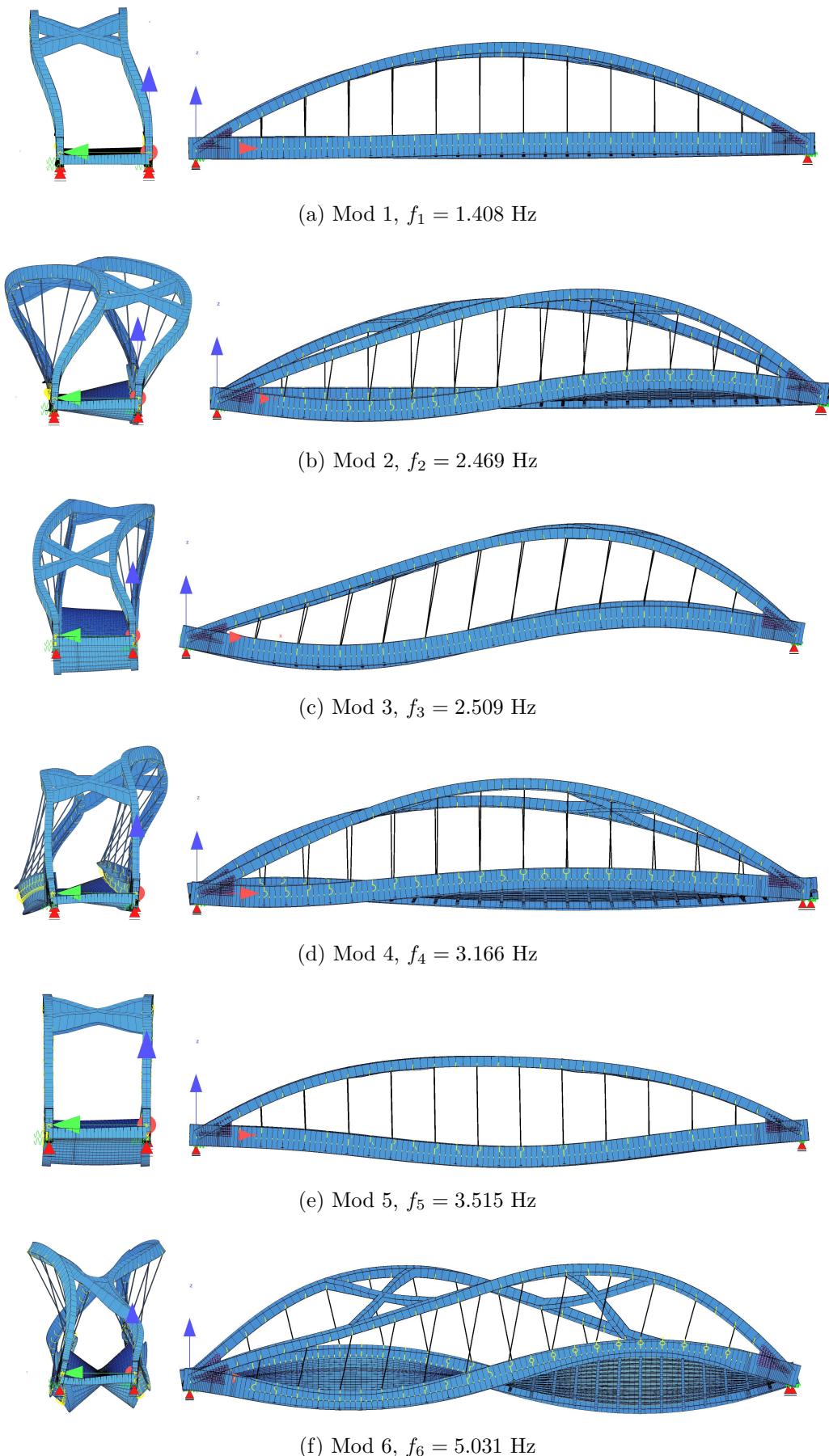


Rysunek 5.7: Wizualizacja przestrzennego modelu numerycznego wiaduktu WK2 Pomorskiej Kolei Metropolitalnej

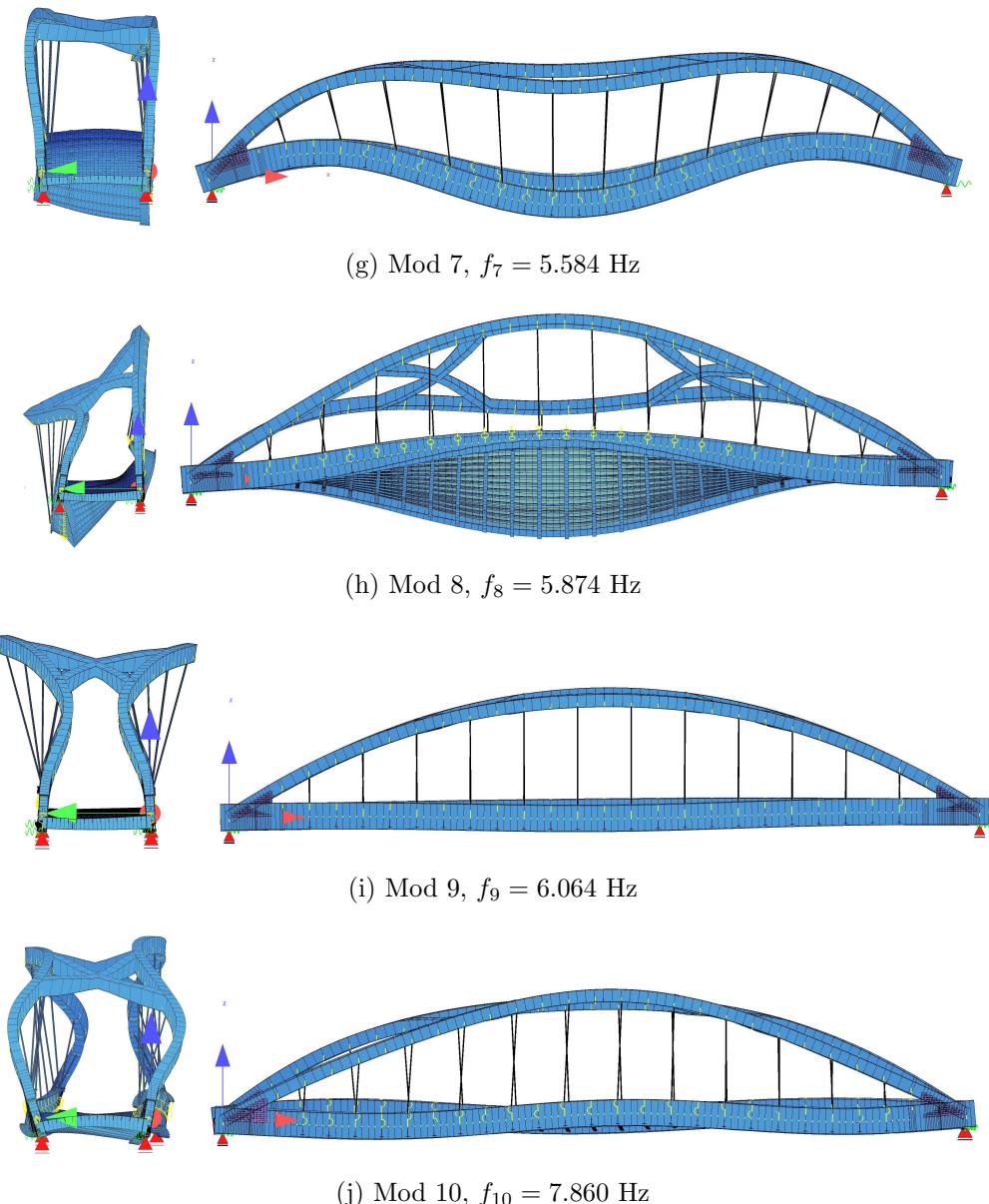


Rysunek 5.8: Schemat statyczny modelu numerycznego wiaduktu WK2 Pomorskiej Kolei Metropolitalnej

Obciążenie ciężarem własnym konstrukcji zostało wygenerowane na podstawie ciężarów wprowadzonych przekrojów elementów liniowych bądź grubości elementów powłokowych. Dodatkowe elementy takie jak przepony i zakotwienia wieszaków dodane zostały jako obciążenia węzłowe. Osobny przypadek obciążenia stanowi pomost roboczy dodany jako ekwiwalentne obciążenie węzłowe i momenty zginające. Ostatnim obciążeniem stałym jest ciężar tłucznia. Z uwagi na ułożenie toru po łuku w planie, rozkład tłucznia na obiekcie nie jest regularną, symetryczną bryłą. Dostępna dokumentacja obiektu nie dostarcza dokładnych informacji o ułożeniu podsypki na pomoście. Podsypka została w prosty sposób zinwentaryzowana przez pomiar grubości w niektórych punktach charakterystycznych. Na rysunku 5.2 zaprezentowano zinwentaryzowany układ tłucznia w przekroju przesłowym. Zastosowana metoda pomiaru objętości tłucznia nie jest dokładna i na pewno nie odzwierciedla realnego rozkładu ciężaru podsypki na obiekcie. Z tego względu podzielono obciążenie tłucznem na dwa osobne przypadki: równomiernie rozłożone obciążenie na całym pomoście i obciążenie równomierne o szerokości (!!!) usytuowane wzdłuż osi toru. Wartość obciążenia tłucznem przyjęto z normy (!!!).



Rysunek 5.9: Postaci i częstotliwości drgań własnych wiaduktu WK2 - Model wstępny



Rysunek 5.9: Postaci i częstotliwości drgań własnych wiaduktu WK2 - Model wstępny. Kont.

### 5.3 Identyfikacja modalna wiaduktu WK2

Przed przystąpieniem do procesu optymalizacji układu statycznego dźwigara łukowego model należało skalibrować. Z uwagi na zakres planowanych analiz kluczowe dla analizy dynamicznej jest aby model w odpowiedni sposób odzwierciedlał rzeczywistość w zakresie parametrów modalnych. Mając do dyspozycji rzeczywisty obiekt, zdecydowano o wykonaniu badań terenowych, które pozwolą na identyfikację częstotliwości i postaci drgań własnych oraz towarzyszącego im tłumienia. Obiekt jest w ciągłej eksploatacji. Z tych względów zdecydowano o wykorzystaniu Operacyjnej Analizy Modalnej do identyfikacji parametrów modalnych przesła. Przed przystąpieniem do badań przygotowano plan zawierający kluczowe punkty, bez których spełnienia badania mogą zakończyć się niepowodzeniem lub wyniki mogą być trudne w

interpretacji. **Brincker2015** sporządzili listę zaleceń, które należy wypełnić w trakcie przygotowań eksperymentu OMA aby zakończył się on powodzeniem. Podobne zalecenia w swojej pracy sformułował **Poprawa2018**. W kontekście założonych celów i wybranego obiektu badawczego główne z nich to:

- opracowanie strategii prowadzenia badań i akwizycji danych,
- uzgodnienia administracyjne - wstęp na obiekt i możliwość prowadzenia badań pod ruchem,
- dobranie sprzętu pomiarowego.

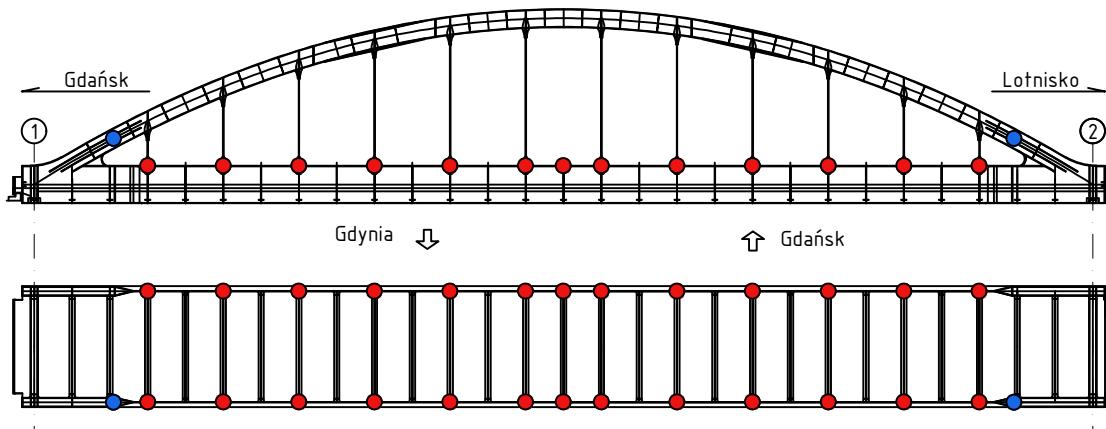
Zarządca obiektu zezwolił na prowadzenie badań pod ruchem w towarzystwie sygnalisty. Średnie natężenie ruchu na obiekcie w trakcie badań to około 1 przejazd na 30 min. Wybór sprzętu pomiarowego ograniczał się do zastosowania posiadanej sprzętu do akwizycji przyspieszeń opisanego w punkcie (!!!). Najistotniejszym punktem przygotowania badań było opracowanie strategii badań. Według **Brincker2015** plan badań OMA powinien zawierać następujące punkty:

- sporzązoną siatkę pomiarową,
- kolejność ustawień czujników w seriach pomiarowych,
- określenie liczby osób potrzebnych do przeprowadzenia eksperymentu,
- zapewnienie bezpieczeństwa w trakcie badań,
- określenie parametrów akwizycji danych (częstotliwość próbkowania, długość pomiarów, liczba powtórzeń serii pomiarowych itd.)

## Wybór punktów pomiarowych

Dostępny system pomiarowy składał się z dwóch akcelerometrów 3-osiowych i z dwóch czujników 1-osiowych. Mając do dyspozycji ograniczoną liczbę jednocześnie mierzonych punktów należało przeprowadzić symulację najlepszego rozmieszczenia punktów pomiarowych na obiekcie. Przykłady metod pozwalających na optymalne rozmieszczenie punktów pomiarowych w analizach dynamicznych zaprezentowano w literaturze i najczęściej opierają się one na wyznaczeniu reprezentatywnego wskaźnika, dzięki któremu da się porównać różne ustawienia. Między innymi **Kammer1991; Papadopoulos1998** zaproponowali użycie Modalnej Energii Kinetycznej (*eng. Modal Kinetic Energy*), **Udwadia1994** macierzy informacyjnej Fisher'a (*eng. Fisher Information Matrix*), a **Penny1994; Allemand2003** macierzy MAC dla zestawu modów. **Zhang2017** przedstawili zwięzłe zestawienie powyższych metod i zaproponowali opcję optymalizującą lokalizację punktów pomiarowych przy wielu ustawieniach pomiarowych, zarówno dla punktów pomiarowych jak i punktów referencyjnych. Autorzy zwracają również uwagę, że przy wielu punktach pomiaru scisła ocena wszystkich możliwych ustawień jest wymagająca obliczeniowo bądź niemożliwa. Z tego względu stosowane są algorytmy heurystyczne bądź meta-heurystyczne.

W niniejszej pracy zastosowano metodę wykorzystującą kryterium MAC (**Penny1994**). Podobne postępowanie przedstawił w swojej pracy **Poprawa2018**. Polega ono na wyznaczeniu teoretycznych postaci drgań własnych z dostępnego modelu MES. Dla zbioru wszystkich możliwych położen czujników odczytywane są przemieszczenia znormalizowane danej postaci drgań. Ze zbioru możliwych położen wybierane są punkty, gdzie umieszczone mają zostać czujniki. Posiukując się opisem postaci drgań w wybranych punktach tworzona jest macierz MAC. Każda postać porównuje się ze

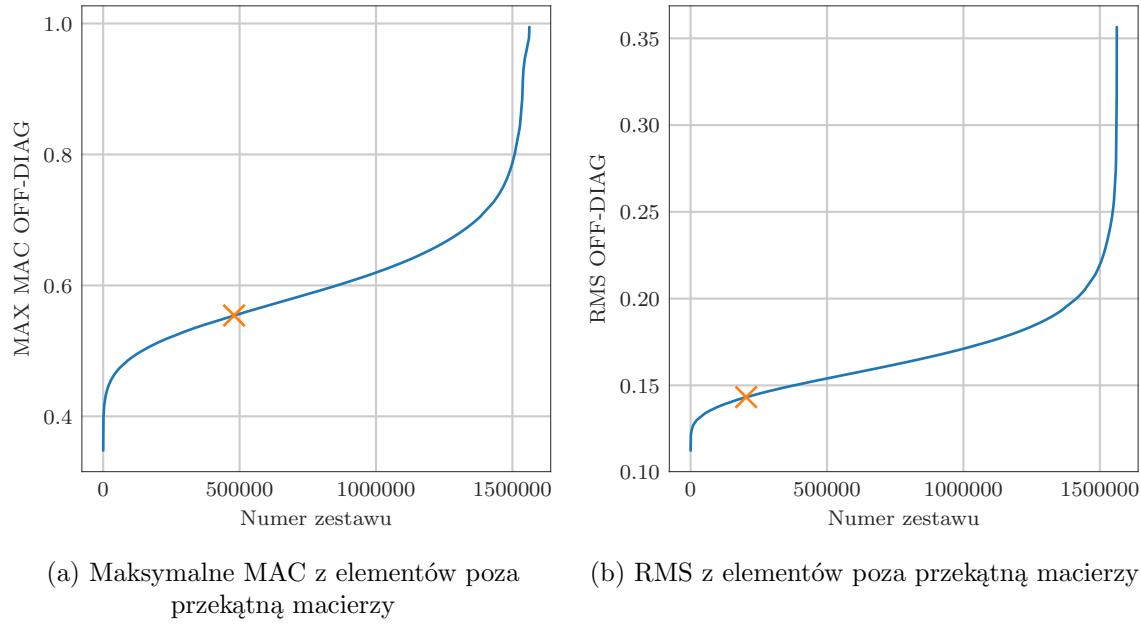


Rysunek 5.10: Lokalizacje dozwolone przy doborze punktów pomiarowych

wszystkimi innymi i z samą sobą. W ten sposób na przekątnej macierzy pojawiają się wartości równe 1 co oznacza oczywiste, idealne dopasowanie według kryterium MAC dla równych wektorów. Poza przekątną, wartości MAC mieszczą się w przedziale 0 - 1. Celem analizy jest dobór punktów pomiarowych tak by poza przekątną wartości były możliwie małe. Przy małym dopasowaniu, postaci będą miały szanse być zidentyfikowane jednoznacznie przy mocno ograniczonej liczbie punktów pomiarowych i bliskim położeniu modów w dziedzinie częstotliwości. Dla każdego rozwiązania należy wyznaczyć wskaźnik, który pozwala ocenić zbiór punktów względem innych. **Penny1994** zaproponowali w jednym z wariantów maksymalną wartość MAC wśród elementów poza przekątną macierzy oraz średnią kwadratową (RMS)<sup>1</sup> ze wszystkich elementów powyżej przekątnej macierzy MAC. Im niższa wartość maksymalna i im niższa średnia kwadratowa tym lepiej.

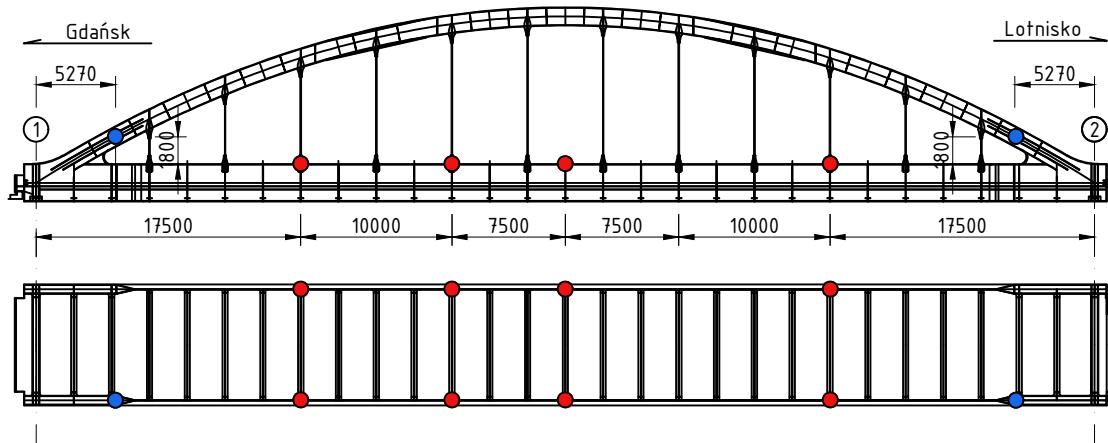
Z uwagi na ograniczony czas dostępu do obiektu ustalonono, że całość badań musi być zrealizowana w 3 ustawieniach dostępnych czujników. W przypadku wiaduktu, akcelerometry 3-osiowe potraktowano jako 2-osiowe. Odrzucono pomiar wzdłuż osi podłużnej obiektu jako nieistotny. W tej sytuacji jeden czujnik 2-osiowy posłużył jako punkt referencyjny mierzący drgania pionowe i poprzeczne. Pozostałe 4 punkty pomiarowe mogły być zmieniane w poszczególnych ustawieniach. Ostatecznie przy trzech ustawieniach możliwy był pomiar w 14 punktach pomiarowych ( $6 + 4 + 4$ ) w tym 10 na kierunku pionowym  $Z$  i 4 na kierunku poprzecznym  $Y$ . Kolejnym koniecznym przy doborze siatki pomiarowej ograniczeniem było to, że dostęp do konstrukcji był możliwy jedynie z pomostu. Z uwagi na występowanie modów związanych głównie z bocznym ruchem łuków (rys. 5.9) narzucono, że 4 punkty pomiarowe  $2Y$  i  $2Z$  zostaną zamocowane bezpośrednio na łuku. Uwzględniając powyższe założenia pozostało do dyspozycji 8 punktów pomiarowych  $Z$  i 2 punkty pomiarowe  $Y$ . Punkty  $Y$  są związane z  $Z$  w ramach obudowy czujnika 2-osiowego, zaniechano więc doboru lokalizacji z uwagi na punkty  $Y$  i skupiono się tylko na kierunku  $Z$ . Na rysunku 5.10 kolorem czerwonym zaznaczono zbiór wszystkich dozwolonych do wyboru punktów. Kolorem niebieskim zaznaczono punkty zarezerwowane dla czujników mocowanych do łuku. Punków czerwonych jest 26 i należy z nich wybrać 8. Wykonano kombinację bez powtórzeń i uzyskano 1562275 zestawów lokalizacji czujników. Dla każdego

<sup>1</sup>Średnią kwadratową wyznaczono zgodnie z definicją z równania:  $x_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2}{n}}$



Rysunek 5.11: Wskaźniki oceniające jakość wyboru zestawu punktów pomiarowych dla wszystkich analizowanych kombinacji

zestawu wyznaczono macierz MAC uwzględniając 10 pierwszych modów z modelu MES, a następnie RMS i maksymalny element każdej macierzy. Zestawy posortowano względem każdego parametru i wyniki przedstawiono graficznie na rysunku 5.11. Logicznym wyborem punktów byłoby wzięcie pod uwagę ustawień charakteryzujących się minimalną wartością jednego z parametrów. Jednakże prowadząc badania terenowe należy brać pod uwagę czynniki takie jak ułożenie kabli, możliwości systemu pomiarowego do łączenia punktów pomiarowych, przejście przez czynną linię kolejową. Z tego powodu zaproponowano układ czujników intuicyjnie pozwalających na dobrą identyfikację modalną, a jednocześnie gwarantujący komfort w montażu i kontroli przez jedną osobę. Wybrane punkty pokazano na rysunku 5.12. Dla wybranego zestawu punktów wyznaczono macierz MAC (Rys. 5.13) i wskaźniki: RMS i maksymalną wartość MAC. Wskaźniki zaznaczono na rysunku 5.11 pomarańczowym krzyżykiem, pokazując jakość dokonanego wyboru wśród wszystkich możliwych. Na podstawie wartości RMS można stwierdzić, że narzucony wariant charakteryzuje się niską wartością parametru i jego dalsze optymalizowanie kosztem utrudnień w trakcie pomiarów, ocenione jako nieopłacalne. Należy również zaznaczyć, że wartość RMS elementów poza przekątną macierzy MAC mierzy jedynie średnią zależność wszystkich par wektorów. Nie uwzględnia wielkości amplitud poszczególnych modów w punktach i ich znaczenia na ostateczne zachowanie dynamiczne kładki. W przedmiotowym przypadku zamocowano punkty pomiarowe w miejscach, gdzie kryterium RMS jest jednocześnie niskie (Rys. 5.11) i przemieszczenia modalne dla głównych modów giętnych i skrętnych pomostu są bliskie ekstremalnym (Rys. 5.9).



Rysunek 5.12: Wybrane do badań punkty pomiarowe



Rysunek 5.13: Macierz MAC dla pierwszych dziesięciu wektorów postaci drgań własnych, odczytanych z modelu dla wybranych punktów pomiarowych

### Parametry akwizycji danych

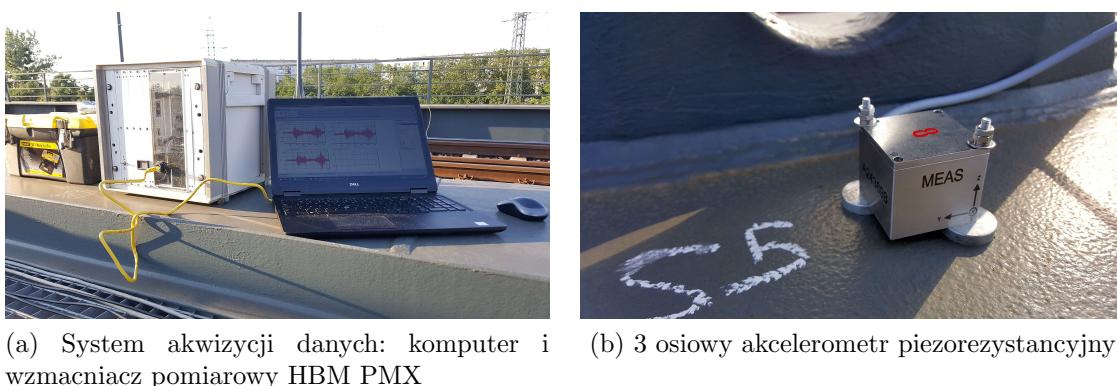
Przed przystąpieniem do badań wyznaczono podstawowe parametry pozwalające na przeprowadzenie poprawnego eksperymentu OMA. Posługując się formułami (3.93 - 3.93) określono minimalną częstotliwość próbkowania jako  $f_{s,min} = 2.4 \cdot 8 = 19.2\text{Hz}$  i minimalny czas prowadzenia pomiarów w jednym ustawieniu jako  $T_{min} = \frac{10}{0.005 \cdot 1.4} = 1429\text{s} = 23.8\text{min}$ . Ostatecznie zdecydowano o prowadzeniu pomiarów ze znacznym nadpróbkowaniem o częstotliwości  $f_s = 300\text{Hz}$  i w seriach czasowych 20 do 30 min.

## Przebieg badań

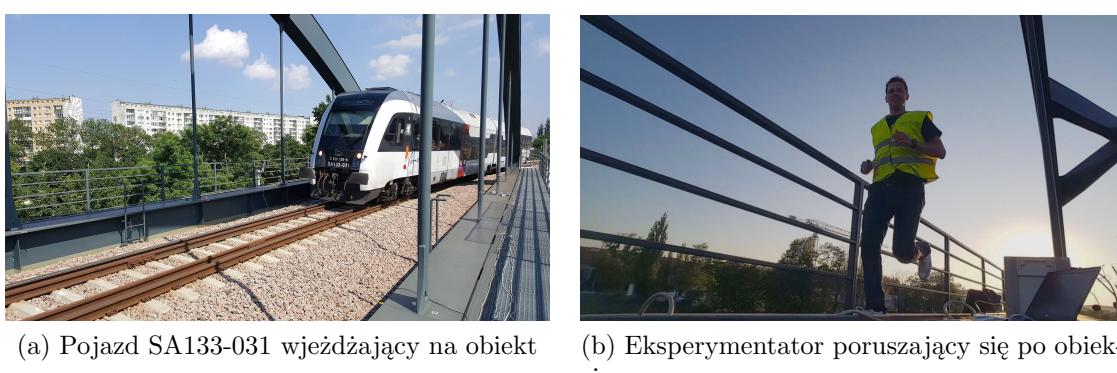
Badania na obiekcie przeprowadzone zostały w dniu 17 czerwca 2019 r. Wykorzystano zestaw pomiarowy opisany w rozdziale 3.4.4. Zestaw w trakcie badań pokazano na rysunku 5.14. Pomiary wykonano zgodnie z planem. Akwizycję danych podzielono na 3 ustawienia. Akwizycja danych w każdym ustawieniu wynosiła od 20 do 30 min. Punkty pomiarowe w poszczególnych ustawieniach oznaczono na rysunku 5.12. Warunki atmosferyczne były stabilne: brak odczuwalnych podmuchów wiatru, silne operowanie słońca.

## Środki obciążeniowe

W trakcie badań na obiekcie odbywał się standardowy dla PKM ruch pociągów pasażerskich. Pomiędzy przejazdami, w asyście sygnalisty eksperymentator przemieszczał się biegając i podskakując po obiekcie. 5.15. Porównanie amplitud drgań bez wymuszenia i z dodatkowym wymuszeniem pokazano na rysunku ???. Z punktu widzenia pomiaru drgań środowiskowych należy zwrócić uwagę na pomniejsze oddziaływanie występujące przy braku obciążeń kolejowych na obiekcie. Pod obiektem odbywał się ruch w ciągu magistralnej linii kolejowej nr 202. W odległości około 150 m od wiaduktu, niemal równolegle przebiega główna arteria Gdańsk - aleja Grunwaldzka, na której ciągu dnia panuje stały, znaczny ruch samochodowy. W podobnej odległości od obiektu panowały prace budowlane z wykorzystaniem ciężkiego sprzętu.



Rysunek 5.14: System pomiarowy użyty do identyfikacji modalnej wiaduktu WK2



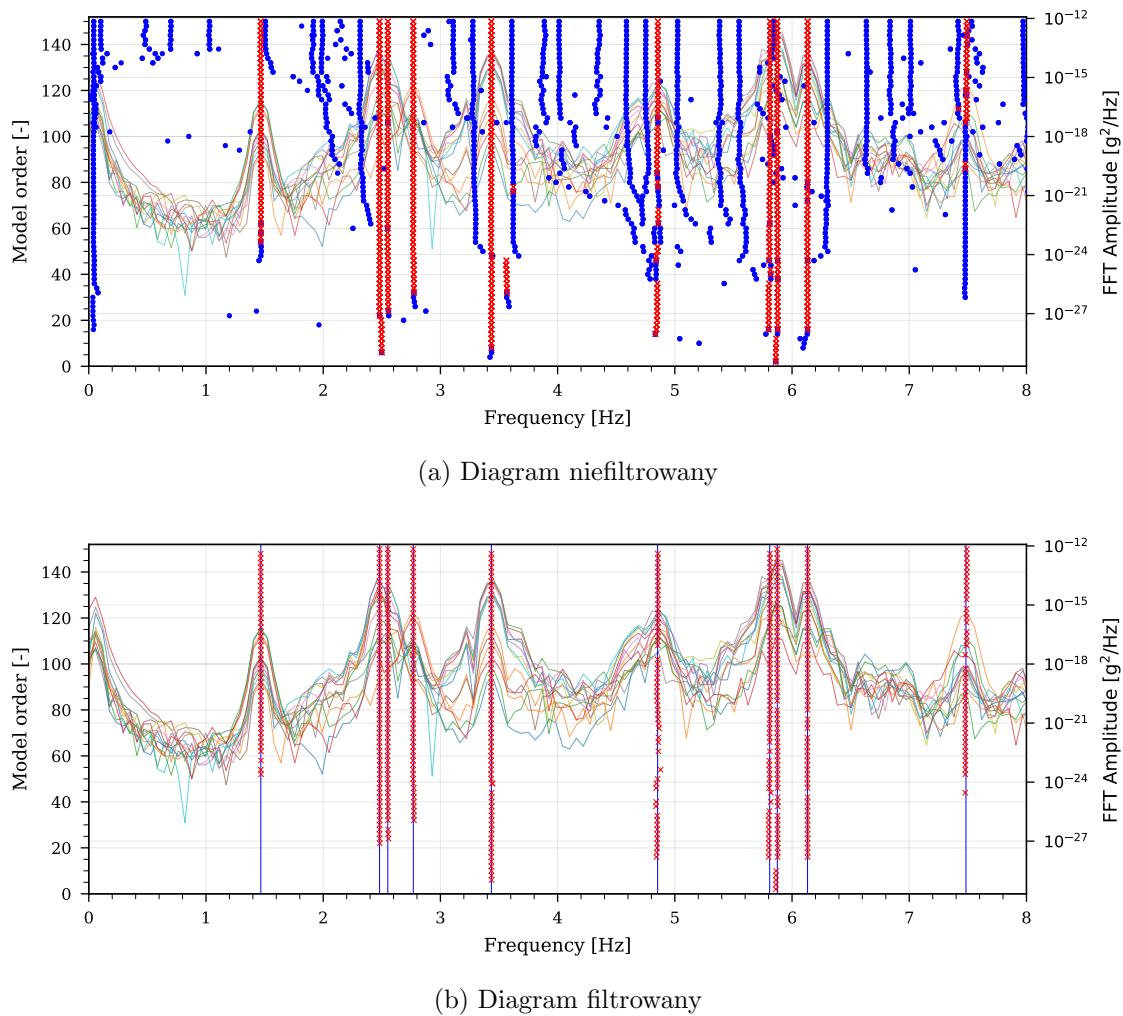
Rysunek 5.15: Obciążenia w trakcie badań obiektu WK-2

## Analiza i rezultaty badań

Zarejestrowane sygnały poddano analizie OMA metodą NExT-ERA. W procesie iteracyjnym przyjęto parametry metody pozwalające uzyskać stabilne rozwiązania. Uwzględniając wyniki z analizy modalnej modelu teoretycznego (rys. 5.9), stwierdzono że niektóre częstotliwości drgań własnych są bardzo bliskie. **Caicedo2011** w takiej sytuacji proponuje obniżenie częstotliwości próbkowania sygnału. Zabieg ten zwiększa szanse na zidentyfikowanie blisko położonych modów przez uwzględnienie w analizie mniejszego, całkowitego zakresu częstotliwości. Zastosowano resampling do próbkowania 30Hz. Szerokość okna FFT przy obliczaniu funkcji korelacji przyjęto jako 1024. Wybrane okno przy zmniejszonej częstotliwości próbkowania pozwoliło uzyskać funkcje korelacji o długości około 17s. Wymiary macierzy Hankela przyjęto jako  $r = 110$  i  $s = 150$ . Uwzględniono w ten sposób w macierzy Hankela niespełna 9s odpowiedzi impulsowej konstrukcji danej funkcjami korelacji. Taki czas pozwala na uwzględnienie kilkunastu okresów drgań modu o najniższej częstotliwości. Na rysunku 5.16 przedstawiono diagramy stabilizacyjne metody w wersji filtrowanej i niefiltrowanej dla rzędu maksymalnego równego  $n = 150$ . Przy tworzeniu diagramów zastosowano następujące kryteria poprawności rozwiązania:

- maksymalna różnica częstotliwości (3.84):  $\Delta f \leq 0.005$ ,
- maksymalny tłumienia (3.85):  $\Delta \xi \leq 0.03$ ,
- minimalne kryterium MAC i MPC (3.86):  $MPC \geq 0.95$      $MAC \geq 0.95$

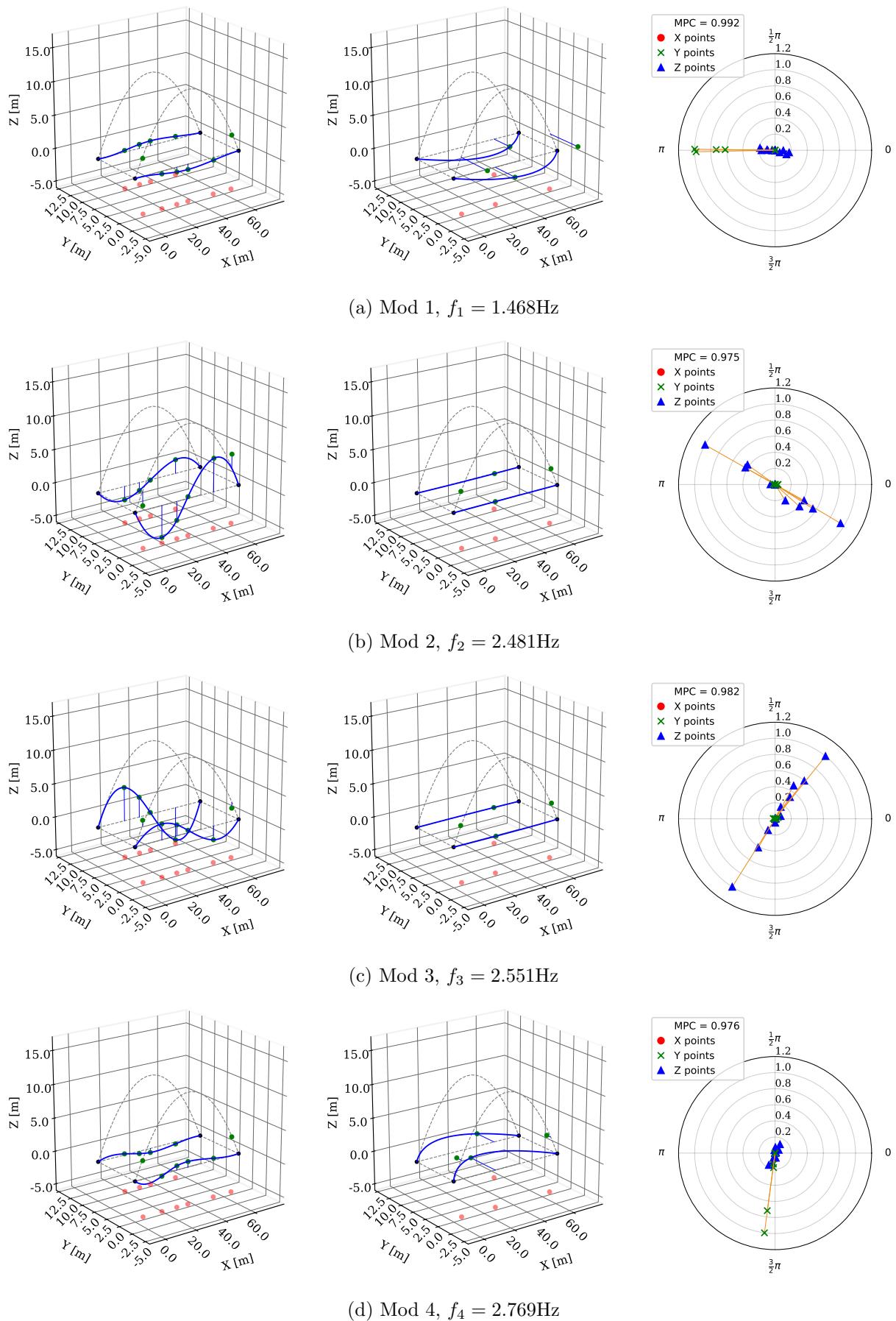
Zidentyfikowano 10 pierwszych modów o częstotliwościach mniejszych niż 8 Hz. Pomimo zidentyfikowania również modów o wyższych częstotliwościach dalsze rozważania ograniczono do pierwszych dziesięciu. Z praktycznego punktu widzenia, dla obiektów mostowych jedynie kilka najniższych modów ma znaczący wpływ na odpowiedź dynamiczną konstrukcji. Charakterystyki zidentyfikowanych modów przedstawiono na wykresach 5.17 i w tabeli 5.1. Pierwszych 10 zidentyfikowanych częstotliwości drgań własnych jest zbliżonych do wyznaczonych analitycznie ze wstępnego modelu MES (Rys. 5.9). Wartości Logarytmicznego Dekrementu Tłumienia wahają się od 1.3% do 7.7%. Biorąc pod uwagę, że Wiadukt WK2 jest konstrukcją stalową z korytem wypełnionym podsypką, rezultaty te nie wzbudzają zastrzeżeń. Zidentyfikowane postaci drgań pozwalają odróżnić od siebie mody, ale wyraźnie cierpią z uwagi na zbyt słabe odwzorowanie postaci. Postaci związane z drganiami poprzecznymi łuków identyfikowane są przez węzły zlokalizowane blisko wezgłowii i przez przemieszczenia pomostu realizujące się przez połączenie łuków ze ściągiem za pomocą wieszaków. Pomimo wspólnej normalizacji przemieszczeń modalnych pionowych i poprzecznych, wartości dla punków na łukach nie są znacznie większe niż przemieszczenia pomostu. Utrudnia to jednoznaczne powiązanie dla bliskich sobie modów z postaciami uzyskanymi w modelu teoretycznym. Gdyby to było możliwe, zamocowanie punktów pomiarowych na łuku w większej liczbie i w wyższych partiach mogłoby istotnie ułatwić identyfikację postaci i dalsze działania związane z kalibracją modelu. Podsumowując, identyfikację uznano za udaną i pozwalającą na ocenę konstrukcji i kalibrację modelu numerycznego.



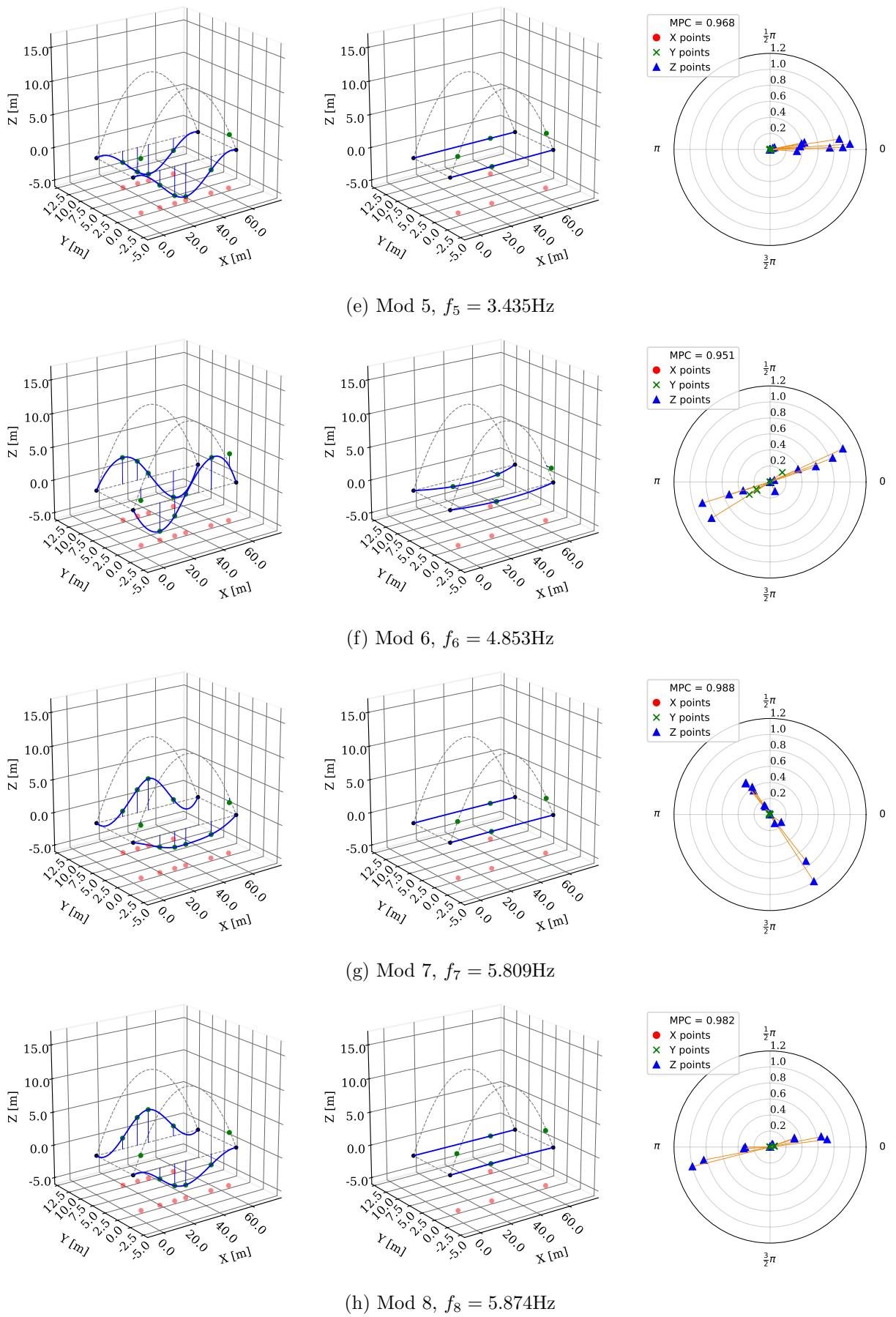
Rysunek 5.16: Diagramy stabilizacyjne metody NExT-ERA w badaniach wiaduktu WK2

Tablica 5.1: Zidentyfikowane charakterystyki modalne wiaduktu WK2

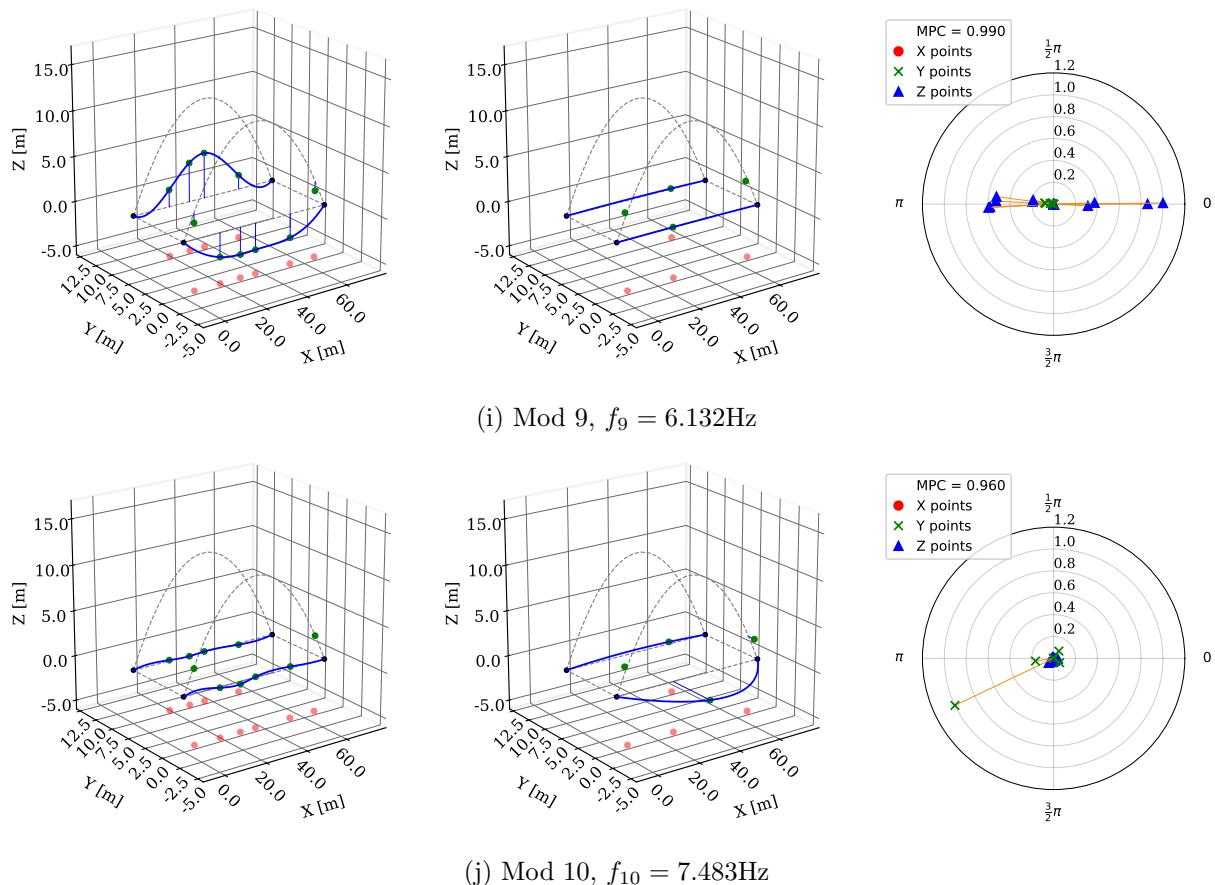
	Mod 1	Mod 2	Mod 3	Mod 4	Mod 5	Mod 6	Mod 7	Mod 8	Mod 9	Mod 10
Częstotliwość [Hz]	1.468	2.481	2.551	2.769	3.435	4.853	5.809	5.874	6.132	7.483
Liczba tłumienia [-]	0.007	0.009	0.006	0.011	0.012	0.012	0.005	0.005	0.002	0.004
LDT [-]	0.043	0.053	0.037	0.070	0.077	0.077	0.028	0.031	0.013	0.024



Rysunek 5.17: Zidentyfikowane charakterystyki modalne wiaduktu WK2



Rysunek 5.17: Zidentyfikowane charakterystyki modalne wiaduktu WK2 kont.



Rysunek 5.17: Zidentyfikowane charakterystyki modalne wiaduktu WK2 kont.

## 5.4 Kalibracja modelu numerycznego z wykorzystaniem PSO

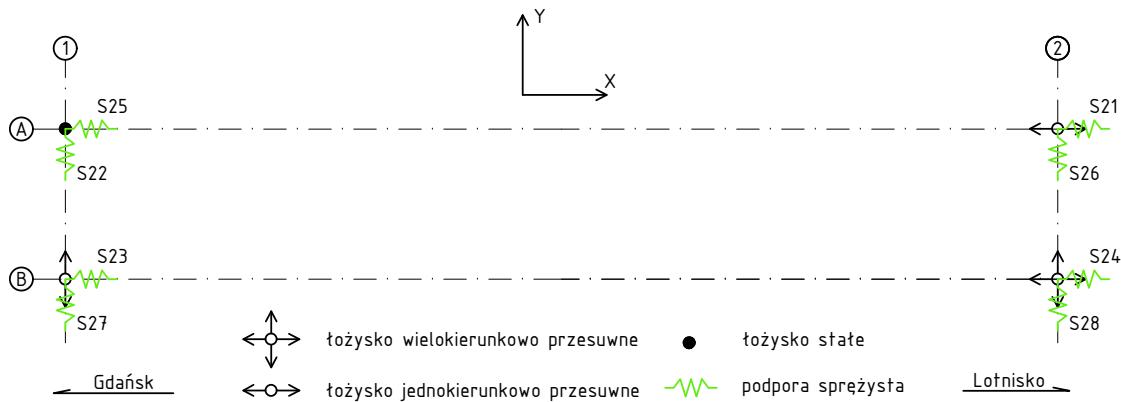
Stworzony model numeryczny powstał na podstawie założeń projektowych. Wykonana identyfikacja parametrów dynamicznych i przeprowadzone badania odbiorcze pod próbnym obciążeniem dostarczyły szereg informacji o obiekcie rzeczywistym. Dzięki dostarczonym danym możliwe jest przeprowadzenie kalibracji, która sprawi, że model będzie wierniej odzwierciedlał rzeczywistą konstrukcję. Podsumowując wyznaczone i zdobyte wyniki, kalibracja opierać będzie się na następujących danych wyjściowych:

- przemieszczenia statyczne konstrukcji pod próbnym obciążeniem: 2 ustawienia po 6 punktów pomiarowych umiejscowionyc na ściągach dźwigarów łukowych,
- zidentyfikowane parametry modalne konstrukcji: 10 pierwszych częstotliwości i postaci drgań własnych oraz odpowiadające im tłumienia modalne. Postaci drgań opisane zostały za pomocą 14 współrzędnych modalnych (p. 5.3)

Zestaw danych zmierzonych w ramach obciążeń statycznych pozwoli skalibrować głównie sztywność poszczególnych elementów konstrukcji. Z kolei charakterystyki modalne, jako wartości odnoszące się do zachowania dynamicznego, związane są ze sztywnością konstrukcji, jak i masą konstrukcyjną i niekonstrukcyjną. Obiekty

łukowe, podobnie jak kratownicowe są relatywnie złożonymi obiektami. Na ich charakterystykę dynamiczną wpływa wiele czynników, które mniej lub bardziej potrafią wpływać na jego parametry. Różni to je od statycznie nieskomplikowanych obiektów belkowych czy płytowych oraz od dużych obiektów wiszących i podwieszonych gdzie rozwiązania i szczegóły konstrukcyjne nie wpływają aż tak istotnie na globalne zachowanie dynamiczne konstrukcji. Dla łukowego wiaduktu WK2 wyodrębniono 22 czynniki, które będą podlegać modyfikacji w trakcie kalibracji. Podzielono je na trzy rodzaje: sztywności elementów konstrukcyjnych, sztywności warunków brzegowych oraz masy konstrukcyjne i niekonstrukcyjne. Poniżej zestawiono symbole zmiennych wraz z ich opisem:

- Sztywności elementów konstrukcyjnych:
  - S1 - łuku,
  - S2 - ściągu,
  - S3 - poprzecznic,
  - S4 - żeber płyty ortotropowej,
  - S5 - blachy płyty ortotropowej,
  - S6 - stężeń górnych,
  - S7 - wieszaków,
  - S8 - elementów stanowiących usztywniających wezglowie łuku,
- Sztywność warunków brzegowych (Rys. 5.18):
  - S21 - Oś 2, podpora A, kierunek X,
  - S22 - Oś 1, podpora A, kierunek Y,
  - S23 - Oś 1, podpora B, kierunek X,
  - S24 - Oś 2, podpora B, kierunek X,
  - S25 - Oś 1, podpora A, kierunek X,
  - S26 - Oś 2, podpora A, kierunek Y,
  - S27 - Oś 1, podpora B, kierunek Y,
  - S28 - Oś 2, podpora B, kierunek Y,
- Masa elementów konstrukcyjnych i niekonstrukcyjnych:
  - M1 - łuku,
  - M2 - ściągu,
  - M3 - tłucznia - część wzdłuż osi toru,
  - M4 - tłucznia - część równomiernie rozłożona,
  - M5 - pomostu roboczego,
  - M6 - stężeń górnych.



Rysunek 5.18: Schemat łożyskowania i rozmieszczenia podpór sprężystych, modyfikowanych w procesie kalibracji

Niektóre z wymienionych elementów intuicyjnie nie wpływają znacząca na globalne charakterystyki modalne konstrukcji. Dotyczy to między innymi sztywności elementów pomostu czy warunków brzegowych w przypadku zastosowania łożysk mostowych. Zostały one jednak uwzględnione w niniejszej pracy jako zmienne, żeby mieć pełną kontrolę nad modyfikacjami modelu oraz żeby uwidoczyć zalety zastosowanej metody kalibracji.

Kalibrację modelu postanowiono potraktować jako problem optymalizacji. Problem zdefiniowano klasycznie przez wybór funkcji celu, parametrów i zmiennych projektowych oraz ograniczeń. Funkcją celu jest miara dopasowania modelu do konstrukcji rzeczywistej pod względem odpowiedzi statycznej i charakterystyk dynamicznych. Parametry projektowe definiują model numeryczny poddawany kalibracji i zostały przyjęte na podstawie dokumentacji powykonawczej. Zmienne projektowe stanowią wymienione wyżej 22 parametry: sztywności elementów konstrukcji, warunków brzegowych i masy znajdujące się na obiekcie. Jako metodę optymalizacji przyjęto metodę roju częstek PSO.

#### 5.4.1 Funkcja celu

Funkcja celu w zdefiniowanym problemie w założeniu powinna być miarą dopasowania modelu do konstrukcji rzeczywistej. W literaturze do kalibracji najczęściej stosowane są jednokryterialne algorytmy, w których miara dopasowania wyrażona jest jedną wartością liczbową. Wynikowa wartość jest więc najczęściej liniową kombinacją kryteriów dopasowania. W idealnym przypadku gdzie wszystkie kryteria zbiegają do najlepszego rozwiązania jednocześnie byłoby to w zupełności wystarczające podejście. Jednakże w rzeczywistości kryteria obarczone są nieuchronnym błędem. Błędy te wynikają z samej definicji modelu (uproszczeń strukturalnych i materiałowych) oraz zawarte są w wynikach identyfikacji będących wynikiem eksperymentu. Aktualnie nie jest możliwe kontrolowanie wszystkich różnic między modelem, a rzeczywistością, ponieważ wymagałoby to ogromnie liczby zmiennych. W efekcie nie wszystkie kryteria dopasowania osiągają minimalną wartość dla jednego rozwiązania. Chcąc uniknąć narzucania skali ważności na poszczególne kryteria, optymalizację wykonano w wariancie wielokryterialnym. Zbiorem funkcji celu, z których każda jest minimalizowana i opisuje dopasowanie modelu do obiektu jest wektor

$\mathbf{F} = [f_{freq}, f_{disp}, f_{MAC}]$ . Na wartość funkcji  $f_{freq}$  wpływ ma  $N$  pierwszych częstotliwości drgań własnych modelu  $f_i^n$  i zidentyfikowanych na konstrukcji rzeczywistej  $f_i^r$ . Wyznaczana jest ona następująco:

$$f_{freq} = \sum_{i=1}^N (f_i^n - f_i^r)^2 \quad (5.1)$$

Funkcja celu  $f_{disp}$  związana jest z przemieszczeniami uzyskiwanymi pod działaniem obciążenia statycznego. W rozważanym przypadku wykorzystano pomiar wykonany w trakcie próbnego obciążenia. Dla dwóch ustawień, po sześć punktów pomiarowych w każdym, porównano przemieszczenia pionowe zmierzone na konstrukcji rzeczywistej  $d_i^r$  z wyznaczonymi w modelu numerycznym  $d_i^n$ . Wartość funkcji celu związanej z przemieszczeniami konstrukcji sformułowano jako:

$$f_{disp} = \sum_{i=1}^{12} |d_i^n - d_i^r| \quad (5.2)$$

Ostatnia funkcja celu jest miarą dopasowania pierwszych  $N$  postaci drgań własnych zidentyfikowanych na konstrukcji  $\phi_i^r$  oraz wyznaczonych w modelu  $\phi_i^n$ . Do liczbowego porównania postaci użyto kryterium MAC. Wartość funkcji  $f_{MAC}$  opisano następującym równaniem:

$$f_{MAC} = \sum_{i=1}^N (1 - \text{MAC}(\phi_i^n, \phi_i^r))^2 \quad (5.3)$$

gdzie  $\text{MAC}(\cdot)$  oznacza kryterium MAC dwóch wektorów. Zasadniczo kryterium MAC dwóch wektorów powinno być maksymalizowane. Wszakże, dla idealnego dopasowania wektorów równe jest jedności, a dla zupełnego braku dopasowania -零. Jednakże, znając wartość maksymalną kryterium  $\text{MAC} = 1$  i stosując odejmowanie przemianowano naturalnie maksymalizowaną funkcję celu na minimalizowaną. Dzięki temu wszystkie funkcje celu będą podlegać minimalizacji - co nie jest wymagane - ale uprasza interpretację wyników oraz zmniejsza stopień komplikacji algorytmu obliczeniowego.

#### 5.4.2 Zmienne projektowe

Zmienne projektowe w procesie kalibracji przedstawiono w punkcie 5.4. Ścisłej mówiąc, po zbudowaniu modelu numerycznego nie ulegał on modyfikacjom strukturalnym w procesie optymalizacji. Wszystkie zmienne były sterowane za pomocą mnożników nakładanych na sztywności i masy zamodelowanych elementów już na etapie obliczeń. Bazowe sztywności elementów i masy wynikają z modelu i przyjęto je na podstawie dokumentacji projektowej. Z kolei sztywności podpór sprężystych początkowo ustalonie jako stosunkowo sztywne, o stałej sprężystości równej  $k = 1E6\text{kN/m}$ . Ograniczenia dla zmiennych projektowych stanowią wartości skrajne, podyktowane doświadczeniem i zdrowym rozsądkiem. Przykładowe niepewności dla różnych elementów modelu numerycznego przedstawiono w tabeli 2.1. W tabelach 5.2 - 5.4 przedstawiono wszystkie zmienne projektowe (mnożniki) oraz ich zakresy dopuszczalne. Podejmując decyzję o możliwej odchyłce danej wartości wzięto pod uwagę typ elementu wykorzystanego w modelowaniu, ilość detali konstrukcyjnych pomijanych w modelu, możliwe niedokładności przy wykonaniu rzeczywistej konstrukcji oraz dokładność opisu elementu w dokumentacji projektowej. Przyjęte

wartości skrajne można uznać za zawyżone, ale dzięki temu rozwiązania optymalne nie powinny być zlokalizowane blisko granicy zakresu dopuszczalnego. Zmniejsza to liczbę wymuszonych zmian położenia częstek w trakcie optymalizacji.

Tablica 5.2: Zakres dopuszczalnych zmian sztywności elementów konstrukcyjnych

Element	Łuk	Ściąg	Poprzecznica	Żebra	Płyta	Stężenia	Wieszak	Wezglowie
Oznaczenie	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8
Zakres	0.85 – 1.15	0.85 – 1.15	0.85 – 1.15	0.80 – 1.2	0.85 – 1.15	0.7 – 1.3	0.9 – 1.1	1.0 – 6.0

Tablica 5.3: Zakresy dopuszczalnych zmian sztywności warunków brzegowych

Podpora	2AX	1AY	1BX	2BX	1AX	2AY	1BY	2BY
Oznaczenie	S21	S22	S23	S24	S25	S26	S27	S28
Zakres	1E–8 – 1E3							

Tablica 5.4: Zakresy dopuszczalnych zmian mass konstrukcyjnych i niekonstrukcyjnych

Element	Łuk	Ściąg	Tłuczeń 1	Tłuczeń 2	Pomost	Stężenia
Oznaczenie	M1	M2	M3	M4	M5	M6
Zakres	0.9 – 1.1	0.9 – 1.1	0.5 – 0.8	0.3 – 0.8	0.7 – 1.3	0.8 – 1.2

### 5.4.3 Algorytm kalibracji

Zaproponowane rozwiązanie kalibracji opiera się na podziale całego procesu na dwa obszary obliczeń. Pierwszy związany jest z wykorzystaniem komercyjnego oprogramowania MES SOFiSTiK. Drugi to autorskie oprogramowanie umożliwiające optymalizację rojem częstek. Oba obszary były połączone i zarządzane przez algorytm zapisany w języku Python.

#### Analizy statyczna i modalna

Przed przystąpieniem do optymalizacji, model numeryczny przesła (Fig. 5.7) przy stosowano do kalibracji. Do obliczeń wykorzystano środowisko MES SOFiSTiK. Bazę danych zawierającą model MES powielono, aby stanowiła kopię zapasową w trakcie obliczeń. Do zdefiniowania obliczeń użyto program do preprocessingu tekstu TEDDY i zapisano w nim wymagane w procesie kalibracji analizy i modyfikacje modelu. Uruchomienie instrukcji z pliku tekstu wywoływało następujące obliczenia wykonywane przez moduł ASE (**AG2018**):

- analizę statyczną pod obciążeniem dwóch ustawień próbnego obciążenia,
- analizę statyczną pod obciążeniem wszystkich dodatkowych, nieujętych w modelu detali konstrukcyjnych i wyposażenia obiektu,
- analizę modalną wyznaczającą 10 pierwszych postaci drgań własnych, przy dodaniu mas od wszystkich obciążeń stałych nieujętych w ciężarze własnym modelu konstrukcji.

W każdej z analiz zastosowane zostały mnożniki zmiennych projektowych. Uruchomienie następowało w odpowiednim momencie z poziomu programu optymalizacyjnego.

## Optymalizacja

Jedną z cech algorytmów metaheurystycznych jest to, że są bardzo uniwersalne. Przystosowanie zapisanego w języku programowania algorytmu do danego problemu optymalizacji zazwyczaj nie wymaga wielu modyfikacji. W kalibracji modelu wykorzystano algorytm optymalizacji wielokryterialnej rojem częstek MOPSO (4.6). Współczynniki sterujące prędkością roju przyjęto jak w domyślnej wersji algorytmu:  $\theta = 0.7968$ ,  $\alpha = 1.4962$  oraz  $\beta = 1.4962$ . Populację stanowił zbiór 20 częstek, wygenerowanych w przestrzeni rozwiązań za pomocą sekwencji Haltona. Zastosowano topologię GBEST zapewniającą pełną wymianę informacji między częstkami na temat najlepszego rozwiązania. Wybór najlepszego rozwiązania odbywał się przez losowanie spośród częstek budujących aktualnie Front Pareto i znajdujących się w archiwum zewnętrznego. Dodatkowo wszystkie wyznaczone rezultaty ulegały archiwizacji w bazie wiedzy (*eng. knowledge base*). Dzięki temu możliwe było przerwanie obliczeń i rozpoczęcie od stanu zarchiwizowanego. Ma to istotne znaczenie w problemach o kosztownych czasowo obliczeniach funkcji celu.

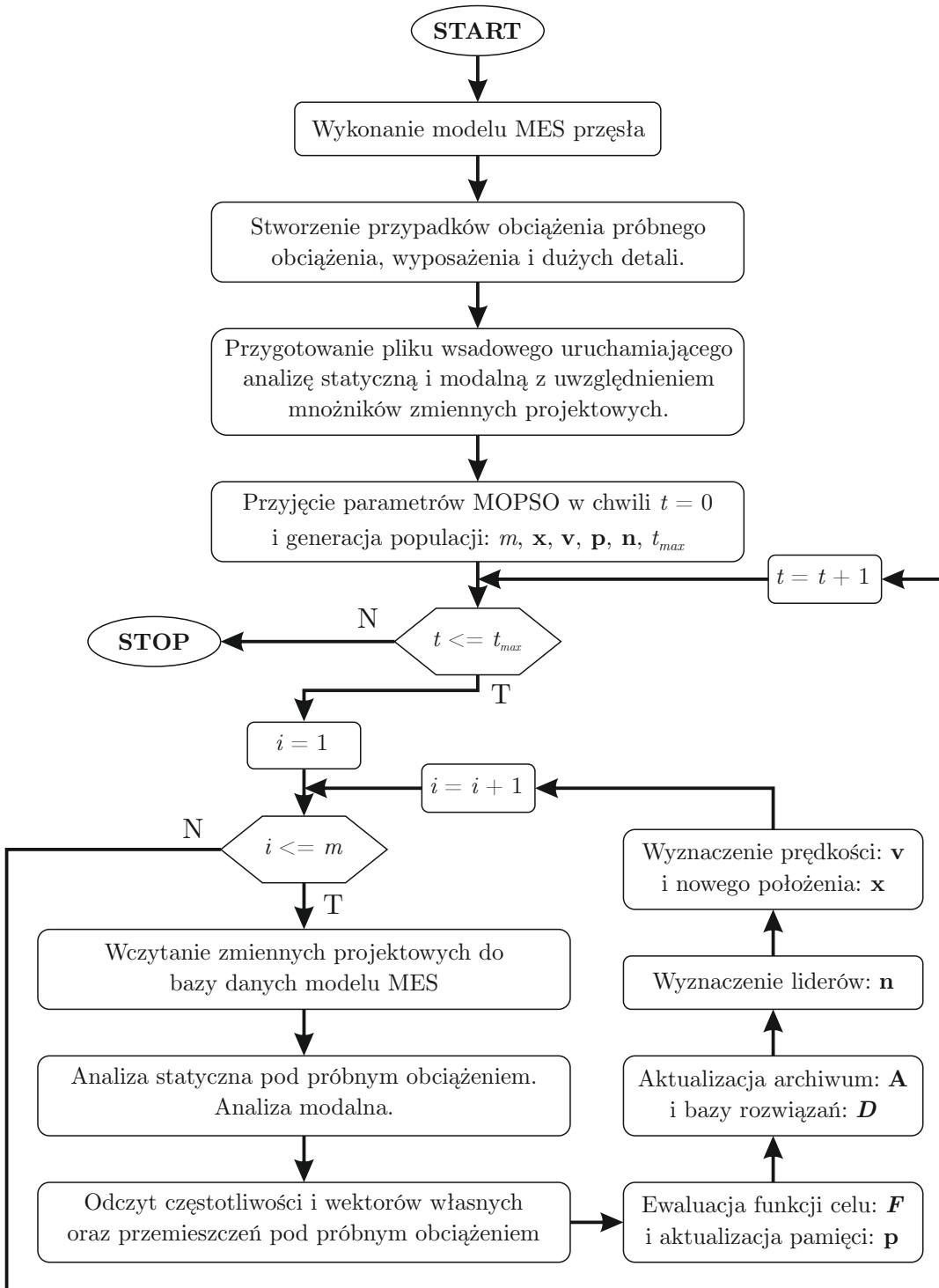
W celu zapewnienia dobrej dystrybucji rozwiązań Frontu Pareto zastosowano algorytm wyznaczania odległości pomiędzy częstkami (**Deb2002**). Dodatkowo wprowadzono możliwość kontroli algorytmu przez użytkownika. Zagwarantowano w trakcie prowadzenia obliczeń możliwość wstrzymania algorytmu, tymczasowego zwężenia lub poszerzenia przestrzeni rozwiązań dopuszczalnych oraz zdefiniowanie przestrzeni funkcji celu, z której musi być wybrany lider roju. Półautomatyczny system nie wymaga zaangażowania użytkownika, ale również pozostawia możliwość zagęszczenia wybranych fragmentów Frontu Pareto w trakcie trwania procesu optymalizacji.

Do wyznaczania funkcji celu dla danego rozwiązania  $\mathbf{F} = [f_{freq}, f_{disp}, f_{MAC}]$  wymagana była komunikacja pomiędzy autorskim programem, a bazą danych modelu MES. W każdej iteracji optymalizacji potrzebne jest przekazanie do modelu MES zestawu mnożników będących aktualnie rozpatrywanym rozwiązaniem. Następnie po uruchomieniu i zakończeniu obliczeń przez program MES konieczne jest odczytanie częstotliwości drgań własnych, postaci drgań własnych w wybranych punktach i przemieszczeń konstrukcji pod obciążeniem próbny. Do wczytywania 'do modelu' i odczytywania 'z modelu' potrzebnych informacji użyto interfejsu dostarczonego przez producenta SOFiSTiK AG (**SOFISTIK2018**). Bazując na odczytanych danych i wprowadzonych wynikach identyfikacji modalnej i próbnego obciążenia program wyznaczał funkcje celu według formuł (5.1), (5.2) i (5.3). Wektor funkcji celu oraz przypisane mu rozwiązanie przekazywane były do algorytmu optymalizacyjnego i zarchiwizowane w bazie wiedzy.

Schemat blokowy algorytmu kalibracji przedstawiono na rysunku 5.19.

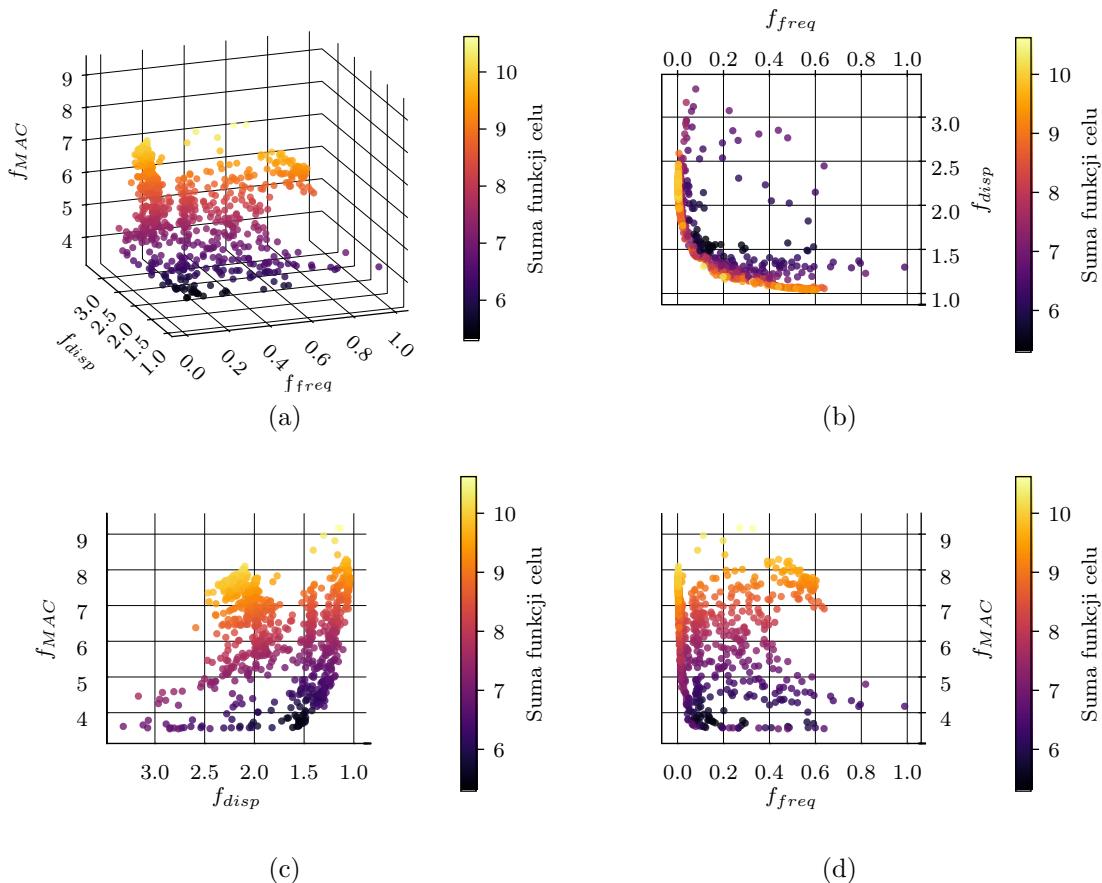
### 5.4.4 Rezultaty kalibracji

W trakcie kalibracji wyznaczono funkcję celu dla 57 551 położień częstek. Wszystkie wyniki zachowano w bazie wiedzy. Front Pareto po ostatniej iteracji złożony był z 802 częstek. Na rysunku 5.20 pokazano Front Pareto w widoku przestrzennym i w



Rysunek 5.19: Schemat blokowy algorytmu kalibracji modelu MES wiaduktu WK2

rzutach na wszystkie płaszczyzny. Kolor częstek oznacza sumę algebraiczną wszystkich funkcji celu  $\mathbf{F}$ . Innymi słowy oznacza on wartość funkcji  $f_c$  jak dla optymalizacji jednokryterialnej  $f_c = f_{freq} + f_{disp} + f_{MAC}$ . Gdyby wykonać optymalizację jednokryterialną, przy osiągnięciu dokładnie tych samych położień częstek byłby to jedyny wynik i oznaczałby minimum globalne. Dzięki wykonaniu optymalizacji wielokryterialnej możliwy jest wybór różnych wag dla poszczególnych kryteriów oraz ocena wybranego kompromisu wśród całego zbioru równorzędnych rozwiązań.



Rysunek 5.20: Ostateczny Front Pareto procesu optymalizacji w problemie kalibracji modelu numerycznego wiaduktu WK2: (a) widok przestrzenny, (b) rzut na płaszczyznę  $f_{freq}, f_{disp}$ , (c) rzut na płaszczyznę  $f_{disp}, f_{MAC}$ , (d) rzut na płaszczyznę  $f_{freq}, f_{MAC}$ . Kolor wyraża wartość sumy:  $f_c = f_{freq} + f_{disp} + f_{MAC}$

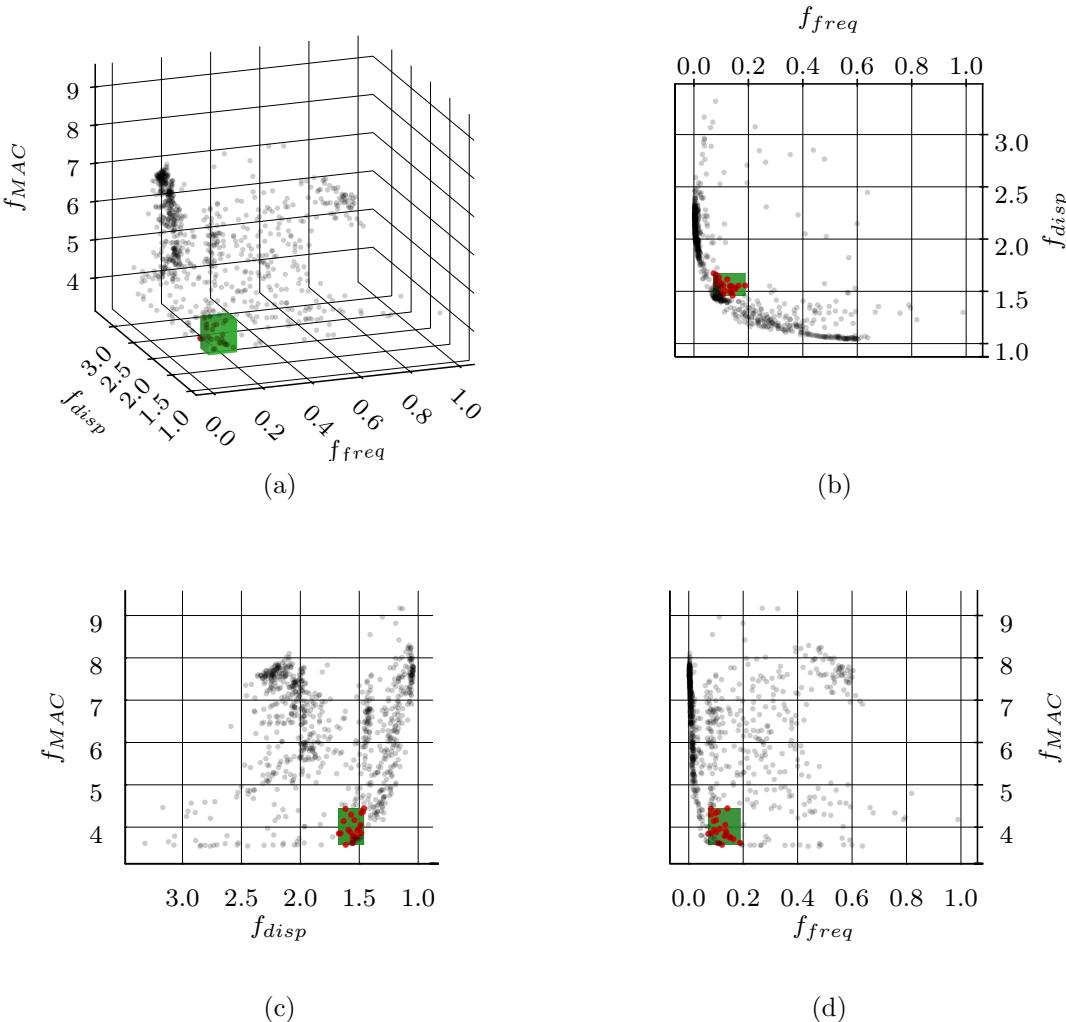
W tabeli 5.5 pokazano otrzymane w optymalizacji minimalne wartości poszczególnych funkcji celu wraz z odpowiadającymi im wartościami pozostałych funkcji. Pogrubiona liczba oznacza decydującą o wyborze zestawu, minimalną wartość danej funkcji celu wśród wszystkich obliczonych wariantów. Aby posiadać punkt odniesienia wyznaczono również wartości wszystkich funkcji celu dla modelu bazowego opisanego w punkcie 5.2 (Zestaw 0). Najmniejszą wartość sumy uzyskano równą  $f_c = 5.2916$  (Zestaw 4). W porównaniu do wartości zestawów 1-3 nie odbiega on znacząco dla wszystkich funkcji celu. Wybór jakiegokolwiek z pozostałych zestawów wiązałby się ze znacznym przyrostem któregoś z pozostałych kryteriów. Widoczne jest to również na rysunkach 5.20a-5.20b. Z tego powodu kompromisowe rozwiązanie wydaje się być słusznym wyborem.

Tablica 5.5: Zestawienie minimalnych i odpowiadających funkcji celu uzyskanych w optymalizacji wielokryterialnej problemu kalibracji

Zestaw	$f_{freq}$	$f_{disp}$	$f_{MAC}$	$f_c$
0	0.4075	2.5891	5.8437	8.8403
1	<b>0.0024</b>	2.3096	7.6514	9.9634
2	0.5881	<b>1.0402</b>	7.7847	9.4130
3	0.4388	2.851	<b>3.5479</b>	6.8377
4	0.1075	1.5567	3.6274	<b>5.2916</b>

Z drugiej strony, można także ocenić możliwość popełnienia błędu przy wyznaczaniu wartości porównawczych dla poszczególnych kryteriów. Identyfikacja częstości drgań własnych zazwyczaj sprawia najmniejsze trudności i ryzyko wystąpienia błędu jest również najmniejsze. Z kolei w przedmiotowym przypadku występuje istotne ryzyko wystąpienia błędu w wyznaczonych postaciach drgań własnych. Spowodowane jest to stosunkowo niewielką liczbą punktów pomiarowych i brakiem punków w wyższych partiach dźwigarów łukowych. Z kolei wyznaczone w trakcie próbnych obciążen przemieszczenia mogą być obciążone błędem zwłaszcza w punkach, które uległy uniesieniu dla niesymetrycznego obciążenia. Dodatkowo tor umiejscowiony na obiekcie jest ułożony w łuku poziomym, który może nie przystawać idealnie do osi projektowanej, użytej w modelu. Również ustawienie pojazdów w trakcie obciążenia oraz ich masa mogą nieznacznie różnić się od modelowanego obciążenia. Wszystko to wpływa na możliwość popełnienia błędu w wyznaczonych wartościach przemieszczeń. Biorąc pod uwagę możliwe wystąpienia błędów w każdym kryterium, nieustępeliwe dążenie do minimalizacji jednego z nich bez uwzględniania pozostałych, może skutkować błędnymi rezultatami. Idealne dopasowanie do błędnych danych niesie za sobą błędne rezultaty.

Z tego powodu skupiono się na wynikach pośrednich, pamiętając że każdy z nich znajduje się w Froncie Pareto. Przeanalizowana wybrane punkty pod względem rozwiązań w przestrzeni zmiennych projektowych. Wyboru rezultatów nie podjęto na podstawie funkcji  $f_c$ , ponieważ trudno odpowiednio ocenić wpływ poszczególnych funkcji celu na sumę. Na przykład nieznacząca zmiana w  $f_{MAC}$ , jest co do wartości równa bardzo znacznej zmianie  $f_{freq}$ . Analizując rozkład Frontu Pareto wybrano zakresy, które pozwalają na wybór akceptowalnych rezultatów. Ostatecznie przyjęto następujące przedziały:  $f_{freq} \in (0, 0.2)$ ,  $f_{disp} \in (0, 1.8)$  i  $f_{MAC} \in (0, 4.5)$ . Na rysunku 5.21 pokazano wybrane punkty. Zaznaczono je kolorem czerwonym. Zielonym prostopadłościanem zakreślono przestrzeń zawierającą wszystkie wybrane punkty. W zadanym zakresie znalazły się 22 punkty Frontu Pareto. Dla wybranych punktów odczytano wartości zmiennych projektowych z zestawu Pareto. Następnie wyznaczono średnie wartości oraz odchylenie standardowe dla zmiennych projektowych wybranych punktów.



Rysunek 5.21: Ostateczny Front Pareto procesu optymalizacji w problemie kalibracji modelu numerycznego wiaduktu WK2: (a) widok przestrzenny, (b) rzut na płaszczyznę  $f_{freq}f_{disp}$ , (c) rzut na płaszczyznę  $f_{disp}f_{MAC}$ , (d) rzut na płaszczyznę  $f_{freq}f_{MAC}$ .

## 5.5 Wpływ wymiarów elementów konstrukcyjnych na odpowiedź dynamiczną przęsła

Celem pracy jest określenie wpływu poszczególnych elementów konstrukcyjnych na zachowanie dynamiczne przęsła. Analizę przeprowadzono na przykładzie zidentyfikowanego dynamicznie wiaduktu łukowego WK2 w ciągu Pomorskiej Kolei Metropolitalnej. Przyjęto że zmianie mogą ulegać jedynie wymiary elementów konstrukcyjnych, a nie topologia całego ustroju. Dla przedmiotowego obiektu wyszczególniono 3 główne cechy, które wynikają z wymiarów elementów i wpływają na zachowanie struktury. Są to sztywność giętna dźwigara łukowego, sztywność giętna ściągu, a także sztywność podłużna wieszaków. Uwzględniając złożoność rzeczywistej konstrukcji połączoną z szeregiem wymagań stawianych przez zapisy normowe rozwiązanie analityczne problemu wydaje się być karkołomnym zadaniem. Postanowiono wyznaczyć wpływ poszczególnych elementów w procesie optymalizacji wielokryte-

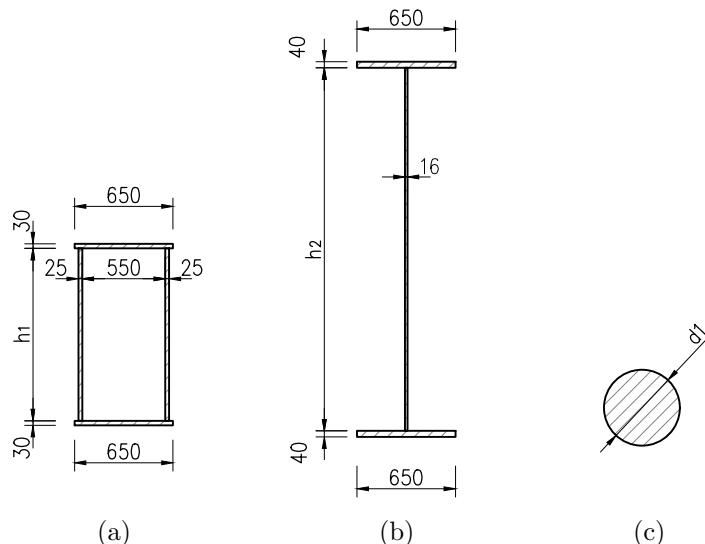
rialnej. Zdefiniowano dwie funkcje celu zestawione w wektor  $\mathbf{F} = [f_s, f_a]$  gdzie:

- $f_s$  - oznacza masę konstrukcji stalowej, w przybliżeniu tożsamą z kosztem wykonania konstrukcji,
- $f_a$  - oznacza maksymalne przyspieszenia pomostu pod normowym obciążeniem dynamicznym.

Tak zdefiniowane funkcje pozwalają uzyskać zestaw najlepszych rozwiązań (Front Pareto), będący przybliżeniem funkcji najlepszego możliwego rozwiązania pod względem dynamiki konstrukcji, w zależności od kosztu wykonania konstrukcji. Jakość rozwiązania konstrukcyjnego pod względem dynamiki przesła określono przez maksymalne przyspieszenie występujące w pomoście pod dynamicznym obciążeniem normowym. Aspekt ekonomiczny odzwierciedla masa zużytego materiału. Dzięki procesowi optymalizacji maksymalne przyspieszenia wyznaczone przy przejazdach dynamicznych będą posiadały najmniejsze możliwe wartości przy zastosowanej objętości materiału. Do zmiany głównych elementów konstrukcyjnych użyto trzy parametry:

- wysokość przekroju poprzecznego dźwigara łukowego:  $h_1$ ,
- wysokość przekroju poprzecznego dźwigara ściągu  $h_2$ ,
- średnica wieszaka:  $d_1$ .

które stanowią zmienne projektowe problemu optymalizacji  $\mathbf{X} = [h_1, h_2, d_1]$ . Zmienne zaznaczono na przekrojach poprzecznych przedstawionych na rysunku 5.22.



Rysunek 5.22: Przekroje poprzeczne elementów konstrukcji wiaduktu łukowego z zaznaczonymi zmiennymi projektowymi: (a) przekrój dźwigara łukowego, (b) przekrój ściągu, (c) przekrój wieszaka.

Poza wymienionymi zmiennymi projektowymi analizy przeprowadzono w kilku wariantach. Warianty zróżnicowano ze względu na dwa aspekty:

- rozmieszczenie wieszaków:
  - wieszaki proste,

- wieszaki ukośne (system Nielsena),
  - wieszaki w układzie siatki (Network),
- maksymalna dozwolona prędkość taboru pasażerskiego:
    - do 160 km/h,
    - do 200 km/h,
    - do 300 km/h.

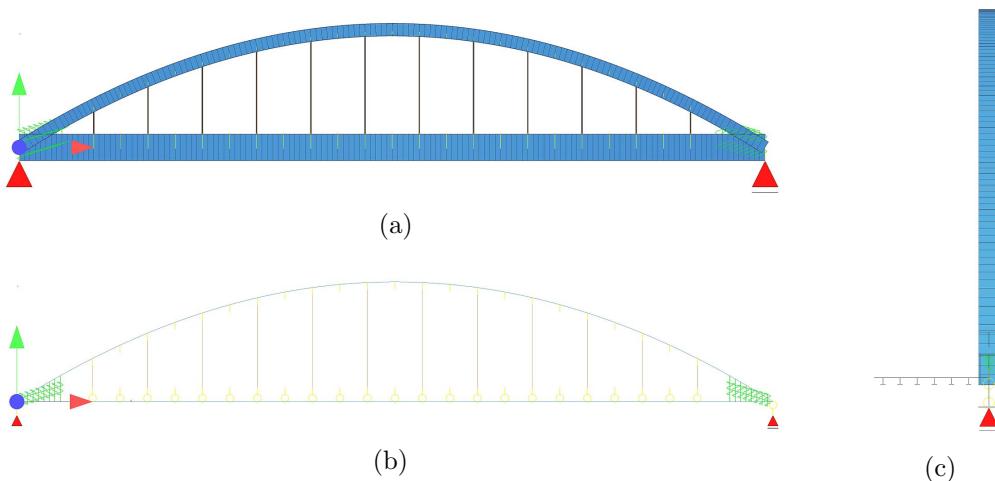
Dla każdej kombinacji rozmieszczenia wieszaków i prędkości (9 wariantów) przeprowadzono oddzielną optymalizację. Istnieje ryzyko, że jeden z wariantów może dominować nad innymi pod względem odporności dynamicznej i przysłoni interesujące rezultaty. W rzeczywistych konstrukcjach stosowane są wszystkie trzy warianty rozkładu wieszaków i istnieje zapotrzebowanie na różne maksymalne dozwolone prędkości taboru. Z tego względu informacja na temat wpływu elementów konstrukcyjnych dla każdego z wariantów jest pożądana i przeanalizowana oddzielnie.

W procesie optymalizacji uwzględniono również ograniczenia i wymagania jakie musi spełnić rozwiązanie, aby zostało uznane jako poprawne. Wartości podlegające ograniczeniom zestawiono w wektorze  $\mathbf{C} = [c_{sa}, c_{sg}, c_{sh}, c_d]$ . Bazując na obowiązujących przepisach wyznaczono dla każdego przypadku:

- maksymalne normowe naprężenia obliczeniowe w dźwigarze łukowym  $c_{sa}$ , w ściągu  $c_{sg}$  i w wieszakach  $c_{sh}$  pod obciążeniem statycznym,
- normowe maksymalnych ugłęcia statyczne przęsła  $c_d$ .

### 5.5.1 Model uproszczony do analizy dynamicznej

Model numeryczny wiaduktu przedstawiony w punkcie 5.2 jest przestrzennym modelem o relatywnie rozbudowanej strukturze. W przedstawionej wersji siatki elementów skończonych składa się z 4602 węzłów, 3468 elementów belkowych, 3404 elementów powłokowych i 24 elementów kratowych. Wykorzystanie złożonych modeli MES w analizie dynamicznej jest wymagające czasowo. W przypadku optymalizacji analizy dynamicznej muszą być przeprowadzone wielokrotnie. Przy wykorzystaniu złożonego modelu numerycznego byłoby to niezwykle trudne lub wręcz niemożliwe zadanie (**Zotowski 2017c**). W takim przypadku należy zadać sobie pytanie czy jest możliwa redukcja modelu bez utraty potrzebnych rezultatów i obniżenia ich dokładności. Z punktu widzenia dynamiki przęsła kolejowego, obciążonego głównie siłami pionowymi najistotniejszą rolę pełni sprawdzenie drgań pionowych. Model płaski jest w stanie odwzorować kluczowe pionowe postaci drgań własnych obiektu, a jednocześnie jest znacznie mniej rozbudowany. Z powyższych względów postanowiono zredukować skalibrowany model przestrzenny belkowo-powłokowy do modelu wyłącznie belkowego zdefiniowanego na płaszczyźnie. Obiekt WK2 jest niemal symetryczny konstrukcyjnie, ale posiada cechy, które teoretycznie nie pozwalają na uwzględnienie symetrii w redukcji modelu. Pierwszym powodem jest to, że oś toru usytuowana jest w łuku poziomym co sprawia, że obciążenie ruchome i obciążenie tłucznem nie posiada osi symetrii zgodnej z osią obiektu. Drugim elementem są warunki brzegowe, ponieważ zgodnie z klasycznymi zasadami łożyskowania obiekt tego typu posiada



Rysunek 5.23: Uproszczony model wiaduktu WK2: (a) wizualizacja modelu, (b) schemat statyczny modelu, (c) widok w płaszczyźnie na wizualizację modelu

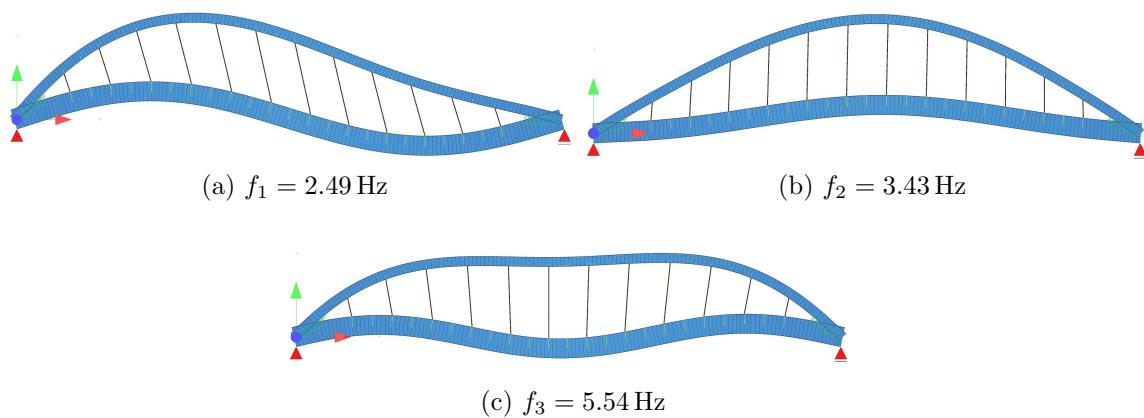
jedno łożysko stałe. Drugi z czynników może być bez konsekwencji pominięty, ponieważ podparcie wzdłuż osi obiektu i w osi pionowej jest identyczne dla obu dźwigarów łukowych. Różnica w poprzecznych warunkach brzegowych nie ma istotnego znaczenia na globalną pracę przęsła w kierunku pionowym. Kolejny z czynników - brak symetrii osi toru - nie byłby pomijalny jeśli analiza dotyczyłaby wyłącznie poszukiwania odpowiedzi obiektu WK2 w obecnej formie. Niemniej jednak celem pracy nie jest przetestowanie jednostkowego przypadku, a raczej całej klasy mostów. Z tego powodu uogólniono problem do znacznie częściej spotykanych obiektów z prostą osią toru, umiejscowioną symetrycznie na obiekcie. Takie założenie eliminuje przeszkodę asymetrii obciążenia przy uproszczeniu modelu numerycznego. Pozwala również odrzucić potencjalne nieporządne komplikacje w interpretacji wyników obliczeń, obarczonych nieokreślonym wpływem asymetrii rozkładu masy i obciążenia. Uproszczony model pokazano na rysunku 5.23.

Model przestrzenny sprowadzono do płaszczyzny przyjmując niezmieniony dźwigar łukowy i rozbudowany ściąg. Przekrój poprzeczny elementów belkowych budujących ściąg rozszerzono o połowę pomostu ortotropowego (Rys. 5.23c). Model numeryczny po uproszczeniu składał się z 334 węzłów, 286 elementów belkowych i liczby elementów kratowych zależnej od wariantu rozkładów wieszaków. W stosunku do modelu przestrzennego znacznie ograniczono wielkość zadania. Modyfikatory sztywności i ciężaru elementów modelu płaskiego oraz mas wyposażenia przyjęto jak w modelu przestrzennym po kalibracji. Postaci i częstotliwości drgań własnych pokazano na rysunku 5.24. W tabeli 5.6 porównano zidentyfikowane charakterystyki modalne konstrukcji rzeczywistej i odczytane z modelu uproszczonego. Porównano również ugięcia pod statycznym obciążeniem próbny. Dla porównania, częstotliwości zidentyfikowanych bliskich sobie modów giętnych pionowych (1 i 3) zostały uśrednione. Podobnie ugięcia z próbnego obciążenia zostały uśrednione w poprzek wiaduktu. Przedstawione w tabeli zgodności są zadowalające i model został użyty w dalszych analizach.

Model uproszczony stworzono w trzech wariantach różniących się rozmieszczeniem wieszaków. Przyjęte układy podwieszenia pomostu do łuku pokazano na rysunku 5.25. Zgodnie z wcześniej przytoczonymi założeniami przygotowano wariant z wieszakami prostymi, wariant z wieszakami ukośnymi (Nielsena) i wariant z prze-

Tablica 5.6: Porównanie częstotliwości drgań własnych i ugięć uproszczonego modelu 2D i konstrukcji rzeczywistej

Źródło	Częstotliwości			Próbne obciążenie U1			Próbne obciążenie U2		
	$f_1$	$f_2$	$f_3$	P1/4	P2/4	P3/4	P1/4	P2/4	P3/4
Model 2D	2.49	3.43	5.54	-16.20	-7.86	6.51	-2.49	-11.68	-8.30
Konstrukcja rzeczywista	2.52	3.43	5.84	-16.30	-8.26	5.83	-2.66	-11.49	-8.06
Porównanie	99%	100%	95%	100%	95%	112%	94%	102%	103%



Rysunek 5.24: Postaci drgań własnych uproszczonego modelu 2D: (a) mod 1, (b) mod 2, (c) mod 3

cinającymi się wieszakami ukośnymi (Network).

### 5.5.2 Założenia do optymalizacji

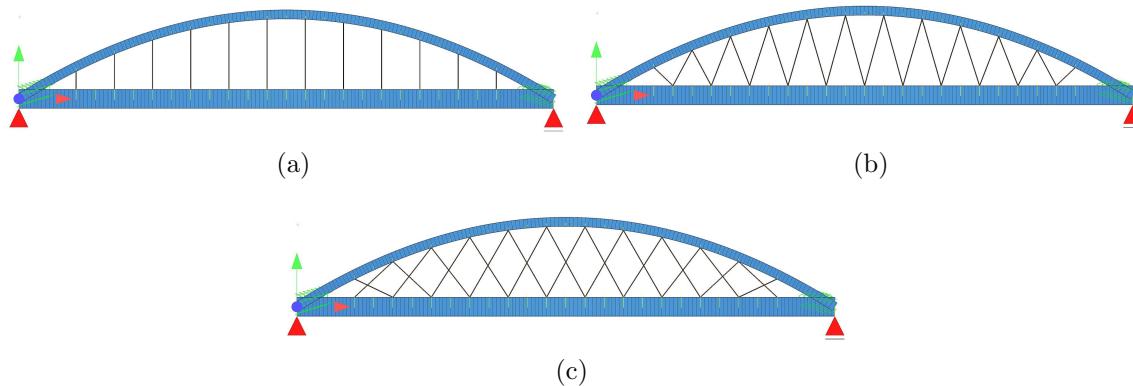
W procesie poczyniono szereg założeń związanych z wytrzymałością materiałów, uwarunkowaniami normowymi i ogólnymi warunkami wykonalności. Zakresy możliwych wartości zmiennych projektowych (Rys. 5.22) przedstawiono w tabeli 5.7.

Stan Graniczny Nośności

W trakcie optymalizacji, dla każdego rozwiązania sprawdzone zostały warunki Stanu Granicznego Nośności wg PN-EN 1990 i PN-EN 1991-2. Do modelu wiaduktu przyłożono obciążenia stałe od ciężaru własnego konstrukcji i wyposażenia oraz ruchome w postaci Modelu Obciążenia 71. Współczynnik klasy obciążenia ustalono jako  $\alpha = 1.21$ , a współczynnik przewyższenia dynamicznego (WPD) równy  $\phi = 1.072$ .

Tablica 5.7: Zakresy zmiennych projektowych zastosowane w optymalizacji

Element	Łuk	Ściąg	Wieszak
Zmienna	$h_1$	$h_2$	$d_1$
Zakres dopuszczalny [mm]	150 – 2500	1000 – 4500	10 – 200



Rysunek 5.25: Przyjęte warianty układu wieszaków: (a) wieszaki proste, (b) wieszaki ukośne, (c) Network

Obliczając WPD przyjęto przypadek starannie utrzymywanej toru i długość miarodajną dla obiektu łukowego jako  $L_\phi = 0.5L_t = 35$  m. W analizie statycznej i kombinacyjnej wyznaczono obwiednie obliczeniowych wartości sił normalnych i momentów zginających. Następnie dla poszczególnych elementów konstrukcyjnych (łuku, ściągu i wieszaków) obliczono maksymalne naprężenia zredukowane H-M-H. Konstrukcję wiaduktu WK2 wykonano ze stali S355, a wieszaki prętowe ze stali S460. Wyznaczono maksymalne wartości naprężeń obliczeniowych. Dla stali S355 przyjęto  $\sigma_{355}^d = 355/1.25 = 284$  MPa, a dla stali S460  $\sigma_{460}^d = 460/1.25 = 368$  MPa.

### Stan Graniczny Użytowania

Sprawdzono również częściowo Stan Graniczny Użytowania przez wyznaczenie maksymalnego przemieszczenia przesła od obciążen ruchomych o wartościach charakterystycznych. Wartość graniczną przyjęto zgodnie z zaleceniem jako  $L/600 = 70000/600 = 116$  mm.

### Analiza dynamiczna

Analizę dynamiczną przeprowadzano w module DYNA środowiska MES SOFiSTiK. Wykorzystano metodę bezpośredniego całkowania równań ruchu Newmarka. Zgodnie z zaleceniami (CYTOWANIE) należy uwzględnić odpowiedź dynamiczną w zakresie częstotliwości do 30Hz. Aby zapewnić poprawne odwzorowanie przyspieszeń i częstotliwości w zadanym zakresie przyjęto krok czasowy równy  $\Delta t = 0.005$  s (próbkowanie 200 Hz). Analizę dynamiczną przeprowadzono dla wszystkich dziesięciu modeli obciążen pociągami uniwersalnymi HSLS-A wg PN-EN 1991.

Predkości pociągów przyjmowano zgodnie z zaleceniem w zakresie od 40 km/h do maksymalnej predkości obliczeniowej ( $1.2 \times$  nominalna predkość maksymalna). Nie przyjmowano stałego kroku uwzględnianych predkości. Wybrano jedynie predkości które mieścią się w powyższym zakresie oraz są predkościami krytycznymi. Predkości krytyczne obliczano na podstawie wzoru ???. Założono, że odpowiedź obiektu osiąga swoją maksymalną wartość dla predkości krytycznej i przy zwiększeniu predkości nie przekracza tej wartości (Goicolea i Gabaldón 2008). Potrzebne częstotliwości drgań własnych odczytywano z modelu numerycznego po przeprowadzeniu analizy modalnej. Dla każdego pociągu HSLS-A wyznaczano predkość na bazie ty-

powego rozstawu osi  $d$ , odczytanych częstotliwości drgań własnych  $\phi_i$  oraz przyjmując wartość  $n = 1, 2 \dots 10$ . Jeżeli prędkość rezonansowa dla danego pociągu mieściła się w wymaganym zakresie dodawano ją do obliczanego zestawu.

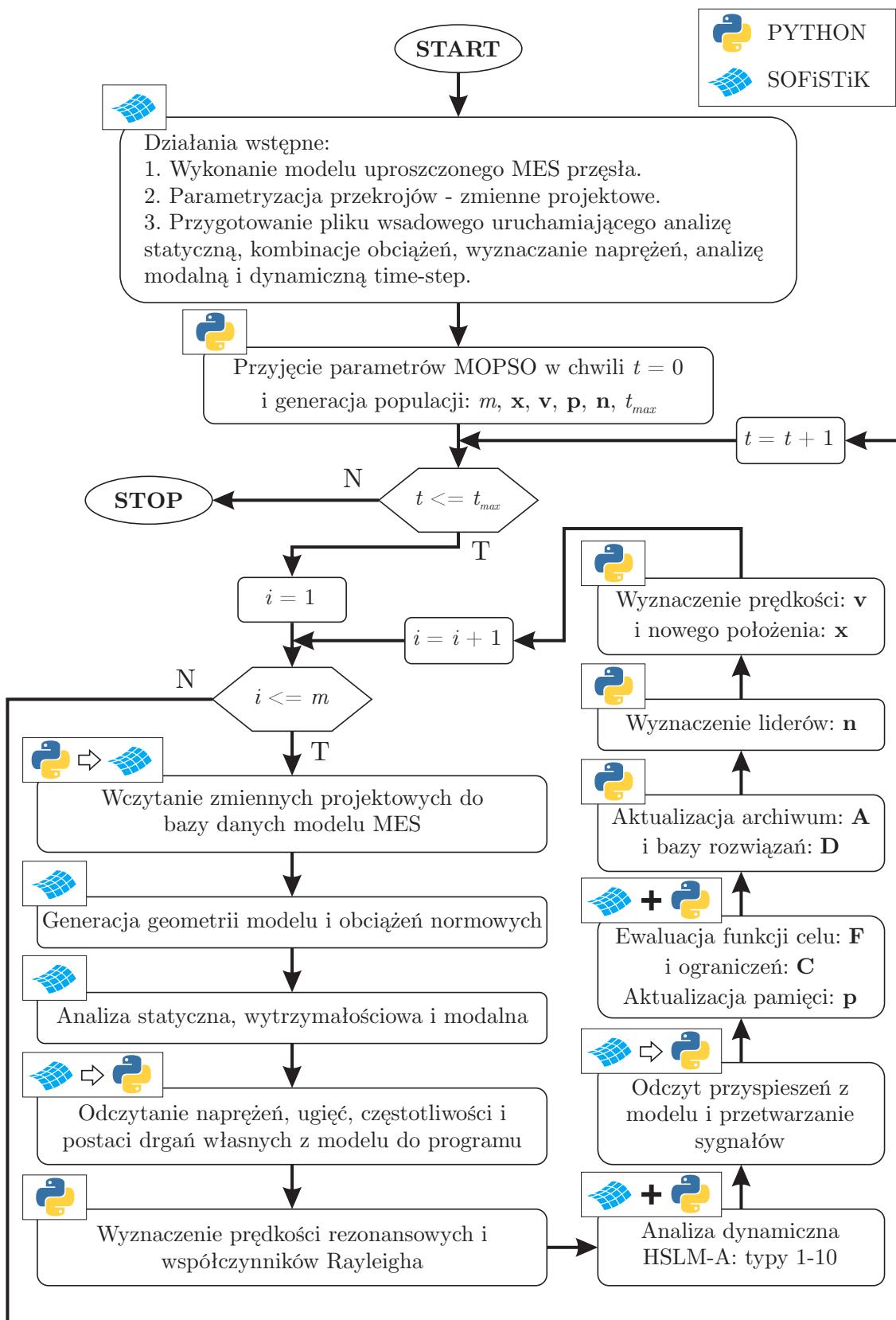
Tłumienie uwzględniono jako masowo-sztywnościowe. Współczynniki Rayleigha ?? wyznaczano za każdym razem tak, aby liczba tłumienia dla dwóch pierwszych modów była równa  $\xi = 0.006$ . Wartość została przyjęta na podstawie przeprowadzonej identyfikacji realnego obiektu 5.1. Wybrano wartość najniższą dla modów o dominującym, pionowym kierunku postaci drgań. Wymagane do obliczeń współczynników częstotliwości drgań własnych każdorazowo wyznaczane były w analizie modalnej.

### 5.5.3 Algorytm rozwiązania problemu

Optymalizację przeprowadzono ponownie za pomocą dostosowanego algorytmu MOPSO. Ze względu na uniwersalność algorytmów metaheurystycznych, również w tym przypadku w wielu aspektach tok postępowania jest zbliżony do zastosowanego w procesie kalibracji. Wyróżniono następujące główne kroki wykonywane dla każdego nowego położenia części:

1. Generacja modelu uproszczonego o wymiarach przekrojów poprzecznych zgodnych ze zmiennymi projektowymi.
2. Wprowadzenie obciążeń stałych i ruchomych do obliczeń statycznych.
3. Analiza statyczna, kombinatoryka i obliczenia wytrzymałościowe od obliczeniowych wartości obciążień statycznych.
4. Analiza modalna. Wyznaczenie pierwszych pięciu zestawów parametrów modalnych: częstotliwości i postaci drgań własnych.
5. Wyznaczenie prędkości rezonansowych i współczynników Rayleigha. Wczytanie danych do modelu.
6. Generacja obciążenia pociągiem HSLS-A. Analiza dynamiczna przejazdu pociągu po obiekcie. Odczytanie przebiegu przyspieszeń w czasie dla trzech punktów zlokalizowanych na ściągu w  $1/4L$ ,  $1/2L$  i  $3/4L$ . Punkt wykonywany jest dla wszystkich dziesięciu pociągów HSLS-A i wyznaczonych prędkości rezonansowych.
7. Przetworzenie sygnałów przyspieszeń: filtrowanie w zakresie do 30 Hz i usunięcie wartości stałej. Wyznaczenie wartości maksymalnej przyspieszeń ze wszystkich przebiegów.
8. Odczytanie objętości konstrukcji stalowej na podstawie przekrojów poprzecznych łuku, ściągu i wieszaków.
9. Zestawienie wektora funkcji celu  $\mathbf{F} = [f_s, f_a]$  oraz wektora ograniczeń  $\mathbf{C} = [c_{sa}, c_{sg}, c_{sh}, c_d]$ . Przekazanie wyznaczonych rezultatów do algorytmu optymalizacyjnego.

Na rysunku 5.26 przedstawiono schemat blokowy algorytmu. Ikonami oznaczono w jakim środowisku wykonywane są dane kroki, oraz kierunek przepływu informacji lub współpracę obu środowisk.

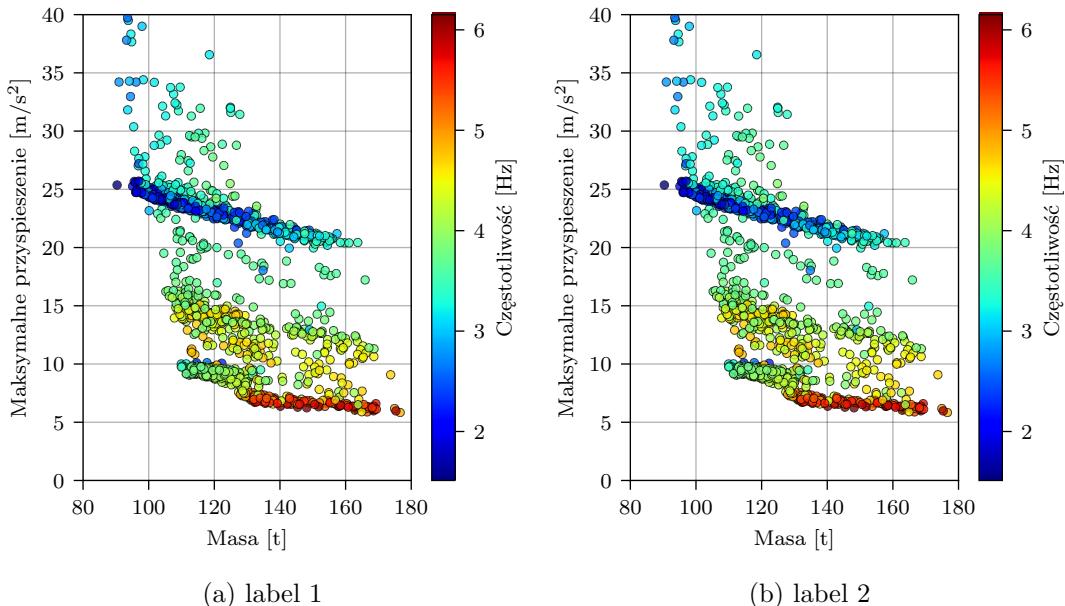


Rysunek 5.26: Schemat blokowy algorytmu optymalizacji wielokryterialnej konstrukcji ze względu na jej zachowanie dynamiczne

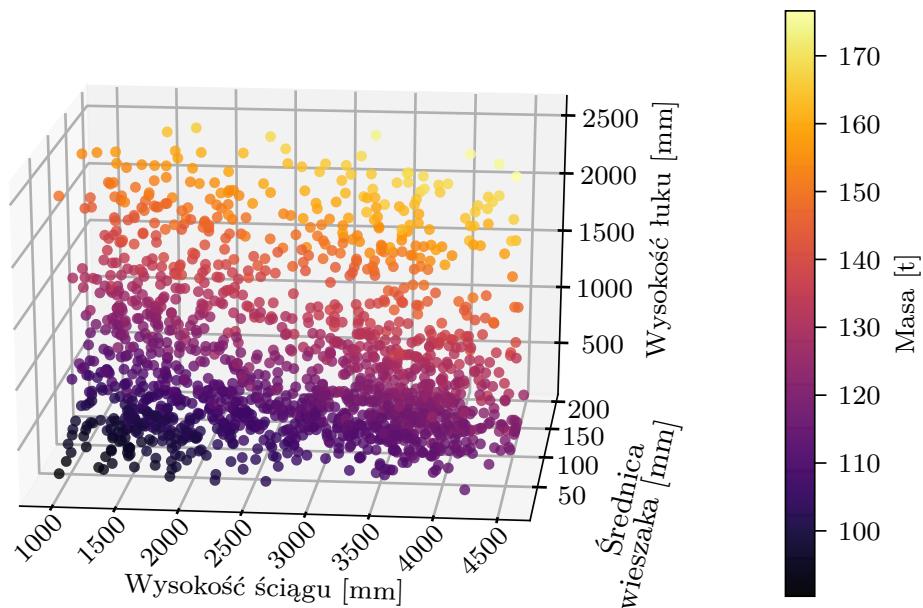
## 5.6 Rezultaty optymalizacji

Optymalizację konstrukcji przeprowadzono dla dwóch funkcji celu  $\mathbf{F} = [f_s, f_a]$ , trzech wariantów rozkładu wieszaków i trzech prędkości maksymalnych. Poniżej zaprezentowano i omówiono wyniki dla każdego z wariantów.

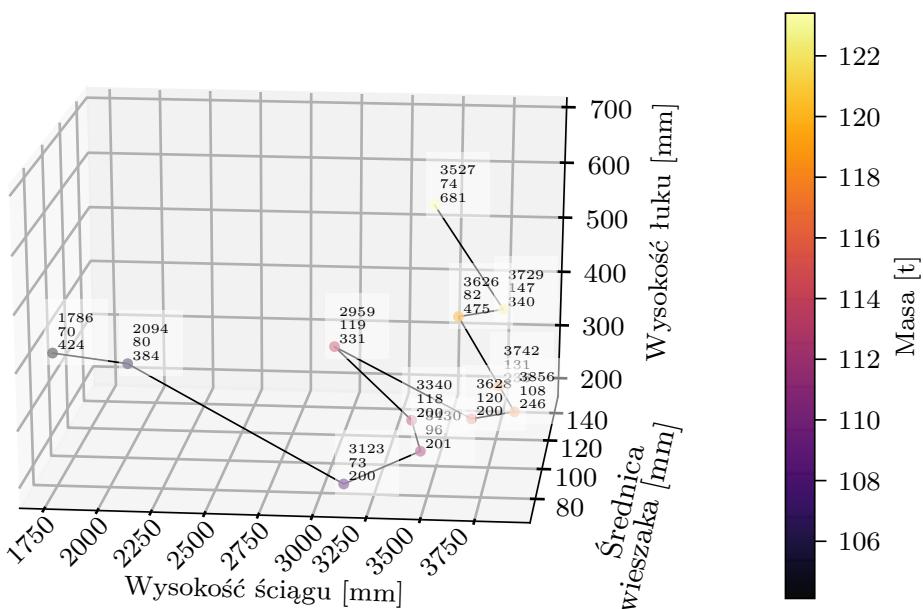
- 5.6.1 Wariant 1: wieszaki proste, 160 km/h**
- 5.6.2 Wariant 1: wieszaki proste, 200 km/h**
- 5.6.3 Wariant 1: wieszaki proste, 300 km/h**
- 5.6.4 Wariant 2: wieszaki ukośne, 160 km/h**
- 5.6.5 Wariant 2: wieszaki ukośne, 200 km/h**
- 5.6.6 Wariant 2: wieszaki ukośne, 300 km/h**
- 5.6.7 Wariant 3: Network, 160 km/h**
- 5.6.8 Wariant 3: Network, 200 km/h**
- 5.6.9 Wariant 3: Network, 300 km/h**



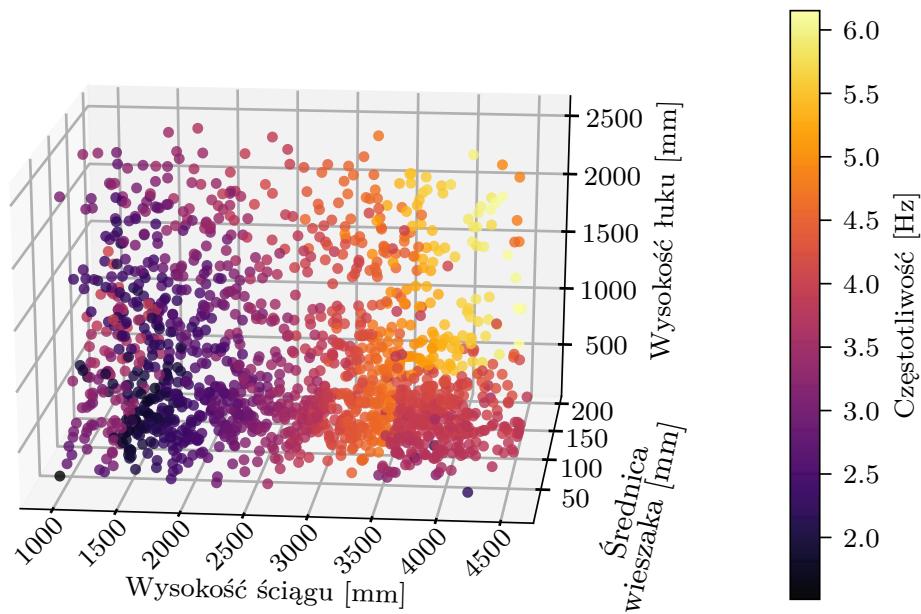
Rysunek 5.27: Częstotliwość drgań własnych związana z decydującą prędkością krytyczną. Wieszaki proste, prędkość maksymalna 300km/h



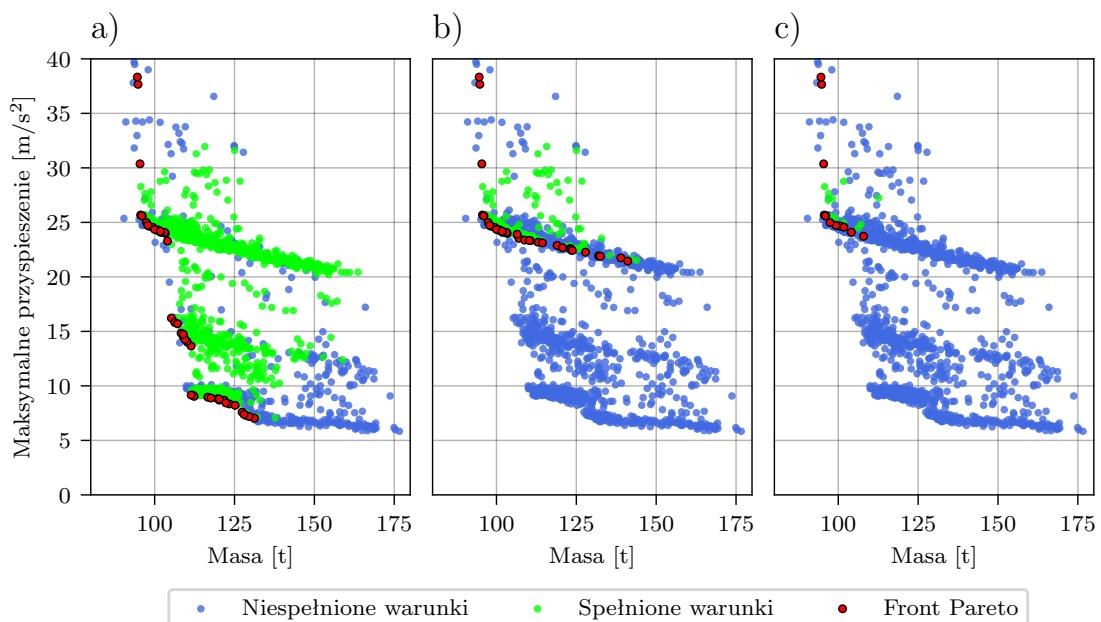
Rysunek 5.28: Częstotliwość drgań własnych związana z decydującą prędkością krytyczną. Wieszaki proste, prędkość maksymalna 300km/h



Rysunek 5.29: Częstotliwość drgań własnych związana z decydującą prędkością krytyczną. Wieszaki proste, prędkość maksymalna 300km/h



Rysunek 5.30: Częstotliwość drgań własnych związana z decydującą prędkością krytyczną. Wieszaki proste, prędkość maksymalna 300km/h



Rysunek 5.31: Częstotliwość drgań własnych związana z decydującą prędkością krytyczną. Wieszaki proste, prędkość maksymalna 300km/h

# Rozdział 6

## Podsumowanie i wnioski

Podsumowania wnioski

# Bibliografia

Goicolea, Jose M. i Felipe Gabaldón (2008). “Design issues related to dynamic effects for high speed railway bridges in Spain”. W: *Dynamics of High-Speed Railway Bridges*. Red. Raimundo Delgado i in. Rozd. 2, s. 10.