Association France-IOI www.france-ioi.org

Introduction à l'épreuve de géométrie

Arthur Charguéraud Dec.2005

Ce document récapitule les bases mathématiques qui servent dans l'épreuve de géométrie, et plus généralement dans la plupart des exercices de géométrie algorithmique.

Il y a beaucoup de pages, mais ne vous inquiétez pas, le contenu vous semblera relativement facile si vous êtes déjà au lycée.

1 Géométrie vectorielle

2 Trigonométrie

3 Calcul vectoriel

Ce premier chapitre n'est pas rédigé pour l'instant. En voici le plan :

Résultats élémentaires :
- somme des angles d'un triangle
- périmètre d’un cercle
- longueurs orientées
- théorème de Thalès

Points et vecteurs :
- repères orthonormés
- définition d’un vecteur
- translation d’un point par un vecteur

Opérations sur les vecteurs :
- calcul de la norme d’un vecteur
- addition, soustraction de deux vecteurs
- relation de Chasles

La connaissance de ces notions est nécessaire pour la suite.

1 Géométrie vectorielle

2 Trigonométrie

3 Calcul vectoriel

2 Trigonométrie

1 Triangle rectangle

2 Cercle trigonométrique

3 Trionométrie réciproque

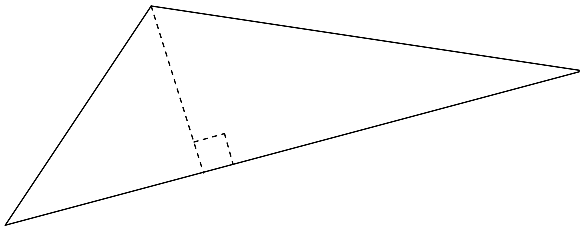
Dans cette première partie on va s'intéresser aux triangles rectangles.

Ces triangles sont fondamentaux, car les angles droits apparaissent partout.

Et là où ils ne sont pas, on peut toujours en faire apparaître !

Petit exemple : dans un triangle quelconque, on peut tracer une hauteur,

et faire ainsi apparaître deux triangles rectangles.



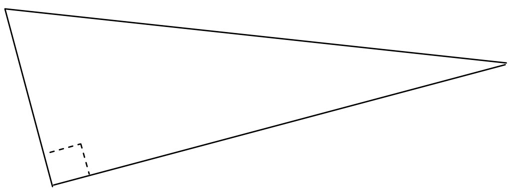
Procédés introduisant des angles droits :

- projeter un point sur une droite, tracer une hauteur,
- tracer des perpendiculaires, des tangentes, des médiatrices,
- décomposer un vecteur selon ses composantes horizontale et verticale.

Regardons maintenant de plus près ce qui caractérise un triangle rectangle.

On a 3 côtés et 2 angles aigus qui peuvent varier (le $3^{ème}$ angle mesure 90°).

Bien sûr, ces mesures dépendent les unes des autres, et ce qui nous intéresse c'est justement de préciser ces dépendances.

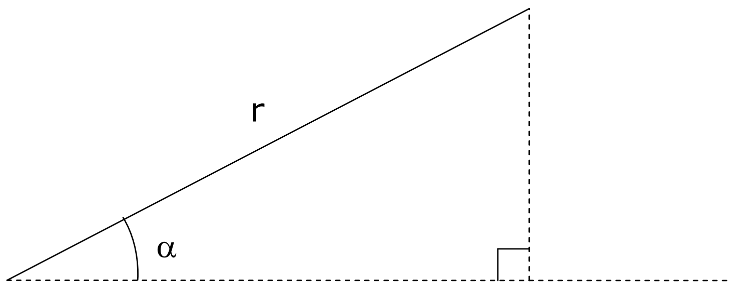


- Etant donné la longueur d'un côté et la mesure d'un angle aigu, on peut construire le triangle, c'est-à-dire trouver les 2 autres côtés et le second angle.
- Etant donné la longueur de deux des côtés, on peut construire le triangle, trouvant ainsi le $3^{ème}$ côté et les 2 angles aigus.

Détaillons la manière de construire les triangles rectangles. Cela nous aidera à bien saisir la relation très forte qu'il y a entre les longueurs et les angles.

Quand on connaît un côté et un angle d'un triangle rectangle, on connaît tout.

Premier cas : on connaît la longueur du plus grand côté (l'hypothénuse).

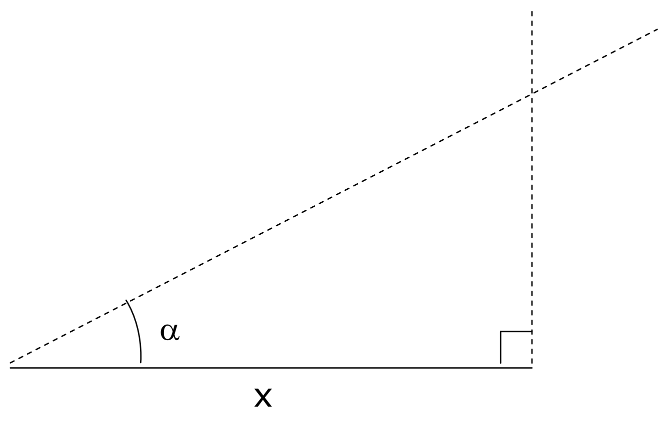


- On trace une droite ayant une pente α avec l'horizontale.

- On avance d'une longueur r sur cette droite : c'est l'hypothénuse.

- On projette l'extrémité de l'hypothénuse sur la droite horizontale pour obtenir la position du sommet où se situe l'angle droit.

Deuxième cas : on connaît la longueur du petit côté touchant l'angle.



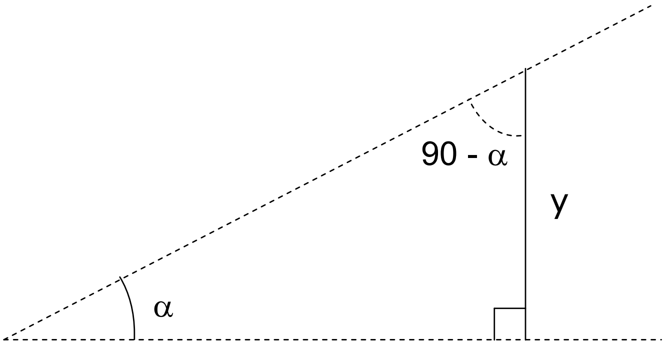
- On trace un segment horizontal de longueur x.

- On trace une droite ayant une pente α avec l'horizontale.

- On trace la droite verticale passant par l'extrémité du petit côté.

- L'intersection des droites donne le troisième sommet.

Troisième cas : on connaît la longueur du petit côté opposé à l'angle.



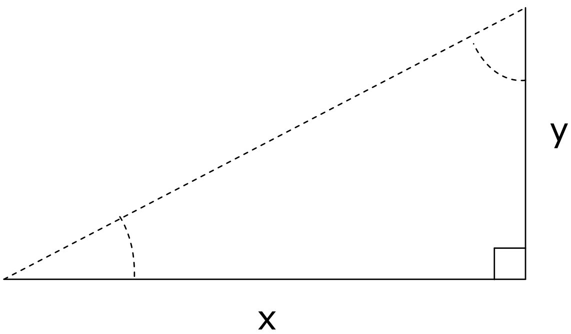
- On calcule 90° - α, et cela donne l'angle aigu touchant le côté de longueur y.

- On se ramène alors au cas précédent.

Passons maintenant à la deuxième configuration possible :

Quand on connaît deux côtés, on connaît tout.

Premier cas : on connaît les deux petits côtés.

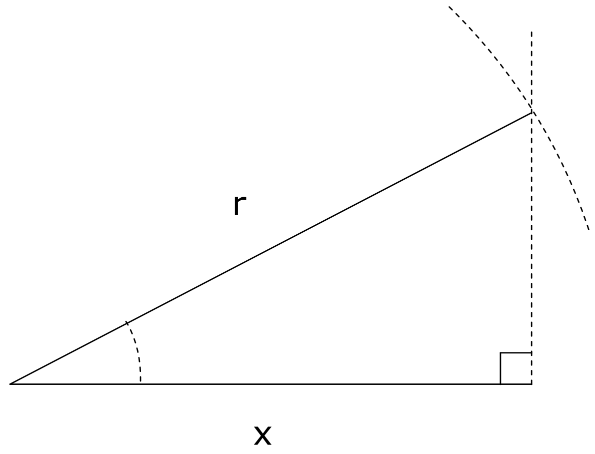


- On trace un segment de longueur x.

- On trace un segment vertical de longueur y, à l'extrémité de x.

- On joint les deux extrémités pour fermer le triangle.

Deuxième et troisième cas : on connaît l'hypothénus et un petit côté



- On trace un segment horizontal de longueur x.

- On trace la verticale passant par l'extrémité droite de ce petit côté.

- On trace un cercle de rayon r centré sur l'extrémité gauche de ce petit côté.

- Le point d'intersection donne le troisième sommet du triangle.

Pour bien se rendre compte qu'on a traité tous les cas, passons par la généralisation aux triangles quelconques. Pour caractériser un triangle, il faut toujours 3 valeurs :

- OU: trois longueurs
- OU: deux longueurs, et un angle
- OU: une longueur, et deux angles

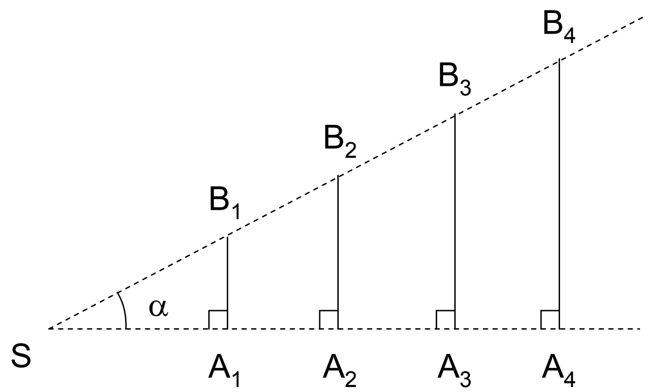
(connaître trois angles ne sert à rien, puisque lorsqu'on connaît deux angles α et β, on connaît le troisième qui vaut 180° - α - β)

Lorsqu'on sait que le triangle est rectangle, on connaît un des angles (90°), donc on a fait toutes les constructions possibles avec :

- OU: 2 longueurs
- OU: 1 longueur et 1 angle

Maintenant que l'on a montré comment les angles et les longueurs dépendent les uns des autres, on va quantifier les relations qui relient ces valeurs.

Pour commencer, fixons un angle α, et considérons plusieurs triangles rectangles ayant tous cet angle là. On les dessine surperposés, de sorte qu'ils partagent tous un sommet S, où se trouve l'angle α.



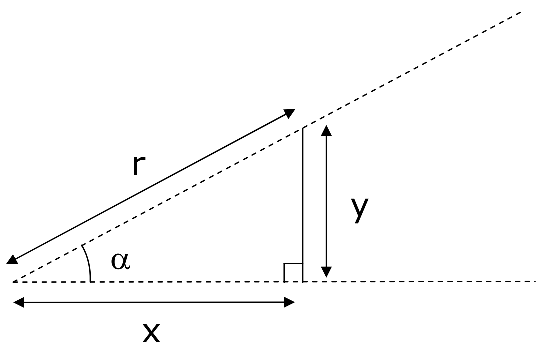
On a dessiné 4 triangles rectangles en S : A_1B_1S, A_2B_2S, A_3B_3S, et A_4B_4S.

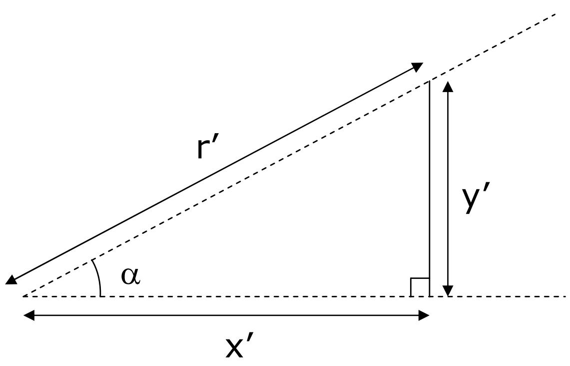
Le théorème de Thalès donne des conservations de rapport de longueurs :

pour tous indices i et k : $A_iB_i / A_kB_k = SB_i / SB_k = SA_i / SA_k$

Ce résultat est détaillé à la page suivante.

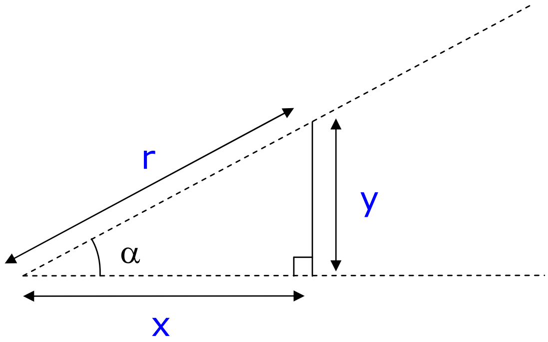
Voici deux triangles partageant le même angle α :





On a les relations suivantes : $x / r = x' / r'$ et $y / r = y' / r'$, et aussi $x / y = x' / y'$.

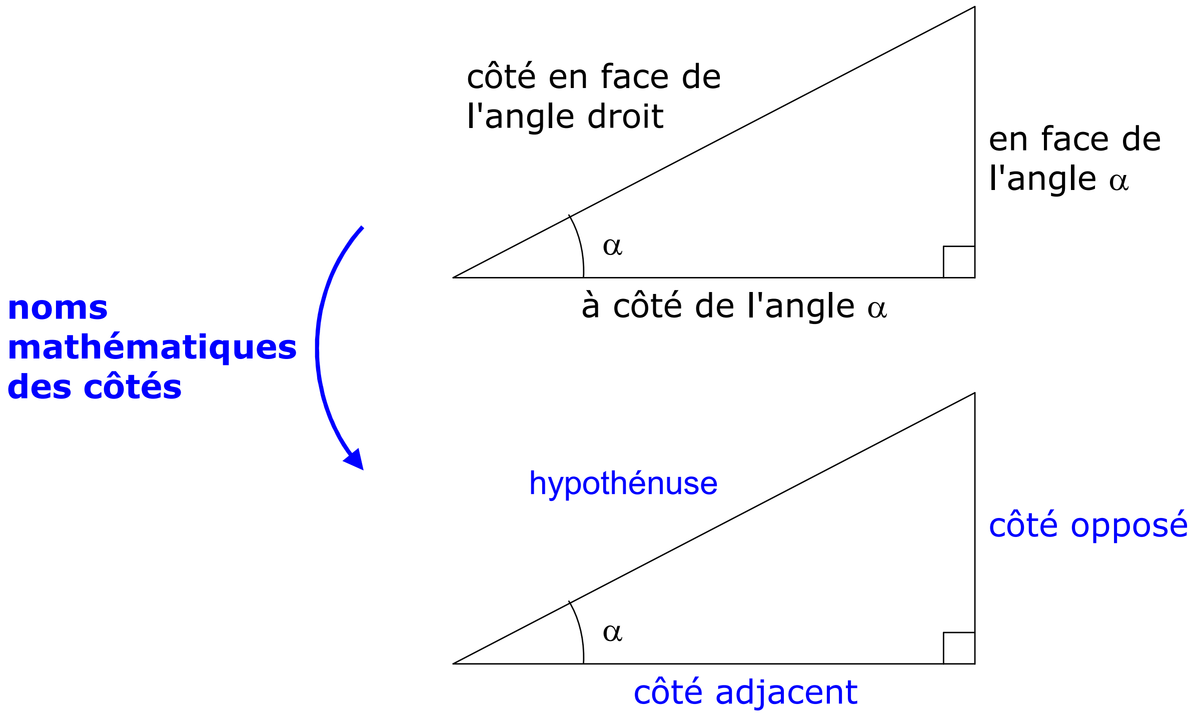
Une autre manière de justifier ces égalités est de dire que pour passer d'un dessin à l'autre, on multiplie toutes les longueurs par une même constante k, de sorte qu'on a alors : $x' = k*x$, $y' = k*y$, et $z' = k*z$.



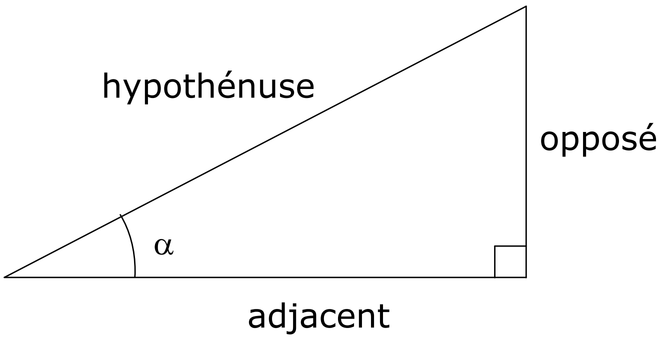
L’idée du calcul trigonométrique est de dire que les valeurs des rapports x/r, y/r et y/x ne dépendent que de l’angle α, c’est-à-dire sont fonctions de l’angle α.

- On appelle cosinus la fonction qui à α associe la valeur de x / r (cette valeur est la même pour tous les triangles rectangles où α est l’angle entre les côtés x et r).
- On appelle sinus la fonction qui à α associe la valeur de y / r.
- On appelle tangente la fonction qui à α associe la valeur de y / x.

Le côté qui touche l'angle auquel on s'intéresse s'appelle le côté adjacent.
Le côté qui est en face de l'angle s'appelle le côté opposé.
Le côté en face de l'angle droit s'appelle l'hypothénuse du triangle rectangle.



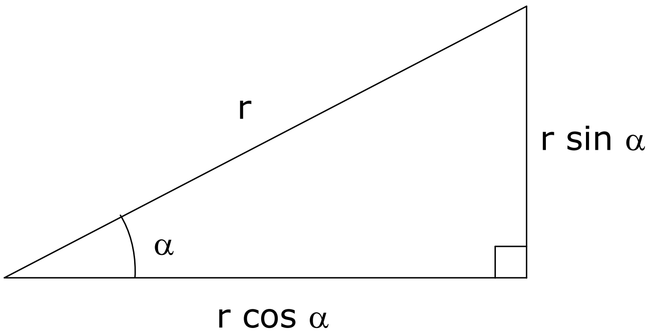
Commençons par nous intéresser au cosinus (noté cos) et au sinus (noté sin).



$$\cos \alpha = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypothénuse}}$$

$$\sin \alpha = \frac{\text{opposé}}{\text{hypothénuse}}$$

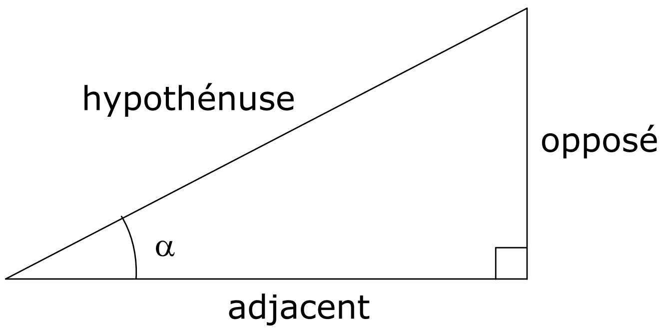
Lorsqu'on connaît l'angle et l'hypothénuse, on peut facilement obtenir les petits côtés.



adjacent = hypothénuse * cos α

opposé = hypothénuse * sin α

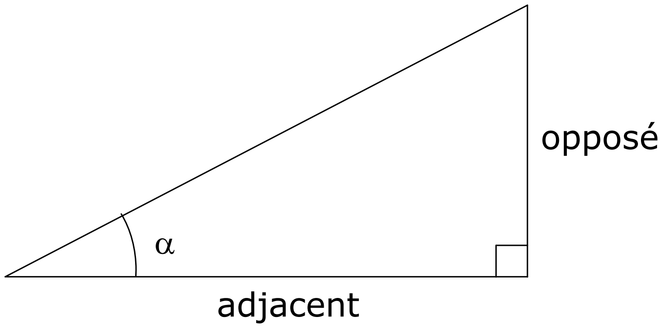
Lorsqu'on connaît l'angle et un petit côté, on peut facilement récupérer l'hypothénuse.



$$\cos \alpha = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypothénuse}} \quad \Rightarrow \quad \text{hypothénuse} = \frac{\text{adjacent}}{\cos \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{\text{opposé}}{\text{hypothénuse}} \quad \Rightarrow \quad \text{hypothénuse} = \frac{\text{opposé}}{\sin \alpha}$$

Il nous manque plus qu'une relation directe entre les deux petits cotés.



Pour cela on définit la tangente (que l'on note tan) comme étant le rapport du sinus et du cosinus, ce qui nous permet de déduire une relation simple entre les deux petits côtés :

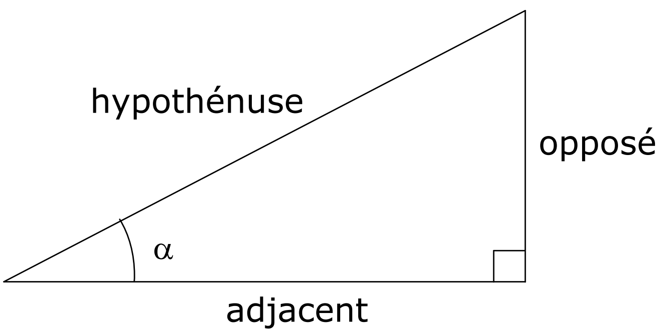
$$\left.\begin{array}{l} \sin\alpha = \dfrac{\text{opposé}}{\text{hypothénuse}} \\[2ex] \cos\alpha = \dfrac{\text{adjacent}}{\text{hypothénuse}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

(on divise les deux égalités terme à terme)

A propos des valeurs du sinus, du cosinus, et de la tangente.

Dans un triangle rectangle, la somme des deux petits angles fait 90°, et par conséquent :

$0 <= \alpha <= 90°$



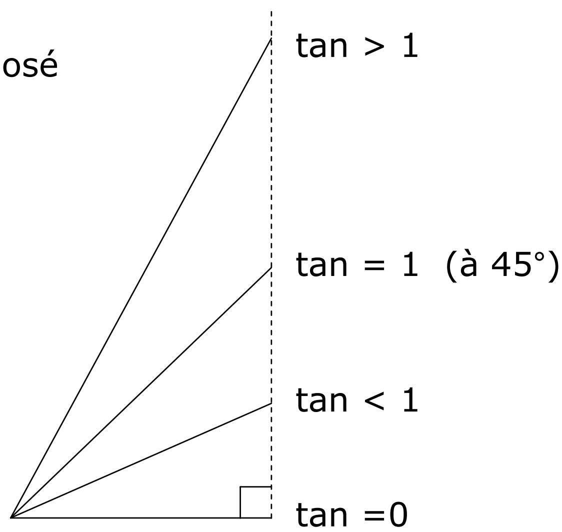
Il n'y a aucune contrainte sur les deux petits côtés l'un par rapport à l'autre, d'où :

$0 <= \tan\alpha < +oo$

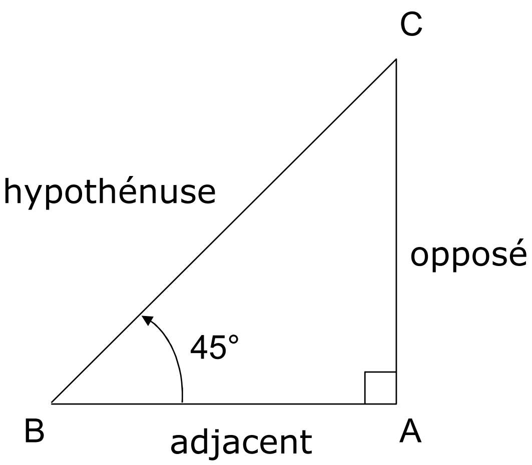
Dans un triangle rectangle, l'hypothénuse est plus grand que les deux autres côtés, d'où :

$0 <= \cos\alpha <= 1$

$0 <= \sin\alpha <= 1$



Valeurs trigonométriques dans le triangle rectangle isocèle (AB = AC) :



D'après le théorème de Pythagore :

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

Comme AB = AC, on en déduit que :

$BC^2 = 2 * AB^2$

D'où AB = AC = BC / $\sqrt{2}$

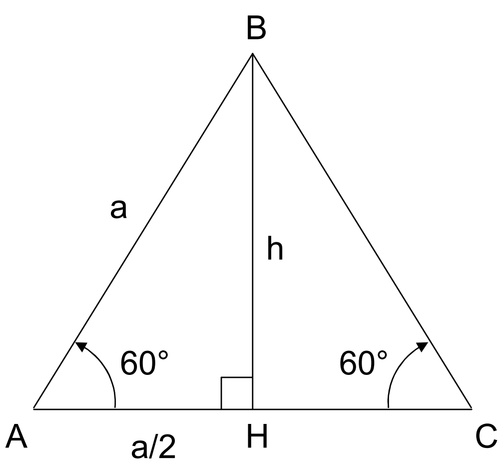
On obtient alors :

$\cos 45° = AB / BC = 1 / \sqrt{2}$

$\sin 45° = AC / BC = 1 / \sqrt{2}$

$\tan 45° = AC / AB = 1$

Valeurs trigonométriques dans le demi triangle isocèle (30° et 60°) :



On note "a" le coté et "h" la hauteur.

D'après Pythagore dans ABH :

$a^2 = (a/2)^2 + h^2$

D'où $h^2 = (3 / 4) * a^2$

Puis $h = (\sqrt{3} / 2) * a$

On obtient alors :

$\cos 60° = \sin 30° = AH / AB = a / (a/2) = 1 / 2$

$\sin 60° = \cos 60° = BH / AB = \sqrt{3} / 2$

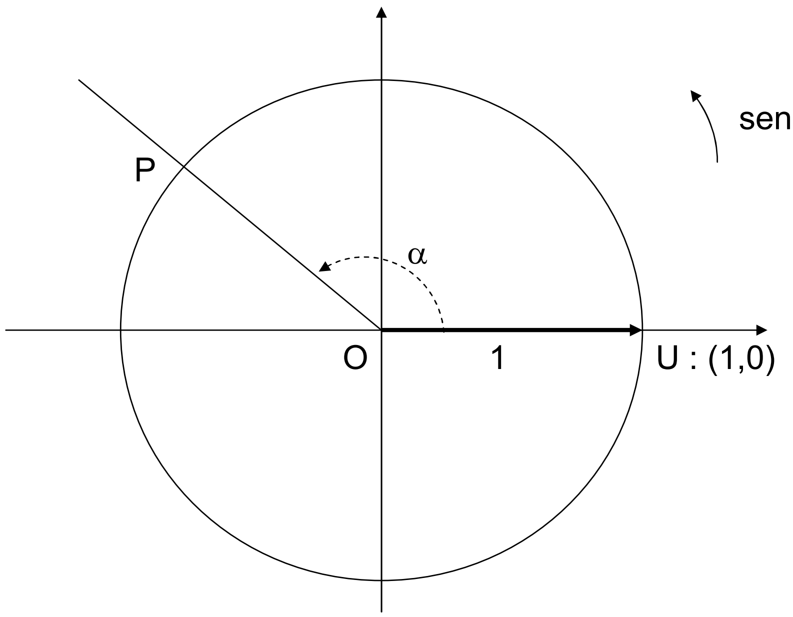
2 Trigonométrie

On va commencer par définir le cercle trigonométrique, puis les angles en radians. Le cercle trigonométrique est un outil visuel extrêmement puissant : on peut lire dessus à peu près toutes les formules de trigonométrie.

C’est donc un élément incontournable de la géométrie. On ne montrera pas tous les résultats que l’on peut lire sur ce cercle (il y en a vraiment beaucoup), on se contentera de lire le cosinus, le sinus, et la tangente, qui nous intéressent dans l’immédiat.

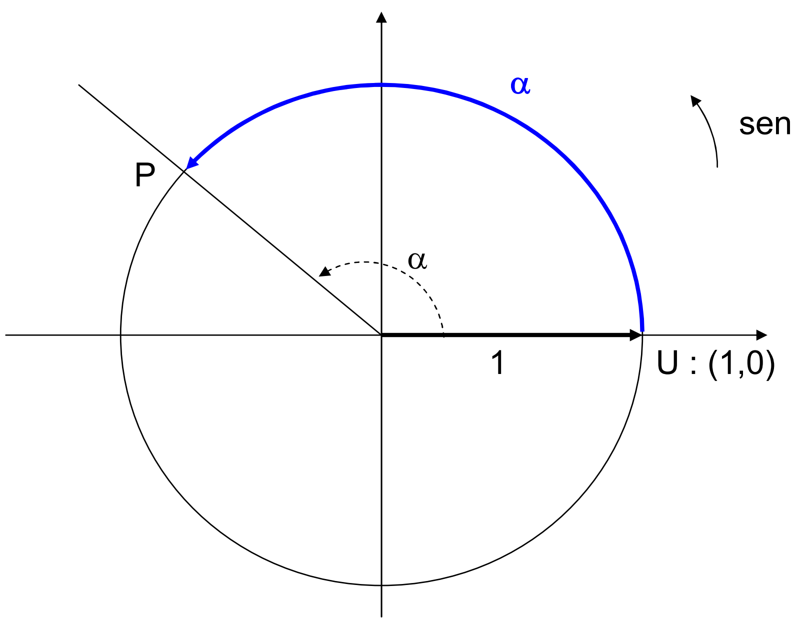
Le cercle trigonométrique, c'est :

- un cercle centré sur l'origine [au point (0,0)] et de rayon 1 (cercle unitaire)
- on tourne dessus dans le sens trigonométrique (inverse des aiguilles de la montre)
- le point de départ est situé sur l'extrémité droite du cercle, donc au point (1,0)



P est le point du cercle tel que l'angle orienté UOP mesure exactement α.

On va maintenant définir les angles en radians. Il s'agit juste de donner une unité spéciale, qui permettera de dire que la mesure d'un angle α vaut exactement la longueur du parcours le long du cercle pour aller de U à P (en bleu).



On identifie ainsi la mesure d'un angle à la longueur du trajet sur le cercle unitaire.

Pour définir les radians, il faut donc fournir le coefficient de proportionnalité permettant de convertir les angles en degré. Pour cela, on regarde combien mesure un tour entier, correspondant à un angle de 360° :

Pour un cercle de rayon R, le périmètre mesure 2*π*R.

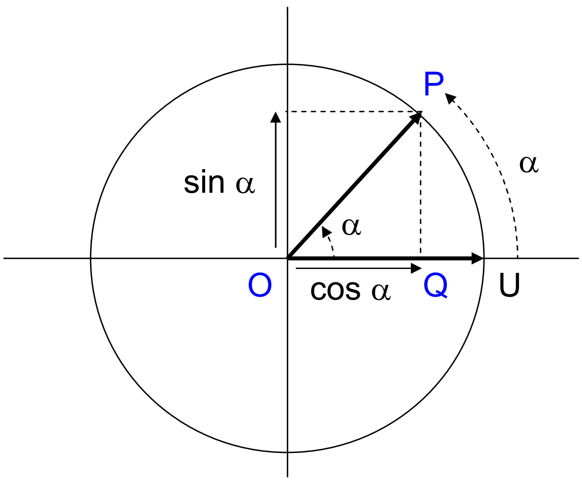
Pour le cercle trigonométrique, comme R=1, le périmètre mesure 2π.

Un angle de 360° mesure donc 2π radians.

Ensuite, on utilise le tableau de proportionnalité suivant :

Tour complet	360°	2 π
Demi tour	180°	π
Angle quelconque	α	**α * π / 180**

Regardons maintenant comment lire la valeur du cosinus ou du sinus d'un angle à l'aide d'une règle sur le cercle trigonométrique. Pour cela, on place sur le cercle le point P correspondant à l'angle α (de sorte que UOP mesure α).



Le résultat remarquablement puissant est que le point P a pour coordonnées (cos α, sin α)

En effet, par définition du cosinus dans le triangle OPQ :

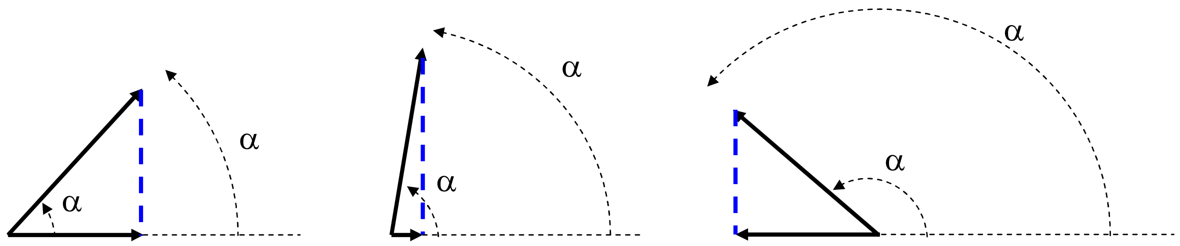
cos α = OQ / OP

Or OP mesure 1 (rayon du cercle), et il reste : cos α = OQ.

Même raisonnement pour le sinus.

Pour l’instant, l’angle α est toujours compris entre 0 et 90°, puisque dans un triangle rectangle, l’angle droit prend 90° du total des trois angles qui vaut 180°, et donc les deux autres angles sont forcément aigus.

Que se passe-t-il s’il on essaye d’ "ouvrir" un triangle rectangle au delà de 90° ?

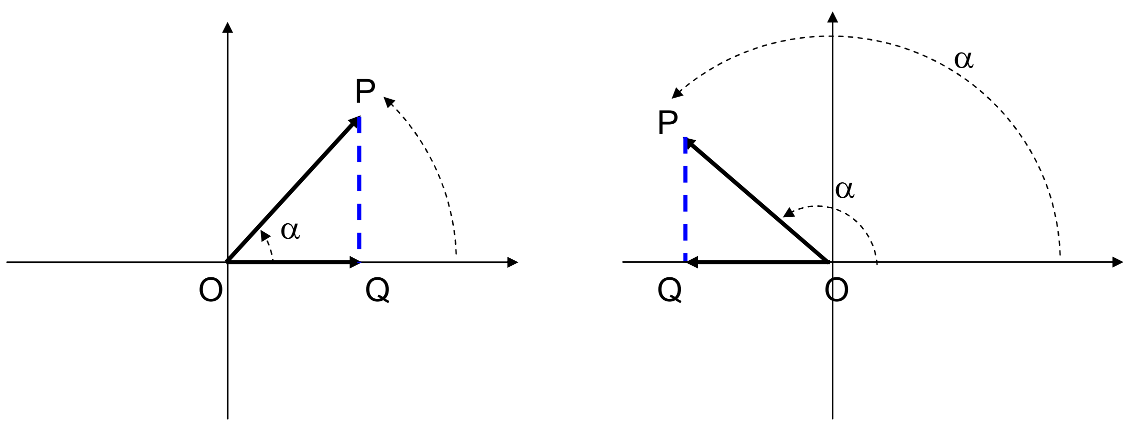


Lorsque l’angle α approche des 90° le triangle s'applatit.

À 90°, il est plat : deux côtés sont confondus, et le troisième se réduit à un point.

Au delà de 90°, le triangle se "retourne". L'arc dessiné correspondant à l'angle α se retrouve alors à l'extérieur du triangle.

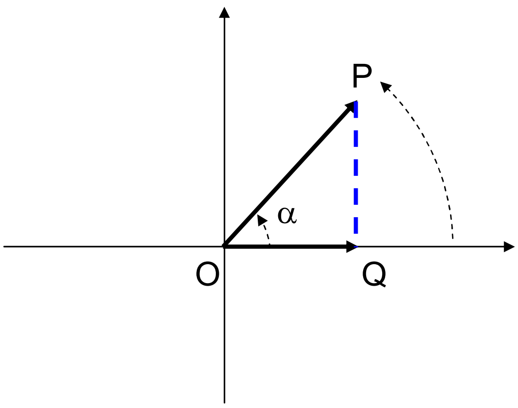
Pour définir le cosinus dans un tel triangle, il faut passer au longueurs orientées.

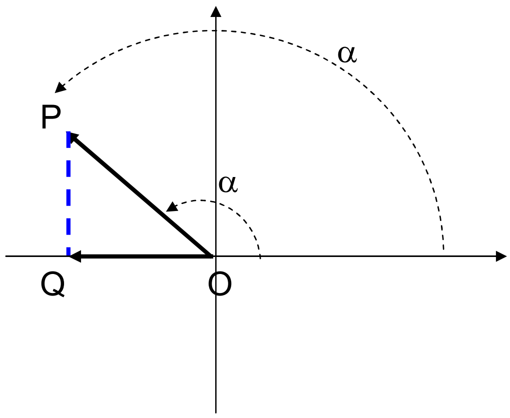


Sur le dessin de gauche,
OQ est une distance orientée positive,
OP est une distance non orientée,
cos α = OQ / OP est donc positif.

Sur le dessin de droite,
OQ est une distance orientée négative,
OP est une distance non orientée,
cos α = OQ / OP est donc négatif.

Pour le sinus, il n'y a pas de changement, car QP reste une distance positive :





Sur les deux dessins,

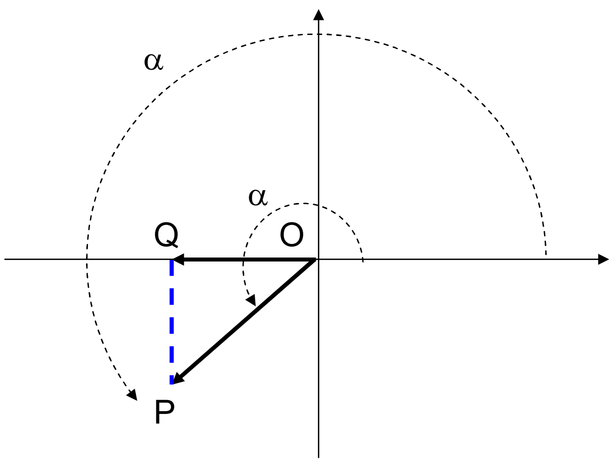
QP est une distance orientée positive,

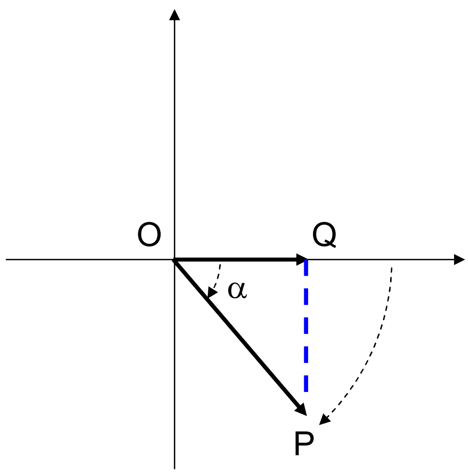
OP est une distance non orientée,

sin α = QP / OP est donc positif.

Et que se passe-t-il maintenant si on l'essaie d'ouvrir l'angle α au delà de 180° ?

Et si l'on essaie de le fermer en-dessous de 0° ?





OQ est une distance orientée négative,

QP est une distance orientée négative,

OP est une distance non orientée,

cos α < 0 et sin α < 0

OQ est une distance orientée positive,

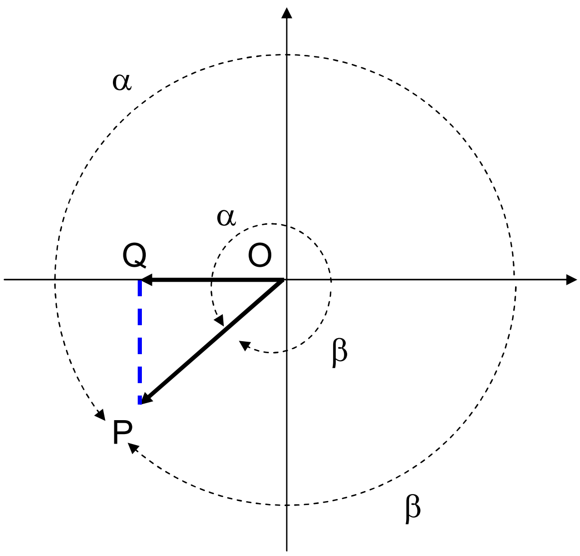
QP est une distance orientée négative,

OP est une distance non orientée,

cos α > 0 et sin α < 0

Pour chaque angle, on a donc deux manières de le mesurer.

Soit comme un angle positif, soit comme un angle négatif.



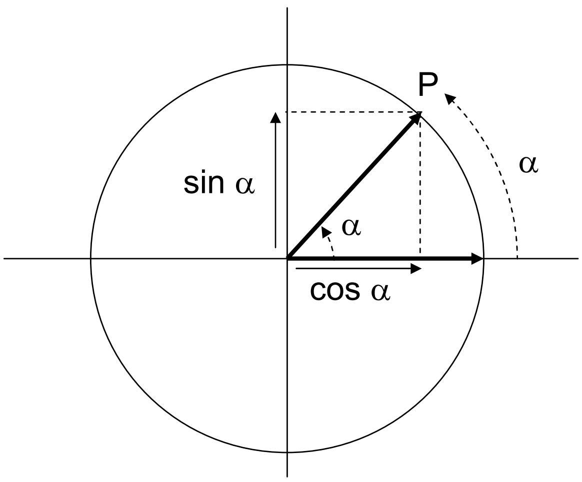
Ainsi α = 220° et β = -140° représentent tous les deux le même angle.

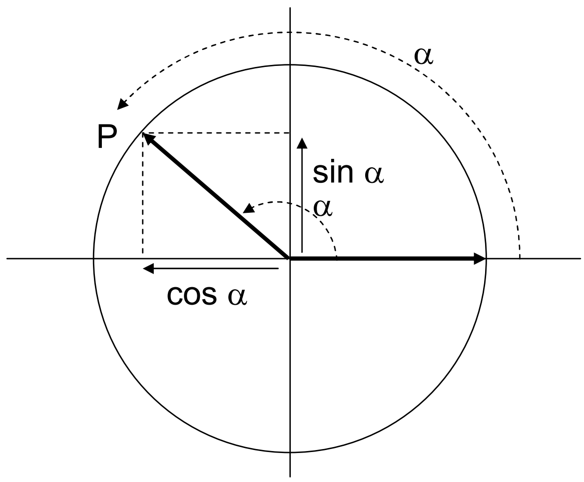
Plus généralement, tous les angles qui diffèrent d'un multiple de 360° représentent le même angle.

Cela correspond à une différence d'un nombre entier de tours autour du cercle.

Le résultat de la lecture du sinus et du cosinus reste valable quelle que soit la position de P sur le cercle :

Le point P a pour coordonnées ($\cos \alpha$, $\sin \alpha$)

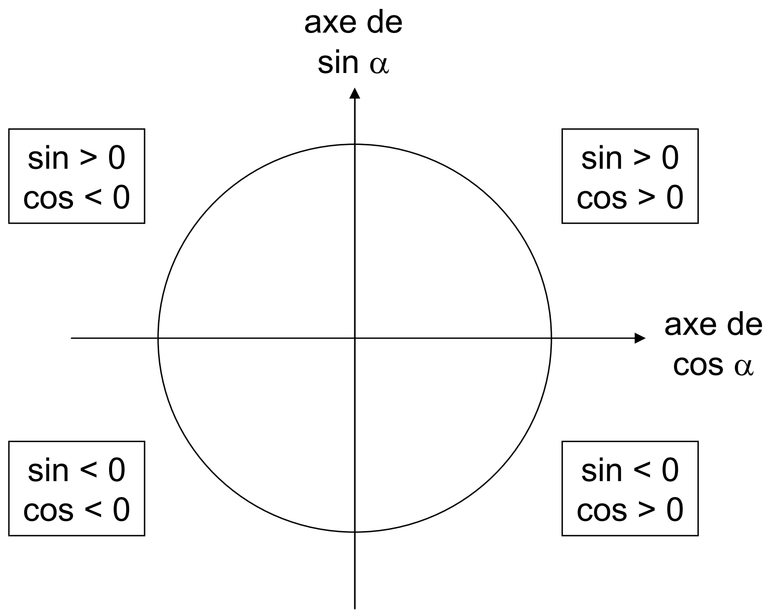




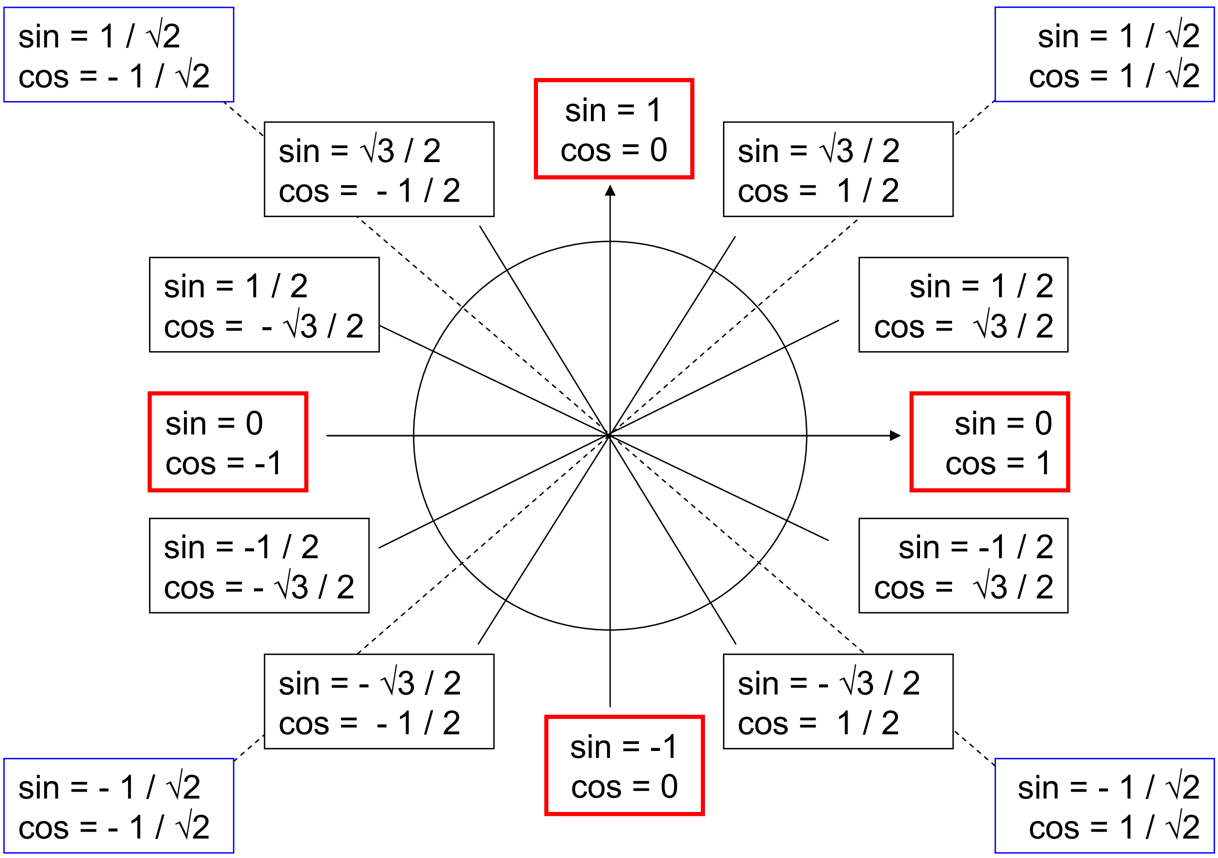
Le cosinus est ici positif.

Lorsqu'on a agrandi l'angle, on a dépassé la verticale, endroit où le cosinus s'annule, et puis on a continué, si bien que le cosinus est maintenant négatif.

Résumons les signes du cosinus et du sinus sur les quatre quartiers du cercle :



Résumons aussi les valeurs particulières du cosinus et du sinus :



On a montré comment lire le cosinus et le sinus sur le cercle trigonométrique, regardons maintenant ce qu'il en est de la tangente, qui on le rappelle vaut "en face" / "à côté" , ou encore "sinus" / "cosinus".

Pour commencer, on trace une droite verticale passant par U, le point (1,0). Cette droite est donc tangente au cercle.

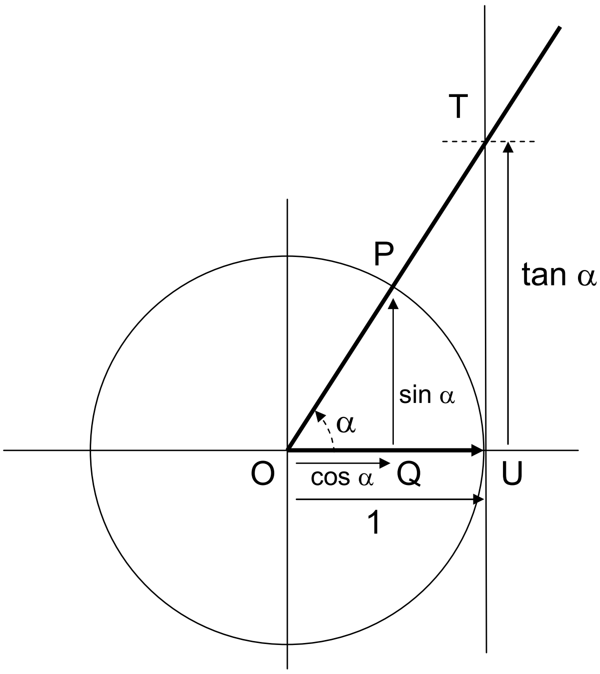
Pour lire la valeur de "tan α", on place le point P correspondant à cet angle α sur le cercle, puis on prolonge la droite (OP) jusqu'à trouver un point d'intersection avec la tangente verticale que l'on vient de tracer.

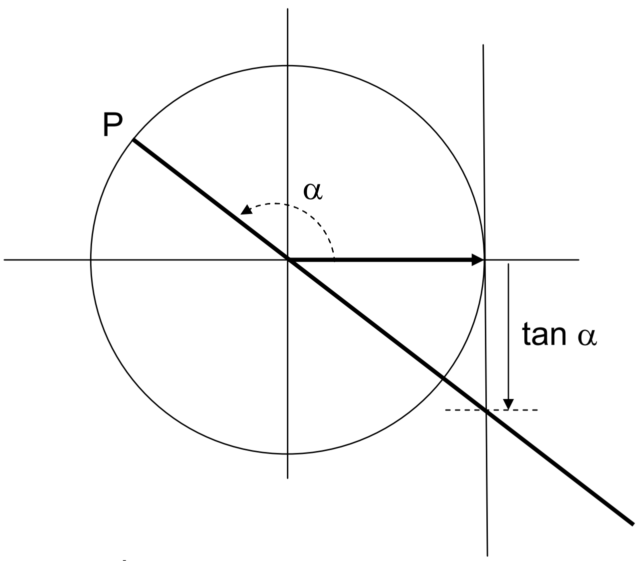
L'ordonnée du point d'intersection de (OP) avec cette tangente donne "tan α".

Remarque : si P a une abscisse négative (sur la moitié droite du cercle), alors on prolonge la droite (OP) du côté de O, afin de rejoindre la tangente.

Lecture de la tangente sur le cercle trigonométrique :

prolonger la droite passant par P jusqu'à ce qu'elle rencontre la tangente verticale à gauche du cercle, et lire l'ordonnée du point d'intersection des deux droites.





Démo : le théorème de Thalès donne :

OQ / OU = PQ / TU (= OP / OT), d'où : $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$

2 Trigonométrie

1 Triangle rectangle

2 Cercle trigonométrique

3 Trionométrie réciproque

À partir d'un angle α, on peut calculer son cosinus, son sinus, ou sa tangente, afin de calculer la longueur de certains côtés du triangle.

Réciproquement, on peut à partir des longueurs de certains côtés calculer la valeur du cosinus, du sinus, ou de la tangente de l'angle α.

La "trigonométrie réciproque" permet de retrouver la valeur de **l'angle α à partir** :

- de son **cosinus** : c'est la fonction **arccos** (lire "arc cosinus")
- de son **sinus** : c'est la fonction **arcsin** (lire "arc sinus")
- de sa **tangente** : c'est la fonction **arctan** (lire "arc tangente")

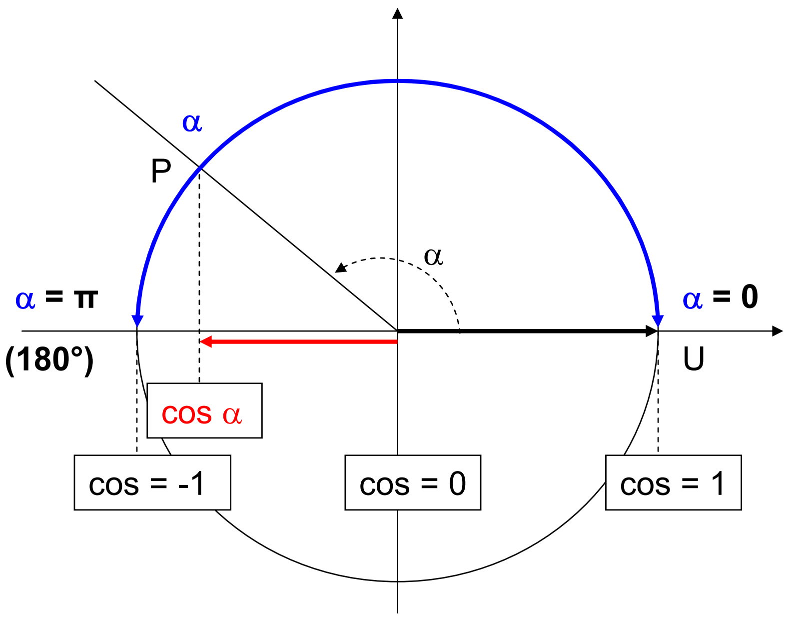
Remarques : en anglais, on utilise **acos**, **asin**, et **atan**,
et sur les calculettes on trouve la notation $\mathbf{cos^{-1}}$, $\mathbf{sin^{-1}}$, $\mathbf{tan^{-1}}$

Seulement ce n'est pas si simple. On a expliqué qu'il y avait plusieurs mesures possibles pour un même angle. Par exemple -140°, +220°, et +580° représentent le même angle, puisque ces mesures diffèrent d'un nombre entier de tous complets du cercles (un multiple de 360°).

De plus, des angles différents peuvent avoir le même cosinus ou sinus ou tangente. Par exemple cos 60° = cos -60° = 1/2, et sin 60° = sin 120° = √3 / 2.

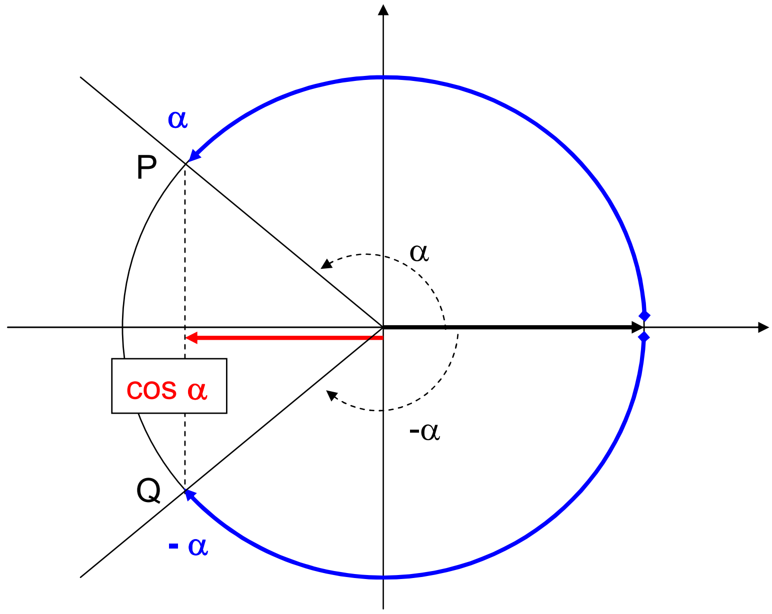
Fixons une valeur d'un cosinus. On a expliqué qu'il y avait plusieurs angles, et encore plus de mesures d'angles qui partagent cette valeur du cosinus. La fonction **arccos** doit retrourner une de ces valeurs. Tout le problème est de savoir laquelle on veut retourner. Pour cela, il y a une convention, que l'on va détailler.

Commençons par la fonction **arccos**.



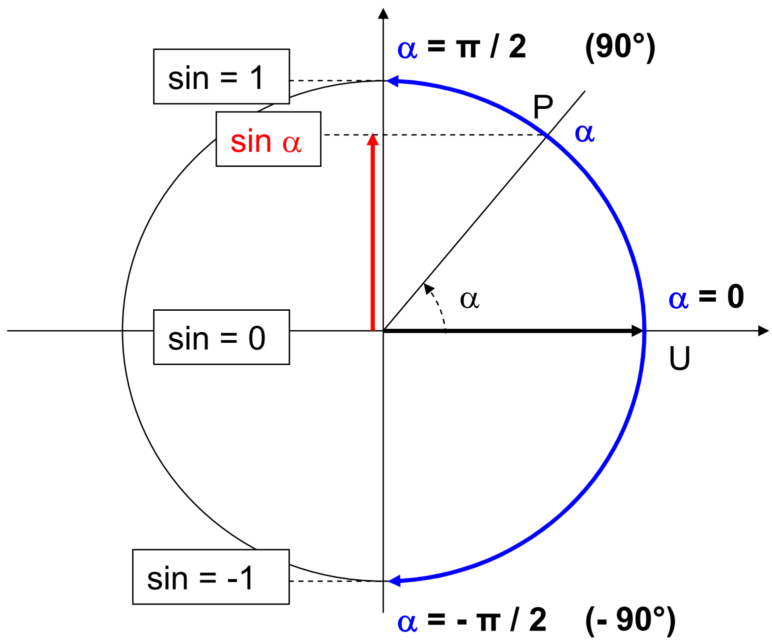
La fonction **arccos** prend en argument une valeur de cosinus, entre -1 et +1, et retourne un angle compris entre 0 et π radians.

Mais attention ! Pour une valeur donnée de cosinus, il y a en général deux angles qui partagent cette valeur de cosinus : ils sont symétriques par rapport à l'axe horizontale..



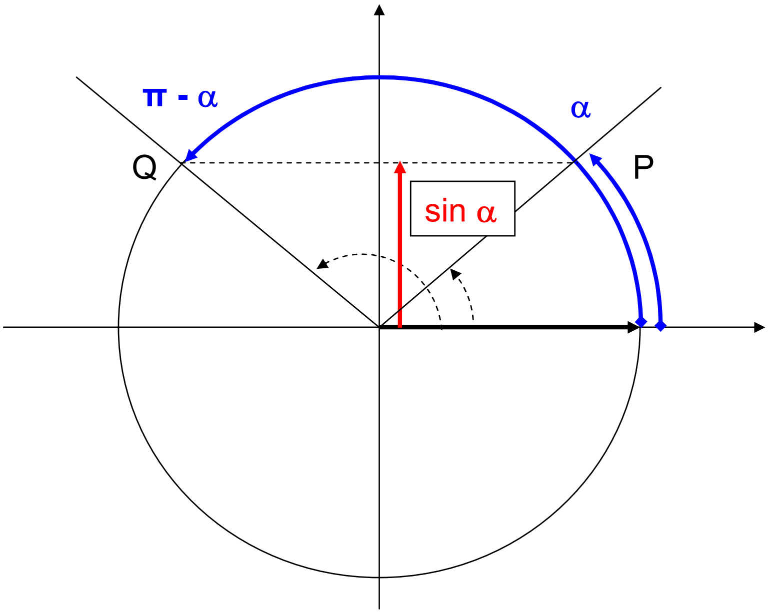
Les deux angles dont le cosinus vaut x sont donc **arcos x** et **– arccos x**.

Passons maintenant à la fonction **arcsin**.



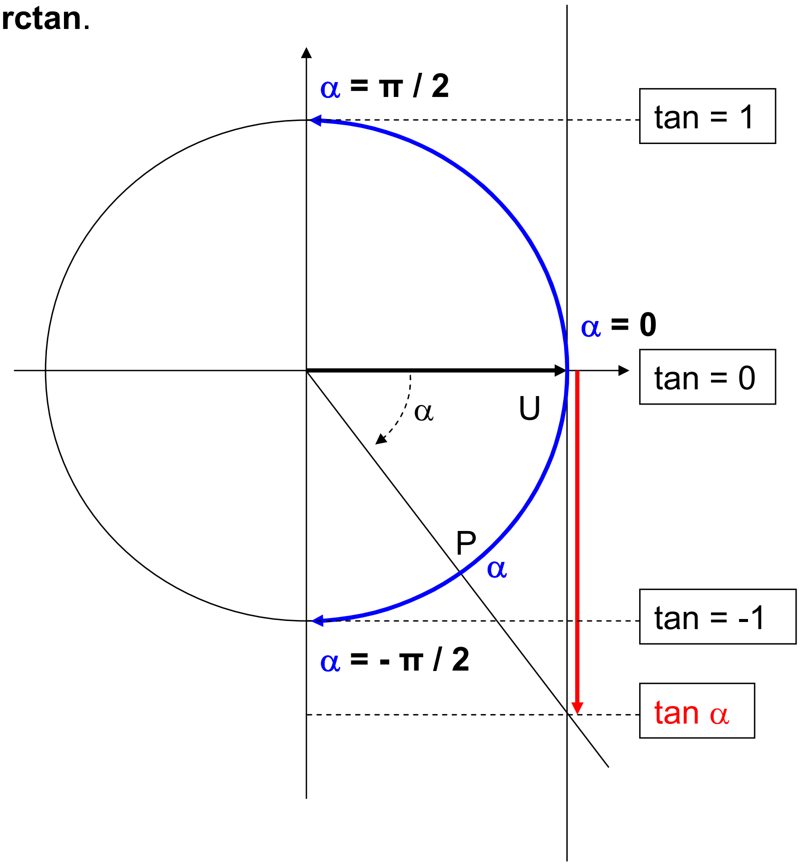
La fonction **arccos** prend en argument une valeur de sinus, entre -1 et +1, et retourne un angle compris entre - π / 2 et + π / 2 radians.

Pour une valeur donnée de sinus, il y a en général deux angles qui partagent cette valeur de sinus : ils sont symétriques par rapport à l'axe vertical.



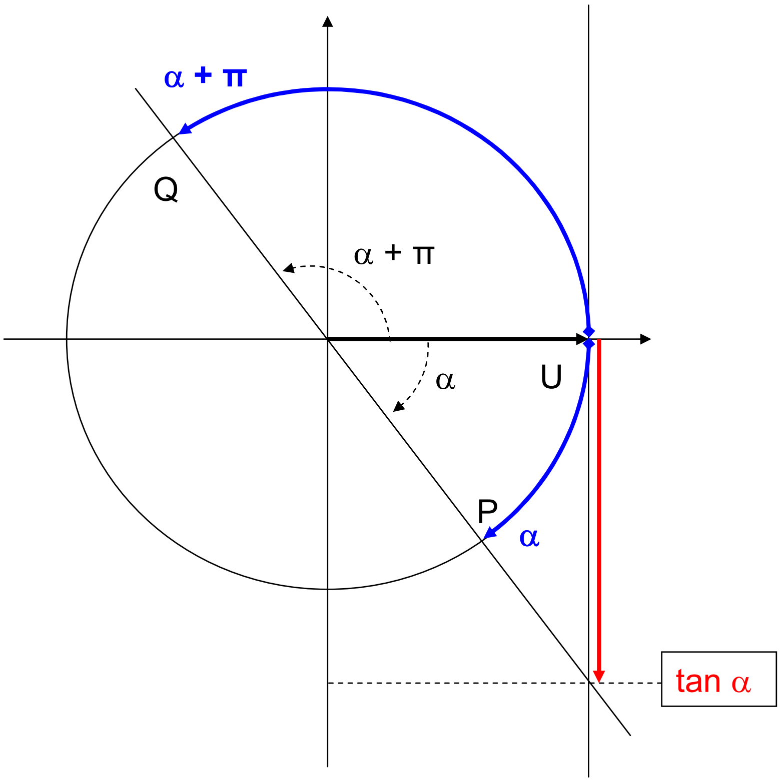
Les deux angles dont le sinus vaut x sont donc **arcsin x** et **π – arcsin x**.

Terminons par la fonction **arctan**.



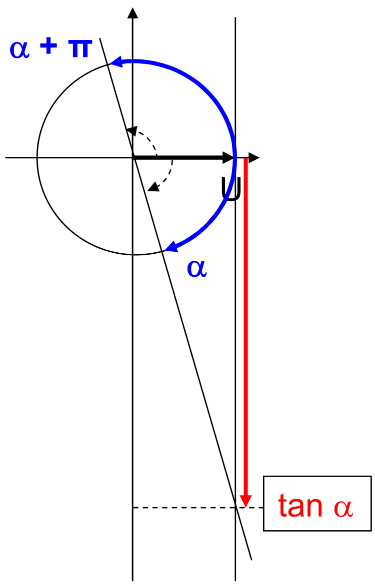
La fonction **arctan** prend en argument une valeur de tangente, entre - ∞ et +∞ (réelle quelconque), et retourne un angle compris entre - π / 2 et + π / 2 radians.

Pour une valeur donnée de tangente, il y a toujours deux angles qui partagent cette valeur de tangente : ils sont symétriques par rapport à l'origine.



Les deux angles dont la tangente vaut x sont donc **arctan x** et **π + arctan x**.

Petite remarque à propos des limites de la fonction tangente.



- Lorsque α est juste en-dessous de π / 2, tan α est presque à + ∞.
- La valeur de tan α est indéfinie en π / 2.
- Lorsque α est juste au-dessus de π / 2, tan α est presque à - ∞.

On peut traiter de manière symétrique la limite en π / 2.

En revanche, la fonction arctan est définie pour toute valeur réelle.

1 Géométrie vectorielle

2 Trigonométrie

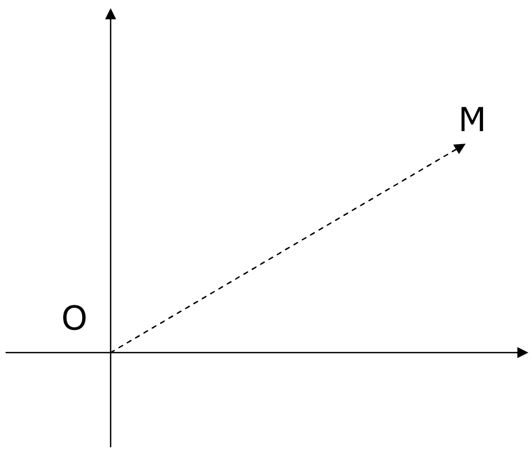
3 Calcul vectoriel

3 Calcul Vectoriel

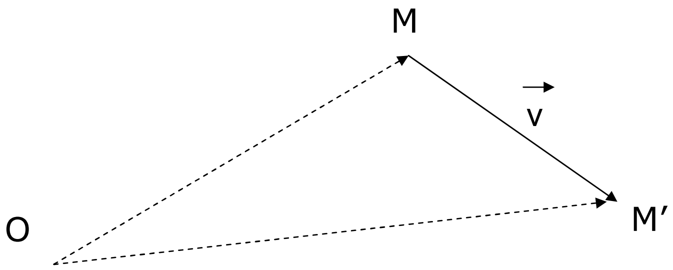
1 Droite Vectorielle

2 Produit Scalaire

On assimile les points du plan aux vecteurs les joignant depuis l'origine.



Ainsi le point M est identifié au vecteur $\overrightarrow{OM}$, que l'on note en abrégé : $\overrightarrow{M}$



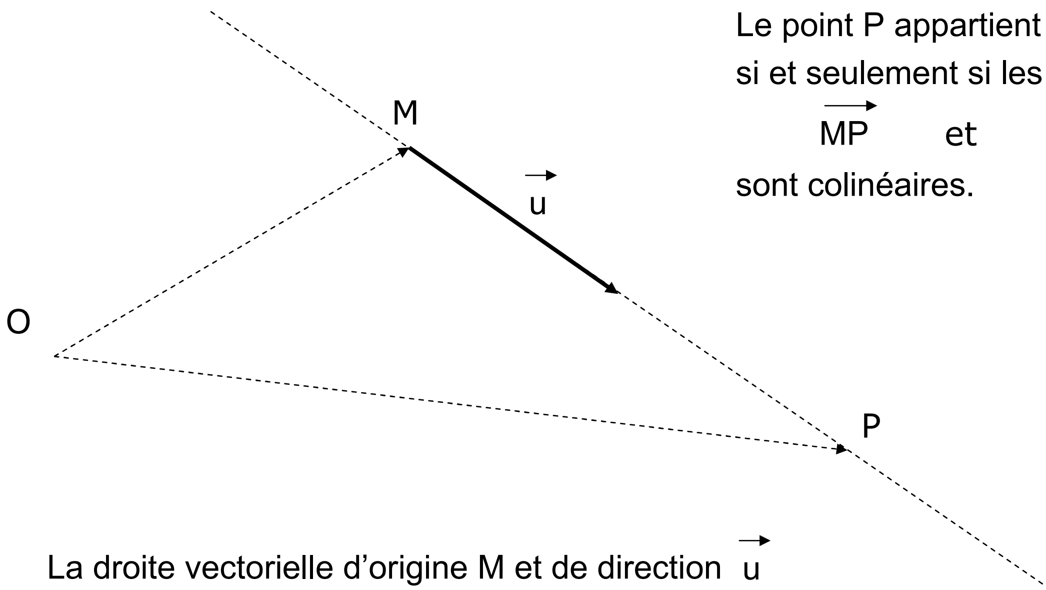
On peut alors ajouter un vecteur à un point M, cela donne un autre point M'.

Une droite vectorielle est une droite définie par un point appartenant à cette droite, et un vecteur donnant la direction de la droite.

Le point P appartient à la droite si et seulement si les vecteurs

$\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{u}$

sont colinéaires.



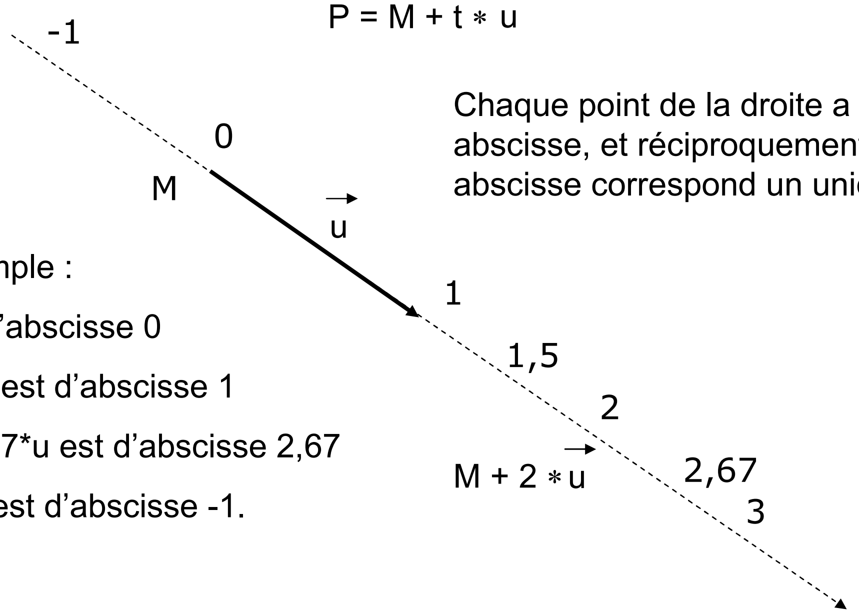
La droite vectorielle d'origine M et de direction $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points P de la forme :

$$P = M + t * \overrightarrow{u}$$

L’abscisse d’un point P sur une droite vectorielle est la valeur de t telle que :

$$P = M + t * \vec{u}$$

Chaque point de la droite a une abscisse, et réciproquement à chaque abscisse correspond un unique point.



Par exemple :

- M est d’abscisse 0
- M + u est d’abscisse 1
- M + 2,67*u est d’abscisse 2,67
- M – u est d’abscisse -1.

Lorsque le vecteur directeur est unitaire, l’abscisse correspond à la distance orientée entre l’origine de la droite et le point.

$$P = M + t * \vec{u} \quad \Rightarrow \quad \overline{MP} = t$$

3 Calcul Vectoriel

1 Droite Vectorielle

2 Produit Scalaire

Pour des raisons techniques, on se permettra d'utiliser la notation anglaise pour les vecteurs, en notant le nom du vecteur en gras et sans mettre de flèche au-dessus :

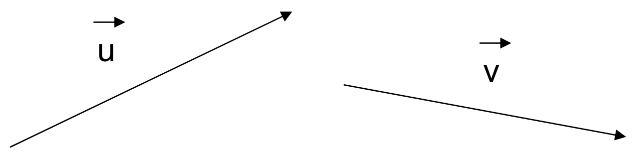
$$\mathbf{u}$$

à la place de

$$\vec{u}$$

Le produit scalaire est une opération sur les vecteurs incontournable en géométrie car elle permet de démontrer des résultats et d'effectuer des calculs très facilement. De plus, c'est un outil quasi-systématique : dès qu'on traduit un problème de géométrie en termes de produits scalaires, on est presque assuré d'arriver à un résultat. Ce n'est pas toujours la méthode la plus efficace, mais elle est presque toujours très satisfaisante.

Alors le produit scalaire, c'est quoi ? C'est une opération qui part de deux vecteurs et qui fabrique un nombre réel à partir d'eux. On note cette opération en écrivant les noms des vecteurs séparés par un point surélevé :



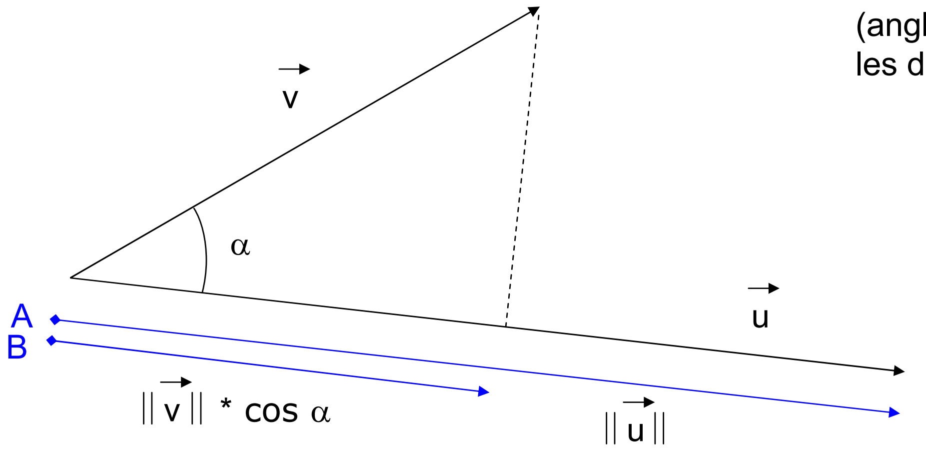
$$\vec{u} \cdot \vec{v}$$

Quelle est la formule qui permet de calculer un nombre réel à partir des coordonnées de chacun des deux vecteurs (ce qui fait 4 réels au total) ?
La valeur du produit scalaire dépend de la longueur de chacun des vecteurs, mais aussi de l'angle qu'ils forment entre eux.

On va montrer que le produit scalaire est égal au produit de la norme du premier vecteur fois la longueur orientée de la projection de l'autre vecteur sur le premier (on peut très bien intervertir les deux vecteurs, le résultat reste le même).

Définition du produit scalaire : $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| * ||\vec{v}|| * \underbrace{\cos(\vec{u}, \vec{v})}$

(angle α formé par les deux vecteurs)

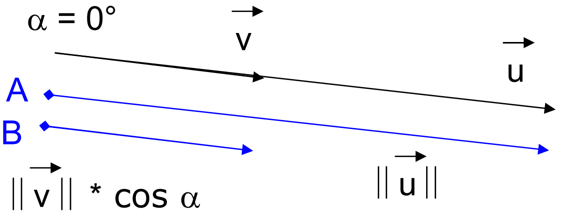


$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = A * B}$$

Deux cas particuliers : vecteurs colinéaires et orthogonaux.

u et **v** colinéaires

=> produit scalaire égal au produit des normes.



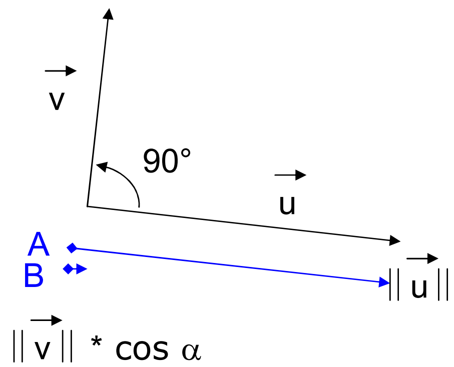
$\cos \alpha = \cos 0° = 1$

B $= ||\vec{v}||$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = A * B = ||\vec{u}|| * ||\vec{v}||$

u et **v** orthogonaux

=> produit scalaire nul.



$\cos \alpha = \cos 90° = 0$

B est de longueur nulle.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = A * B = 0$

Tout l'intérêt du produit scalaire, c'est qu'on peut tout calculer avec de manière extrêmement simple et puissante. Pour cela, 3 opérations de base :

1) La commutativité du produit scalaire : le produit scalaire entre **u** et **v** est égal au produit scalaire entre **v** et **u**. Cela s'écrit :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$$

2) La distributivité par un scalaire : si **u** et **v** sont deux vecteurs, et k un nombre réel, alors en multipliant la taille du vecteur **v** par k, on multiplie également la valeur de **u · v** par k. Cela s'écrit :

$$\mathbf{u} \cdot (k * \mathbf{v}) = k * (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$$

3) La distributivité sur l'addition. Si **u** est un vecteur et que **v** et **w** sont deux autres vecteurs, alors le produit scalaire entre **u** et la somme des vecteurs **v** et **w** vaut exactement la somme du produit scalaire entre **u** et **v** ainsi que du produit scalaire entre **u** et **w**. Cela s'écrit :

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$$

On va maintenant expliquer d'où viennent ces trois propriétés.

Commençons par la première : **u · v = v · u**

Cela provient directement de la définition que l'on a donné :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| * \|\vec{v}\| * \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Pour montrer ce que l'on veut, il suffit de prouver que cos (**u**,**v**) = cos (**v**,**u**).

Si l'on note α l'angle formé par les vecteurs **u** et **v**, on a

$$\cos(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \cos\alpha \quad \text{et} \quad \cos(\mathbf{v},\mathbf{u}) = \cos(-\alpha)$$

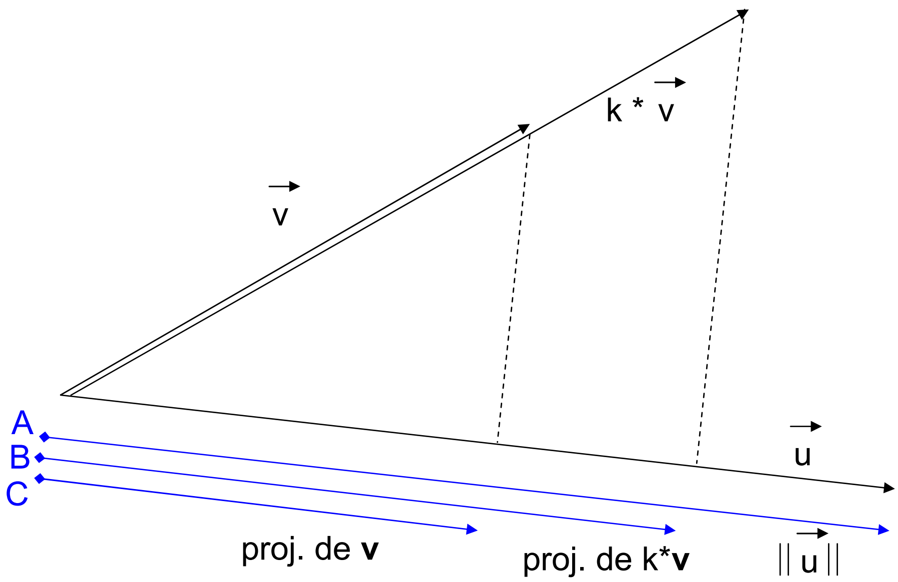
(puisque pour aller du second vecteur au premier, on tourne dans l'autre sens).

Le résultat $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$ se lit directement sur le cercle trigonométrique.

Pour les démonstrations des deux propriétés suivantes, on utilisera le fait que **u · v** vaut la norme de **u** fois la longueur orientée de la projection de **v** sur **u**.

Distributivité du produit scalaire sur la multiplication par un réel :

$$\mathbf{u} \cdot (k * \mathbf{v}) = k * (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$$

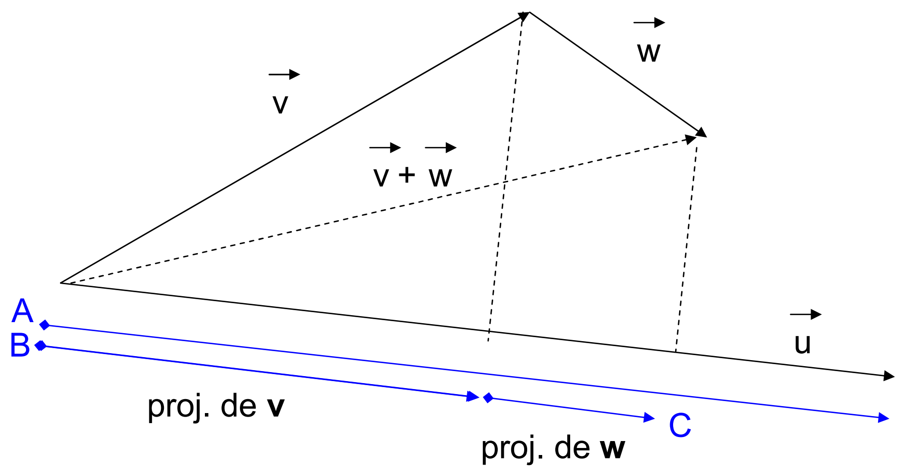


Par Thalès, B est k fois plus grand que C, donc

$\mathbf{u} \cdot (k * \mathbf{v})$ = A * B est k fois plus grand que A * C = $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

Distributivité du produit scalaire sur l'addition de vecteurs :

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$$



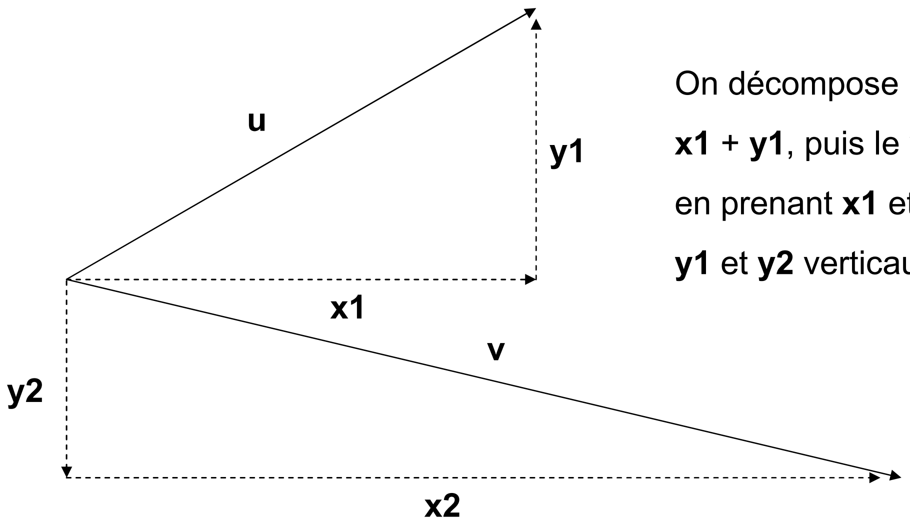
$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ = A * (B + C) = A * B + A * C = $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

Les trois propriétés que l'on a énoncés puis démontrés permettent de transformer le calcul d'un produit scalaire en celui d'autres produits scalaires. Mais pour obtenir une valeur réelle comme résultat, il faut disposer d'une autre formule, une formule qui retourne une valeur réelle.

Le résultat est d'une simplicité remarquable. Si l'on décompose les vecteurs **u** et **v** selon leurs coordonnées cartésiennes en ($\mathbf{u}_x$,$\mathbf{u}_y$) et ($\mathbf{v}_x$,$\mathbf{v}_y$), alors on obtient la formule du calcul du produit scalaire :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}_x * \mathbf{v}_x + \mathbf{u}_y * \mathbf{v}_y$$

Pour prouver ce résultat, on va décomposer **u** en la somme de deux vecteurs, l'un vertical et l'autre horizontal, et on fait de même pour **v**. Ensuite, on utilise la distributivité du produit scalaire par rapport à l'addition, et on élimine tous les termes nuls car produits scalaires de vecteurs orthogonaux. Cette démonstration est détaillée à la page suivante.



On décompose le vecteur **u** en **x1** + **y1**, puis le vecteur **v** en **x2** + **y2**, en prenant **x1** et **x2** horizontaux, et **y1** et **y2** verticaux.

On part de **u · v** = (**x1** + **y1**) **·** (**x2** + **y2**) et on développe le produit scalaire, ce qui donne quatres termes : (**x1 · x2**) + (**x1 · y2**) + (**y1 · x2**) + (**y1 · y2**)

x1 et **y2** ainsi que **x2** et **y1** sont orthogonaux, donc de produits scalaires nuls. Il reste alors : **x1 · x2** + **y1 · y2**. Les vecteurs **x1** et **x2** ainsi que **y1** et **y2** sont colinéaires, donc **x1 · x2** = x1 * x2 et **y1 · y2** = y1 * y2.

Au final, il reste : **u · v** = x1 * x2 + y1 * y2

Cas particulier du produit scalaire d’un vecteur avec lui même :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| * \|\vec{u}\| * \cos(\vec{u}, \vec{u}) = \|\vec{u}\|^2$$

Si u = (x,y), Alors **u · u** = $x^2 + y^2$

Cas particulier du signe moins dans un produit scalaire :

On peut sortir les moins des produits scalaires pour les amener en tête de l'expression. C'est en fait un simple cas particulier du produit par un scalaire, en prenant k = -1. En effet :

u · (-**v**) = **u** · ((-1) * **v**) = (-1) * **u** · **v** = - (**u** · **v**)

La valeur du produit scalaire est relativement "immatérielle" au départ.
On pourra plus tard donner une signification à cette valeur en terme d'aire orientée.

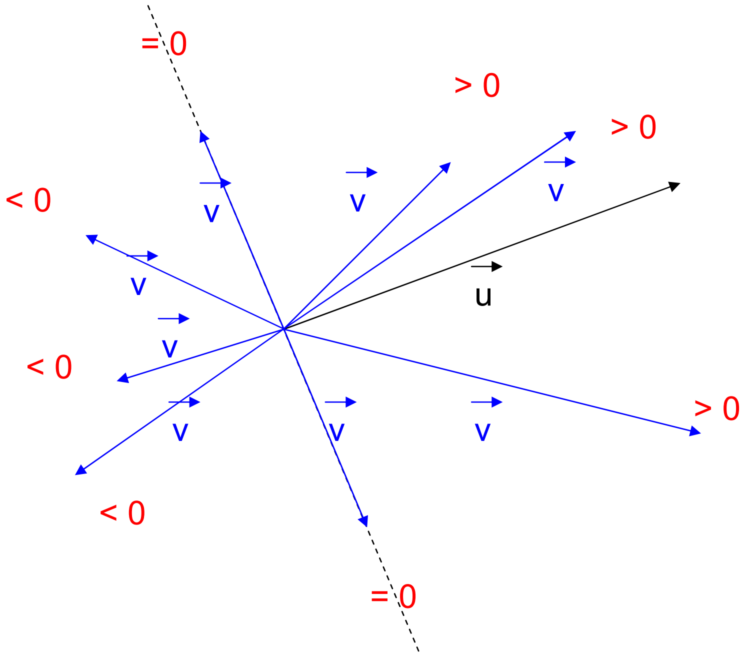
Pour l'instant, on peut commencer par interpréter le signe du produit scalaire.
Le signe donne en effet une indication simple et précise sur l'orientation des vecteurs l'un par rapport à l'autre. La page suivante détaille ce résultat.

Le signe du produit scalaire est :

> 0 si les vecteurs pointent du même côté

< 0 si les vecteurs pointent vers des côtés opposés

= 0 si les vecteurs sont orthogonaux



En bleu, le vecteur **v**

En rouge, le signe de **u** · **v**