
光干渉計による光波スペクトル測定

提出者

T200D507 齋藤瑚汰朗

共同実験者

T200D053 小松美咲

T200D052 小堀祥汰

T200D050 小林雄馬

T200D047 高 健智

実験日 (一日目) 2022 年 4 月 18 日

実験日 (二日目) 2022 年 4 月 25 日

1 実験目的

光通信の分野では、波長の異なる光に各々の情報を重ね合わせて、一本の光ファイバで同時に伝送する、いわゆる波長分割多重（WDM:Wavelength Division Multiplexing）光通信システムが多く採用されている。この WDM 光通信システムは、多数の波長成分が含まれる多重化後の光信号の光スペクトルを高精度に測定する必要がある。この実験では、光干渉計を利用して光のスペクトルを測定し、フーリエ変換分光法の基礎を習得することが目的である。

2 原理

光源から射出された光をビームスプリッタ（BS）を用いて二分する。二分したビームの一方は固定反射鏡 2 へ向かい、もう一方は移動反射鏡 M1 へ向かう。二分された光は、それぞれ M1、M2 によって反射して再び BS に戻って合成される。ここで入射光の電場の周波数 ν を式 2.1 で表すとする。（ $a(\nu)$ ：振幅、 t ：時間）

$$E_i(t) = a(\nu) \exp(i2\pi\nu t) \quad (2.1)$$

BS を透過・反射するさいに振幅にかかる係数をそれぞれ t_{BS}, r_{BS} とし、この瞬間に生じる位相変化をそれぞれ δ_1, δ_2 とする。固定反射鏡 M1・移動反射鏡 M2 から反射し、再び BS に戻ってきた光の電場は、式 2.2 と式 2.3 のように示すことができる。

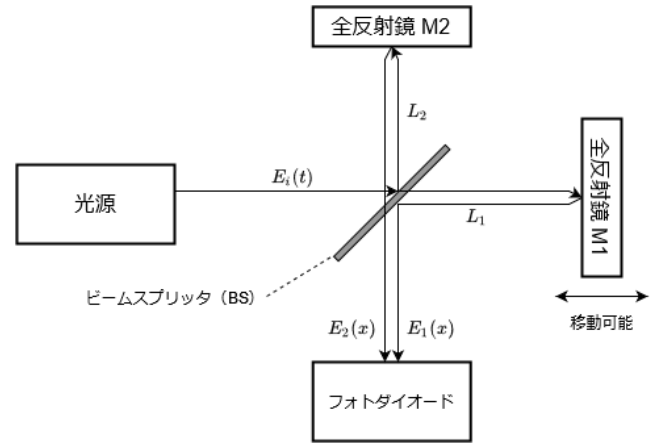


図 1: マイクelson干渉計の構成

$$E_1(\nu, t) = t_{BS} a(\nu) \exp \left[i \left\{ 2\pi\nu t - \frac{2\pi\nu L_1}{c} + \delta_1 \right\} \right] \quad (2.2)$$

$$E_2(\nu, t) = r_{BS} a(\nu) \exp \left[i \left\{ 2\pi\nu t - \frac{2\pi\nu L_2}{c} + \delta_2 \right\} \right] \quad (2.3)$$

$t_{BS} = r_{BS} = 1/\sqrt{2}$ の時、BS の反射と通過がそれぞれ一度だけ発生した事に留意して、フォトダイオードに入り込む合成光の電場は計算すると、

$$\begin{aligned} E_o &= r_{BS} E_1(\nu, t) + t_{BS} E_2(\nu, t) \\ &= \frac{1}{2} a(\nu) \left[\exp \left\{ 2\pi i \nu \left(t - \frac{L_1}{c} \right) + i\delta_1 \right\} + \exp \left\{ 2\pi i \nu \left(t - \frac{L_2}{c} \right) + i\delta_2 \right\} \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

となる。光強度は振幅の二乗に比例する。よって、合成波の電場の強度は式 2.5 のように示すことができる。

$$|E_o(\nu, t)|^2 = \frac{1}{2} a^2(\nu) \left\{ 1 + \cos \left(2\pi\nu \frac{L_1 - L_2}{c} + \delta_2 - \delta_1 \right) \right\} \quad (2.5)$$

ここで $a^2(\nu)$ は振幅の二乗であり、周波数 ν に対する光スペクトル $G(\nu)$ である。合成波を受光したフォトダイオードの出力は、 $|E_o(\nu, t)|^2$ に比例した電流が発生し、反射鏡 M1 を移動させて、 L_1 を連続的に変化させる事で、 L_1 に対して交流的に変化する成分が光強度に含まれることになる。

ここで、 $\tau = (L_1 - L_2/c)$ 及び、 $\delta = \delta_2 - \delta_1$ とすると、光強度は式 2.6 のように示せる。

$$|E_o(\nu, t)|^2 = \frac{1}{2} G(\nu) \cos(2\pi\nu\tau + \delta) \quad (2.6)$$

M1 の移動距離を x とすると、 $\tau = 2x/c$ となる。

以上の議論により、入射光の光スペクトルが $G(\nu)$ である時に発生する交流成分は、式 2.7 の通りとなる。

$$V(x) = \int_0^{+\infty} G(\nu) \cos\left(\frac{4\pi\nu x}{c} + \delta\right) dx \quad (2.7)$$

$G(\nu)$ は $V(x)$ のフーリエ変換により求めることができる。

$$G(\nu) = \frac{4}{c} \int_{+\infty}^{-\infty} V(x) \exp\left(\frac{4\pi i \nu x}{c}\right) dx \quad (2.8)$$

3 実験

3.1 注意事項

実験を進める上で、注意すべき点について記述する。

3.1.1 干渉計

3.1.2 光源

3.1.3 光ファイバーケーブル

3.2 He-Ne レーザー光を用いた光干渉

3.3 ASE 光源の光スペクトル検出

4 実験結果

4.1 He-Ne レーザー光を用いた光干渉実験結果

オシロスコープで観測した波形を csv 形式で出力した。出力した csv ファイルを Excel を用いて波形を描画した。その波形を図 2 に示す。

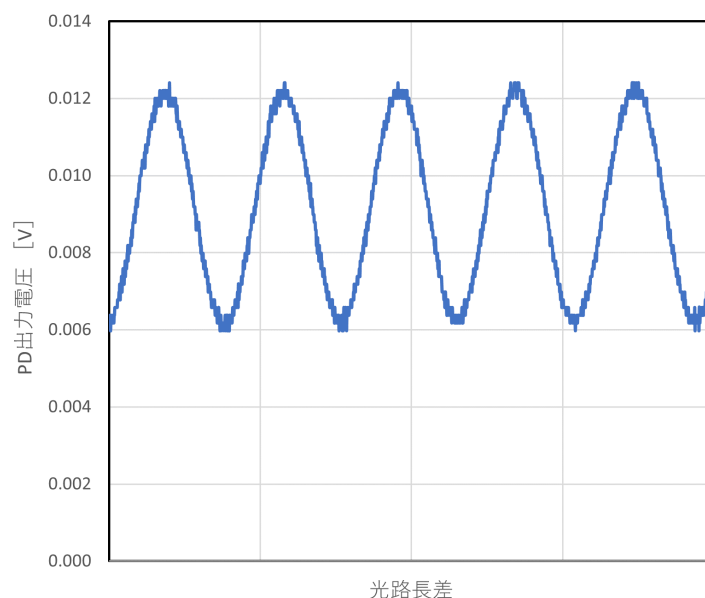


図 2: He-Ne レーザーの光干渉

移動反射鏡 M1 を移動させることで、光路長が変化しそれに応じて、フォトダイオードに入り込む光強度が周期的に変化していることが見て取れる。

4.2 ASE 光源の光スペクトル検出結果

波形観測を二回行い、サンプルを二枚作成した。その画像を図 3 に示す。

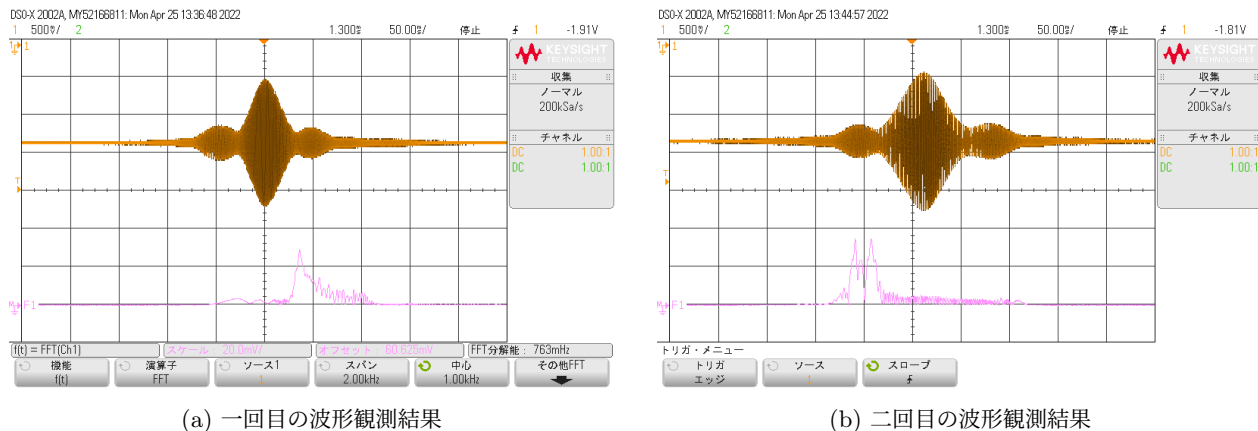


図 3: ASE 光源の光スペクトル検出結果

M1 の移動速度に依存して波形がひずむため、不揃いな波形をしている。しかし、概ね同様の波形を観測することができている。

5 考察

5.1 マイケルソン干渉計における光出力強度

He-Ne レーザ光を用いた場合、周期的な信号が観測される。干渉計への入力が一定であることを考えると、エネルギー保存則によってフォトダイオードからの出力は一定でなければならない。しかし、実際にオシロスコープで観測した波形は周期的に変化している。フォトダイオードからの出力が最大でない場合、残りのエネルギーがどのような振る舞いをしたのかを考える。

5.1.1 ビームスプリッタの役割

式 2.6 によると、光強度は L_1 によって周期的に変化することがわかる。そして、 $\cos(2\pi\nu\tau + \delta)$ が 0 となるときに、光強度も 0 となる。しかし、ここで注意すべき点は、2.6 が示す光強度は、フォトダイオードに入り込む光の強度を示している事である。そこで、ビームスプリッタの作用について考える。ビームスプリッタは、光を二分する器具である。それを考慮すると、実際の光の道筋は図 4 に示したような経路を辿っている事になる。この図の細かい点線が反射光、粗い点線が透過光を示している。図 1 には、複雑さを回避するため表記を省略している。 L_1 を変化させると、M1 の反射光と M2 の反射光の一部は、BS に当たった際にフォトダイオード側に向かうことなく漏れ出ていく。これが、周期的に光強度が変化する原因である。[4]

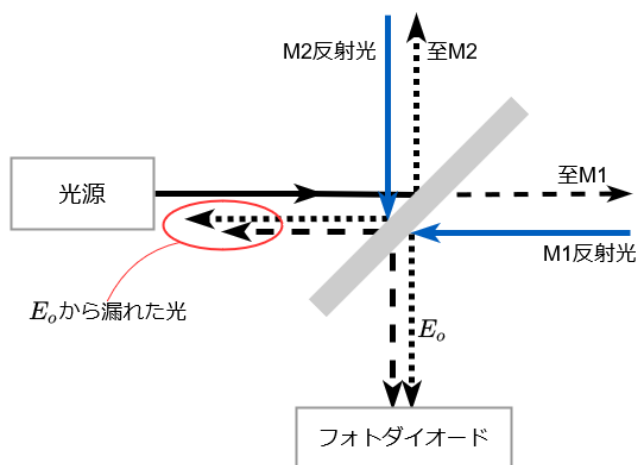


図 4: 漏れる分の光

5.2 ミラーの移動速度変動の影響の抑制

反射鏡 M2 を波長オーダーの領域で等速で移動させることは難しい。一定の速度で移動しなくても $V(x)$ の変化を正確にする方法を考える。

M1 の移動とともに現れるビート信号の周期は、 x の移動分にのみ依存し、レーザー波長の 1/2 だけ移動した時間がビート信号の周期に相当する。

5.3 ASE 光源の光スペクトルの類推

図 3 に示した波形を、模した関数を (2.7) に示す。

$$V(\nu) = \exp\left(-\frac{(\nu - \nu_0)^2}{\sigma^2}\right) \cos\left(\frac{4\pi x(\nu - \nu_0)}{\lambda}\right) \cos\left(\frac{\nu - \nu_0}{\pi}\right) \quad (5.1)$$

ν_0 は中心周波数で、 σ は $V(\nu)=1/e$ となる時の周波数 ν から、中心周波数 ν_0 を引いた時の絶対値である。

この関数の実際の波形を gnuplot を用いて描画した様子を図 5 に示す。横軸は周波数 [THz] で、縦軸がパワースペクトル値を表している。このように、波形の積によって図 3 に示したものに似た波形を表現することができる。この時、 $\sigma = 7.2, \nu_0 = 193.6, x = 0.006, \lambda = 1.55 \times 10^{-6}$ として描画を行った。

この関数のスペクトルの概形を推測する。ここでガウス関数 $G(\nu)$ のフーリエ変換について考える。ガウス関数 $G(\nu)$ のフーリエ変換は (5.2) の通りとなる。

$$\mathcal{F}[G(\nu)] = \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} \exp\left(-\frac{\nu^2}{4\sigma}\right) \quad (5.2)$$

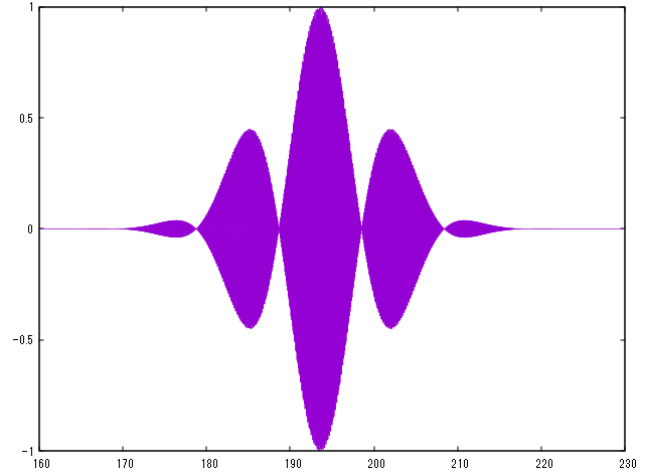


図 5: (5.1) の波形の様子 (gnuplot で作成)

一方、 \cos は周期関数であるため、離散スペクトルを取る。離散スペクトルはデルタ関数 $\delta(\omega)$ を用いて表現することができ、(5.3) のように示せる。[3]

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\cos\left(\frac{4\pi x(\nu - \nu_0)}{\lambda}\right)\right] &= \frac{1}{2} \left[\delta\left(\nu - \frac{4\pi x}{\lambda}\right) + \delta\left(\nu + \frac{4\pi x}{\lambda}\right) \right] \\ \mathcal{F}\left[\cos\left(\frac{\nu - \nu_0}{\pi}\right)\right] &= \frac{1}{2} \left[\delta\left(\nu - \frac{1}{\pi}\right) + \delta\left(\nu + \frac{1}{\pi}\right) \right] \end{aligned} \quad (5.3)$$

時間領域での積は、周波数領域内では畳み込み積分で表現することができる。[2]

$$\mathcal{F}[f \cdot g] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[f(t)] * \mathcal{F}[g(t)] \quad (5.4)$$

ここで、デルタ関数を $-\infty$ から ∞ まで積分する場合について確認をしておく。デルタ関数 $\delta(t)$ について一般的に次のような関係が成り立つ。

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(x - \tau) d\tau \quad (5.5)$$

これらを踏まえて、(5.1) のスペクトルを計算する。式 5.2、(5.3)、を用いると、(5.1) のフーリエ変換は次のように示すことができる。

$$\mathcal{F}[V(\nu)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} \exp\left(-\frac{\nu^2}{4\sigma}\right) \cdot \frac{1}{2} \left\{ \left[\delta\left(\nu - \frac{4\pi x}{\lambda} - t\right) + \delta\left(\nu + \frac{4\pi x}{\lambda} - t\right) \right] + \left[\delta\left(\nu - \frac{1}{\pi} - t\right) + \delta\left(\nu + \frac{1}{\pi} - t\right) \right] \right\} dt \quad (5.6)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\nu^2}{4\sigma}\right) \left[\delta\left(\nu - \frac{4\pi x}{\lambda} - t\right) + \delta\left(\nu + \frac{4\pi x}{\lambda} - t\right) \right] dt + \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\nu^2}{4\sigma}\right) \left[\delta\left(\nu - \frac{1}{\pi} - t\right) + \delta\left(\nu + \frac{1}{\pi} - t\right) \right] dt \quad (5.7)$$

(5.5) を用いると、

$$= \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} \left\{ \exp\left(-\frac{(\nu - \frac{4\pi x}{\lambda})^2}{4\sigma}\right) + \exp\left(-\frac{(\nu + \frac{4\pi x}{\lambda})^2}{4\sigma}\right) + \exp\left(-\frac{(\nu - \frac{1}{\pi})^2}{4\sigma}\right) + \exp\left(-\frac{(\nu + \frac{1}{\pi})^2}{4\sigma}\right) \right\} \quad (5.8)$$

$\sigma = 7.2, \nu_0 = 193.6, x = 0.006, \lambda = 1.55 \times 10^{-6}$ とし、gnuplot を用いて、(5.8) の波形を描画した。横軸周波数 [THz]、縦軸をパワースペクトル値とした結果を図 6 に示す。

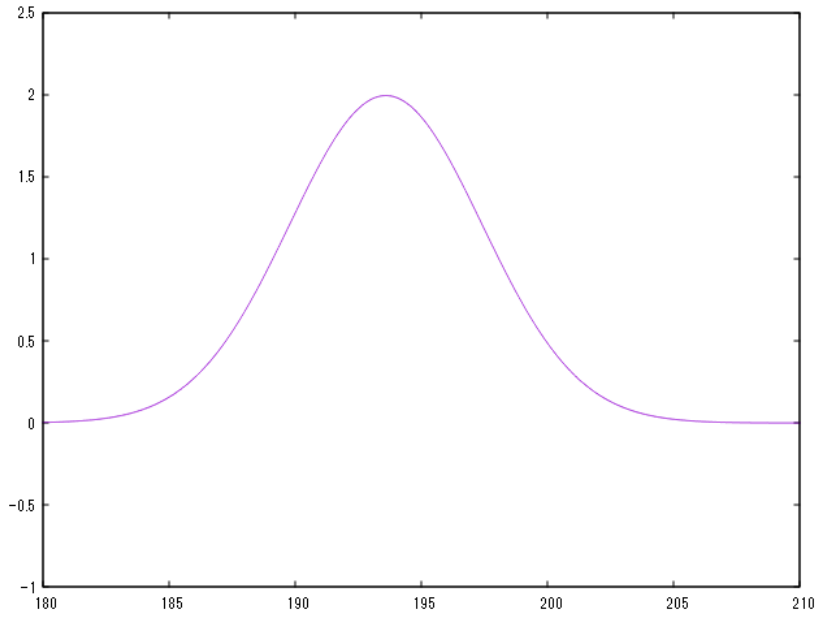


図 6: (5.8) の波形

5.4 サイドローブの起源

ASE 光源を用いた場合の観測波形 $V(x)$ には、中央のピークの周りに小さなピーク（サイドローブ）が二つ現れる。このサイドローブが発生する原因について考える。

5.4.1 ビート信号の解析

移動反射鏡 M1 を移動させたときに発生するビート信号 $V(x)$ は次式で与えられる。

$$V(x) = \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{(\nu - \nu_0)^2}{\sigma}\right) \cos\left(\frac{4\pi\nu x}{c}\right) d\nu \quad (5.9)$$

$V(x)$ を解析的に解く。[5]

$$\begin{aligned}
V(x) &= \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(\nu - \nu_0)^2}{\sigma^2}\right) \cos\left(\frac{i4\pi x \nu}{c}\right) d\nu \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty \left\{ \exp\left(\frac{i4\pi x \nu}{c}\right) + \exp\left(-\frac{i4\pi x \nu}{c}\right) \right\} \exp\left\{-\frac{(\nu - \nu_0)^2}{\sigma^2}\right\} d\nu \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp\left(\frac{i4\pi x \nu}{c} - \frac{(\nu - \nu_0)^2}{\sigma^2}\right) d\nu + \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{i4\pi x \nu}{c} - \frac{(\nu - \nu_0)^2}{\sigma^2}\right) d\nu \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp\left\{\frac{\nu^2}{\sigma^2} + \left(\frac{2\nu_0}{\sigma^2} + \frac{4\pi x}{c}i\right)\nu - \frac{\nu_0^2}{\sigma^2}\right\} d\nu + \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp\left\{\frac{\nu^2}{\sigma^2} + \left(\frac{2\nu_0}{\sigma^2} - \frac{4\pi x}{c}i\right)\nu - \frac{\nu_0^2}{\sigma^2}\right\} d\nu
\end{aligned} \tag{5.10}$$

ここで、第一項と第二項に分けて不定積分を行う。まず、第一項の不定積分 $V_1(x)$ から求めると、以下のようになる。

$$V_1(x) = \int \exp\left(\frac{i4\pi x \nu}{c} - \frac{(\nu - \nu_0)^2}{\sigma^2}\right) d\nu = \int \exp\left(-\frac{\nu^2}{\sigma^2} + \left(\frac{i4\pi x \nu}{c} - \frac{2\nu_0}{\sigma^2}\right)\nu - \frac{(\nu - \nu_0)^2}{\sigma^2}\right) d\nu \tag{5.11}$$

平方完成すると

$$= \int \exp\left\{-\left(\frac{\nu}{\sigma} - \frac{\sigma\left(\frac{i4\pi x}{c} + \frac{2\nu_0}{\sigma^2}\right)}{2}\right)^2 + \frac{\sigma^2\left(\frac{i4\pi x}{c} + \frac{2\nu_0}{\sigma^2}\right)^2}{4} - \frac{\nu_0^2}{\sigma^2}\right\} d\nu \tag{5.12}$$

$u = (c\nu - i2\sigma^2\pi x - \nu_0 c)/\sigma c$ を用いて置換積分を行う。よって $\frac{du}{d\nu} = \frac{1}{\sigma}$ であるので

$$\begin{aligned}
&= \int \sigma \exp\left\{-\left(u - \sigma\left(\frac{i2\pi x}{c} + \frac{\nu_0}{\sigma^2}\right) + \frac{i2\pi x \sigma^2 + \nu_0 c}{\sigma c}\right)^2 + \frac{\sigma^2\left(\frac{i4\pi x}{c} + \frac{2\nu_0}{\sigma^2}\right)^2}{4} - \frac{\nu_0^2}{\sigma^2}\right\} du \\
&= \frac{\sqrt{\pi}\sigma \exp\left(\sigma^2\left(\frac{i2\pi x}{c} - \frac{\nu_0}{\sigma^2}\right) - \frac{\nu_0^2}{\sigma^2}\right)}{2} \int \frac{2e^{-u^2}}{\sqrt{\pi}} du
\end{aligned} \tag{5.13}$$

この式を変形する際に、次式に示す関係を用いる。

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-u^2} du = \operatorname{erf}(u) + C_1 \tag{5.14}$$

このように定義された関数 $\operatorname{erf}(x)$ は、誤差関数と名付けられている。この関係を用いて、変形を続けると以下のようになる。

$$V_1(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \sigma \exp\left\{\sigma^2\left(\frac{i2\pi x}{c} + \frac{\nu_0}{\sigma^2}\right) - \frac{\nu_0^2}{\sigma^2}\right\} \cdot \operatorname{erf}(u) + C \tag{5.15}$$

忘れずに、 $u = (c\nu - i2\sigma^2\pi x - \nu_0 c)/\sigma c$ を代入すると、

$$V_1(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \sigma \exp\left\{\sigma^2\left(\frac{i2\pi x}{c} + \frac{\nu_0}{\sigma^2}\right) - \frac{\nu_0^2}{\sigma^2}\right\} \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{c\nu - i2\sigma^2\pi x - \nu_0 c}{\sigma c}\right) + C_1 \tag{5.16}$$

(5.11) から (5.16) までと同様の手順で、(5.10) の第二項の不定積分 $V_2(x)$ を解くと、次式の通りとなる。

$$V_2(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \sigma \exp\left\{\sigma^2\left(\frac{i2\pi x}{c} - \frac{\nu_0}{\sigma^2}\right) - \frac{\nu_0^2}{\sigma^2}\right\} \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{c\nu + i2\sigma^2\pi x - \nu_0 c}{\sigma c}\right) + C_2 \tag{5.17}$$

(5.16)、(5.17) より

$$\begin{aligned}
V(x) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp\left(\frac{i4\pi x \nu}{c} - \frac{(\nu - \nu_0)^2}{\sigma^2}\right) d\nu + \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{i4\pi x \nu}{c} - \frac{(\nu - \nu_0)^2}{\sigma^2}\right) d\nu \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{2} \cdot \sigma \left[\left[\exp\left\{\sigma^2\left(\frac{i2\pi x}{c} + \frac{\nu_0}{\sigma^2}\right) - \frac{\nu_0^2}{\sigma^2}\right\} \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{c\nu - i2\sigma^2\pi x - \nu_0 c}{\sigma c}\right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \exp\left\{\sigma^2\left(\frac{i2\pi x}{c} - \frac{\nu_0}{\sigma^2}\right) - \frac{\nu_0^2}{\sigma^2}\right\} \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{c\nu + i2\sigma^2\pi x - \nu_0 c}{\sigma c}\right) \right] + C \right]_0^\infty
\end{aligned} \tag{5.18}$$

計算すると、次式で与えられる。

$$V(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \sigma \cdot \exp\left(-\frac{4\pi^2 \sigma^2 x^2}{c^2}\right) \left\{ \left(\cos\left(\frac{4\pi\nu_0 x}{c}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi\nu_0 x}{c}\right) \right) \operatorname{erf}\left(\frac{i2\pi\sigma^2 x + \sigma c}{\sigma c}\right) \right. \\ \left. + \left(-\cos\left(\frac{4\pi\nu_0 x}{c}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi\nu_0 x}{c}\right) \right) \operatorname{erf}\left(\frac{i2\pi\sigma^2 x - \sigma c}{\sigma c}\right) \right. \\ \left. + 2 \cos\left(\frac{4\pi\nu_0 x}{c}\right) \right\} \quad (5.19)$$

5.4.2 ガウス型スペクトルの場合

次に、 $G(x)$ が複数のガウス型スペクトルの和として示される場合の $V(x)$ を求める。

5.5 FT-IR の特徴と今後

参考文献

- [1] 三井敏之・山崎了『物理数学—ベクトル解析・複素解析・フーリエ解析』日本評論社 9784535806429 pp179,185-186,189
- [2] 馬場敬之 (2015) 『素晴らしく実力が付くと評判のフーリエ変換 キャンパス・ゼミ 2 改訂 2』マセマ出版社 9784907165260 pp144-146
- [3] 守倉正博 (2021) 『通信方式』オーム社 9784274214738 pp20-21
- [4] 井上薫 and 山崎正之. "波の重ね合わせの原理とエネルギー保存則." 東海大学紀要工学部 45.2 (2005)
- [5] David Scherfgen IT Services."Integral Calculator".<https://www.integral-calculator.com/>,(2022-05-11)