Sprawozdanie
Metody Numeryczne 2
Temat 5

Przemysław Woźniakowski

2018-01-06

1 Treść zadania

Oblicz wszystkie zera wielomianu (o współczynnikach i zerach rzeczywistych) stosując metodę potęgową do macierzy stowarzyszonej i dokonanie deflacji wielomianu czynnikiem liniowym, a następnie znów metodę potęgową do otrzymanego wielomianu itd., aż do uzyskania wszystkich zer.

2 Opis metody

Metoda potęgowa: $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $x^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ - przybliżenie początkowe

for k=0,... **do**
$x^{(k+1)} = Ax^{(k)}$
$\lambda^{(k)} = \frac{<Ax^{(k)},x^{(k)}>}{<x^{(k)},x^{(k)}>} = \frac{<x^{(k+1)},x^{(k)}>}{<x^{(k)},x^{(k)}>}$
end for

STOP gdy $|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}| < d$, gdzie d to podana dokładność.

Macierzą stowarzyszoną do wielomianu $w(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ nazywamy macierz:

$$\begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & ... & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Wielomianem charakterystycznym tej macierzy jest $-w(x)$. Tak więc zera wielomianu w to wartości własne macierzy stowarzyszonej.

3 Warunki, założenia

Metoda liczy zera wielomianu, dla wielomianów o miejscach zerowych rzeczywistych, których moduły są różne.

4 Implementacja metody

Będziemy znajdować kolejne miejsca zerowe $x_1, x_2, ..., x_n$ poprzez wykorzystanie metody potęgowej na macierzy stowarzyszonej do wielomianu $w(x)$, a nastepnie podzieleniu wielomianu przez czynnik $(x - x_i)$ (x_i - zero znalezione i-tym kroku). Dla tak otrzymanego wielomianu będziemy wyznaczać jego macierz stowarzyszoną i stosować dla niej metodę potęgową. Ten schemat będziemy stosować

aż do uzyskania wszystkich miejsc zerowych. Dzielenie wielomianu(deflacje) bedziemy wykonywać schematem Hornera.
Ponadto w celu zapobiegnięcia nadmiarowi, wykorzystałem normowanie. Dodatkowo zastosowałem limit iteracji.
Metoda została wykorzystana w funkcji $polynomialsolve(tab, eps)$. Przyjmuje ona:
-*tab* - wektor współczynników $a_{n-1}, ..., a_1, a_0$.
-*eps* - zadana dokładność.
Funkcja zwraca *sol* - wektor z miejscami zerowymi wielomianu.
W momencie napotkania wartości NaN (spowodowanej 2 miejscami zerowymi o równym module), zwracane są obliczone dotychczas zera.

```
function [sol] = polynomialsolve(tab,eps)

m=length(tab);
v=m;
if nargin==1
    eps = 1e-15;
end
sol=0;
k=0;
maxit=1000;
for j=1:m
    n=length(tab);
    mac = zeros(n,n);
    mac(1,:)=-tab;
    for i=2:n
        mac(i,i-1)=1;%generowanie macierzy skojarzonej
    end
    x2=ones(n,1);
    lambda1=1;
    lambda2=0;
    k=0;
    while abs(lambda1-lambda2)>eps
        if(maxit<=k)
            break;
        end
        x1=x2;
        y=mac*x1;
        x2=y/norm(y); %normowanie
        lambda1=lambda2;
        lambda2= dot(y,x1);%metoda potegowa;
    end
    if isnan(lambda2)
        disp('Wielomian ma dwa zera o rownym module');
        return; %zwracam miejsca zerowe, juz
```

```
            znalezione (te o wiekszym module)
    end

    sol(j) = lambda2;
    newtab=0;
    newtab(1) = lambda2 + tab(1);
    for k=2:n-1
       newtab(k) = newtab(k-1)*lambda2 + tab(k); %
           schemat hornera
    end
    tab=newtab; % podstawiam wektor obliczony
       schematem hornera

end
end
```

5 Przykłady i wnioski

Funkcja została przebadana za pomocą skryptu *lab5skrypt.m*.
$w_1(x) = (x-5)(x-\sqrt{2})(x+3)(x-e) = x^4 + (-e-\sqrt{2}-2)x^3 + (e\sqrt{2}+2e+\sqrt[3]{2}-15)x^2 + (-\sqrt[3]{2}e+15e+15\sqrt{2})x - 15e\sqrt{2}$.
Znalezione miejsca zerowe dla $eps = 10^{-20}$: 5.0000, -3.0000, 2.7183, 1.4142. - znalezione w 1126 iteracjach.

$w_2(x) = (x-4)(x-11)(x+3)(x+5) = x^4 - 7x^3 - 61x^2 + 1247 + 660$.
Znalezione miejsca zerowe dla $eps = 10^{-20}$: 11.0000, -5.0000, 4.0000, -3.0000.

Dla niektórych wielomianów o zerach nierzeczywistych metoda zwraca miejsca zerowe o równym module (które można, odrzucić samemu, lub dodać ignorowanie wartości o bliskich modułach). $w_3(x) = (x^2+4)(x-3) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$.
Znalezione miejsca zerowe dla $eps = 10^{-15}$: 3.0000, 0.7059, -0.7059.

$w_4(x) = (x+1)(x-2)(x+3)(x-5) = x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30$.
Znalezione miejsca zerowe dla $eps = 10^{-10}$: 5.0000, -3.0000, 2.0000, -1.0000.

$w_5(x) = (x-15\sqrt{(2)})(x+420)(x-4\pi) = x^3 + (-15\sqrt{5} - 4\pi + 420)x^2 + (-6300\sqrt{5} + 60\pi\sqrt{5} - 1680\pi)x + 25200\sqrt{(5)}\pi$.
Znalezione miejsca zerowe dla $eps = 10^{-15}$:-420.0000, 33.5410, 12.5664.

$w_6(x) = (x-3)(x+4)(x-7)(x+2)(x+5) = x^5 + x^4 - 51x^3 - 109^x2 + 398x + 840$.
Znalezione miejsca zerowe dla $eps = 10^{-15}$:7.0000, -5.0000, -4.0000, 3.0000, -2.0000.

Dla wielomianu $w_7(x) = x^5 + 7x^4 + 6x^3 + 3x^2 + 4x + 5$. Zwracane jest 5 zer:

-6.0802 , -0.9727, -0.1001, 0.2565, -0.1035. Wielomian ten posiada jednak tylko jedno miejsco zerowe będące wartością rzeczywistą. Niestety w tym przypadku nie da się na pierwszy rzut oka, stwierdzić które miejsca zerowe są prawdziwe.

5.1 Wnioski i zakończenie

Jak widać w powyższych przykładach funkcja działa, dla wielomianów spełniających założenia. Radzi sobie nawet w przypadku niektórych wielomianów o zerach nierzeczywistych (choć wymaga pewnego uzupełnienia). Niestety w przypadku pozostałych, poza faktycznymi miejscami zerowym zwraca też wartości błędne. Jednakże, jeżeli zapewnimy fakt, że miejsca zerowe róznią się modułem oraz są liczbami rzeczywistymi, funkcja radzi sobie zadowalająco.