Sprawozdanie
Metody Numeryczne 2

Przemysław Woźniakowski

2018-10-17

1 Treść zadania

Rozwiązanie układu trzech równań nieliniowych:

$$x = g_1(x, y, z) \quad y = g_2(x, y, z) \quad z = g_3(x, y, z)$$

metodą iteracji prostej.

2 Opis metody

Metoda iteracji prostej (iteracji punktu stałego) polega na zastąpieniu równania $f(x) = 0$ równaniem równoważnym $x = g(x)$ w taki sposób że zera funkcji f są punktami stałym funkcji g. Następnie stosowana jest iteracja $x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$ gdzie $x^{(0)}$ jest przybliżeniem początkowym.

3 Warunki, założenia

Metoda iteracji prostej jest zbieżna dla układu równań nieliniowych, dla którego funkcja

$$G(x_1, ..., x_n) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, ..., x_n) \\ . \\ . \\ . \\ g_n(x_1, ..., x_n) \end{bmatrix}$$

spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L < 1$.

4 Implementacja metody

Implementacja metody polega na wykonywaniu w pętli warunkowej *while* przypisania:

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$$

do momentu aż spełniony zostanie warunek:

$$\|x^{(k+1)} - g(x^{(k)})\|_2 < eps$$

gdzie eps jest podaną przez argument dokładnością (domyślnie 10^{-5}). Funkcja przyjmuje trzy funkcje g_1, g_2 i g_3, oraz opcjonalnie dokładność obliczeń oraz wektor będący przybliżeniem początkowym (domyślnie wektor $[1,1,1]$). Zwraca ona wektor [x,y,z] będący rozwiązaniem układu oraz ilość wykonanych iteracji.

5 Przykłady i wnioski

Funkcja została przebadana na kilku przykładowych układach równań nieliniowych, aby sprawdzić jej poprawność. Dla układu:

$$x = \frac{1}{8}cos(x-z) + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}y - \frac{1}{8}z$$

$$y = \frac{1}{8}sin(x-y) - \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}z$$

$$z = \frac{1}{8}cos(x+y+z) + \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}z$$

funkcja znajduje rozwiązanie [0.1274, 0.0135, 0.1215] z dokładnością eps=10^{-6}, dla wektora początkowego [1,1,1] wykonując 9 iteracji. Rozwiązanie układu:

$$x = \frac{1}{8}atan(x+y) + \frac{1}{8}z$$

$$y = \frac{1}{8}acot(y+z) + \frac{1}{8}x$$

$$z = \frac{1}{8}atan(x+z) + \frac{1}{8}y$$

czyli wektor [0.0287, 0.1748, 0.0291] z dokładnością eps=10^{-10} i wektorem początkowym [-1,-1,-1] wyznaczane jest w 9 iteracjach. Dla kolejnego układu:

$$x = \frac{1}{4}cos(x+y-z) + \frac{1}{8}y$$

$$y = \frac{1}{8}atan(2x+y+z) + \frac{1}{8}z$$

$$z = \frac{1}{8}asinh(x-y-z) + \frac{1}{8}x$$

funkcja dla przybliżenia początkowego [0,0,0] i eps=10^{-10} znajduje rozwiązanie w 14 iteracjach. Dla porównania funkcja Matlabowa $fsolve$ znajduje rozwiązanie w 3 iteracjach. Jednak porównując czasy okazuje się, że moja funkcja znajduje rozwiązanie ok. 2 razy szybciej.

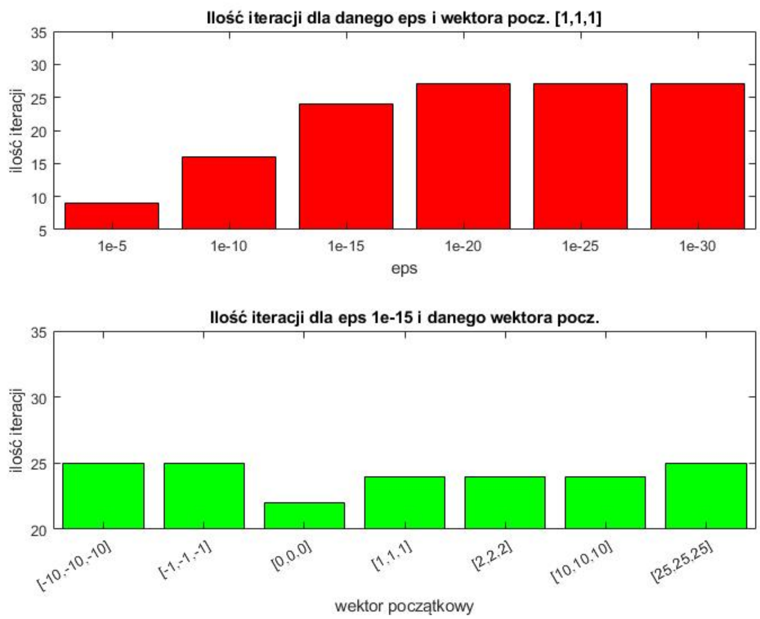
Następnie przebadany został układ:

$$x = \frac{1}{4}asinh(2 + x + y + z) + \frac{1}{8}y$$

$$y = \frac{1}{8}asinh(3 - 2x + y + z) + \frac{1}{8}z$$

$$z = \frac{1}{4}asinh(1 + x - y - z) + \frac{1}{8}x$$

dla różnych epsilonów i wektorów początkowych. Ilość iteracji dla poszczególnych wywołań przedstawia Matlabowy wykres:



Jak widać na górnym wykresie ilość iteracji rośnie wraz ze wzrostem dokładności. Jednak po ok 25 iteracjach wynik jest już na tyle dokładny, że ilość iteracji pozostaje prawie nie zmienna niezależnie od wzrostu dokładności. Analizując dolny wykres, można zauważyć że choć ilość iteracji jest mniejsza dla wektorów początkowych bliskich rozwiązaniu ([0.4851, 0.2425, 0.2752]) to nie rośnie ona znacznie nawet dla wektorów znacznie różnych od rozwiązania.