

Studium Magisterskie

Kierunek: Analiza Danych – Big Data

Przemysław Michałowski

Nr albumu 81840

**Rozwiązywanie problemu marszrutyzacji z wykorzystaniem algorytmów kwantowych**

Praca magisterska

napisana w Katedrze/Instytucie

……………………………………………

pod kierunkiem naukowym

……………………...……………………

Warszawa 20…..

Spis treści

[Wstęp 6](#_Toc119430128)

[Rozdział I. Podstawowe pojęcia 8](#_Toc119430129)

[I.1 Podstawowe cechy obliczeń kwantowych 8](#_Toc119430130)

[I.1.1 Kubit jako podstawowa jednostka informacji 8](#_Toc119430131)

[I.1.2 Kluczowe zjawiska 12](#_Toc119430132)

[I.1.3 Wykonywanie działań 14](#_Toc119430133)

[I.2 Postać ogólna problemu marszrutyzacji 17](#_Toc119430134)

[I.2.1 Postać ogólna problemu VRP 17](#_Toc119430135)

[I.2.2 Postać matematyczna VRP 20](#_Toc119430136)

[I.3 Kwantowe i hybrydowe algorytmy optymalizacyjne 24](#_Toc119430137)

[I.3.1 QAOA jako algorytm wariancyjny 24](#_Toc119430138)

[I.3.2 Założenia algorytmu QAOA 26](#_Toc119430139)

[I.3.3 Część kwantowa algorytmu QAOA 28](#_Toc119430140)

[Rozdział II. Rozwinięcie 34](#_Toc119430141)

[II.1 Studium nad efektywnością QAOA 34](#_Toc119430142)

[II.1.1 Złożoność QAOA 34](#_Toc119430143)

[II.1.2 WS-QAOA 36](#_Toc119430144)

[II.1.3 Hiperoptymalizacja Bayesowska 39](#_Toc119430145)

[II.2 Rozwinięcie algorytmu QAOA 44](#_Toc119430146)

[II.2.1 Klasyczne sposoby rozwiązywania problemu marszrutyzacji 44](#_Toc119430147)

[II.2.2 Przykład komercyjny 44](#_Toc119430148)

[II.2.3 QUBO – Paweł i inne podejścia kwantowe, bez formalizacji, tylko podejście i wynik 44](#_Toc119430149)

[II.3 Algorytmy kwantowe 45](#_Toc119430150)

[II.3.1 Przegląd algorytmów 45](#_Toc119430151)

[II.3.2 Wybór algorytmu 45](#_Toc119430152)

[II.3.2.1 Opis algorytmu przez analogię do klasyki 45](#_Toc119430153)

[II.3.2.2 Formalizacja algorytmu 45](#_Toc119430154)

[II.4 Przegląd rynku kwantowego 46](#_Toc119430155)

[II.4.1 Infrastruktura ogólnodostępna 46](#_Toc119430156)

[II.4.2 Software (qiskit) 46](#_Toc119430157)

[II.4.3 Środowiska naukowe i dydaktyczne 46](#_Toc119430158)

[II.4.4 Wyścig państw 46](#_Toc119430159)

[Rozdział III. Implementacja 47](#_Toc119430160)

[III.1 Dane 47](#_Toc119430161)

[III.2 Opis matematyczny 47](#_Toc119430162)

[III.2.1 Sformułowanie matematyczne a potem w QUBO 48](#_Toc119430163)

[III.2.2 Sformułowanie algorytmem kwantowym (obwód?) 48](#_Toc119430164)

[III.3 Analiza porównawcza 48](#_Toc119430165)

[III.3.1.1 49](#_Toc119430166)

[III.3.1.2 Abcc ccsscssc sdsdza 50](#_Toc119430167)

[III.3.1.3 Kdsjdjs adsdfs dfsdfh 50](#_Toc119430168)

[III.3.1.4 Loriem lori trinume trie 51](#_Toc119430169)

[III.4 Loriem loriem loriem loriem loriem loriem loriem loriem loriem 52](#_Toc119430170)

[III.4.1.1 Duis duis duis duis 52](#_Toc119430171)

[Zakończenie 54](#_Toc119430172)

[LITERATURA 56](#_Toc119430173)

[Spis tabel 59](#_Toc119430174)

[Spis rysunków 59](#_Toc119430175)

[Streszczenie 60](#_Toc119430176)

[Summary 60](#_Toc119430177)

Wstęp

Wraz ze wzrostem zapotrzebowania na moce obliczeniowe rośnie presja na udostępnianie coraz to silniejszych maszyn zdolnych te obliczenia realizować. Do takich maszyn zalicza się komputery i początkowo były one wykorzystywane między innymi w obliczeniach naukowych. Pomimo wzrostu liczby bitów w tempie wykładniczym, dokonywanie pewnych obliczeń przysparzało i nadal przysparza wielu trudności, jak choćby rozwiązywanie problemów NP-trudnych. Szczególną uwagę należy zwrócić na problemy chemików i fizyków kwantowych. Problemy z wykorzystaniem komputerów w obliczeniach dotyczących fizyki kwantowej zostały podniesione głośno przez Richarda Feynmana w 1981 na konferencji *The Physics of Computation*. W czasie swojego przemówienia podniósł on m.in. konieczność symulowania prędkości światła oraz fal czy reprezentację rozkładu gęstości dla zjawisk ciągłych, w tym rozkładów prawdopodobieństwa. Są to problemy z którymi ówczesne (klasyczne) komputery nie były sobie w stanie poradzić efektywnie i dokładnie mimo rosnących mocy obliczeniowych. Feynman zaproponował pomysł utworzenia komputera nowego typu – komputera kwantowego.[[1]](#footnote-1) Chociaż przed Feynmanem było już kilku naukowców, którzy postulowali i proponowali utworzenie takiej maszyny (jednym z pionierów przed Feynmanem był Paul Benioff, który poświęcił temu zagadnieniu cały artykuł w 1979 roku[[2]](#footnote-2)), to dopiero wykład Feynmana spowodował wzrost zainteresowania maszynami, których działanie ma opierać się na i korzystać z zjawisk na poziomie kwantowym.[[3]](#footnote-3)

Komputery wantowe przyciągają obecnie uwagę różnych specjalistów z całego świata – już nie tylko środowisko naukowe, lecz także polityków, organy publiczne, sektor bezpieczeństwa, sektor komercyjny i w końcu media. Zważywszy jednak na młodość tej technologii i związane z nią problemy, masowa implementacja komercyjna zdaje się być obecnie odległa, ale realna. Obecne lub niedalekie zastosowania komputerów kwantowych obejmują m.in. kryptografię, uczenie maszynowe i optymalizację, symulacje w obszarze fizyki i chemii

Celem poniższej pracy jest ukazanie komputerów kwantowych jako narzędzia służącemu rozwojowi uczenia maszynowego i mające istotny wpływ na dalszy rozwój tej dziedziny. Jako przykład zastosowania komputerów kwantowych zostanie podany przykład problemu marszrutyzacji, opisany w drugim rozdziale i rozwiązany w trzecim rozdziale z wykorzystaniem algorytmów wymagających komputerów kwantowych.

Struktura tej pracy umożliwi czytelnikowi zapoznanie się z podstawowymi pojęciami i zjawiskami w pierwszym rozdziale, co umożliwi przeprowadzenie logicznego i spójnego wywodu w dalszych rozdziałach bez popadania w dygresję.

# Podstawowe pojęcia

Poniższy rozdział stanowi wprowadzenie do pojęć zawartych w tytule. Zostanie w nim przedstawione nazewnictwo oraz oznaczenia wykorzystywane w pracy, a także zostanie zdefiniowany problem VRP oraz algorytm QAOA.

Na początku omówiono pojęcie kubitu wprowadzając równocześnie notację matematyczną używaną w dalszej części pracy. Przedstawiono operacje matematyczne, jakie można wykonywać na kubitach bazując na przyjętych w omawianym obszarze oznaczeniach. W następnym podrozdziale wyjaśniono kluczowe zjawiska mechaniki kwantowej, mające kluczowe znaczenie dla obliczeń kwantowych – zarówno jako źródła przewagi obliczeniowej nad klasycznymi maszynami obliczeniowymi jak i jako źródła ograniczeń i barier w obliczeniach kwantowych. Kolejna część pozwala na zapoznanie się z pojęciem problemu marszrutyzacji w jego ogólnej formie, ze szczególnym uwzględnieniem warunków ograniczających. W ostatniej części przedstawiono podstawowe założenia oraz pochodzenie kwantowego algorytmu QAOA, sygnalizując możliwe kierunki jego rozwoju,

## Podstawowe cechy obliczeń kwantowych

### Kubit jako podstawowa jednostka informacji

W klasycznym komputerze podstawową i najmniejszą jednostką informacji jest bit. W danym momencie może on znajdować się w dokładnie jednym z dwóch stanów: 0 lub 1. Oznacza to, że przestrzeń możliwych stanów bitu jest zdefiniowana poprzez dwa różne punkty. Skutkuje to również tym, że liczba możliwych stanów systemu *n­*-bitowego wynosi .[[4]](#footnote-4) Warto zauważyć, że zbiór możliwych stanów systemu jest przeliczalnym zbiorem potęgowym zbioru możliwych stanów pojedynczego bitu i jest mocy .

W komputerze kwantowym podstawową jednostką informacji jest bit kwantowy zwany też kubitem.[[5]](#footnote-5) Fizycznie, może być on realizowany na wiele sposobów, w zależności od architektury maszyny kwantowej, np. poprzez fotony, uwięzione jony, elektrony lub inne cząsteczki kwantowe.[[6]](#footnote-6) Przestrzeń możliwych stanów systemu kwantowego jest opisywana matematycznie przez złożoną (zespoloną) przestrzeń wektorową z zdefiniowanym na niej iloczynem skalarnym.[[7]](#footnote-7) Tak więc matematycznie kubit jest reprezentowany przez unormowany wektor w dwuwymiarowej przestrzeni Hilberta nad ciałem liczb zespolonych, a system *n‑*kubitowy – przez unormowany wektor w -wymiarowej przestrzeni Hilberta. Skutkuje to również tym, że liczba teoretycznie możliwych stanów pojedynczego kubitu jest nieskończona a moc zbioru stanów kubitu jest równa . Analogicznie jak w przypadku kubitu, zbiór możliwych stanów *n*-kubitowego systemu kwantowego jest zbiorem potęgowym możliwych stanów kubitu, jest więc on mocy .

Stan kubitu można zapisać jako kombinację liniową stanów bazowych (ket zero) oraz (ket jeden) korzystając z notacji Diraca zwanej też notacją bra-ket[[8]](#footnote-8):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

gdzie: i są amplitudami takimi, że:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

co gwarantuje, że wektor będzie długości równej 1 (w normie drugiej). W ogólności dla *n*‑kubitowego systemu kwantowego można otrzymać stanów. Wówczas Równanie 2 przyjmuje postać:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

lub równoważnie:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Stany bazowe są to dwa dowolne ortonormalne wektory.[[9]](#footnote-9) W dalszej części pracy za stany bazowe będą przyjmowane zawsze stany oraz reprezentowane odpowiednio przez pionowe wektory oraz .[[10]](#footnote-10) Korzystając z równania Eulera, można zapisać stan kubitu jako:[[11]](#footnote-11)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Kąty oraz sterują kątami obrotów wektorów stanów i po jednostkowym okręgu zespolonym, kąt steruje długością tych wektorów. Każdy z elementów powyższych wektorów wymaga reprezentacji na 2-wymiarowej płaszczyźnie zespolonej, jednak ponieważ wektory stanów i są dwuelementowe, to łączna liczba wymiarów wymaganych do geometrycznego przedstawienia wektora wzrasta do czterech. Elementy oraz w Równaniu 5 odpowiadają dokładnie amplitudom i w Równaniu 1. Ponadto warto zauważyć, że oraz w Równaniu 5 mają długość w normie drugiej równą 1, nie mają więc wpływu na wielkość i w Równaniu 2. Zgodnie z Równaniem 5 reprezentacją geometryczną wektora jest 4-wymiarowa sfera jednostkowa – po 2 wymiary na część rzeczywistą i część urojoną oraz po 2 wymiary na każdy z elementów wektora.

Jedną z własności na które należy zwrócić uwagę jest, to że kubity reprezentowane przez wektory równoległe, są nierozróżnialne. Oznacza to, że w Równaniu 5 znajduje się redundantna informacja. Korzystając z faktu, że wektory są równoległe, gdy różnią się tylko zwrotem i/lub długością, natomiast kierunek pozostaje ten zmian, tj:

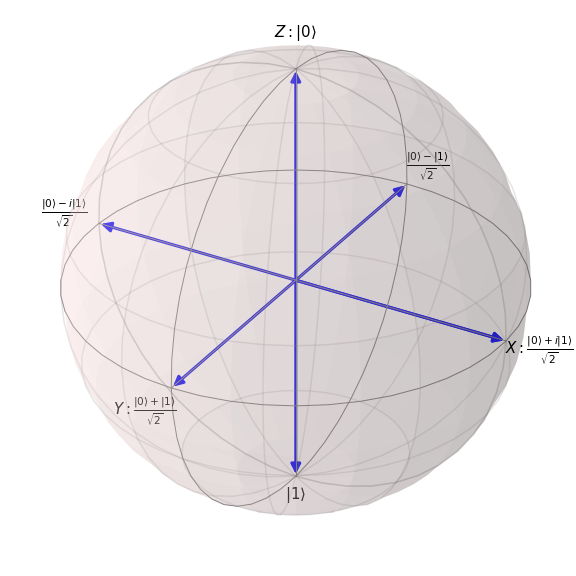
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

można zauważyć, że dwa wektory oraz będą równoległe wtedy i tylko wtedy, kiedy będą miały dokładnie taką samą część , tj. identyczne kąty oraz , natomiast kąt nie będzie miał wpływu na równoległość, czyli w Równaniu 5 można podstawić . Korzystając z faktu równoległości, element , zwany też fazą globalną, można pominąć, ponieważ nie powoduje obserwowalnych zmian, więc z perspektywy obliczeń kwantowych będzie on nieistotny i w rezultacie otrzymamy[[12]](#footnote-12):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

gdzie oznacza kąt obrotu po płaszczyźnie tworzonej przez część rzeczywistą wektorów bazowych, a to kąt obrotu wokół osi wyznaczanej przez wektor oraz założyć, że współczynnik przy wektorze jest rzeczywisty i nieujemny.

Rysunek . Wizualizacja sfery Blocha.



**Źródło:** opracowanie własne na podstawie M. A. Nielsen, I.I. Chuang *Quantum Computing and Quantum Information. 10th Anniversary Edition.* Cambridge University Press, Cambridge, 2010, s. 15.

Stan kubitu można reprezentować przy pomocy wektora w 3-wymiarowej sferze (Rysunek 1), zwanej sferą Blocha.[[13]](#footnote-13) Warto zwrócić uwagę, że zgodnie z Równaniem 1 i Równaniem 2 reprezentacja graficzna powinna mieć charakter 4-wymiarowy, jednakże zgodnie z Równaniem 7 możemy ograniczyć tę reprezentację do trzech wymiarów. Będzie to jednak skutkowało utratą ortogonalności stanów bazowych w wizualizacji. Stąd też w Równaniu 7 kąty w funkcjach trygonometrycznych są dzielone przez dwa, ponieważ to kąt obrotu wokół osi Y w sferze Blocha. Stany bazowe znajdują się na krańcach osi Z sfery Blocha. W sferze Blocha określa kąt obrotu wokół osi Z.

Wybór wektorów oraz na wektory bazowe wynika m.in. z powszechności ich użycia. Ta z kolei wynika z ich własności tych wektorów. Po pierwsze warto zauważyć, że po przekształceniu ich przy pomocy Równania 7 otrzymano przestrzeń trójwymiarową, reprezentowaną przez sferę jednostkową nad przestrzenią liczb zespolonych. Odbicie względem osi (wektorów bazowych) rozpinających tę przestrzeń dla przypadku opisanego przez Równanie 7 jest realizowane przez macierze: dla osi X, dla osi Y oraz dla osi Z, od nazw osi pochodzą oznaczenia tych macierzy, odpowiednio: , , . Macierze te są też zwane macierzami Pauliego. Wyznaczniki tych macierzy są równe 1, ślady są równe 0, a wartości własne to 1 oraz -1. Wektory własne tych macierzy (znormalizowane do 1) to:

* dla : oraz – wektory te są też oznaczane w informatyce kwantowej jako wektory stanów (ket-plus) oraz (ket-minus);
* dla : oraz ;
* dla : oraz .

Wektory własne macierzy Pauliego sugerują możliwy dobór wektorów bazowych (i stanów bazowych) – wszystkie wyżej wymienione pary wektorów mogą być stanami bazowymi systemu kwantowego, a wybierając jedną z par wektorów, stany bazowe będą się znajdować na sferze Blocha na osi odpowiadającej odpowiedniej macierzy Pauliego (patrz Rysunek 1). Przemnożenie wektorów bazowych przez macierz Pauliego inną od tej, od której pochodzą te wektory, będzie skutkowało otrzymaniem wektora ortogonalnego, tj. drugiego wektora własnego macierzy Pauliego.

Macierze Pauliego są antykomutatorami, tzn. zamiana kolejności mnożenia dwóch różnych macierzy Pauliego skutkuje zmianą znaku wyniku na przeciwny. Pomnożenie każdej macierzy Pauliego przez siebie daje macierz jednostkową *I*.

Na potrzeby tej pracy systemem kwantowym będzie określany system składający się z kubitów, a rejestrem kwantowym – zbiór kubitów. Analogicznie rejestr klasyczny będzie się składał z bitów. Wektor określający stan systemu, w którym wszystkie *n* kubitów znajduje się w stanie będzie oznaczany z wykorzystaniem symbolu iloczynu tensorowego (tożsamego tutaj z iloczynem Kroneckera) lub przez pogrubienie , jeśli liczba kubitów w stanie będzie jasno wynikać z kontekstu

### Kluczowe zjawiska

Jednym ze zjawisk charakterystycznych dla mechaniki kwantowej, które jest wykorzystywane na szeroką skalę w obliczeniach kwantowych jest superpozycja. Oznacza ono, że cząsteczka kwantowa znajduje się równocześnie w dwóch przeciwstawnych stanach albo innymi słowy, że znajduje się gdzieś pomiędzy nimi. Z perspektywy informatyki kwantowej sprowadza się to do sytuacji, gdy współczynniki i definiujące bieżący stan kubitu są takie, że .[[14]](#footnote-14)

Długotrwałe utrzymanie kubitu fizycznego w superpozycji jest obecnie zadaniem technologicznie trudnym. Fizycznie, interakcja z otoczeniem obiektu reprezentowanego przez kubit, doprowadza do redukcji (*collapse*) funkcji falowej. Dla obliczeń kwantowych oznacza to przejście stanu superpozycji do jednego ze stanów bazowych. Znajdując się w superpozycji, stan kubitu może się również zmieniać (tj. wektor reprezentujący stan kubitu będzie ulegał odchyleniom) bez doprowadzania do redukcji. Niekontrolowane zmiany stanu kubitu stanowią jeden z kluczowych problemów stabilności urządzeń kwantowych. Oddziaływanie kubitu z otoczeniem nosi nazwę dekoherencji. Jeżeli jest ona niezamierzona, wówczas jej skutki nazywamy szumem kwantowym (*quantum noise)*.[[15]](#footnote-15) [[16]](#footnote-16)

Przejście ze stanu superpozycji do stanu bazowego może być również następstwem zamierzonym działań, tj. wykonania pomiaru (obserwacji). Pomiar stanowi często jeden z końcowych elementów algorytmów kwantowych bądź też ich istotnych części. W jego wyniku kubit przechodzi do jednego ze stanów bazowych.[[17]](#footnote-17) W wyniku dekoherencji (niezamierzonej lub spowodowanej pomiarem) kubit znajdzie się w stanie lub z prawdopodobieństwem równym odpowiednio lub , co jest zgodne z aksjomatyczną definicją prawdopodobieństwa dzięki Równaniu 2.

Ogólnie, zbiór możliwych do odczytania wartości w czasie pomiaru jest zdefiniowany przez wartości własne macierzy (dokładniej: operatora kwantowego lub obserwabli), która odpowiada za akt pomiaru. Aby dany operator był obserwablą, jego wektory własne muszą tworzyć bazę przestrzeni Hilberta. W takim ujęciu prawdopodobieństwo otrzymania w pomiarze wartości jest równe:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

gdzie jest sprzężeniem hermitowskim wektora własnego obserwabli odpowiadającego wartości własnej , a pewnym wektorem reprezentującym stan kwantowy, na którym dokonano pomiaru. Przyjmując poprzednie założenia, tj., że stany bazowe to oraz , macierz jest obserwablą systemu kwantowego. W Równaniu 8 można też zauważyć, że faza globalna nie będzie miała wpływu na wynik, podczas gdy faza relatywna będzie miała wpływ na wynik, ale różny w zależności od obserwabli. W informatyce kwantowej przyjęło się opisywać wynik pomiaru przy pomocy wektorów własnych odpowiadających sprawdzanej wartości własnej, tak więc w wyniku dokonania pomiaru przy pomocy obserwabli (tj. dokonania pomiaru w bazie tworzonej przez wektory własne macierzy tej obserwabli, tutaj zwanego bazą Z) możliwe do otrzymania stany to nie 1 i -1, lecz oraz , czyli oraz . Możliwe jest też dokonywanie pomiarów w innych bazach (nie tylko tych odpowiadającym macierzom Pauliego), jednak zgodnie z przyjętymi wcześniej założeniami, pomiar zawsze będzie dokonywany w bazie Z.

Kolejnym istotnym zjawiskiem jest splątanie kwantowe. Zjawisko to polega na przyczynowo-skutkowym (a nie tylko liczbowym) powiązaniu dwóch lub więcej kubitów. Fizyczny aspekt tego zjawiska nadal jest przedmiotem dyskusji. Z perspektywy obliczeń kwantowych oznacza to m.in. możliwość wpływania na jeden kubit przy pomocy innego, splątanego z nim wcześniej kubitu. Konsekwencją tego jest możliwość wnioskowania na temat stanu jednego kubitu na podstawie stanu innego kubitu. Zjawisko splątania jest również podatne na skutki dekoherencji – jeżeli jeden kubit ulegnie dekoherencji, to pozostałe splątane z nim kubity mogą również jej ulec. Podobnie jak w przypadku pomiaru, doprowadzenie do takiego zjawiska jest często intencjonalne.[[18]](#footnote-18)

### Wykonywanie działań

Działania na komputerach klasycznych są wykonywane z pomocą bramek logicznych i algebry boolowskiej. Do przykładowych bramek logicznych można zaliczyć AND, OR, XOR oraz NOT.[[19]](#footnote-19) Z kolei operacje na kubitach są konstruowane z wykorzystaniem macierzy i algebry liniowej. Macierze te, zwane też bramkami lub operatorami kwantowymi, są macierzami unitarnymi, tak więc, w przeciwieństwie do komputerów klasycznych, wszystkie pojedyncze operacje (tak samo jak reprezentujące je macierze) są odwracalne. Fizycznie, realizacja działań reprezentowanych przez bramki, polega na oddziaływaniu na fizyczną realizację kubitu impulsem elektromagnetycznym.[[20]](#footnote-20)

Niektóre bramki kwantowe mają swoje nazwy oraz dedykowane oznaczenia. Mogą one mieć postać stałą lub parametryzowaną, działać zarówno na jednym jak i na wielu kubitach. Mają one również swoje oznaczenia graficzne, które są używane w wizualizacjach obwodów kwantowych, przy pomocy których można graficznie opisać przebieg algorytmu kwantowego. Przegląd najważniejszych bramek wraz z ich oznaczeniami używanymi w dalszej części zawiera Tabela 1.

Tabela . Podstawowe operacje kwantowe i ich oznaczenia.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Nazwa operatora | Skrót | Macierz | Symbol graficzny |
| Identity | I |  |  |
| Pauli-X, NOT | X, NOT, |  | Obraz zawierający tekst  Opis wygenerowany automatycznie |
| Pauli-Y | Y, |  |  |
| Pauli-Z | Z, |  | Obraz zawierający tekst  Opis wygenerowany automatycznie |
| Hadamard | H |  |  |
| T, | T |  |  |
| Phase | S, P |  | Obraz zawierający tekst, tablica suchościerna  Opis wygenerowany automatycznie |
| S-dagger, sprzężenie hermitowskie S |  |  |  |
| SWAP | SWAP |  |  |
| Controlled NOT | CX, CNOT, C1NOT, C1X |  |  |
| Controlled Z | CZ |  | lub Obraz zawierający tekst, zegar  Opis wygenerowany automatycznie |
| Toffoli | CCNOT, CCX, TOFF, C1C1NOT, C1C1X |  | Obraz zawierający tekst, zegar  Opis wygenerowany automatycznie  lub |
| Ry | Ry |  |  |
| Rz | Rz |  |  |
| Rx | Rx |  |  |
| Pomiar (Measurement) | M | - | Obraz zawierający tekst, zegar, wskaźnik  Opis wygenerowany automatycznie  lub |

**Źródło:** opracowanie własne na podstawie M. A. Nielsen, I.I. Chuang *Quantum Computing and Quantum Information. 10th Anniversary Edition.* Cambridge, 2010, Cambridge University Press.

Ogólna postać kwantowej bramki unarnej (bramki działającej na jednym kubicie) ma postać[[21]](#footnote-21):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

lub alternatywnie:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

gdyż obie postaci są identyczne co do fazy globalnej, tj:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Bramkę tę można przedstawić obrazując tym samym obrót wokół poszczególnych osi sfery Blocha:[[22]](#footnote-22)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

gdzie:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | , |  |

co gwarantuje, że wektor, na którym zastosowano macierz, nie zmieni swojej długości. Poszczególne części reprezentują obrót wokół odpowiednich osi (patrz: Równanie 16). Warto przypomnieć uogólnienie tożsamości Eulera na eksponentę macierzy[[23]](#footnote-23):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

gdzie . Stąd, korzystając z eksponenty macierzy (Równanie 14) oraz szeregów Taylora, można pokazać, że bramka Rx jest częściową rotacją wokół osi określonej przez bramkę X (analogicznie dla bramki Ry oraz Rz):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Analogicznie, po rozwinięciu Równania 12 można otrzymać:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

co zgodnie z Równaniem 14 odpowiada obrotowi na sferze jednostkowej – przestrzeni rozpinanej przez macierze Pauliego.

Bramki kwantowe dzięki swojej postaci, powodują, że wektor (reprezentujący system kwantowy) na którym są stosowane, zachowuje swoją długość (*length-preserving operator*), więc poprawnie zdefiniowana bramka kwantowa zastosowana na poprawnie zdefiniowanym stanie kwantowym zwróci poprawnie zdefiniowany stan kwantowy o niezmienionej długości.

## Postać ogólna problemu marszrutyzacji

### Postać ogólna problemu VRP

Problem komiwojażera (ang.: Travelling Salesman Problem – TSP) jest jednym z najbardziej znanych problemów optymalizacyjnych. Polega on na znalezieniu jak najkrótszej trasy pozwalającej na odwiedzenie wszystkich określonych miejsc (reprezentowanych przez wierzchołki grafu), pomiędzy którymi odległości są znane. Wprowadzony został on w 1934 przez Hasslera Whitneya,[[24]](#footnote-24) ujęty matematycznie przez Merilla Flooda w 1955 roku,[[25]](#footnote-25) [[26]](#footnote-26) a następnie uogólniony pod nazwą Truck Dispatching Problem przez Georga Dantziga i Johna Ramsera poprzez dodanie wymogu powrotu do pozycji startowej po odwiedzeniu określonej liczby lokacji.[[27]](#footnote-27) Udowodniono, że problem TSP jest NP-trudny,[[28]](#footnote-28) przy czym wykazano także, że jego decyzyjna wersja jest także NP-zupełna przez sprowadzenie do problemu grafu hamiltonowskiego, który jest problemem NP-zupełnym.[[29]](#footnote-29)

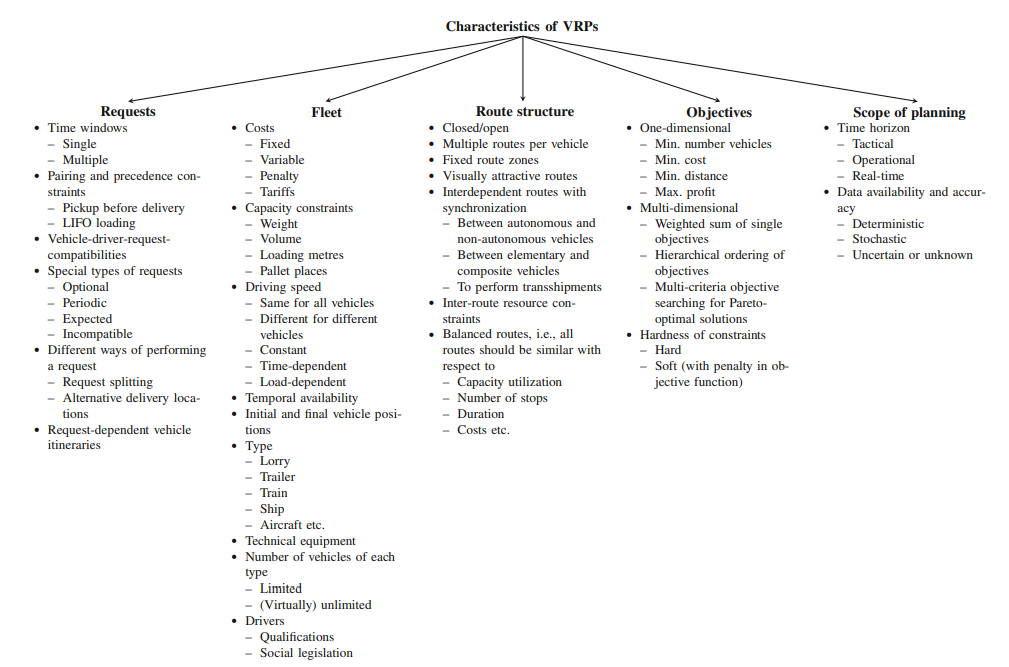
Już Dantzig i Ramser we wspomnianym wcześniej artykule zauważyli, że problem opisany przez Flooda można rozszerzyć.[[30]](#footnote-30) Z czasem rzeczywiście pojawiało się coraz więcej rozszerzeń, rozmyło się również nazewnictwo.[[31]](#footnote-31) Uogólnienie problemu TSP zaczęło nosić nazwę problemu marszrutyzacji (Vehicle Routing Problem – VRP[[32]](#footnote-32) lub General Routing Problem - GRP[[33]](#footnote-33)). Ich cechą wspólną jest również to, że podobnie jak problem TSP, są problemami NP-trudnymi z wersjami decyzyjnymi NP-zupełnymi.[[34]](#footnote-34) [[35]](#footnote-35) Niezależnie od nazwy, ogólna idea pozostaje ta sama: pojazd (agent) musi odwiedzić wszystkie miejsca (wierzchołki grafu lub krawędzie grafu) w jak najkrótszym czasie (minimalizując funkcję kosztu).

Definicja problemu VRP jest często rozwijana lub modyfikowana w zależności od postawionego zadania, tworząc kolejne odmiany problemu VRP. Do przykładowych odmian można zaliczyć:

* problem VRP z *m* pojazdami,
* problem VRP z *k* różnymi typami pojazdów, każdy w liczebności *mi*, ;
* problem VRP z ograniczoną pojemnością pojazdów;
* problem VRP o różnej wartości kosztu przejścia pomiędzy tymi samymi miejscami, tzn.  – wówczas graf reprezentujący problem będzie grafem skierowanym;
* problem VRP z oknami czasowymi (VRPTW);
* problem VRP z wieloma punktami zaopatrzenia.

Powyższa lista nie wyczerpuje listy możliwych modyfikacji problemu VRP. Możliwe jest również łączenie tychże modyfikacji. Jak zauważył M. Drexl, mnogość publikacji na temat problemu VRP wynika z kilka powodów: pierwszy to jego znaczenie dla logistyki (chociaż warto zauważyć, że problemy logistyczne nie dotyczą wyłącznie transportu, co pokazano w Rozdziale II.3.2), drugi to wyzwanie intelektualne, jakie stanowi ten problem.[[36]](#footnote-36) Na Rysunku 2 przedstawiono przykładowy podział problemów VRP zaproponowany przez Drexla, ukazując tym samym mnogość możliwych modyfikacji.

Rysunek 2: Odmiany problemu VRP.



**Źródło:** M.Drexl, *Rich vehicle routing in theory and practice*, Logistics Research, 5, 47–63 (2012), s. 49.

### Postać matematyczna VRP

Będąc świadomym różnych ujęć i rozwinięć problemu VRP Raff zaproponował ogólne ujęcie matematyczne problemu[[37]](#footnote-37), które przedstawiono poniżej (zastosowano zmiany w oznaczeniach).

Niech graf składa się z V wierzchołków (*vertices*), A krawędzi (*edges)* oraz macierzy kosztów C, która przyjmujemy, że jest symetryczna, tzn. . Celem jest minimalizacja funkcji kosztu:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

pod warunkami:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

gdzie:

– koszt przejazdu z *i­-*tego do *j­*-tego wierzchołka,

– informacja binarna czy przejazd odbywa się przez krawędź łączącą *i*-ty wierzchołek z *j*‑tym (0 – nie odbywa się, 1 – odbywa się),

– liczba przyjazdów do *j*-tego wierzchołka,

– liczba wyjazdów z *i*-tego wierzchołka,

*n* – liczba wierzchołków, ,

– zbiór możliwych rozwiązań o długości *n,*

– zbiór wszystkich możliwych kombinacji połączeń wierzchołków.

Warunek narzucony na zbiór dotyczy powstawania zamkniętych cykli niepołączonych z punktem startowym. Można go również interpretować jako nakaz wykonania kolejnego kroku startując z miejsca, w którym zakończono poprzedni krok. W zależności od konkretnego problemu VRP może on ulegać istotnym modyfikacjom. Poniżej zostanie przedstawionych kilka najważniejszych metod i podejść do sformułowania tego ograniczenia, które daje się zastosować w większości problemów VRP (założono optymalizację na grafie nieskierowanym).

Bektas zaproponował następującą formułę[[38]](#footnote-38):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

która jest równoważna:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

gdzie oznacza wszystkie wierzchołki z wyjątkiem tego, który oznacza punkt startowy (tzn. ), a oznacza liczbę podtras będących częścią opracowanej trasy. Takie ujęcie warunku nazywa się też jawnym ograniczeniem Dantziga-Fulkersona-Johnsona (chociaż nie zostało przez nich opracowane). Powoduje ono, że liczba warunków ograniczających rośnie w tempie wykładniczym wraz ze wzrostem liczby wierzchołków.[[39]](#footnote-39) Wynika to z tego, że zbiór , jest zbliżony liczebnością do zbioru potęgowego zbioru , a konkretnie , ze względu na wykluczenie zbioru pustego. Głównym zamysłem Równania 15 jest to, że liczba krawędzi w każdym z podzbiorów zbioru różnym od zbioru pustego powinna być o co najmniej 1 mniejsza niż liczba wierzchołków wchodzących w skład danego podzbioru, ponieważ jedynym grafem cyklicznym w zbiorze potęgowym zbioru , jest właśnie graf . Równanie 16 oznacza, że dla każdego podgrafu istnieje taki wierzchołek, do którego prowadzi co najmniej jedna krawędź spoza danego podgrafu (przy czym wyklucza się tutaj punkt startowy, więc ta nierówność jest spełniona też dla zbioru *V*).

Innym z podejść jest zastosowanie niejawnych ograniczeń Dantziga-Fulkersona-Johnsona (Implicit Dantzig-Fulkerson-Johnson formulation). Algorytm szukający optimum rozpoczyna działanie bez żadnych ograniczeń dotyczących zamkniętych cykli. Po otrzymaniu rozwiązania w każdej iteracji, trasa jest sprawdzana pod względem posiadania zamkniętych cykli. Jeśli rozwiązanie okaże się niedopuszczalne, wówczas do zestawu ograniczeń zostaje dodany warunek, który nie zezwala na ponowne powstanie otrzymanego w danej iteracji zamkniętego cyklu. Metoda ta pozostawia dowolność w kwestii definiowania warunku ograniczającego. Takie ujęcie pozwala zmniejszyć liczbę warunków ograniczających i okazało się efektywne, dopóki nie wynaleziono kolejnych metod.[[40]](#footnote-40)

Grupę metod bazujących na podziale przestrzeni rozwiązań dla dużych problemów TSP/VRP omawia Applegate et al. Omawiana tam tzw. metoda cięcia płaszczyzny jest częścią algorytmów, których celem jest zmniejszenie rozmiaru przeszukiwanej przestrzeni. Ogólny zamysł polega na wydzieleniu grup wierzchołków leżących blisko siebie (co samo w sobie może być oddzielnym zadaniem) a następnie tworzenie warunków ograniczających w odniesieniu do powstałych grup wierzchołków, a nie całego zbioru .[[41]](#footnote-41) Efektywność czasowa tego podejścia opiera się na tym, że suma zbiorów potęgowych zbiorów rozłącznych jest mniejszym zbiorem niż zbiór potęgowy sumy tych zbiorów.

Miller, Tucker i Zemlin zaproponowali sformułowanie tych ograniczeń dla problemu CVRP (Capacitated VRP – problem VRP z ograniczoną pojemnością pojazdu – po odwiedzeniu określonej liczby miejsc, agent musi wrócić do punktu startowego uzupełnić zapas), dla którego liczba ograniczeń związanych z zamkniętymi cyklami rośnie w tempie wielomianowym .[[42]](#footnote-42)Kulkarni et al. te ograniczenia uogólnił,[[43]](#footnote-43) a Kara et al. poprawił i przeformułował do postaci dwóch zestawów następujących nierówności[[44]](#footnote-44):

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  |  | | |
|  |  | | |  |

gdzie:

– numer odwiedzonego wierzchołka – numer nadawany jest przy pierwszym przyjechaniu do wierzchołka, za każdym razem coraz większy. Punkt startowy nigdy nie ma nadawanego numeru.

– maksymalna pojemność pojazdu,

– zapotrzebowanie zgłaszane w i-tym wierzchołku.

Warto zauważyć, że warunki opisane przez Równania 22 i 23 nie obowiązują, gdy pojazd jedzie do punktu startowego, ze względu na *j* dla których obowiązuje ograniczenie. Dla problemu VRP bez ograniczeń związanych z pojemnością pojazdu można przyjąć, że  oraz .

W artykule Salehi, Glosa i Miszczaka dla problemu VRP-TW (VRP z oknami czasowymi – aby rozwiązanie było dopuszczalne, wierzchołki muszą zostać odwiedzone w określonych ramach czasowych) ograniczenia zostały wcielone do funkcji celu. Funkcja ta nie zabrania osiągania rozwiązań niedopuszczalnych, natomiast nakłada karę na funkcję celu za niespełnienie warunku. Warunek ten ma postać następującego sformułowania:[[45]](#footnote-45)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

gdzie:

Pierwszy i trzeci składnik funkcji odpowiadają odpowiednio za wyjazd z i powrót do wierzchołka początkowego, a drugi składnik – za przejazd przez pozostałe wierzchołki. W tej funkcji za każdym razem są sprawdzane 2 przejazdy – bieżący i następujący bezpośrednio po nim. Jeśli w kroku następnym ((-szym) pojazd będzie startował z innego wierzchołka niż ten, w którym skończył w kroku , wówczas iloczyn będzie równy zero. Sformułowanie ograniczenia w języku funkcji kary, powoduje, że zapis tego sformułowania można łączyć z innymi ograniczeniami, łącząc w ten sposób kilka ograniczeń w postaci jednej funkcji, która jest krótsza, niż dwie oddzielne funkcje kary.[[46]](#footnote-46) Dobór wielkości kary stanowi kompromis – zbyt wysoka kara skutkuje zachłannością algorytmu i wpadnięciem w pułapkę lokalnego minimum (które nie musi być globalnym minimum funkcji celu). Zbyt niska kara może skutkować otrzymaniem rozwiązania niespełniającego ograniczeń.

## Kwantowe i hybrydowe algorytmy optymalizacyjne

### QAOA jako algorytm wariancyjny

Jednym z algorytmów kwantowych dedykowanych optymalizacji kombinatorycznej jest kwantowy algorytm przybliżonej optymalizacji (*Quantum Approximate Optimization Algorithm* – QAOA), zaproponowany w 2014 przez Edwarda Farhiego, Jeffreya Goldstone’a i Sama Gutmana do rozwiązywania problemu max-cut,[[47]](#footnote-47) który podobnie jak problem VRP, jest problemem kombinatorycznym (tzn. dyskretnym, o relatywnie dużej przestrzeni rozwiązań). W Rozdziałach I.3.2 oraz I.3.3 przedstawiono algorytm QAOA zgodnie z założeniami jego twórców. Algorytm ten należy do klasy kwantowych algorytmów wariancyjnych (*Variational Quantum Algorithm* - VQA). Algorytmy VQA są algorytmami hybrydowymi – łączą one obliczenia dokonywane na kubitach z wykorzystaniem maszyn kwantowych z obliczeniami na maszynach klasycznych (bitowych). Łącznikami są pomiary, które skutkują przeniesieniem pewnej informacji z kubitu na bit oraz kwantowe bramki parametryzowane, gdzie wartość parametrów jest wyznaczana przy pomocy klasycznych algorytmów.[[48]](#footnote-48)

Udowodniono, że dla problemu MAX-3LIN-EQN algorytm QAOA przez pewien czas osiągał lepszą jakość przybliżeń niż jakikolwiek znany klasyczny algorytm.[[49]](#footnote-49) [[50]](#footnote-50) Problem MAX-3LIN-EQN jest problemem NP-trudnym, gdzie danymi wejściowymi jest układ równań liniowych (w arytmetyce modulo 2), każdy z maksymalnie 3 zmiennymi. Celem jest znalezienie takich wartości zmiennych, aby jak największa liczba równań została spełniona.[[51]](#footnote-51)

Jedną z głównych wad algorytmu QAOA jest jego silna zależność od stosunku liczby ograniczeń do liczby zmiennych.[[52]](#footnote-52) Algorytm QAOA może być wykorzystany również jako część innych algorytmów, które, przynajmniej teoretycznie, mogą rozwiązać problem w najkrótszym możliwym czasie, np. algorytm Grovera.[[53]](#footnote-53) [[54]](#footnote-54) [[55]](#footnote-55)

### Założenia algorytmu QAOA

W optymalizacji z wykorzystaniem algorytmów kwantowych jednym z kluczowych pojęć jest Hamiltonian (zwany też funkcją lub operatorem Hamiltona). Opisuje on ilość energii w systemie w zależności od stanu systemu. Z perspektywy informatyki kwantowej służy on do przekształcenia wektora stanu kwantowego do pewnej postaci. Hamiltonian oznaczany   (dla przypadku ogólnego) lub (dla algorytmu QAOA) jest macierzową reprezentacją funkcji celu, a Hamiltonian pewną funkcję mieszającą stosowaną w algorytmie.

Zadania optymalizacyjne tłumaczy się na język informatyki kwantowej jako zadanie polegające na znalezieniu takiego stanu (wektora stanu), dla którego ilość energii jest w systemie jest najniższa (*lowest energy state, ground state*, stan podstawowy) lub najwyższa, w zależności od celu optymalizacji. Energię systemu w stanie opisuje wartość oczekiwana, która jest wartością funkcji celu dla zmiennych określanych przez wektor :[[56]](#footnote-56)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Zadanie odnalezienia stanu podstawowego , tzn. stanu, w którym ilość energii w systemie jest najmniejsza, można traktować jako zadanie odnalezienia minimum globalnego funkcji celu, zadanego jako:[[57]](#footnote-57)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Algorytm polega na znalezieniu pewnego stanu, który zależy od parametru (tutaj: zestawu parametrów) , tj. . Należy więc znaleźć taką wartość parametru , która pozwoli na minimalizację funkcji celu postaci:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

więc:

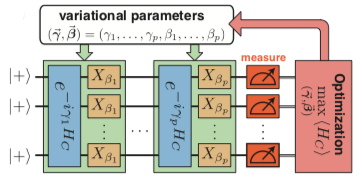
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Znaleziony stan będzie przybliżeniem wartości zmiennych odpowiadającym wartości poszukiwanego optimum globalnego oznaczanego .[[58]](#footnote-58)

W trakcie działania algorytmu stan , będzie otrzymywany poprzez zastosowanie na stanie początkowym parametryzowalnego operatora kwantowego (bramki kwantowej), tj. . Parametr jest aktualizowany co iterację przez algorytm klasyczny. Dane dla algorytmu klasycznego są przekazywane jako wynik pomiaru na końcu kwantowej części algorytmu w danej iteracji (Rysunek 3). [[59]](#footnote-59)

W opisany powyżej sposób, część kwantowa algorytmu QAOA będąca kwantowym obwodem wariancyjnym, zwraca wektor reprezentujący pewien stan kwantowy, którego wartości zależą od wartości parametrów. Wartości parametrów są aktualizowane przez część klasyczną na podstawie wartości skalarnej (kodowanej binarnie w postaci ciągu bitów) zwracanej przez część kwantową do rejestru klasycznego. Parametry te są przekazywane z powrotem do części kwantowej, po czym rozpoczyna się kolejna iteracja algorytmu. [[60]](#footnote-60) Można zauważyć, że sposób działania algorytmu QAOA jest podobny do sposobu działania sieci neuronowych,[[61]](#footnote-61) gdzie wagi kombinacji liniowych w warstwach sieci są aktualizowane przez algorytm propagacji wstecznej na podstawie wyników zwróconych przez sieć, po czym iteracja jest powtarzana.

Rysunek : Schemat algorytmu QAOA.



**Źródło:** https://medium.com/mit-6-s089-intro-to-quantum-computing/qaoa-bench-marking-7dfdd8a31e54, dostęp: 12 października 2022.

### Część kwantowa algorytmu QAOA

Iteracja algorytmu QAOA zaczyna się od wprowadzenia wszystkich kubitów w stan równej superpozycji (konkretnie w stan ket plus: ), poprzez zastosowanie na nich bramek Hadamarda:[[62]](#footnote-62)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Stanowi to etap przygotowawczy, który pozwoli na wykorzystanie zjawisk kwantowych w kolejnych etapach, w szczególności: zastosowaniu bramek bazujących na Hamiltonianach funkcji celu oraz bramek bazujących na Hamiltonianach mieszających. Etap stosowania operatorów bazujących na Hamiltonianach może być powtarzany wiele razy (tzw. troteryzacja) – kolejne powtórzenia tego etapu w ramach jednej iteracji będą dalej indeksowane małą literą *k*, a ich łączna liczba – dużą literą *K*. O ile sama postać Hamiltonianów pozostanie niezmienna, o tyle sparametryzowane bramki na nich bazujące będą się zmieniały, ponieważ parametry mogą być inne dla każdego *k-*tego powtórzenia.

Przekształcenie funkcji celu z postaci analitycznej do postaci macierzy operatora kwantowego wymaga dokonania na niej przekształceń. Przed przekształceniem funkcji celu w Hamiltonian należy ją najpierw sprowadzić do postaci problemu QUBO, bowiem problem wyrażony w ten sposób daje się łatwo wyrazić w postaci bramek kwantowych, a komputery kwantowe potrafią szybko rozwiązywać problemy QUBO.[[63]](#footnote-63)

QUBO (Quadratic Unconstrained Binary Optimization – kwadratowa optymalizacja binarna bez ograniczeń) jest NP-trudnym problemem optymalizacji kombinatoryjnej.[[64]](#footnote-64) Metoda sprowadzania problemu optymalizacyjnego do postaci QUBO jest inspirowana modelem Isinga[[65]](#footnote-65) i jest często wykorzystywana w problemach tego typu. Aby sprowadzić problem do postaci QUBO należy wszystkie ograniczenia wcielić do funkcji celu, a następnie wyrazić tę funkcję w postaci formy kwadratowej, która daje się łatwo zamienić na postać macierzową. Funkcja celu w QUBO w przypadku ogólnym jest postaci: [[66]](#footnote-66)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

gdzie:

– współczynniki funkcji celu,

– macierz trójkątna górna współczynników (wag),

– wektor zmiennych decyzyjnych binarnych,

– funkcja kosztu zależna od ,

Znalezienie Hamiltonianu kosztu odbywa się poprzez rozwiązanie następującego równania:[[67]](#footnote-67) [[68]](#footnote-68)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Przyjmując, że wektor jest długości (przypominając: – liczba kubitów, – liczba możliwych stanów baozwych), wówczas otrzymamy:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

gdzie to bramka Pauli-Z zastosowana na *i*-tym kubicie. W rezultacie przejdziemy od wektora, dla którego , do wektora, dla którego . W Równaniu 32 zamiana miejscami elementów pozwoli otrzymać:[[69]](#footnote-69) [[70]](#footnote-70)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Korzystając z Równania 33 można zapisać Równanie 30 jako:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Nowa postać funkcji nie jest bezpośrednio zależna od , może więc ona być poszukiwanym Hamiltonianem kosztu, który będzie macierzą diagonalną:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

W algorytmie QAOA występują bramki parametryzowane. Parametryzacja odbywa się poprzez zastosowanie eksponenty macierzy oraz transformację przy pomocy wektora parametrów gdzie :[[71]](#footnote-71)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Należy również zdefiniować Hamiltonian mieszający oraz go sparametryzować

Hamiltonian mieszający powinien być sumą prostych unarnych bramek (tzn. bramką stosowaną na wszystkich kubitach oddzielnie, bez dokonywania splątania). Taką bramką będzie bramka Pauli‑X, bowiem stosując ją na kubicie otrzymamy wartość własną 1, zgodnie z:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

oraz -1 dla :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | , |  |

przy czym warto zauważyć, że jeżeli zachodzi potrzeba zmiany problemu minimalizacji na maksymalizacji, można albo rozpoczynać algorytm od zastosowaniu bramki Hadamarda na kubitach w stanie i otrzymać w ten sposób stany , albo zmienić znak funkcji celu (co, jak zostanie pokazane na przykładach w II rozdziale, jest częściej wybieranym rozwiązaniem). Hamiltonian mieszający będzie postaci:[[72]](#footnote-72)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Po parametryzacji otrzymuje się bramkę:[[73]](#footnote-73)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |

Można więc zauważyć, że dzięki parametryzacji, zamiast zwykłego obrotu o kąt wokół osi OX w sferze Blocha (i przejście do stanu ortogonalnego, np. z do , ale można też tę operację wykonywać na kubitach w superpozycji), następuję obrót częściowy wokół tej osi. Ponadto, należy zauważyć, że eksponenta macierzy zachowuje jej wektory własne.

Celem Hamiltonianu mieszającego jest umożliwienie wyjście z tzw. pułapki lokalnego minimum, wywołanej nadmierną zachłannością algorytmu. Wektory własne macierzy (w tym macierzy i oraz i , ponieważ eksponenta macierzy nie zmienia wektorów własnych) reprezentują pewne stany, dla których funkcje odpowiadające przekształceniom dokonywanym przez macierze, osiągają lokalne ekstremum. W wyniku zastosowania bramki (niezależnie od wartości parametru ) system będzie dążył do znalezienia się w stanie reprezentowanym przez wektor własny macierzy , czyli do lokalnego ekstremum, które nie musi być ekstremum globalnym, więc wpadnie w pułapkę lokalnego ekstremum. Wraz z kolejnymi zastosowaniami bramki na stanie będącym wektorem własnym , wektor ten pozostanie niezmienny, tj. , co wynika wprost z definicji wektora własnego. Hamiltonian mieszający musi być anty-komutatorem Hamiltonianu celu , aby mieć pewność, że te dwie macierze nie będą miały takich samych wartości własnych. Operator Pauli‑X jest dobrym wyborem, ponieważ bazująca na nim bramka za wektor własny przyjmuje stan , który jest stanem przyjmowanym na początku algorytmu. W takim przypadku, jeżeli operator za wektor własny przyjmuje , wówczas wykrycie pułapki lokalnego ekstremum będzie trywialne, ponieważ system cały czas będzie się w tym ekstremum znajdował, tj. w stanie .

Wykonane powyżej operacje można zapisać w postaci jednego działania matematycznego, którego wynikiem będzie wektor :[[74]](#footnote-74)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Część kwantowa algorytmu QAOA zostaje zakończona serią pomiarów kubitów tworzących wektor . Wynik pomiaru jest rzutowany na bity, po czym przekazywany do maszyny klasycznej w postaci uporządkowanego łańcucha znaków, składającego się z zer i jedynek. Otrzymane w ten sposób łańcuchy znaków stanowią istotny element obliczania wartości oczekiwanej w Równaniu 27.[[75]](#footnote-75) Sposób obliczania tej wartości oraz wykorzystanie algorytmów klasycznych zostanie szerzej omówione w Rozdziale II – możliwość optymalizacji parametrów i algorytmami klasycznymi, nie została od razu dostrzeżona przez twórców algorytmu QAOA i nie istnieje sztywno ustalona część klasyczna.[[76]](#footnote-76)

Stosowanie operatorów , na zmianę więcej niż jeden raz oznacza wspomnianą wcześniej troteryzację, a pojedyncze wykorzystanie tych dwóch bramek tworzy warstwę (*circuit layer)*. Miarą troteryzacji jest liczba warstw. Technika ta jest inspirowana procesami adiabatycznymi, które są wykorzystywane między innymi w wyżarzaniu symulowanym, tyle że w QAOA w ramach poszukiwania stanu o najniższej energii wykonywane są znacznie dłuższe kroki (czyli stopień troteryzacji w QAOA jest znacznie niższy niż liczba iteracji w algorytmie wyżarzania symulowanego)., tj. mniejsza jest liczba iteracji.[[77]](#footnote-77) Przewidywanym pozytywnym skutkiem troteryzacji jest przybliżenie się do rozwiązania będącego optimum globalnym. W szczególności mamy gwarancję, że:[[78]](#footnote-78)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

co oznacza, że dla troteryzacji na poziomie (tzn. z warstwami) wartość funkcji celu jest bliżej szukanej wartości (bliżej minimum dla minimalizacji, bliżej maksimum dla maksymalizacji) niż dla troteryzacji na poziomie *K* (przy pozostałych założeniach niezmienionych). Ponadto:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

przy czym należy pamiętać, że jest to własność graniczna i dla skończonych *K,* nie ma gwarancji otrzymania dokładnego rozwiązania (stąd algorytm „przybliżonej optymalizacji”).[[79]](#footnote-79) Własność opisana Równaniem 44 jest tłumaczona nawiązaniem do procesu adiabatycznego, którego stroteryzowaną wersję stanowi QAOA.[[80]](#footnote-80)

Skutkiem zwiększenia liczby warstw (a więc troteryzacji) jest zwiększenie głębokości obwodu (*circuit depth*), czyli największej liczby bramek zastosowanych na jednym kubicie. W związku z zwiększeniem głębokości obwodu, troteryzacja skutkuje zwiększeniem się szumu (*quantum noise)*.[[81]](#footnote-81) Wraz ze zwiększaniem się jakości maszyn kwantowych oraz rozwojem technik korekcji błędów, należy się spodziewać, że powyższy problem będzie miał coraz mniejsze znaczenie.

Dobór parametrów oraz stopnia troteryzacji stanowi istotny element efektywności algorytmu. Im niższe (bliższe zeru) wielkości parametrów (kątów) w wektorach oraz , tym dokładniejsze przybliżenie optymalnego rozwiązania można otrzymać, ponieważ dokładniej jest przeszukiwana przestrzeń rozwiązań, przy czym zbyt mały kąt , będzie skutkował trudnościami z wyjściem z pułapki minimum lokalnego Z kolei, aby móc się przybliżyć do tego rozwiązania, potrzeba dłuższego czasu przetwarzania, czyli większego stopnia troteryzacji *K*.[[82]](#footnote-82) Należy więc zauważyć, że zwiększony stopień troteryzacji będzie zmniejszał dokładność (przez szum) oszacowania optymalnego rozwiązania, zmniejszenie kątów pozwoli tą dokładność zwiększyć. Równocześnie małe kąty będą wymagały większego stopnia troteryzacji, aby przeszukać odpowiednio dużą przestrzeń rozwiązań. Tak więc dobór kąta i stopnia troteryzacji stoją w opozycji nie tylko z perspektywy czasu obliczeń, ale też ilości i skali popełnianych błędów (wielkości szumu), a co za tym idzie – dokładności oszacowań. Rozwiązaniem może być zmiana stopnia troteryzacji po pewnej liczbie iteracji algorytmu. O ile jak na razie brakuje artykułów wprowadzających zmienny stopień troteryzacji, o tyle wartości parametrów i poddawano już klasycznej optymalizacji, co zostanie przybliżone w Rozdziale II.

**Podsumowanie**

W powyższym rozdziale przedstawiono pojęcia składające się na tytuł poniższej pracy. Wprowadzono i omówiono podstawowe pojęcia mechaniki kwantowej wykorzystywane w obliczeniach kwantowych oraz przedstawiono oznaczenia powszechnie wykorzystywane w tej dziedzinie, które są wykorzystywane w opisach w dalszych rozdziałach. Następnie pokazano ogólny zarys problemu VRP, zwracając uwagę na mnogość jego definicji i rozwinięć, a także podejść do sformułowań matematycznych. Szczególną uwagę poświęcono problemowi zamkniętych cykli, który jest często pomijany w publikacjach, a jego sformułowanie stanowi jedno z wyzwań rozwiązywania problemu VRP. Trzecia część tego rozdziału została poświęcona algorytmowi QAOA. Ukazano podstawową wersję tego algorytmu, a także ukazano logikę jego działania, omawiając poszczególne operacje matematyczne i bramki kwantowe wykorzystywane w tym algorytmie, odnosząc się głównie do pracy, w której po raz pierwszy przedstawiono ten algorytm, ale też zasygnalizowano możliwe modyfikacje oraz niektóre słabe punkty, którym więcej miejsca zostanie poświęcone w następnym rozdziale.

# Rozwinięcie

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

## Studium nad efektywnością QAOA

Najpierw zostaną wprowadzone pojęcia z teorii złożoności obliczeniowej, potem przykłady, dla których QAOA może osiągnąć kwantową supremacje a na koniec problemy

Algorytm QAOA przyciągnął uwagę środowiska naukowego, jako potencjalny kandydat na udowodnienie kwantowej supremacji. Można do tego podchodzić zarówno od strony szybkości teoretycznej (wówczas Shor od razu zbiera nagrodę) jak i od strony praktycznej (ROZWINAC).

### Złożoność QAOA

Jednym z elementów wyróżniających algorytm QAOA na tle innych kwantowych algorytmów optymalizacyjnych jest udowodniony matematycznie fakt, że nawet w najgorszym przypadku poradzi on sobie lepiej z problemem optymalizacji kombinatorycznej niż algorytm losowo wybierający rozwiązania.[[83]](#footnote-83) Dla klasycznych algorytmów obliczenie wyrażenia w Równaniu 24 jest zadaniem, dla którego czas obliczeń rośnie dla komputerów klasycznych w tempie podwójnie wykładniczym wraz ze wzrostem głębokości algorytmu[[84]](#footnote-84) (przekładającego się na rosnącą liczbę kątów w i ) oraz w tempie wielomianowym wraz ze wzrostem liczby wierzchołków[[85]](#footnote-85). Dla podejścia kwantowego, głębokość obwodu rośnie w tempie liniowym – powoduje to, że dla niewielkich głębokości może być możliwe przeprowadzenie niewielkich obliczeń praktycznych.[[86]](#footnote-86) Przy czym warto tutaj wspomnieć o początkowym skomplikowaniu o troteryzacji równej 1 (tzn. głębokości obwodu, gdzie i są jednoelementowe), które w porównaniu do obecnych możliwości technicznych pozostaje duże. Należy zwrócić uwagę, że można policzyć klasycznie wartość oczekiwaną w Równaniu 25, ale niemożliwe jest policzenie metodami klasycznymi rozkładu wyników składających się na tę wartość oczekiwaną, zakładając, że oraz, że przejście do stanów o niższym stopniu skomplikowania wielomianowego nie jest możliwe.[[87]](#footnote-87) Tak więc, o ile algorytm QAOA nie może zagwarantować, że zawsze będzie dawał lepsze wyniki (przynajmniej dla małych głębokości, dla których policzenie wartości oczekiwanej jest wystarczająco proste dla znanych algorytmów klasycznych), o tyle dla dużych głębokości QAOA ma szansę działać lepiej niż klasyczne algorytmy.

Na poważne ograniczenie algorytmu QAOA zwraca uwagę Akshay et al.[[88]](#footnote-88) Zwraca on uwagę na problem deficytu osiągalności (*reachability deficit)*. Polega on na tym, że jeżeli stopień troteryzacji jest zbyt mały, to optimum globalne jest całkowicie nieosiągalne, niezależnie od początkowych ustawień parametrów. Wymagany stopień troteryzacji rośnie wraz z zwiększeniem się gęstości problemu (*problem density)*, tzn. liczby ograniczeń w stosunku do liczby zmiennych. Jest to problem znacznie poważniejszy od problemu tzw. jałowego płaskowyżu (*barren plateau)*, gdzie globalne optimum jest osiągalne, chociaż dobór parametrów nie ma dużego wpływu na jego osiągnięcie, więc może on być losowy. Dowód deficytu osiągalności algorytmu QAOA został przeprowadzony dla zastosowania QAOA w algorytmie Grover’a oraz numerycznie dla problemów z grupy MAX-SAT[[89]](#footnote-89) (na których początkowy był testowany algorytm QAOA).[[90]](#footnote-90)

Warto tutaj zwrócić uwagę w artykule Akshay’a et al. na założenie o stałości stopnia troteryzacji algorytmu QAOA oraz na fakt, że niemożność osiągnięcia pewnych ekstremów lokalnych (w tym ekstremów globalnych) jest typowym wyzwaniem dla algorytmów poszukujących optimum. Dla problemów NP-trudnych o dużej złożoności sprawdzenie, czy algorytm odnalazł optimum globalne jest równie trudne jak jego znalezienie, tak więc wspomniane wcześniej oskarżenie, chociaż zdaje się być poważne, nie jest krytyczne, jako że większość algorytmów optymalizacji kombinatorycznej jest podatna na pułapkę lokalnego ekstremum i posiada jedynie metody wspomagające opuszczenie tego stanu (a pod tym względem algorytm QAOA znacznie od nich nie odbiega).

Dokonywano także porównań z metodami klasycznymi (szczególnie wyżarzaniem symulowanym – SA – simulated annealing) oraz wyżarzaniem kwantowym (QA – quantum annealing). Hastings wnioskuje, że dla problemów o małej złożoności algorytm QAOA (tzn. takich, dla których nie jest wymagany wysoki stopień troteryzacji) przypomina w działaniu niektóre ze znanych algorytmów klasycznych, dlatego też nie będzie on w stanie osiągnąć znaczącej przewagi.[[91]](#footnote-91) Katzbrager et al. z kolei porównuje algorytm SA i QA. Zauważa, że dla problemów optymalizacyjnych, gdzie bariery pomiędzy minimami (zakładać minimalizację jako cel) są szerokie, algorytmy SA i QA radzą sobie relatywnie słabo (w szczególności algorytm QA jest wrażliwy na szerokość barier), za to QA znacznie lepiej radzi sobie z barierami wysokimi niż SA. Należy jednak zwrócić uwagę, że założono tam, iż problemy o szerokich i wąskich barierach mają porównywalne wysokości tych barier (o czym autorzy napisali wprost).[[92]](#footnote-92) Streif i Leib do tych badań dołączają algorytm QAOA, tworząc porównanie algorytmów inspirowanych procesami adiabatycznymi.[[93]](#footnote-93)

### WS-QAOA

Trudność policzenia wartości oczekiwanej rośnie wraz ze wzrostem stopnia troteryzacji oraz liczby ograniczeń, ale nie wraz z liczbą wierzchołków .[[94]](#footnote-94)

Jedną z metod hiperoptymalizacji działania algorytmu QAOA jest tzw. ciepłe wystartowanie (*warm starting*). Powstał on z myślą o QAOA z niskim poziomem troteryzacji. Technika ta polega przygotowaniu stanu początkowego innego niż . W ramach tego podejścia, Hamiltonian mieszający pozostaje bez zmian, jednak zmienia się stan początkowy, przez co Równanie 41 nie jest zachowane.

Gradientowe metody optymalizacji są gorsze od numerycznych, szczególnie ze względu na fakt, że nawet niewielki szum ma bardzo duży wpływ na wyniki dla metod gradientowych.[[95]](#footnote-95) W wyjściowej wersji WS-QAOA (warm-starting QAOA) system jest na początku iteracji w stanie:[[96]](#footnote-96)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

gdzie:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

tzn. kubity zmieniają w swojej reprezentacji matematycznej obrócą się w stronę stanu o kąt nie większy, niż robi to bramka Hadamarda. Spowoduje to, że nowy stan początkowy systemu nie będzie już reprezentowany przez wektor będący wektorem własnym Hamiltonianu mieszającego, dlatego należy też zmienić jego postać:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

gdzie przyjmuje za wektor własny . Modyfikując Równanie 40 otrzymamy:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Po takim przekształceniu, gdzie stan początkowy jest wektorem własnym Równanie 44 pozostaje w mocy, jeżeli , a więc algorytm WS-QAOA będzie zbiegał do optymalnego rozwiązania. Jeżeli , wówczas kubit nie zostanie obrócony lub przejdzie do stanu . Będzie to skutkowało pozostaniem danego kubitu nienaruszonego przez cały czas trwania iteracji algorytmu, a więc nie będzie możliwe zbliżenie się do rozwiązania odpowiadającego przeciwległego stanowi tego kubitu (czyli jeżeli kubit rozpocznie w stanie , a optimum będzie odpowiadać temu kubitowi w stanie (i vice versa), to nie będzie możliwe osiągniecie tego stanu).[[97]](#footnote-97)

Aby zapobiec wybraniu , można posłużyć się parametrem regulującym . Wówczas otrzymamy:

* ,
* ,
* .

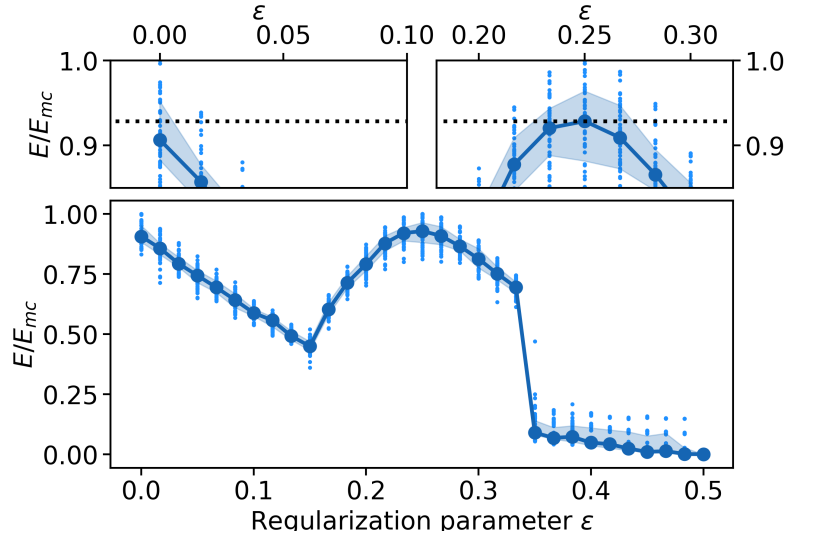
Następnie należy odpowiednio zaktualizować , oraz. Jeżeli , wówczas zostanie wymuszony na wszystkich kubitach stan , będzie to więc odpowiadało standardowemu rozpoczęcia algorytmu QAOA.

Egger et al.[[98]](#footnote-98) dostrzegli możliwość dodatkowej modyfikacji macierzy mieszającej. Zauważyli oni, że bramkę bazującą na macierzy mieszającej można zmodyfikować do następującej postaci:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

tzn. zmienią się znaki kątów; wówczas nastąpi kilka zmian. Po pierwsze, nowa macierz nie będzie posiadała wektora początkowego jako wektora własnego, co uniemożliwi zachowanie własności asymptotycznej zbieżności do optymalnego rozwiązania w Równaniu 44.[[99]](#footnote-99) Z drugiej jednak strony, wyniki numeryczne pokazały, że przy wartości parametru oraz troteryzacji na poziomie 1 algorytm znacznie szybciej odnajduje coraz lepsze rozwiązania, co nie zachodzi przy poprzedniej wersji bramki . Sytuację tę przedstawia Rysunek 4 – najszybsza zbieżność do optimum (tutaj: maksimum) globalnego jest osiągana dla . Eksperyment był powtarzany wiele razy, grube punkty wskazują medianę, zacieniowany obszar – rozwiązania leżący między pierwszym a trzecim kwartylem.[[100]](#footnote-100) Widać, że zależność pomiędzy tempem zbieżności a jest niemonotoniczna, w przeciwieństwie do podejścia, w którym stan początkowy jest wektorem własnym . Należy jednak zwrócić uwagę, że autorzy przedstawili jedynie wynik numeryczny, a więc wynik manipulacji oraz mógł okazać się pozytywny wyłącznie ze względu na dobrany problem. Autorzy dostrzegli również, że algorytm WS‑QAOA zbiega do optimum szybciej niż zwykły algorytm QAOA.

Rysunek . Wartość rozwiązania po jednej iteracji WS-QAOA z parametrem .



**Źródło:** D. J. Egger, J. Mareček, S. Woerner, *Warm-starting quantum optimization,* Quantum 5, 479 (2021), s. 8.

Warto wspomnieć jedną z prac, w której podjęto się badań numerycznych wpływu hiperparametrów WS-QAOA – praca J. Obsta, gdzie numerycznie wykazał, że im bliższe , tym gwałtowniej i częściej zmieniają się wyniki przy coraz to mniejszych zmianach parametrów i (przy troteryzacji pojedynczej).[[101]](#footnote-101)

### Hiperoptymalizacja Bayesowska

Jedną z proponowanych metod poszukiwania optymalnego zestawu parametrów i jest zastosowanie podejścia Bayesowskiego. Jest ono szczególnie polecane dla problemów o trudnej w ewaluacji funkcji celu.[[102]](#footnote-102) Podejście Bayesowskie opiera się na doborze parametrów bazując na pewnej wiedzy, zwanej wiedzą *a priori* oraz pewnych danych liczbowych (np. próby), w rezultacie jako wynik zostaną otrzymane rozkłady *a posteriori* parametrów. Należy zwrócić uwagę, że poszukiwane parametry są tutaj traktowane jako zmienne losowe, zwracana więc będzie wartość oczekiwana tych parametrów, a pozostałe informacje na temat ich rozkładu będzie można traktować jako dane pomocnicze lub diagnostyczne.

Argumentem (poza deklarowanym wzrostem szybkości przetwarzania i dokładności szacowania) przemawiającym za tą metodą jest to, że niepewność jest wykorzystywana i uwzględniania w metodach Bayesowkich, a w algorytmach kwantowych mamy obecnie 2 rodzaje niepewności: pierwszy, związany z dokonywaniem pomiaru oraz drugi, związany z szumem kwantowym. Innym argumentem jest też relatywnie niska liczba potrzebnych iteracji części kwantowej, aby móc dokonać hiperoptymalizacji metodami Bayesowskimi. Ponadto, dla problemów, gdzie istotne jest intensywne przeszukiwanie bliskiego sąsiedztwa (*local problems*), metody te radzą sobie relatywnie dobrze[[103]](#footnote-103) (warto zaznaczyć, że problem VRP akurat do tych problemów się nie zalicza).

Informacją liczbową w optymalizacji Bayesowskiej może być kilka oszacowań optymalizowanej funkcji w losowych (co do rozkładu jednostajnego) punktach dziedziny określonej przez możliwe zbiory wartości parametrów przyjmowanych za zmienne. Wartości parametrów (oznaczane **,** gdzie *i* to indeks danego zestawu parametrów wykorzystywanych w danym oszacowaniu) oraz odpowiadające im oszacowania wartości funkcji tworzą zbiór ⅅ.[[104]](#footnote-104) Jednak, aby uniknąć błądzenia losowego po przestrzeni rozwiązań oraz wielokrotnego obliczania wartości skomplikowanej funkcji, można optymalizować funkcję użyteczności[[105]](#footnote-105) (zwaną dalej funkcją akwizycji).

Jednym z problemów jest wyznaczenie używanej w optymalizacji Bayesowskiej funkcji akwizycji (*acquisition function*) bazującej na funkcji oczekiwanej poprawy (*expected improvement*).[[106]](#footnote-106) Funkcja ta korzysta z rozkładu *a posteriori* oraz pewnej wartości będącej największą znalezioną wartością optymalizowanej funkcji w ramach iteracji algorytmu. Funkcja poprawy jest zdefiniowana jako:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Gdzie:

– postać funkcji a posteriori,

– największa znaleziona wartość funkcji *f*,

*n* – numer iteracji,

czyli przyjmuje wartość 0, jeśli w nowym punkcie *x* wartość optymalizowanej funkcji a posteriori jest niższa niż dotychczas znalezionej największej wartości lub jest równie różnicy między tymi dwiema wartościami, w przypadku znalezienia wartości większej. Problemem jest jednak znalezienie takiego *x*, aby wzrost był jak największy. Jako krok pośredni można dokonać maksymalizacji oczekiwanej wartości poprawy. Korzystając z wzoru na obliczenie wartości oczekiwanej przez całkowanie, tj.:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

można wyznaczyć funkcję oczekiwanej poprawy postaci (korzystając z całkowania przez części)[[107]](#footnote-107) [[108]](#footnote-108):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

gdzie:

- oczekiwana różnica w jakości pomiędzy proponowanym punktem *x*, a poprzednim najlepszym wynikiem ,

– moduł z ,

– wartość funkcji gęstości rozkładu normalnego w zadanym punkcie,

– wartość dystrybuanty rozkładu normalnego w zadanym punkcie,

– odchylenie standardowe a posteriori.

Na koniec wyznaczany jest punkt:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

gdzie:

– wyznaczony punkt

– sprawdzany punkt.

Rozwiązanie Równania 54 jest nieskomplikowane, bowiem funkcje w Równaniu 53 są łatwo-różniczkowalne, a maksimum funkcji można wyznaczyć analitycznie wykorzystując drugą pochodną lub (bardziej praktycznie z perspektywy obliczeń komputerowych) korzystając np. z algorytmu quasi-Newtonowskiego.[[109]](#footnote-109) Podejście takie stanowi trzecią wyjście w problemie kompromisu pomiędzy zachłannością a losowością (*exploration vs exploitation tradeoff*).[[110]](#footnote-110)

Przyjęcie rozkładu *a priori* bazuje na przyjęciu pewnych założeń dotyczących rozkład. Konstrukcja rozkładu *a priori* stanowi również najbardziej złożony element hiperoptymalizacji metodą Bayesowską. Tibaldi et al. proponuje, aby traktować funkcję celu jako zmienną losową, ponieważ nie znamy jej dokładnej postaci.[[111]](#footnote-111) Konkretnie, proponuje aby uznać tę funkcję za część procesu losowego Gaussowskiego, czyli przyjąć, że łączny rozkład zmiennych ma wielowymiarowy rozkład normalny określony parametrami postaci:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

gdzie to średnia wartość funkcji , a to kowariancja (lub jądro) funkcji . Wartość średnia odzwierciedla posiadane (także w ramach założeń) informacje o funkcji , podczas gdy funkcja jądrowa odzwierciedla niepewność posiadanych informacji[[112]](#footnote-112) (w sposób analogiczny do wariancji w jednowymiarowym rozkładzie normalnym, przy czym należy również uwzględnić kowariancję). Jeżeli wartości w są względnie niskie, oznacza to wysoką pewność co do tego, że przyjęta przez nas postać funkcji *f* jest bliska prawdziwej.

Funkcja jądrowa musi być również podana przez użytkownika. Tibaldi et al. proponuje przyjęcie funkcji jądrowej Matérna postaci:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

gdzie oraz to hiperparametry charakteryzujące proces Gaussowski. Hiperparametr określa wariancję zmiennych losowych, a to czynnik kontrolujący korelację między zmiennymi. Granicznie, , wszystkie punkty są ze sobą skorelowane w tym samym stopniu, a dla wszystkie punkty są ze sobą nieskorelowane. W wyniku obliczenia wartości funkcji dla każdej pary punktów ze zbioru (wektora) otrzymamy macierz wariancji-kowariancji 𝕂.[[113]](#footnote-113) Wartości hiperparametrów oraz są wyznaczane przy pomocy zbioru ⅅ.

Hiperparametry jądra są też zwane hiperparametrami *a* *priori[[114]](#footnote-114).* Frazier proponuje trzy metody ich wyznaczania. Pierwsza, to wyznaczenie hiperparametrów metodą największej wiarygodności (*maximum likelihood estimator –* MLE), tzn. jeśli przyjąć za zbiór hiperparametrów, wówczas należy wyznaczyć , takie że:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

gdzie ma wielowymiarowy rozkład normalny.[[115]](#footnote-115)

Drugie podejście jest podobne do pierwszego, z tym że wykorzystuje nie rozkład *a priori*, lecz *a posteriori* (*maximum a posteriori* – MAP). Dokonuje się tego przez wykorzystanie wzoru Bayesa (gdzie mianownik wzoru Bayesa można zignorować, ponieważ nie zawiera on elementów zależnych od zmiennych i pełni on rolę czynnika skalującego tym samym nie wpływając na ) i otrzymując wzór postaci:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Przewaga MAP nad MLE ujawnia się, gdy funkcja *f* zmienia swoje wartości zbyt szybko lub zbyt wolno.[[116]](#footnote-116)

Trzecia metoda opiera się w pełni na podejściu Bayesowskim (*fully Bayesian approach*). W podejściu tym wyznacza się rozkład *a posteriori* funkcji *f* poprzez obliczenie wartości brzegowych wiarygodności po wszystkich hiperparametrach:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

co można przybliżyć wybierając *J* punktów (np. metodą MCMC):[[117]](#footnote-117)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Rozkład *a posteriori* jest wyznaczany jako funkcja określona rozkładem *a priori* warunkowa na wartościach pochodzącymi ze zbioru ⅅ. Otrzymany rozkład *a posteriori* jest nadal wielowymiarowy i przyjmuje parametry:[[118]](#footnote-118)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

gdzie to wektor kolumnowy określający kowariancję funkcji *k* w punkcie a wszystkimi pozostałym punktami. Warto zauważyć, że nowa średnia jest liniową kombinacją oszacowań funkcji, tj. elementów wektora .

W ramach algorytmu optymalizacji Bayesowskiej należy przyjąć pewną liczbę iteracji . Każda z *n* iteracji rozpoczyna się od zaktualizowania rozkładu *a posteriori f* poprzez aktualizację raz przyjętego rozkładu *a priori* danymi ze zbioru ⅅ. Na podstawie zaktualizowanego rozkładu *a posteriori* należy obliczyć funkcję akwizycji oraz znaleźć wektor parametrów maksymalizujący wartość tej funkcji. Następnie należy obliczyć wartość funkcji dla znalezionego wektora, tj. obliczyć Jeżeli , wówczas należy zaktualizować (w przeciwnym przypadku należy nie robić nic). Niezależnie od wyniku, należy dołączyć parę do zbioru ⅅ. Iterację należy zakończyć obliczeniem nowego zestawu hiperparametrów funkcji jądrowej i , po czym rozpocząć kolejną iterację do czasu osiągnięcia iteracji o numerze .[[119]](#footnote-119) Znaleziony w ten sposób wektor *2K*‑elementowy (gdzie *K* to stopień troteryzacji) zawiera zoptymalizowane metodą bayesowską hiperparametry i algorytmu QAOA.

Na koniec omówienia tego podrozdziału warto przyjrzeć się kilku założeniom poczynionym przez autora zastosowania tej metody w QAOA. Pierwsze z nich dotyczy uznania rozkładu za wielowymiarowy rozkład normalny. Ponieważ nie znamy postaci założenie to jest dość arbitralne, jednak pozwala ono wykorzystać metodę MCMC w losowaniu punktów. Zakładając bardzo wysoką wariancję (co jest typowym założeniem, jeśli postać funkcji nie jest znana), można przyjąć to założenie za nieszkodliwe.

Drugie to przyjęcie funkcji jądrowej Matérna. Można je usprawiedliwić tym, że w przeciwieństwie do często przyjmowanej funkcji jądrowej kwadratu wykładniczego, funkcja jądrowa Matérna ma bardziej nieregularny kształt, co lepiej odzwierciedla złożoność rzeczywistych problemów.[[120]](#footnote-120)

## 

## Rozwinięcie algorytmu QAOA

### Przykład komercyjny

### QUBO – Paweł i inne podejścia kwantowe, bez formalizacji, tylko podejście i wynik

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum loriem loriem.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat.

Tabela 3. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit.

|  |  |
| --- | --- |
| **Lorem ipsum dolor** | **Lorem ipsum dolor** |
| Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit | Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit |
| Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit | Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit |
| Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit | Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit |
| Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit | Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit |

**Źródło:** M. Trocki, *Metodyki zarządzania projektami*, Biblioteka Project Managera, Warszawa 2011, str. 35.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit.

## Algorytmy kwantowe

### Przegląd algorytmów

### Wybór algorytmu

#### Opis algorytmu przez analogię do klasyki

#### Formalizacja algorytmu

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.[[121]](#footnote-121) Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

## Przegląd rynku kwantowego

### Infrastruktura ogólnodostępna

### Software (qiskit)

### Środowiska naukowe i dydaktyczne

### Wyścig państw

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

**Podsumowanie**

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

# Implementacja

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia.

## Dane

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt.

## Opis matematyczny

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim.

### Sformułowanie matematyczne a potem w QUBO

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

### Sformułowanie algorytmem kwantowym (obwód?)

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

## Analiza porównawcza

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id.

#### 

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

Rysunek 5. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur.

**Źródło:** Opracowanie własne.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est.

#### Abcc ccsscssc sdsdza

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

#### Kdsjdjs adsdfs dfsdfh

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia.[[122]](#footnote-122) [[123]](#footnote-123)

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur.

#### Loriem lori trinume trie

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariaturLorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariaturLorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur.

## Loriem loriem loriem loriem loriem loriem loriem loriem loriem

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur.

#### Duis duis duis duis

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur.[[124]](#footnote-124) Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. [[125]](#footnote-125)

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariaturLorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur.

Zakończenie

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur.

LITERATURA

**Książki**

1. Bradley K., *Podstawy metodyki PRINCE 2*, Warszawa 2002.
2. Bukowski M., *Korzyści z wdrożenia metodyki PRINCE2 w wybranej jednostce administracji publicznej*, op. naukowy dr inż. W. Dąbrowski, Warszawa, czerwiec 20.
3. Flasiński M., *Zarządzanie projektami informatycznymi,* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006.
4. Frączkowski K., *Zarządzanie projektem informatycznym. Projekty w środowisku wirtualnym. Czynniki sukcesu i niepowodzeń projektów*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2003, s.125-126.
5. Gunia G., *Implementacja zintegrowanych systemów informatycznych w małych i średnich przedsiębiorstwach*, „Zarządzanie Przedsiębiorstwem”, 2009.
6. Gunia G., *Wdrażanie zintegrowanych systemów informatycznych,* Wydawnictwo Fundacji Centrum Nowych Technologii, Bielsko Biała 2009.
7. Januszewski A., *Funkcjonalność informatycznych systemów zarządzania. Tom 1*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2008.
8. Kisielnicki J., *Zintegrowane systemy informatyczne, dobre praktyki wdrożeń systemów klasy ERP*, Wydawnictwo Naukowe PWN
9. Kisielnicki J., *Systemy informacyjne biznesu,* Placet, Warszawa 1999.
10. Koszlajda A.*, Zarządzanie projektami IT*, Gliwice 2010.
11. Lech P., Zintegrowane Systemy Zarządzania ERP/ERP2. *Wykorzystanie w biznesie wdrażanie,* Difin, Warszawa 2003.
12. Miłosz M. (red.), *Wdrażanie i eksploatacja systemów informatycznych. Wybrane problemy,* Polskie Towarzystwo Informatyczne, Lublin 2002.
13. Office of Government Commerce, *Skuteczne zarządzanie projektami PRINCE2*, London: TSO, wydanie 2005.
14. Rokicka-Broniatowska A., *Wstęp do informatyki gospodarczej*, Szkoła Główna Handlowa, Warszawa 2006.
15. Stefanowicz B., *Informacyjne systemy zarządzania. Przewodnik,* Szkoła Główna Handlowa, Warszawa 2007.
16. Szyjewski Z., *Metodyki zarządzania projektami informatycznymi,* PLACET, Warszawa 2004.
17. Trocki M., *Metodyki zarządzania projektami*, Biblioteka Project Managera, Warszawa 2011.
18. Waćkowski K., Chmielewski J., *Wspomaganie zarządzania projektami informatycznymi. Poradnik dla menadżera*, Helion, Gliwice 2007.

**Artykuły i studia**

1. Dębowski L.,*ZASTOSOWANIE KOMPUTERÓW W NAUCE I TECHNICE’ 2006*, Zeszyty Naukowe Wydziału Elektrotechniki i Automatyki Politechniki Gdańskiej Nr 22
2. IE. 1991. Competition in manufacturing leads to MRP II. 23 (July) 10-13
3. WJ Hopp, ML Spearman Commissioned Paper To Pull or Not to Pull: What Is the Question, Manufacturing & Service Operations Management, 2004

**Strony internetowe**

1. Poksiński P., *PRINCE2*, materiał dostępny w wersji elektronicznej pod adresem internetowym: http://www.poksinski.com/pdf\_files/PRINCE2.pdf [18-09-2012]
2. *Słownik APICS*, http://www.apics.org/dictionary/dictionary-information?ID=2399 [4-01-2013]
3. Schmidt P., *PRINCE2 i techniki planowania*, materiał dostępny w wersji elektronicznej pod adresem internetowym: http://ww.4pm.pl/artykul/prince2\_i\_techniki\_planowania-56-1247.html [17-10-2012]
4. *Cloud Computing*, materiał zaczerpnięty ze strony internetowej: http://www.it.integro.pl/pl/aplikacje-w-chmurze-cloud-computing [4-01-2013]
5. Trąbka J., *Zarządzanie projektem wdrożeniowym systemu klasy ERP – autorska metodyka*, materiał dostępny w wersji elektronicznej pod adresem internetowym: http://kkio2012.agh.edu.pl/presentations/KKIO2012-C1\_3.pdf [10-11-2012]
6. *Skuteczne wdrożenia systemu ERP dzięki metodyce Microsoft Sure Step;* http://www.it.integro.pl/pl/metodyka-wdrozeniowa. [28-09-2012]
7. *Nasza metodyka na wdrożenie ERP w twojej firmie;* http://www.profidata.com.pl/erp/metodyka-pit-stop.html. [28-09-2012]
8. *Manifesto for Agile Software Development*; Cytat ze strony http://www.agilemanifesto.org/ [10-10-2012]
9. *Metodyka wdrożenia QlikView- Business Intelligence;* , http://www.businessintelligence.pl/pl/metodyka-wdrozenia. [28-09-2012]
10. *QlikView przełamuje bariery rynku – Business Intelligence;* http://www.businessintelligence.pl/pl/a/QlikView-przelamuje-bariery-rynku [11-10-2012]
11. *ERP- centrum wiedzy o systemach ERP na decyzje-IT.pl;* http://decyzje-it.pl/centrum-wiedzy/erp.html [10-10-2012]
12. *The history of Prince2- Project Smart*; http://www.projectsmart.co.uk/history-of-prince2.html [18-09-2012]
13. *Oracle- Hardware and Software, Enginnered to work together*; http://www.oracle.com/index.html [23-09-2012]
14. CRP for Oracle R12- Welcom to Oracle ERP http://www.oracleerp4u.com/2010/06/crp-for-oracle-r12.html [189-10-2012]
15. *Przykłady zastosowań technologii RFID w magazynach* http://rfid-lab.pl/przyklady-zastosowan-technologii-rfid-w-magazynach [07-01-2013]

Spis tabel

[Tabela 1. Lorem ipsum dolor sit amet 31](#_Toc355852181)

[Tabela 2. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit 32](#_Toc355852182)

Spis rysunków

[Rysunek 1. Wizualizacja sfery Blocha 10](#_Toc116386948)

[Rysunek 2. Odmiany problemu VRP. Źródło: M. Drexl, Rich Vehicle Routing in theory and practice. POPRAWIC TEN podpis 16](#_Toc116386949)

[Rysunek 3. Lorem ipsum dolor sit amet Lorem ipsum dolor sit amet. 35](#_Toc116386950)

[Rysunek 4. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur. 40](#_Toc116386951)

Streszczenie

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

Summary

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisicing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

1. Richard P. Feynman, „Simulating Physics with Computers”, *International Journal of Theoretical Physics* 21, nr 6 (1 czerwiec 1982): 467–69, 476–77, https://doi.org/10.1007/BF02650179. [↑](#footnote-ref-1)
2. Paul Benioff, „The Computer as a Physical System: A Microscopic Quantum Mechanical Hamiltonian Model of Computers as Represented by Turing Machines”, *Journal of Statistical Physics* 22, nr 5 (maj 1980): 563–91, https://doi.org/10.1007/BF01011339. [↑](#footnote-ref-2)
3. Jack D. Hidary, „A Brief History of Quantum Computing”, *Quantum Computing: An Applied Approach*, 2019, 11–12, https://doi.org/10.1007/978-3-030-23922-0\_2. [↑](#footnote-ref-3)
4. Thomas G Wong, *Introduction to Classical and Quantum Computing*, 2022, 6–7. [↑](#footnote-ref-4)
5. Michael A. Nielsen i Isaac L. Chuang, „Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition”, Higher Education from Cambridge University Press (Cambridge University Press, 9 grudzień 2010), 13, https://doi.org/10.1017/CBO9780511976667. [↑](#footnote-ref-5)
6. Wong, *Introduction to Classical and Quantum Computing*, 97. [↑](#footnote-ref-6)
7. Marius Nagy, „Quantum computation and quantum information”, *IJPEDS* 21 (1 luty 2006): 5, https://doi.org/10.1080/17445760500355678. [↑](#footnote-ref-7)
8. P. A. M. Dirac, „A New Notation for Quantum Mechanics”, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 35, nr 3 (lipiec 1939): 416–18, https://doi.org/10.1017/S0305004100021162. [↑](#footnote-ref-8)
9. Nielsen i Chuang, „Quantum Computation and Quantum Information”, 13. [↑](#footnote-ref-9)
10. Wong, *Introduction to Classical and Quantum Computing*, 115. [↑](#footnote-ref-10)
11. Nielsen i Chuang, „Quantum Computation and Quantum Information”, 13. [↑](#footnote-ref-11)
12. Wong, *Introduction to Classical and Quantum Computing*, 91-3. [↑](#footnote-ref-12)
13. Wong, 76. [↑](#footnote-ref-13)
14. Nielsen i Chuang, „Quantum Computation and Quantum Information”, 13–14. [↑](#footnote-ref-14)
15. Wong, *Introduction to Classical and Quantum Computing*, 190. [↑](#footnote-ref-15)
16. Nielsen i Chuang, „Quantum Computation and Quantum Information”, 278, 353–94. [↑](#footnote-ref-16)
17. Nielsen i Chuang, 13–14. [↑](#footnote-ref-17)
18. Wong, *Introduction to Classical and Quantum Computing*, 237–51. [↑](#footnote-ref-18)
19. Wong, 11–15. [↑](#footnote-ref-19)
20. Nielsen i Chuang, „Quantum Computation and Quantum Information”, 49. [↑](#footnote-ref-20)
21. Nielsen i Chuang, 98–110. [↑](#footnote-ref-21)
22. Wong, *Introduction to Classical and Quantum Computing*, 108–10. [↑](#footnote-ref-22)
23. Gavin E Crooks, „Gates, States, and Circuits”, b.d., 10. [↑](#footnote-ref-23)
24. Merrill M. Flood, „The Traveling-Salesman Problem”, *Operations Research* 4, nr 1 (1956): 61. [↑](#footnote-ref-24)
25. Flood, „The Traveling-Salesman Problem”. [↑](#footnote-ref-25)
26. G. B. Dantzig i J. H. Ramser, „The Truck Dispatching Problem”, *Management Science* 6, nr 1 (październik 1959): 80–81, https://doi.org/10.1287/mnsc.6.1.80. [↑](#footnote-ref-26)
27. Dantzig i Ramser, „The Truck Dispatching Problem”. [↑](#footnote-ref-27)
28. Vaughan R. Pratt, „An n Log n Algorithm to Distribute n Records Optimally in a Sequential Access File”, w *Complexity of Computer Computations: Proceedings of a Symposium on the Complexity of Computer Computations, Held March 20–22, 1972, at the IBM Thomas J. Watson Research Center, Yorktown Heights, New York, and Sponsored by the Office of Naval Research, Mathematics Program, IBM World Trade Corporation, and the IBM Research Mathematical Sciences Department*, red. Raymond E. Miller, James W. Thatcher, i Jean D. Bohlinger, The IBM Research Symposia Series (Boston, MA: Springer US, 1972), 112–18, https://doi.org/10.1007/978-1-4684-2001-2\_11. [↑](#footnote-ref-28)
29. Richard M. Karp, „Reducibility among Combinatorial Problems”, w *Complexity of Computer Computations: Proceedings of a Symposium on the Complexity of Computer Computations, Held March 20–22, 1972, at the IBM Thomas J. Watson Research Center, Yorktown Heights, New York, and Sponsored by the Office of Naval Research, Mathematics Program, IBM World Trade Corporation, and the IBM Research Mathematical Sciences Department*, red. Raymond E. Miller, James W. Thatcher, i Jean D. Bohlinger, The IBM Research Symposia Series (Boston, MA: Springer US, 1972), 94, https://doi.org/10.1007/978-1-4684-2001-2\_9. [↑](#footnote-ref-29)
30. Dantzig i Ramser, „The Truck Dispatching Problem”, 81. [↑](#footnote-ref-30)
31. C. S. Orloff, „A Fundamental Problem in Vehicle Routing”, *Networks* 4, nr 1 (1974): 35–36, https://doi.org/10.1002/net.3230040105. [↑](#footnote-ref-31)
32. J. K. Lenstra i A. H. G. Rinnooy Kan, „Complexity of Vehicle Routing and Scheduling Problems”, *Networks* 11, nr 2 (1981): 221–27, https://doi.org/10.1002/net.3230110211. [↑](#footnote-ref-32)
33. Orloff, „A Fundamental Problem in Vehicle Routing”. [↑](#footnote-ref-33)
34. Karp, „Reducibility among Combinatorial Problems”. [↑](#footnote-ref-34)
35. Lenstra i Kan, „Complexity of Vehicle Routing and Scheduling Problems”, 223. [↑](#footnote-ref-35)
36. Michael Drexl, „Rich Vehicle Routing in Theory and Practice”, *Logistics Research* 5, nr 1 (1 sierpień 2012): 47, https://doi.org/10.1007/s12159-012-0080-2. [↑](#footnote-ref-36)
37. Samuel Raff, „Routing and Scheduling of Vehicles and Crews: The State of the Art”, *Computers & Operations Research*, Routing and Scheduling of Vehicles and Crews. The State of the Art, 10, nr 2 (1 styczeń 1983): 83–86, https://doi.org/10.1016/0305-0548(83)90030-8. [↑](#footnote-ref-37)
38. Tolga Bektas, „The Multiple Traveling Salesman Problem: An Overview of Formulations and Solution Procedures”, *Omega* 34, nr 3 (1 czerwiec 2006): 212–13, https://doi.org/10.1016/j.omega.2004.10.004. [↑](#footnote-ref-38)
39. Bektas, 212–13. [↑](#footnote-ref-39)
40. G. Dantzig, R. Fulkerson, i S. Johnson, „Solution of a Large-Scale Traveling-Salesman Problem”, *Journal of the Operations Research Society of America* 2, nr 4 (1954): 397–98. [↑](#footnote-ref-40)
41. David Applegate i in., „Implementing the Dantzig-Fulkerson-Johnson Algorithm for Large Traveling Salesman Problems”, *Mathematical Programming* 97, nr 1 (lipiec 2003): 91–153, https://doi.org/10.1007/s10107-003-0440-4. [↑](#footnote-ref-41)
42. C. E. Miller, A. W. Tucker, i R. A. Zemlin, „Integer Programming Formulation of Traveling Salesman Problems”, *Journal of the ACM* 7, nr 4 (1 październik 1960): 326–29, https://doi.org/10.1145/321043.321046. [↑](#footnote-ref-42)
43. R. V. Kulkarni i P. R. Bhave, „Integer Programming Formulations of Vehicle Routing Problems”, *European Journal of Operational Research* 20, nr 1 (1 kwiecień 1985): 58–67, https://doi.org/10.1016/0377-2217(85)90284-X. [↑](#footnote-ref-43)
44. Imdat Kara, Gilbert Laporte, i Tolga Bektas, „A Note on the Lifted Miller–Tucker–Zemlin Subtour Elimination Constraints for the Capacitated Vehicle Routing Problem”, *European Journal of Operational Research* 158, nr 3 (1 listopad 2004): 793–95, https://doi.org/10.1016/S0377-2217(03)00377-1. [↑](#footnote-ref-44)
45. Özlem Salehi, Adam Glos, i Jarosław Adam Miszczak, „Unconstrained Binary Models of the Travelling Salesman Problem Variants for Quantum Optimization”, *Quantum Information Processing* 21, nr 2 (22 styczeń 2022): 7–8, https://doi.org/10.1007/s11128-021-03405-5. [↑](#footnote-ref-45)
46. Salehi, Glos, i Miszczak, 8–11. [↑](#footnote-ref-46)
47. Edward Farhi, Jeffrey Goldstone, i Sam Gutmann, „A Quantum Approximate Optimization Algorithm” (arXiv, 14 listopad 2014), http://arxiv.org/abs/1411.4028. [↑](#footnote-ref-47)
48. D. Wecker, M. B. Hastings, i M. Troyer, „Towards Practical Quantum Variational Algorithms”, *Physical Review A* 92, nr 4 (2 październik 2015): 1–2, https://doi.org/10.1103/PhysRevA.92.042303. [↑](#footnote-ref-48)
49. Edward Farhi, Jeffrey Goldstone, i Sam Gutmann, „A Quantum Approximate Optimization Algorithm Applied to a Bounded Occurrence Constraint Problem” (arXiv, 25 czerwiec 2015), http://arxiv.org/abs/1412.6062. [↑](#footnote-ref-49)
50. Boaz Barak i in., „Beating the random assignment on constraint satisfaction problems of bounded degree” (arXiv, 11 sierpień 2015), http://arxiv.org/abs/1505.03424. [↑](#footnote-ref-50)
51. Johan Ha, „Some Optimal Inapproximability Results”, b.d., 2 http://www.cs.umd.edu/~gasarch/BLOGPAPERS/max3satl.pdf., s. 814 [↑](#footnote-ref-51)
52. V. Akshay i in., „Reachability Deficits in Quantum Approximate Optimization”, *Physical Review Letters* 124, nr 9 (5 marzec 2020): 090504, https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.124.090504. [↑](#footnote-ref-52)
53. Mauro E. S. Morales, Timur Tlyachev, i Jacob Biamonte, „Variational learning of Grover’s quantum search algorithm”, *Physical Review A* 98, nr 6 (27 grudzień 2018): 062333, https://doi.org/10.1103/PhysRevA.98.062333. [↑](#footnote-ref-53)
54. Lov K. Grover, „A fast quantum mechanical algorithm for database search” (arXiv, 19 listopad 1996), https://doi.org/10.48550/arXiv.quant-ph/9605043. [↑](#footnote-ref-54)
55. Charles H. Bennett i in., „Strengths and Weaknesses of Quantum Computing”, *SIAM Journal on Computing* 26, nr 5 (październik 1997): 1510–23, https://doi.org/10.1137/S0097539796300933. [↑](#footnote-ref-55)
56. Farhi, Goldstone, i Gutmann, „A Quantum Approximate Optimization Algorithm”, 3. [↑](#footnote-ref-56)
57. Farhi, Goldstone, i Gutmann, 3. [↑](#footnote-ref-57)
58. Farhi, Goldstone, i Gutmann, 3. [↑](#footnote-ref-58)
59. Farhi, Goldstone, i Gutmann, 3. [↑](#footnote-ref-59)
60. Farhi, Goldstone, i Gutmann, 3–4, 6–10. [↑](#footnote-ref-60)
61. E. Farhi i in., „Quantum Algorithms for Fixed Qubit Architectures” (arXiv, 17 marzec 2017), 4, http://arxiv.org/abs/1703.06199. [↑](#footnote-ref-61)
62. Farhi, Goldstone, i Gutmann, „A Quantum Approximate Optimization Algorithm Applied to a Bounded Occurrence Constraint Problem”, 2. [↑](#footnote-ref-62)
63. Prasanna Date, Davis Arthur, i Lauren Pusey-Nazzaro, „QUBO Formulations for Training Machine Learning Models”, *Scientific Reports* 11, nr 1 (11 maj 2021): 1–2, https://doi.org/10.1038/s41598-021-89461-4. [↑](#footnote-ref-63)
64. Andrew Lucas, „Ising formulations of many NP problems”, *Frontiers in Physics* 2 (2014): 1–3, https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fphy.2014.00005. [↑](#footnote-ref-64)
65. Tadashi Kadowaki i Hidetoshi Nishimori, „Quantum Annealing in the Transverse Ising Model”, 25 kwiecień 1998, 3, https://doi.org/10.1103/PhysRevE.58.5355. [↑](#footnote-ref-65)
66. Fred Glover, Gary Kochenberger, i Yu Du, „A Tutorial on Formulating and Using QUBO Models” (arXiv, 4 listopad 2019), 5–7, https://doi.org/10.48550/arXiv.1811.11538. [↑](#footnote-ref-66)
67. „Quantum Annealing and Related Optimization Methods | SpringerLink”, 13, 21–22, dostęp 13 październik 2022, https://link.springer.com/book/10.1007/11526216. [↑](#footnote-ref-67)
68. Farhi, Goldstone, i Gutmann, „A Quantum Approximate Optimization Algorithm”, 4. [↑](#footnote-ref-68)
69. Farhi, Goldstone, i Gutmann, 4. [↑](#footnote-ref-69)
70. Farhi, Goldstone, i Gutmann, „A Quantum Approximate Optimization Algorithm Applied to a Bounded Occurrence Constraint Problem”, 5–6. [↑](#footnote-ref-70)
71. Farhi, Goldstone, i Gutmann, „A Quantum Approximate Optimization Algorithm”, 2,4. [↑](#footnote-ref-71)
72. Farhi, Goldstone, i Gutmann, 2. [↑](#footnote-ref-72)
73. Farhi, Goldstone, i Gutmann, 2–3. [↑](#footnote-ref-73)
74. Farhi, Goldstone, i Gutmann, 3. [↑](#footnote-ref-74)
75. Farhi, Goldstone, i Gutmann, 6–7. [↑](#footnote-ref-75)
76. Farhi, Goldstone, i Gutmann, „A Quantum Approximate Optimization Algorithm Applied to a Bounded Occurrence Constraint Problem”, 12. [↑](#footnote-ref-76)
77. Guillaume Verdon, Michael Broughton, i Jacob Biamonte, „A quantum algorithm to train neural networks using low-depth circuits” (arXiv, 14 grudzień 2017), 3, https://doi.org/10.48550/arXiv.1712.05304. [↑](#footnote-ref-77)
78. Farhi, Goldstone, i Gutmann, „A Quantum Approximate Optimization Algorithm”, 3. [↑](#footnote-ref-78)
79. Farhi, Goldstone, i Gutmann, 3. [↑](#footnote-ref-79)
80. Farhi, Goldstone, i Gutmann, 7. [↑](#footnote-ref-80)
81. Farhi i in., „Quantum Algorithms for Fixed Qubit Architectures”, 13–14. [↑](#footnote-ref-81)
82. Farhi, Goldstone, i Gutmann, „A Quantum Approximate Optimization Algorithm”, 10–11. [↑](#footnote-ref-82)
83. Edward Farhi i Aram W. Harrow, „Quantum Supremacy through the Quantum Approximate Optimization Algorithm” (arXiv, 20 październik 2019), 4, https://doi.org/10.48550/arXiv.1602.07674. [↑](#footnote-ref-83)
84. Farhi, Goldstone, i Gutmann, „A Quantum Approximate Optimization Algorithm”, 15. [↑](#footnote-ref-84)
85. Farhi i Harrow, „Quantum Supremacy through the Quantum Approximate Optimization Algorithm”, 15. [↑](#footnote-ref-85)
86. Farhi i Harrow, 4. [↑](#footnote-ref-86)
87. Farhi i Harrow, 15. [↑](#footnote-ref-87)
88. Akshay i in., „Reachability Deficits in Quantum Approximate Optimization”, 3. [↑](#footnote-ref-88)
89. Akshay i in., 2–4. [↑](#footnote-ref-89)
90. Farhi, Goldstone, i Gutmann, „A Quantum Approximate Optimization Algorithm”. [↑](#footnote-ref-90)
91. M. B. Hastings, „Classical and Quantum Bounded Depth Approximation Algorithms” (arXiv, 1 sierpień 2019), 16, https://doi.org/10.48550/arXiv.1905.07047. [↑](#footnote-ref-91)
92. Helmut G. Katzgraber i in., „Seeking Quantum Speedup Through Spin Glasses: The Good, the Bad, and the Ugly”, *Physical Review X* 5, nr 3 (1 wrzesień 2015): 5–8, https://doi.org/10.1103/PhysRevX.5.031026. [↑](#footnote-ref-92)
93. Michael Streif i Martin Leib, „Training the quantum approximate optimization algorithm without access to a quantum processing unit”, *Quantum Science and Technology* 5, nr 3 (12 maj 2020): 034008, https://doi.org/10.1088/2058-9565/ab8c2b. [↑](#footnote-ref-93)
94. Ruslan Shaydulin i Stefan M. Wild, „Exploiting Symmetry Reduces the Cost of Training QAOA”, *IEEE Transactions on Quantum Engineering* 2 (2021): 5, https://doi.org/10.1109/TQE.2021.3066275. [↑](#footnote-ref-94)
95. Wim Lavrijsen i in., „Classical Optimizers for Noisy Intermediate-Scale Quantum Devices”, w *2020 IEEE International Conference on Quantum Computing and Engineering (QCE)*, 2020, 267–77, https://doi.org/10.1109/QCE49297.2020.00041. [↑](#footnote-ref-95)
96. Daniel J. Egger, Jakub Marecek, i Stefan Woerner, „Warm-starting quantum optimization”, *Quantum* 5 (17 czerwiec 2021): 2, https://doi.org/10.22331/q-2021-06-17-479. [↑](#footnote-ref-96)
97. Egger, Marecek, i Woerner, 3. [↑](#footnote-ref-97)
98. Egger, Marecek, i Woerner, 4–5. [↑](#footnote-ref-98)
99. Egger, Marecek, i Woerner, 4. [↑](#footnote-ref-99)
100. Egger, Marecek, i Woerner, 7–8. [↑](#footnote-ref-100)
101. Julian Obst, „Parameter Initialization for Warm-Starting QAOA” (masterThesis, 2022), https://doi.org/10.18419/opus-12366. [↑](#footnote-ref-101)
102. Simone Tibaldi i in., „Bayesian Optimization for QAOA” (arXiv, 30 wrzesień 2022), 2, https://doi.org/10.48550/arXiv.2209.03824. [↑](#footnote-ref-102)
103. D. Zhu i in., „Training of quantum circuits on a hybrid quantum computer”, *Science Advances* 5, nr 10 (18 październik 2019): 3, https://doi.org/10.1126/sciadv.aaw9918. [↑](#footnote-ref-103)
104. Tibaldi i in., „Bayesian Optimization for QAOA”, 2–5. [↑](#footnote-ref-104)
105. J. S. Otterbach i in., „Unsupervised Machine Learning on a Hybrid Quantum Computer” (arXiv, 15 grudzień 2017), 3, https://doi.org/10.48550/arXiv.1712.05771. [↑](#footnote-ref-105)
106. Peter I. Frazier, „A Tutorial on Bayesian Optimization” (arXiv, 8 lipiec 2018), 6–7, https://doi.org/10.48550/arXiv.1807.02811. [↑](#footnote-ref-106)
107. Donald R. Jones, Matthias Schonlau, i William J. Welch, „Efficient Global Optimization of Expensive Black-Box Functions”, *Journal of Global Optimization* 13, nr 4 (1 grudzień 1998): 471, https://doi.org/10.1023/A:1008306431147. [↑](#footnote-ref-107)
108. Frazier, „A Tutorial on Bayesian Optimization”, 7. [↑](#footnote-ref-108)
109. Dong C. Liu i Jorge Nocedal, „On the Limited Memory BFGS Method for Large Scale Optimization”, *Mathematical Programming* 45, nr 1 (1 sierpień 1989): 503–28, https://doi.org/10.1007/BF01589116. [↑](#footnote-ref-109)
110. Frazier, „A Tutorial on Bayesian Optimization”, 7. [↑](#footnote-ref-110)
111. Tibaldi i in., „Bayesian Optimization for QAOA”, 3. [↑](#footnote-ref-111)
112. Tibaldi i in., 3. [↑](#footnote-ref-112)
113. Tibaldi i in., 3–4. [↑](#footnote-ref-113)
114. Frazier, „A Tutorial on Bayesian Optimization”, 6. [↑](#footnote-ref-114)
115. Frazier, 5–6. [↑](#footnote-ref-115)
116. Frazier, 6. [↑](#footnote-ref-116)
117. Frazier, 6. [↑](#footnote-ref-117)
118. Tibaldi i in., „Bayesian Optimization for QAOA”, 4. [↑](#footnote-ref-118)
119. Tibaldi i in., 4. [↑](#footnote-ref-119)
120. Jasper Snoek, Hugo Larochelle, i Ryan P Adams, „Practical Bayesian Optimization of Machine Learning Algorithms”, w *Advances in Neural Information Processing Systems*, t. 25 (Curran Associates, Inc., 2012), 3, https://proceedings.neurips.cc/paper/2012/hash/05311655a15b75fab86956663e1819cd-Abstract.html. [↑](#footnote-ref-120)
121. Zob. K. Frączkowski, *Zarządzanie projektem informatycznym. Projekty w środowisku wirtualnym. Czynniki sukcesu i niepowodzeń projektów*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2003, s.125-126. [↑](#footnote-ref-121)
122. CRP for Oracle R12- Welcom to Oracle ERP http://www.oracleerp4u.com/2010/06/crp-for-oracle-r12.html [189-10-2012]. [↑](#footnote-ref-122)
123. Dokumenty Oracle dostarczone przez firmę wdrożeniową. [↑](#footnote-ref-123)
124. L. Dębowski,*ZASTOSOWANIE KOMPUTERÓW W NAUCE I TECHNICE’ 2006*, Zeszyty Naukowe Wydziału Elektrotechniki i Automatyki Politechniki Gdańskiej Nr 22. [↑](#footnote-ref-124)
125. *Przykłady zastosowań technologii RFID w magazynach* http://rfid-lab.pl/przyklady-zastosowan-technologii-rfid-w-magazynach [07-01-2013]. [↑](#footnote-ref-125)