MI–SPI První úloha

Tomáš Pšenička, Jan Groschaft

30. dubna 2020

Obsah

1 Zadání

Cílem úlohy je naprogramovat konstruktivní verzi 0/1 problému batohu s užitím dynamického programování, heuristiky poměru ceny a váhy, heuristiky vybírající věc s nejvyšší cenou a algoritmem FPTAS. Výsledkem je vyhodnocení závislosti výpočetní složitosti na velikosti instance při užití různých způsobů řešení. Dále je také sledována závislost relativní chyby při zvolené přesnosti. Výpočetní složitost je měřena pomocí času potřebného pro výpočet.

1.1 Sady instancí

Úloha řeší tři sady zadání. První sada „NK“ obsahuje náhodně vygenerovaná data. O druhých dvou sadách „ZKC“ a „ZKW“ ze sbírky prof. Zlomyslného nejsou známé žádné další informace. Zadané instance problému jsou v každé sadě rozděleny do souborů podle velikosti instance. Každý soubor obsahuje 500 instancí dané velikosti. Velikosti zadaných instancí jsou: 4, 10, 15, 20, 22, 25, 27, 30, 32, 35, 37, 40. S ohledem na vysokou časovou náročnost výpočtů pro velké instance obsahuje tato zpráva výsledky pro instance menší než 20 včetně.

1.2 Ověření výstupů

Pro ověření korektnosti jsou v každé sadě příslušná řešení všech instancí pro konstrukční verzi zadaného problému. Konstrukční řešení obsahuje nejlepší dosažitelnou cenu pro danou instanci problému. Porovnáním zadané a programem zjištěné ceny lze jednoznačně určit chybovost u použitých heuristik. V souboru zadaná cena je následně pro kontrolu porovnána s výstupem implementovaného algoritmu.

1.3 Výpočetní platforma

Implementace řešení problému je provedena v jazyce Python spouštěném na operačním systému Windows 10, po hardwarové stránce je pro výpočty využit procesor Intel Core i5–9300H.

2 Popis implementovaných metod

2.1 Dynamické programování

Dynamické programování využívá ukládání počítaných mezivýsledků do dvourozměrného pole. Pro tuto metodu je použita dekompozice problému podle ceny. Na začátku je alokováno pole o velikosti n (velikost instance) krát M (součet cen všech předmětů v instanci). Takové pole stačí jednou projít po prvcích a pro každý prvek rozhodnout o jeho přidaní k doposud počítaným konfiguracím a uložit výslednou váhu konfigurace na řádek, který určuje cenu této konfigurace. Poslední řádek bude obsahovat na řádcích pro všechny dostupné ceny potřebnou kapacitu. Pro získání nejlepší vhodné konfigurace stačí projít poslední sloupec od nejvyšší hodnoty a vybrat první konfiguraci, která bude splňovat požadovanou kapacitu. Složitost výpočtu je tak redukována na:

$$O(n * M)$$

kde M není závislé na velikosti instance. Jedná se tak o pseudopolynomiální algoritmus.

2.2 Heuristiky

První použitá heuristika vypočítá poměr ceny a váhy zadaných věcí a následně přidává předměty podle nejlepšího poměru dokud se do batohu nějaké vejdou. Takový postup vyžaduje pouze seřazení předmětů, které je možné provádět se složitostí:

$$O(n * log(n))$$

Ovšem chyba tohoto postupu není obecně nijak shora omezena.
Další použitá heuristika volí pouze jednu nejcennější věc, která se do batohu vejde.

2.3 FPTAS

Metoda Fully Polynomial Time Approximation Scheme umožňuje provádět výpočet v polynomiálním čase s možností určení velikosti chyby. Polynomiálního času je dosaženo snížením cen předmětů. Při zadané relativní chybě ε algoritmus počítá s cenou dělenou výrazem:

$$K = \frac{\varepsilon * C_m}{n}$$

Kde C_m je maximální cena a n je velikost instance.

Výsledná relativní chyba je počítána podle vzorce:

$$\varepsilon = max\{\frac{|C(APR(I)) - C(OPT(I))|}{max\{C(OPT(I)), C(APR(I))\}}\}$$

Kde použité výrazy ve vzorci mají následující význam:

- C(S) hodnota opt. kritéria řešení S
- APR(I) aprox. řešení instance I
- OPT(I) optimální řešení instance I

3 Naměřené výsledky

Naměřené výsledky jsou zobrazeny v tabulkách 1, 3, 5. Hodnoty jsou členěné podle sady ke které přísluší. Sada náhodných dat je označena písmenem „NK“ a sady prof. Zlomyslného „ZKC“ a „ZKW“. Pro výpočet jsou použity postupy popsané v sekci 2. Tabulky obsahují časy běhu pro různé algoritmy v sekundách naměřené pomocí nástroje *cProfile*.
Hodnoty z tabulek jsou zobrazeny na grafech 1 a 2. Z grafu je patrná velká časová náročnost přesného dynamického programování oproti ostatním aproximativním způsobům řešení.
Naměřené maximální chyby jsou zobrazeny v tabulkách 2, 4 a 6. Chyba je pro všechny aproximativní algoritmy vypočítána podle vzorečku ze sekce 2.3. Dynamické programování dává přesné výsledky, proto pro něj nedává smysl určovat chybu. Chyba s hodnotou 1.0 vznikla v případě, kdy FPTAS vrátil konfiguraci samých nul i když bylo možné do batohu nějaký předmět vložit.

Velikost instance	4	10	15	20
Dynamické programování	8.569	86.187	181.436	539.184
FPTAS ε=0.1	0.111	2.5	11.208	38.303
FPTAS ε=0.2	0.074	1.258	5.264	18.095
FPTAS ε=0.3	0.06	0.835	4.615	10.849
FPTAS ε=0.4	0.05	0.633	2.973	9.137
FPTAS ε=0.5	0.046	0.523	2.184	7.402
Heuristika poměru cena váha	0.027	0.038	0.045	0.055
Heuristika jeden předmět	0.025	0.036	0.039	0.05

Tabulka 1: Průměrné naměřené časy v sekundách sady NK.

Velikost instance	4	10	15	20
FPTAS ε=0.1	0.014358	0.002134	0.003003	1.0
FPTAS ε=0.2	1.0	0.078431	0.005986	1.0
FPTAS ε=0.3	1.0	0.078431	0.005986	1.0
FPTAS ε=0.4	1.0	0.078431	0.00815	1.0
FPTAS ε=0.5	1.0	0.078431	0.00815	1.0
Heuristika poměru cena váha	0.359189	0.531453	0.236835	0.430054
Heuristika jeden předmět	0.663519	0.8689	0.906724	0.925672

Tabulka 2: Naměřená maximální chyba podle použitého algoritmu a velikosti instance, sada NK.

Velikost instance	4	10	15	20
Dynamické programování	9.347	89.662	192.831	588.504
FPTAS ε=0.1	0.144	2.752	11.358	40.698
FPTAS ε=0.2	0.087	1.358	5.433	18.739
FPTAS ε=0.3	0.064	1.21	4.712	13.018
FPTAS ε=0.4	0.054	0.903	2.689	8.624
FPTAS ε=0.5	0.05	0.592	2.092	6.889
Heuristika poměru cena váha	0.027	0.038	0.047	0.075
Heuristika jeden předmět	0.025	0.036	0.042	0.054

Tabulka 3: Průměrné naměřené časy v sekundách sady ZKC.

Velikost instance	4	10	15	20
FPTAS ε=0.1	0.017082	0.004709	0.002029	0.001215
FPTAS ε=0.2	0.040284	0.011128	0.004442	0.002303
FPTAS ε=0.3	0.078697	0.013054	0.005952	0.003454
FPTAS ε=0.4	0.13494	0.018066	0.007311	0.004749
FPTAS ε=0.5	0.207725	0.037775	0.008352	0.007452
Heuristika poměru cena váha	0.490298	0.249584	0.154858	0.111739
Heuristika jeden předmět	0.62952	0.803984	0.862146	0.891126

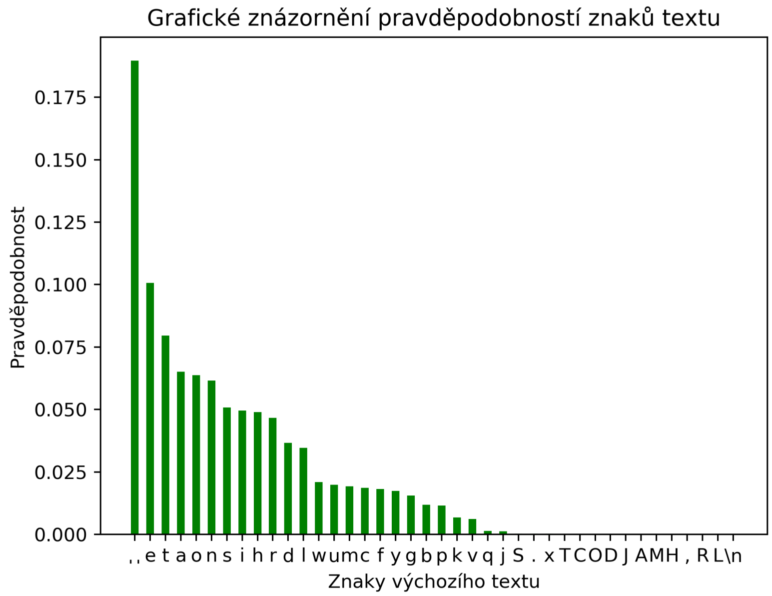
Tabulka 4: Naměřená maximální chyba podle použitého algoritmu a velikosti instance, sada ZKC.

Velikost instance	4	10	15	20
Dynamické programování	42.055	72.809	65.279	96.475
FPTAS ε=0.1	0.225	0.851	1.913	3.505
FPTAS ε=0.2	0.173	0.425	0.898	1.566
FPTAS ε=0.3	0.149	0.352	0.692	1.076
FPTAS ε=0.4	0.133	0.306	0.471	0.685
FPTAS ε=0.5	0.159	0.175	0.398	0.565
Heuristika poměru cena váha	0.084	0.016	0.006	0.003
Heuristika jeden předmět	0.084	0.014	0.005	0.002

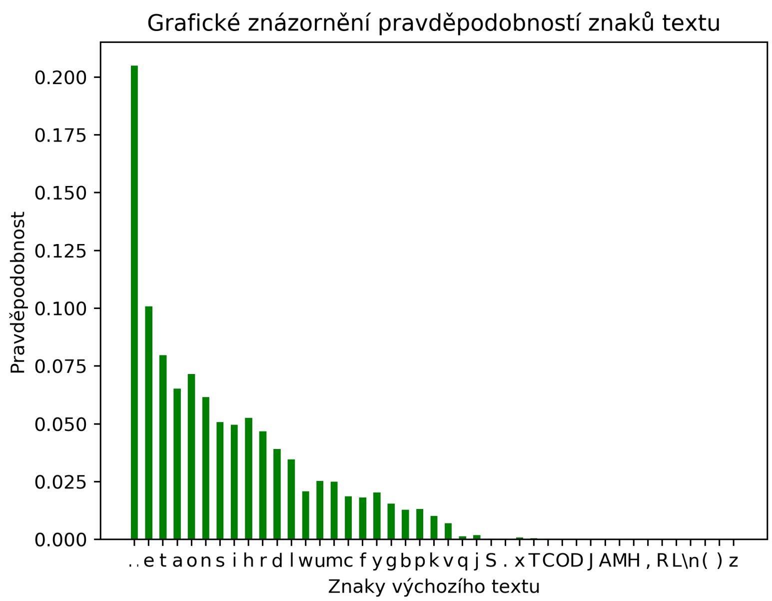
Tabulka 5: Průměrné naměřené časy v sekundách sady ZKW.

Velikost instance	4	10	15	20
FPTAS ε=0.1	0.033204	0.01622	0.009777	0.009248
FPTAS ε=0.2	0.045822	0.051179	0.036217	0.017655
FPTAS ε=0.3	0.092338	0.07656	0.053289	0.017655
FPTAS ε=0.4	0.14166	0.07656	0.064089	0.026297
FPTAS ε=0.5	0.258182	0.118424	0.081173	0.079371
Heuristika poměru cena váha	0.992908	0.987585	0.9375	0.760458
Heuristika jeden předmět	0.143221	0.213391	0.219789	0.132229

Tabulka 6: Naměřená maximální chyba podle použitého algoritmu a velikosti instance, sada ZKW.



Obrázek 1: Graf závislosti velikosti instance na čase výpočtu.



Obrázek 2: Graf závislosti velikosti instance na čase výpočtu.

4 Zhodnocení výsledků

Časová náročnost dynamického programování je způsobena převážně implementací algoritmu, který nejprve inicializuje všechny hodnoty tabulky a následně je všechny prochází. Tento postup je časově a paměťově náročný v závislosti na rostoucím součtu cen předmětů. Rychlost růstu složitosti tak odpovídá vzorci popsaném v sekci 2.1.
Náročnost FPTAS se dle předpokladu mění v závislosti na zadané přesnosti. Vyšší přesnost znamená větší časovou náročnost. Zároveň je z naměřených dat patrné, že se zvyšující se přesností snižuje maximální pozorovaná chyba. U náhodných dat jsou výsledky ovlivněny případy, kdy došlo aplikováním zjednodušení k výběru prázdného batohu jako nejlepšího řešení, i když bylo možné některý předmět do batohu vložit. V takovém případě je v datech patrná chyba 100%.
Použité heuristiky byly pro všechny instance, dle předpokladu, časově nejméně náročné. Zároveň je pro ně pozorována největší chybovost pro všechny instance všech sad. Zajímavá je extrémně vysoká chybovost poměrové heuristiky u sady ZKW. Toto pozorování naznačuje, že byla data této sady volena jako příklad selhání této heuristiky. Pro volbu případu selhání poměrové heuristiky byl pravděpodobně volen jeden předmět s vysokou cenou který se po zařazení předmětů s lepším poměrem už nevejde, přestože by byl sám součástí optimálního řešení. Z tohoto důvodu vychází na této sadě heuristika uvažující jeden nejcennější předmět s výrazně menší chybou než u ostatních sad.