Sprawozdanie
Metody Numeryczne 2
Temat 6

Przemysław Woźniakowski

2018-01-20

1 Treść zadania

Metoda Milne'a. Wartości początkowe y1, y2, y3 należy obliczyć metodą Rungego-Kutty rzędu 4-go (wzór Gilla).

2 Opis metody

Metoda Milne'a służy do rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych w postaci $y' = f(x, y)$ na przedziale $[a, b]$ z warunkiem początkowym $y_a = y(a)$. Jest to metoda typu predyktor-korektor. Polega na tym, że w każdej iteracji najpierw na podstawie znanych już wartośći obliczane jest przybliżenie y_i zwane predyktorem. Następnie na podstawie predyktora obliczana jest wartość dokładna zwana korektorem. Jest to metoda 3 rzędu.

$n-$ liczba podziału, $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$

for k=3,...,n **do**

$y_i = y_{i-4} + h\frac{4}{3}(2f(x_{i-3}, y_{i-3}) - f(x_{i-2}, y_{i-2}) + 2f(x_{i-3}, y_{i-3}))$

$y_i = y_{i-2} + h\frac{1}{3}(f(x_{i-2}, y_{i-2}) + 4f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_i, y_i))$

end for

gdzie $y_0 = y_a, y_1, y_2, y_3$ obliczone są metodą Rungego-Kutty 4 rzędu:

$k_1 = hf(x_{i-1}, y_{i-1})$

$k_2 = hf(x_{i-1} + \frac{1}{2}h, y_{i-1} + \frac{1}{2}k_1)$

$k_3 = hf(x_{i-1}, y_{i-1} + \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{2})k_1 + (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})k_2)$

$k_4 = hf(x_{i-1}, y_{i-1} - \frac{\sqrt{2}}{2}k_2 + (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})k_3)$

$y_i = y_{i-1} + \frac{h}{6}(k_1 + (2 - \sqrt{2})k_2 + (2 + \sqrt{2})k_3 + k_4)$

3 Warunki, założenia

Metoda działa dla większości równań różniczkowych zwyczajnych. Nie działa dla równań różniczkowych jednorodnych z warunkiem początkowym $y_a = 0$ gdyż wtedy $y_1 = y_2 = ... = y_n = 0$. Także dla równań z funkcją wykładniczą, błąd na końcu przedziału może być bardzo duży, gdyż punkty x_i, x_{i+1} są równo oddalone.

4 Implementacja metody

Metoda została zaimplementowana w funkcji $milmethrk4(f, a, b, n, y0, y)$. Przyjmuje ona:

-f - równanie różniczkowe do rozwiązania.
-a,b - granice przedziału na którym rozwiązywane jest równanie.
-n - liczba podziału.
-y0 - warunek początkowy y_a.
-y - rozwiązanie (w celu obliczeniu błędu).

Funkcja zwraca:
-X - wektor $x_0, x_1, ..., x_n$
-YP - wektor wartości $\overbrace{y(x)}$.
-Y - wektor wartośći $y(x)$
-err - wektor błędów w każdym kroku
-merr - błąd maksymalny.

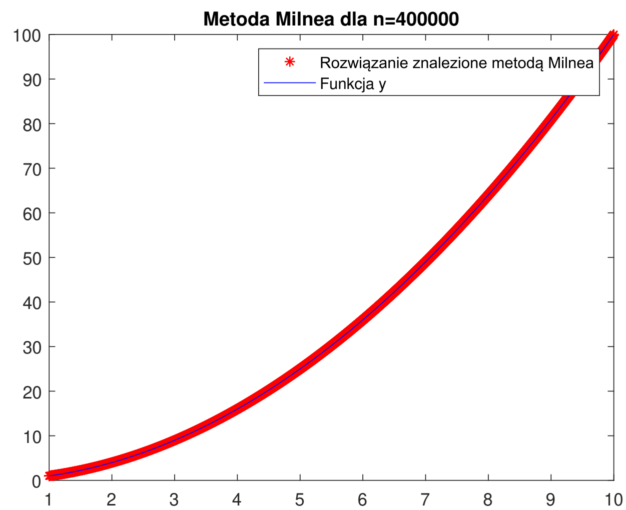
```
function [ X, YP, Y , err ,merr ] = milmethrk4( f, a, b, n, y0 ,y)
%MILMETHRK4

X = linspace(a,b,n);
YP = 1:n;

YP(1) = y0;
h = X(2) - X(1);
Y = y(X);

for i = 1:3
    x = X(i);
    y = YP(i);
    k1 = h*f(x,y);
    k2 = h*f(x+0.5*h,   y+0.5*k1);
    k3 = h*f(x+0.5*h,   y+ 0.5*(-1 + sqrt(2))*k1 + (1-0.5*sqrt(2))*k2);
    k4 = h*f(x+h,   y-0.5*sqrt(2)*k2+ (1+0.5*sqrt(2))*k3);
    YP(i+1) = YP(i) + (1/6)*(k1+(2-sqrt(2))*k2+(2+sqrt(2))*k3+k4)*h;
end

for i = 4:n-1
    prediction = YP(i-3) + h*(4/3)*(2*f(X(i-2),YP(i-2))-f(X(i-1),YP(i-1))+2*f(X(i),YP(i)));
    YP(i+1) = YP(i-1) + h*(1/3)*(f(X(i-1),YP(i-1)) + 4*f(X(i),YP(i))+ f(X(i+1),prediction));
end
err = abs(Y-YP);
merr= max(err);
plot(X,YP,'r*',X,Y,'b');
title('Metoda Milnea');
legend('Rozwiazanie znalezione metoda Milnea','Funkcja y');
end
```

5 Przykłady i wnioski

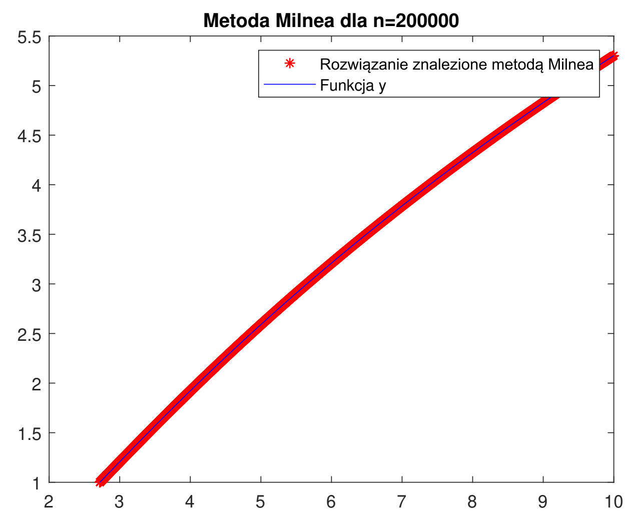
Funkcja została przebadana na kilku przykładowych równaniach:

5.1 Równania jednorodne

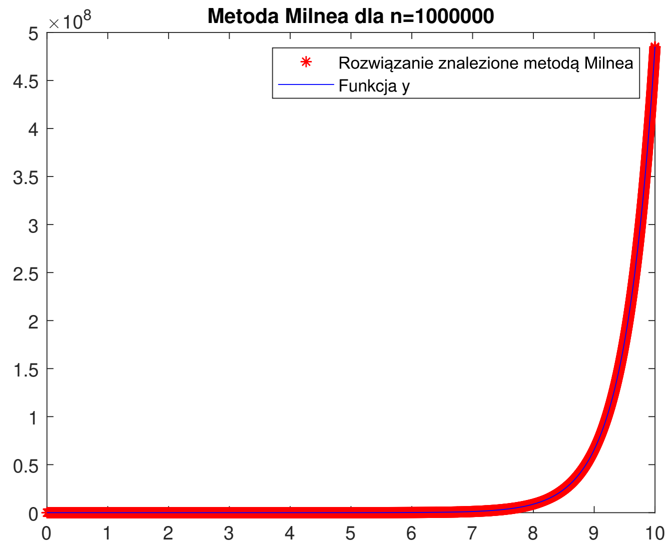
1. $y_1' = f_1(x, y_1) = 2\sqrt{y_1}, y_1 = x^2, x \in [1, 10]$
Dla n=400000, błąd maksymalny wynosi 0,0011.



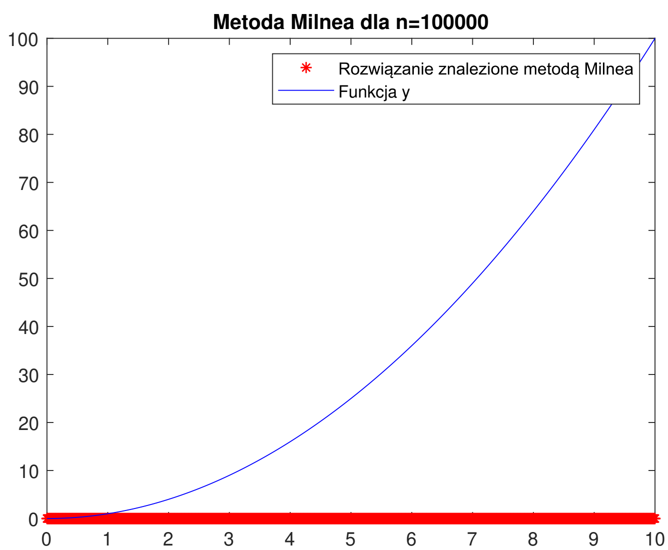
2. $y_2' = f_2(x, y_2) = \frac{2\sqrt{y_2}}{x}, y_2 = 2log(x), x \in [e, 10]$
Dla n=100000, błąd maksymalny wynosi $3,286552 * 10^{-4}$
Dla n=200000, błąd maksymalny wynosi $1.6434 * 10^{-4}$



Przykład funkcji wykładniczej. $g_1' = f(x, g_1) = 2g_1, g_1 = e^{2x}, x \in [0, 10]$
Dla n=1000000, błąd maksymalny wynosi $2.4257 * 10^4$

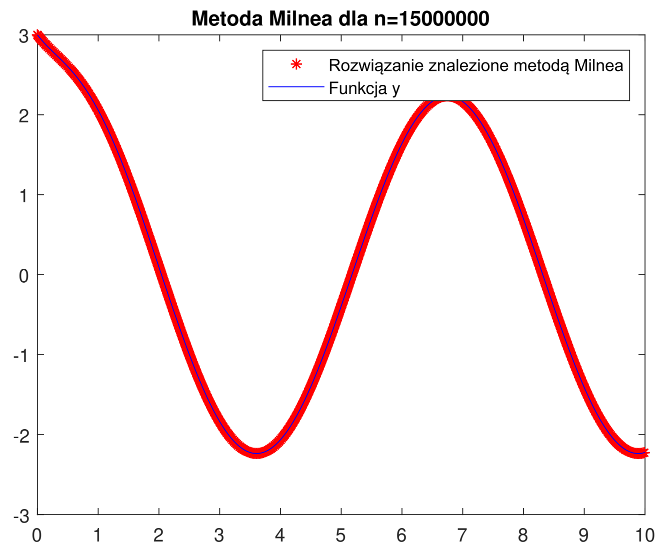


Przykład gdy $y_a = y(0) = 0, g_2' = f(x, g_2) = 2\sqrt{g_2}g_2 = x^2, x \in [0, 10]$

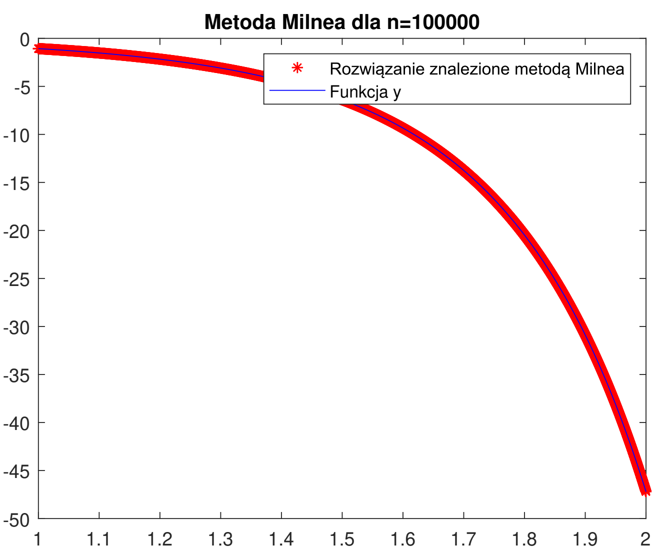


5.2 Równania niejednorodne

3. $y =_3= f_3(x, y_3) = -2y_3 + 5cos(x), y_3 = sin(x) + 2cos(x) + e^{-2x}, x \in [0, 10]$
Dla n=10000000, błąd maksymalny wynosi $3.92871 * 10^{-4}$.
Dla n=15000000, błąd maksymalny wynosi $2.61917 * 10^{-4}$.

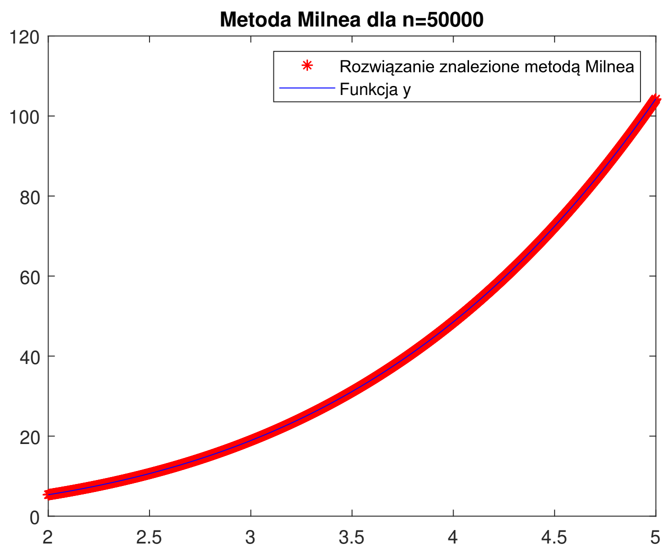


4. $y_4' = f_4(x, y_4) = y_4 x - xe^{x^2}, y_4 = e^{\frac{-x^2}{2}}, x \in [1, 2]$
Dla n=100000, błąd maksymalny wynosi 4.358936985084938* 10^{-4}.
Dla n=100000, błąd maksymalny dla metody Rungego-Kutty rzędu 3 wynosi 4.358936984942829 10^{-4}.



5.3 Równania Bernoulliego

5. $y_5' = f_5(x, y_5) = x\sqrt{y} + \frac{xy}{x^2-1}, y_5 = \frac{-1}{3}(-1x^2) + \sqrt[4]{x^2-1}, x \in [2, 5]$
Dla n= 50000, błąd maksymalny wynosi 0.009256596196948.
Dla n= 50000, błąd maksymalny dla metody Rungego-Kutty rzędu 4 z wzorem klasycznym wynosi 0.009256596196764.



5.4 Wnioski i zakończenie

Metoda, dla równań rożniczkowych, spełniających założenia metody, znajduje rozwiązanie bliskie podanemu. Błąd maleje wraz ze wzrostem liczby podziału. Gdy do obliczenia y_1, y_2, y_3 zastosowana jest metoda Rungego-Kutty rzedu 3, błąd jest minimalnie mniejszy (wynika to z faktu, że korzystając z metody rzędu 4, łączymy schematy różnych rzędów).