CSC-4MI13 : Perles de programmation de structures de données et d'algorithmes

Flots de coût minimum

Bertrand Meyer

21 octobre 2024

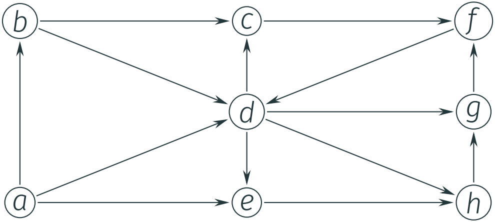
Motivations

Les b-flots

Définition

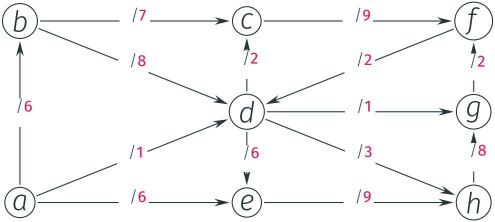
Soient $G = (V, E)$ un graphe orienté,

Exemple



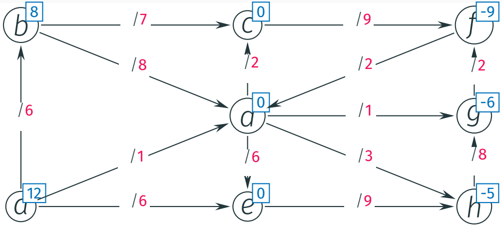
Définition
Soient $G = (V, E)$ un graphe orienté, $u : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une application appelée capacité,

Exemple



Définition
Soient $G = (V, E)$ un graphe orienté, $u : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une application appelée capacité, $b : V \to \mathbb{R}$ une application telle que $\sum_{v \in V} b(v) = 0$.

Exemple



Les b-flots

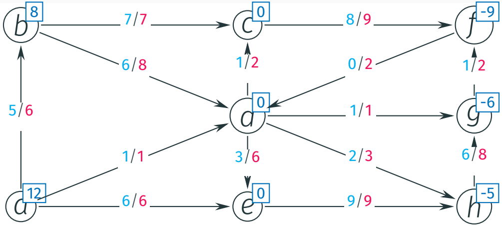
Définition

Soient $G = (V, E)$ un graphe orienté, $u : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une application appelée capacité, $b : V \to \mathbb{R}$ une application telle que $\sum_{v \in V} b(v) = 0$. On appelle b-flot toute fonction $f : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que

$$\forall e \in E, \quad 0 \leq f(e) \leq u(e)$$

$$\forall v \in V, \qquad \sum_{e \in E(\{v\}, V \setminus \{v\})} f(e) - \sum_{e \in E(V \setminus \{v\}, \{v\})} f(e) = b(v).$$

Exemple



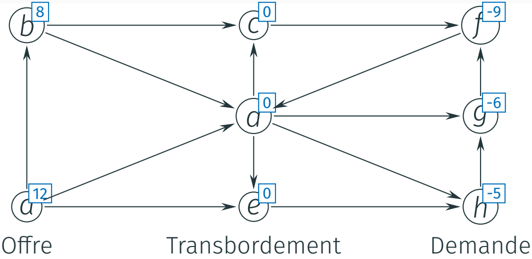
Vocabulaire

Si $b(v) > 0$, on parle d'offre

Si $b(v) < 0$, on parle de demande

Si $b(v) = 0$, on parle de transbordement.

Exemple



Circulation

Définition
Si b est la fonction nulle $V \to \mathbb{R}$, on parle de circulation.

Circulation

Définition
Si b est la fonction nulle $V \to \mathbb{R}$, on parle de circulation.

Lemme
Toute circulation est de la forme

$$\sum_{\chi \in \mathscr{C}} \varphi_\chi \mathbf{1}_\chi$$

où $\mathscr{C}$ est une famille de circuits de cardinal au plus $|E|$ et $(\varphi_\chi)_{\chi \in \mathscr{C}}$ une famille de réels positifs.

Définition

Si b est la fonction nulle $V \to \mathbb{R}$, on parle de circulation.

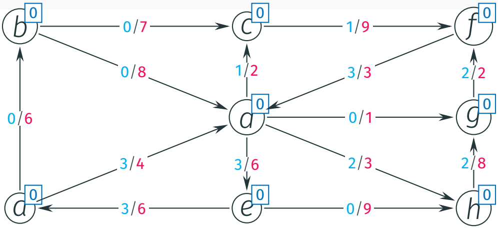
Lemme

Toute circulation est de la forme

$$\sum_{\chi \in \mathscr{C}} \varphi_\chi \mathbb{1}_\chi$$

où $\mathscr{C}$ est une famille de circuits de cardinal au plus $|E|$ et $(\varphi_\chi)_{\chi \in \mathscr{C}}$ une famille de réels positifs.

Exemple



Circulation

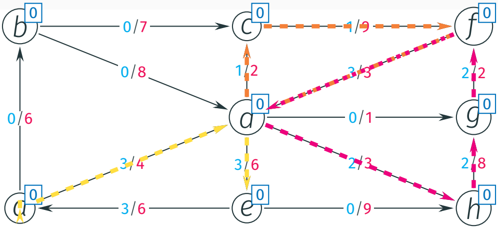
Définition
Si b est la fonction nulle $V \to \mathbb{R}$, on parle de circulation.

Lemme
Toute circulation est de la forme

$$\sum_{\chi \in \mathscr{C}} \varphi_\chi \mathbf{1}_\chi$$

où $\mathscr{C}$ est une famille de circuits de cardinal au plus $|E|$ et $(\varphi_\chi)_{\chi \in \mathscr{C}}$ une famille de réels positifs.

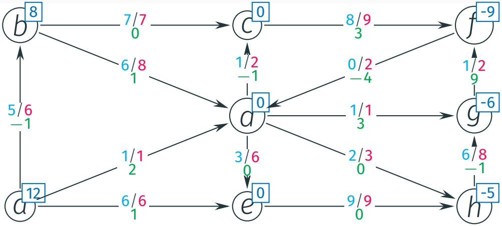
Exemple



Flot de coût minimum
Étant donné $G = (V, E)$ un graphe orienté, $u : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ des capacités, $b : V \to \mathbb{R}$ tq $\sum_{v \in V} b(v) = 0$ et $c : E \to \mathbb{R}$ une application appelée coût unitaire, déterminer un b flot qui minimise le coût

$$c(f) = \sum_{e \in E} c(e) f(e).$$

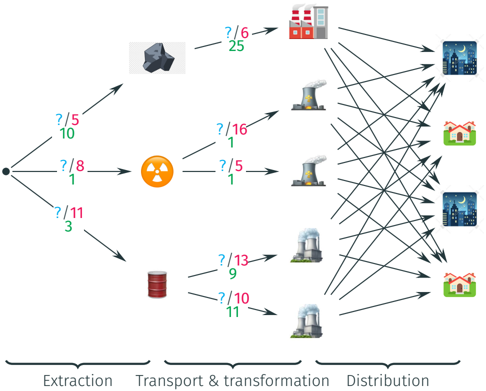
Exemple



Coût $c(f) = 38 = 5 \cdot (-1) + 7 \cdot (0) + 6 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + \cdots + 1 \cdot 9 + 6 \cdot (-1)$.

Exemple : un réseau d'énergie

Dans réseau d'énergie, on dispose de ressources minières, de centrales de production et de villes consommatrices.



Les capacités représentent les limites physiques de disponibilité (en MW); les coûts représentent des émissions de CO_2 par unité d'énergie.

Exemple : transport en péniche

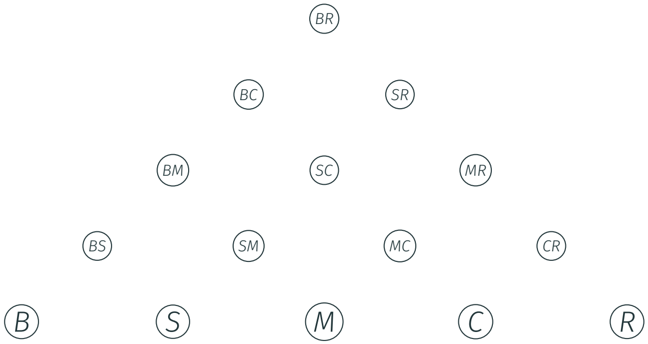
Une péniche de capacité r descend le Rhin. Il y a $b_{i,j}$ conteneurs sont en attente de transport entre la ville i et j, le profit est $c_{i,j}$ par conteneur acheminé.

$b_{i,j}/c_{i,j}$	Strasbourg	Mayence	Cologne	Rotterdam
Bâle	$b_{b,s} = 2$, $c_{b,s} = 3$	4 / 4	1 / 8	5 / 10
Strasbourg		1 / 2	7 / 5	11 / 9
Mayence			2 / 1	10 / 6
Cologne				3 / 3

Exemple : transport en péniche

Une péniche de capacité r descend le Rhin. Il y a $b_{i,j}$ conteneurs sont en attente de transport entre la ville i et j, le profit est $c_{i,j}$ par conteneur acheminé.

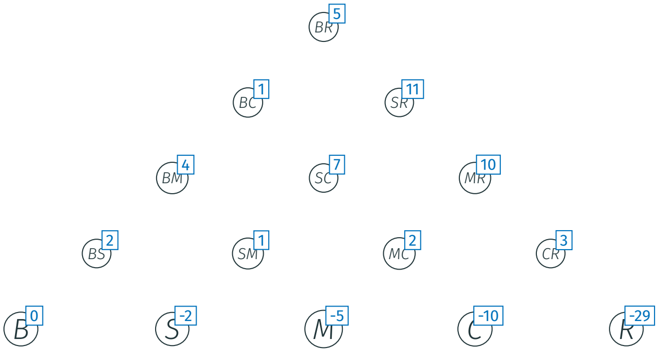
$b_{i,j}/c_{i,j}$	Strasbourg	Mayence	Cologne	Rotterdam
Bâle	$b_{b,s} = 2$, $c_{b,s} = 3$	4 / 4	1 / 8	5 / 10
Strasbourg		1 / 2	7 / 5	11 / 9
Mayence			2 / 1	10 / 6
Cologne				3 / 3



Exemple : transport en péniche

Une péniche de capacité r descend le Rhin. Il y a $b_{i,j}$ conteneurs sont en attente de transport entre la ville i et j, le profit est $c_{i,j}$ par conteneur acheminé.

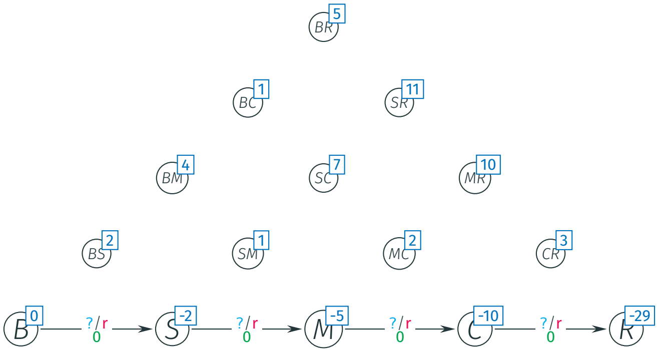
$b_{i,j}/c_{i,j}$	Strasbourg	Mayence	Cologne	Rotterdam
Bâle	$b_{b,s} = 2$, $c_{b,s} = 3$	4 / 4	1 / 8	5 / 10
Strasbourg		1 / 2	7 / 5	11 / 9
Mayence			2 / 1	10 / 6
Cologne				3 / 3



Exemple : transport en péniche

Une péniche de capacité r descend le Rhin. Il y a $b_{i,j}$ conteneurs sont en attente de transport entre la ville i et j, le profit est $c_{i,j}$ par conteneur acheminé.

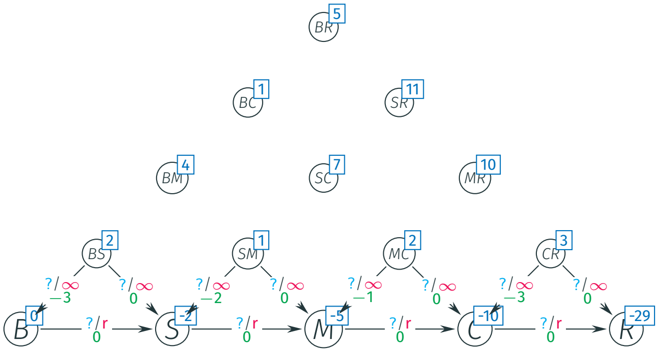
$b_{i,j}/c_{i,j}$	Strasbourg	Mayence	Cologne	Rotterdam
Bâle	$b_{b,s} = 2$, $c_{b,s} = 3$	4 / 4	1 / 8	5 / 10
Strasbourg		1 / 2	7 / 5	11 / 9
Mayence			2 / 1	10 / 6
Cologne				3 / 3



Exemple : transport en péniche

Une péniche de capacité r descend le Rhin. Il y a $b_{i,j}$ conteneurs sont en attente de transport entre la ville i et j, le profit est $c_{i,j}$ par conteneur acheminé.

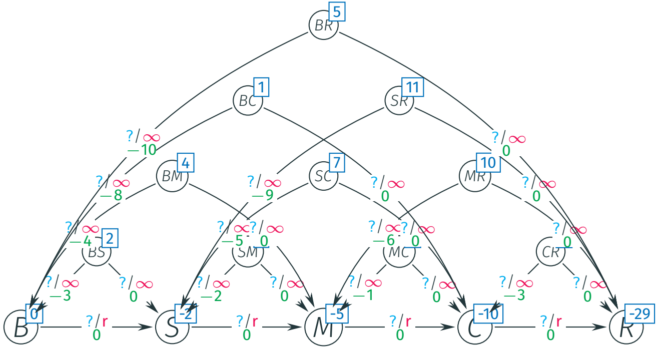
$b_{i,j}/c_{i,j}$	Strasbourg	Mayence	Cologne	Rotterdam
Bâle	$b_{b,s} = 2$, $c_{b,s} = 3$	4 / 4	1 / 8	5 / 10
Strasbourg		1 / 2	7 / 5	11 / 9
Mayence			2 / 1	10 / 6
Cologne				3 / 3



Exemple : transport en péniche

Une péniche de capacité r descend le Rhin. Il y a $b_{i,j}$ conteneurs sont en attente de transport entre la ville i et j, le profit est $c_{i,j}$ par conteneur acheminé.

$b_{i,j}/c_{i,j}$	Strasbourg	Mayence	Cologne	Rotterdam
Bâle	$b_{b,s} = 2$, $c_{b,s} = 3$	4 / 4	1 / 8	5 / 10
Strasbourg		1 / 2	7 / 5	11 / 9
Mayence			2 / 1	10 / 6
Cologne				3 / 3



Proposition
Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté muni de coûts $c : E \to \mathbb{R}$, s et t deux sommets.

Proposition
Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté muni de coûts $c : E \to \mathbb{R}$, s et t deux sommets. On fixe $u = \mathbf{1}_E$ et

$$b(s) = 1, \quad b(t) = -1 \quad \text{et} \quad \forall v \in V \setminus \{s, t\}, \quad b(v) = 0.$$

Proposition
Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté muni de coûts $c : E \to \mathbb{R}$, s et t deux sommets. On fixe $u = \mathbf{1}_E$ et

$$b(s) = 1, \quad b(t) = -1 \quad \text{et} \quad \forall v \in V \setminus \{s, t\}, \quad b(v) = 0.$$

Un b-flot de coût minimum dans (G, u, b, c) est un plus court chemin de s vers t.

Lien avec le flot de valeur maximum : principe

Proposition
Soit (G, u, s, t) un réseau.

Lien avec le flot de valeur maximum : principe

Proposition
Soit (G, u, s, t) un réseau. On ajoute un arc ts de capacité $u(ts) = \infty$.
On fixe
$$c(ts) = -1, \quad \text{et} \quad \forall e \in E, \quad c(e) = 0.$$

Lien avec le flot de valeur maximum : principe

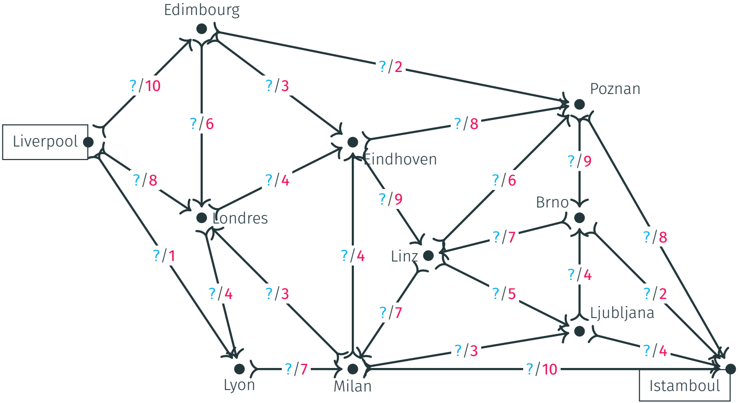
Proposition
Soit (G, u, s, t) un réseau. On ajoute un arc ts de capacité $u(ts) = \infty$. On fixe

$$c(ts) = -1, \quad \text{et} \quad \forall e \in E, \quad c(e) = 0.$$

Un b-flot de coût minimum dans (G, u, b, c) est un flot de valeur maximum de s vers t.

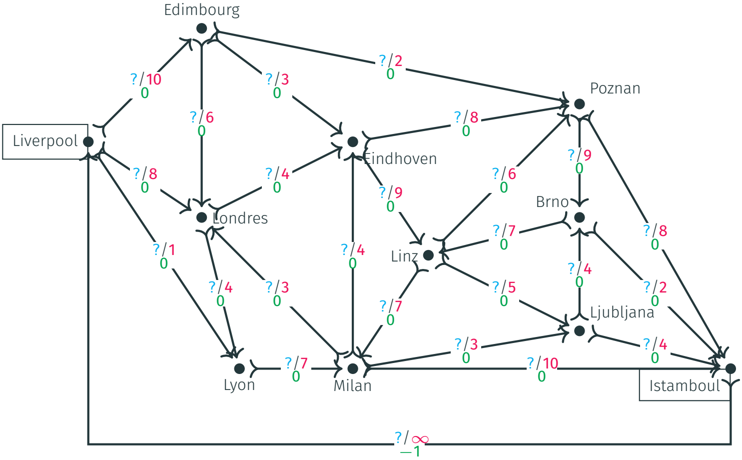
Lien avec le flot de valeur maximum : exemple

Maximisons la valeur de flot entre Liverpool et Istamboul.



Lien avec le flot de valeur maximum : exemple

Maximisons la valeur de flot entre Liverpool et Istamboul.



Lien avec l’affectation de coût minimum : principe

Proposition
Soit $G = (U \sqcup V, E)$ un graphe biparti muni de coûts $c : E \to \mathbb{R}$ admettant un couplage de cardinal n.

Lien avec l'affectation de coût minimum : principe

Proposition
Soit $G = (U \sqcup V, E)$ un graphe biparti muni de coûts $c : E \to \mathbb{R}$ admettant un couplage de cardinal n. On ajoute deux sommets frais s et t, des arcs $\{(su)\}_{u\in U}$ et $\{(vt)\}_{v\in V}$ de coût nul. On fixe $u = \mathbf{1}_E$ et

$$b(s) = n, \quad b(t) = -n \quad \text{et} \quad \forall v \in V \setminus \{s,t\}, \quad b(v) = 0.$$

Proposition
Soit $G = (U \sqcup V, E)$ un graphe biparti muni de coûts $c : E \to \mathbb{R}$ admettant un couplage de cardinal n. On ajoute deux sommets frais s et t, des arcs $\{(su)\}_{u \in U}$ et $\{(vt)\}_{v \in V}$ de coût nul. On fixe $u = \mathbf{1}_E$ et

$$b(s) = n, \quad b(t) = -n \quad \text{et} \quad \forall v \in V \setminus \{s, t\}, \quad b(v) = 0.$$

Un b-flot de coût minimum dans (G, u, b, c) est un couplage de cardinal n et coût minimum.

Lien avec l'affectation de coût minimum : exemple

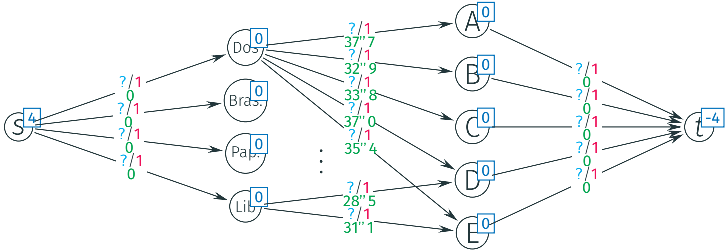
Quelle équipe un entraineur doit-il aligner pour le relais 4 nages à partir des temps d'entrainement de ses 5 nageurs ?

	Aya	Badri	Côme	Dalia	Erynn
Dos	37”7	32”9	33”8	37”0	35”4
Brasse	43”4	33”1	42”2	34”7	41”8
Papillon	33”3	28”5	38”9	30”4	33”6
Libre	29”2	26”4	29”6	28”5	31”1

Lien avec l'affectation de coût minimum : exemple

Quelle équipe un entraineur doit-il aligner pour le relais 4 nages à partir des temps d'entrainement de ses 5 nageurs ?

	Aya	Badri	Côme	Dalia	Erynn
Dos	37"7	32"9	33"8	37"0	35"4
Brasse	43"4	33"1	42"2	34"7	41"8
Papillon	33"3	28"5	38"9	30"4	33"6
Libre	29"2	26"4	29"6	28"5	31"1



Graphe symétrisé

Définition
Soient $G = (V, E)$ un graphe orienté, $u : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une application capacité et $f : E \to \mathbb{R}$ un flot.

Graphe symétrisé

Définition
Soient $G = (V, E)$ un graphe orienté, $u : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une application capacité et $f : E \to \mathbb{R}$ un flot.

- Pour tout arc $e = uv \in E$, l'arc opposé à e est l'arc $\overleftarrow{e} = vu$. On note $\overleftarrow{E}$ l'ensemble des arcs opposés de E.

Définition
Soient $G = (V, E)$ un graphe orienté, $u : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une application capacité et $f : E \to \mathbb{R}$ un flot.

- Pour tout arc $e = uv \in E$, l'arc opposé à e est l'arc $\overleftarrow{e} = vu$. On note $\overleftarrow{E}$ l'ensemble des arcs opposés de E.
- Le graphe symétrisé de G est le graphe $\overleftrightarrow{G} = (V, \overleftrightarrow{E})$ où $\overleftrightarrow{E} = E \cup \overleftarrow{E}$. (En toute rigueur, c'est un multigraphe !)

Graphe résiduel

Définition
Soient $G = (V, E)$ un graphe orienté, $u : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une application capacité et $f : E \to \mathbb{R}$ un flot.

Graphe résiduel

Définition
Soient $G = (V, E)$ un graphe orienté, $u : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une application capacité et $f : E \to \mathbb{R}$ un flot.

- La fonction coût s'étend au graphe symétrisé par

$$\forall e \in E,\ \overleftrightarrow{c}(e) = c(e) \qquad \forall e \in \overleftarrow{E},\ \overleftrightarrow{c}(e) = -c(\overleftarrow{e}).$$

Graphe résiduel

Définition
Soient $G = (V, E)$ un graphe orienté, $u : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une application capacité et $f : E \to \mathbb{R}$ un flot.

- La fonction coût s'étend au graphe symétrisé par

$$\forall e \in E,\ \overleftrightarrow{c}(e) = c(e) \qquad \forall e \in \overleftarrow{E},\ \overleftrightarrow{c}(e) = -c(\overleftarrow{e}).$$

- La capacité résiduelle par rapport au flot f est $u_f : \overleftrightarrow{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\forall e \in E,\ u_f(e) = u(e) - f(e) \qquad \forall e \in \overleftarrow{E},\ u_f(e) = f(\overleftarrow{e})$$

Graphe résiduel

Définition
Soient $G = (V, E)$ un graphe orienté, $u : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une application capacité et $f : E \to \mathbb{R}$ un flot.

- La fonction coût s'étend au graphe symétrisé par

$$\forall e \in E,\ \overleftrightarrow{c}(e) = c(e) \qquad \forall e \in \overleftarrow{E},\ \overleftrightarrow{c}(e) = -c(\overleftarrow{e}).$$

- La capacité résiduelle par rapport au flot f est $u_f : \overleftrightarrow{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

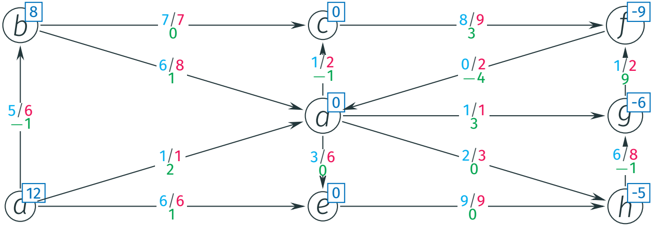
$$\forall e \in E,\ u_f(e) = u(e) - f(e) \qquad \forall e \in \overleftarrow{E},\ u_f(e) = f(\overleftarrow{e})$$

- On appelle graphe résiduel par rapport au flot f le graphe $G_f = (V, E_f)$ où

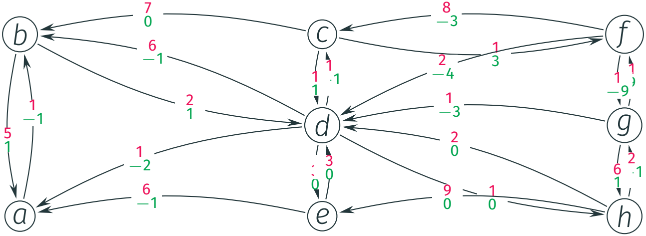
$$E_f = \left\{ e \in E \cup \overleftarrow{E}\ ;\ u_f(e) > 0 \right\}.$$

Exemple

Le flot étant



Le graphe résiduel est



Circuit f-augmentant

Définition
Soient $G = (V, E)$ un graphe orienté, $u : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une application capacité et $f : E \to \mathbb{R}$ un flot.

- On appelle chemin f-augmentant, respectivement circuit f-augmentant, tout chemin, respectivement tout circuit, Γ dans le graphe résiduel G_f.

Circuit f-augmentant

Définition
Soient $G = (V, E)$ un graphe orienté, $u : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une application capacité et $f : E \to \mathbb{R}$ un flot.

- On appelle chemin f-augmentant, respectivement circuit f-augmentant, tout chemin, respectivement tout circuit, Γ dans le graphe résiduel G_f.
- La valeur d'un chemin ou d'un circuit augmentant est

$$\gamma = \min_{e \in \Gamma} u_f(e).$$

Circuit f-augmentant

Définition
Soient $G = (V, E)$ un graphe orienté, $u : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une application capacité et $f : E \to \mathbb{R}$ un flot.

- On appelle chemin f-augmentant, respectivement circuit f-augmentant, tout chemin, respectivement tout circuit, Γ dans le graphe résiduel G_f.
- La valeur d'un chemin ou d'un circuit augmentant est

$$\gamma = \min_{e \in \Gamma} u_f(e).$$

- Le coût d'un chemin est

$$\overleftrightarrow{c}(\Gamma) = \sum_{e \in \Gamma} \overleftrightarrow{c}(e).$$

Augmentation

Définition

Soient $G = (V, E)$ un graphe orienté, $u : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une application capacité et $f : E \to \mathbb{R}$ un flot.

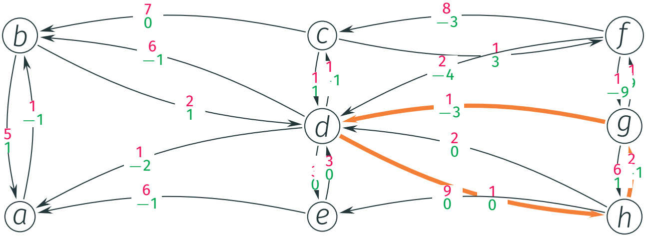
- *Augmenter le flot f le long d'un chemin ou d'un circuit f-augmentant Γ de valeur γ revient à construire un nouveau flot $f' : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ selon les règles suivantes :*

$$\begin{array}{rcl} \forall e \in E \cap \Gamma, & f'(e) = & f(e) + \gamma \\ \forall e \in E \cap \overleftarrow{\Gamma}, & f'(e) = & f(e) - \gamma \\ \forall e \in E \setminus (\Gamma \cup \overleftarrow{\Gamma}), & f'(e) = & f(e) \end{array}$$

qui est de coût $c(f') = c(f) + \gamma \cdot \overleftrightarrow{c}(\Gamma)$.

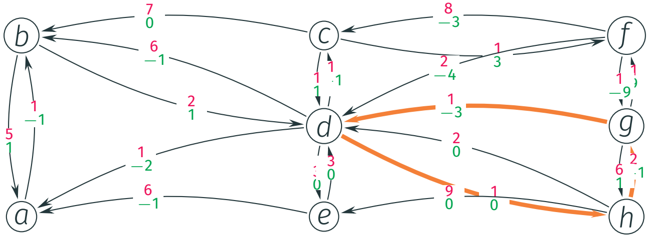
Exemple

On repère un circuit f augmentant

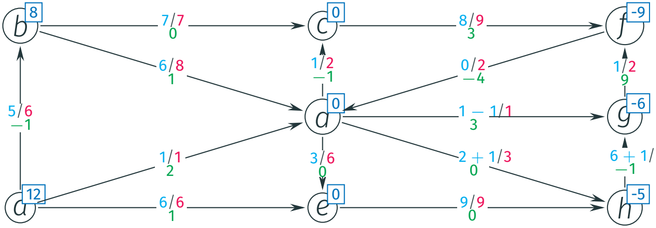


Exemple

On repère un circuit f augmentant



On modifie f de $\gamma = 1$ en f'. On gagne $3 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1$.



Lemme

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté muni de capacités $u : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.
Soient deux flots f et $f' : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ pour la même fonction b.
L'application $g : \overleftrightarrow{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ définie par

$$\begin{aligned} \forall e \in E, \quad g(e) &= \max\left(f'(e) - f(e), 0\right) \\ \forall e \in \overleftarrow{E}, \quad g(e) &= \max\left(f(\overleftarrow{e}) - f'(\overleftarrow{e}), 0\right) \end{aligned}$$

forme une circulation dans le graphe résiduel (G_f, u_f) de coût

$$c(g) = c(f') - c(f).$$

Critère d'optimalité

Théorème
Soit (G, u, b, c) une instance du problème du flot de coût minimum. Un b-flot est de coût minimum si et seulement s'il n'existe pas de circuit f-augmentant de coût strictement négatif.

Définition
Un circuit de coût strictement négatif est appelé absorbant.

Démonstration.
S'il existe un circuit f-augmentant, on augmente et

$$c(f') = c(f) + \underbrace{\gamma}_{>0} \cdot \underbrace{\overleftrightarrow{c}(\Gamma)}_{<0} < c(f).$$

Démonstration.
S'il existe un circuit f-augmentant, on augmente et

$$c(f') = c(f) + \underbrace{\gamma}_{>0} \cdot \underbrace{\overleftrightarrow{c}(\Gamma)}_{<0} < c(f).$$

Réciproquement, s'il y a un flot f' avec $c(f') < c(f)$. Alors $g = f' - f$ est une circulation, donc de la forme

$$g = \sum_{\chi \in \mathscr{C}} \varphi_\chi \mathbb{1}_\chi,$$

où $\mathscr{C}$ est une famille de circuits et $(\varphi_\chi)_{\chi \in \mathscr{C}}$ est une famille de réels strictement positifs.

Démonstration.
S'il existe un circuit f-augmentant, on augmente et

$$c(f') = c(f) + \underbrace{\gamma}_{>0} \cdot \underbrace{\overleftrightarrow{c}(\Gamma)}_{<0} < c(f).$$

Réciproquement, s'il y a un flot f' avec $c(f') < c(f)$. Alors $g = f' - f$ est une circulation, donc de la forme

$$g = \sum_{\chi \in \mathscr{C}} \varphi_\chi \mathbf{1}_\chi,$$

où $\mathscr{C}$ est une famille de circuits et $(\varphi_\chi)_{\chi \in \mathscr{C}}$ est une famille de réels strictement positifs.
Comme $c(g) = \sum_{\chi \in \mathscr{C}} \varphi_\chi c(\chi)$, on trouve un circuit de cout < 0. $\square$

Rappels sur les circuits

Détection de circuits absorbants avec Moore Bellman Ford

Algorithme 1 : Algorithme de Moore Bellman Ford

Entrées : Graphe orienté $G = (V, E)$ muni d'un coût $c : E \to \mathbb{R}$. Sommet s
Sorties : Plus couts chemins depuis s ou circuit absorbant détecté

```
pour v ∈ V faire
    ℓ(v) ← +∞
ℓ(s) ← 0
répéter
    pour e = uv ∈ E faire
        si ℓ(v) > ℓ(u) + c(e) alors
            ℓ(v) ← ℓ(u) + c(e); pred(v) ← u
jusqu'à stabilisation de ℓ ou n itérations;
retourner ℓ dans le cas 1 ou « circuit détecté » dans le cas 2
```

Post-condition

Dans le cas sans circuit absorbant rencontré, on a :

$$\forall e = uv \in E, \quad \ell(v) \leq \ell(u) + c(e) \;\Leftrightarrow\; c(e) + \ell(u) - \ell(v) \geq 0$$

Potentiel

Définition
Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté muni d'une fonction coût $c : E \to \mathbb{R}$. Un potentiel est une fonction $p : V \to \mathbb{R}$. Le cout réduit par rapport au potentiel p est

$$c_p : \begin{cases} E & \to & \mathbb{R} \\ e = uv & \mapsto & c(uv) + p(u) - p(v) \end{cases}$$

Remarque
Le coût d'un circuit χ est invariant par réduction par un potentiel.

$$c_p(\chi) = \sum_{e \in \chi} c_p(e) = \sum_{e = uv \in \chi} c(e) + p(u) - p(v) = \sum_{e \in \chi} c(e) = c(\chi).$$

Coût conservatifs : caractérisation

Définition

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté et $c : E \to \mathbb{R}$ une fonction coût.
Un coût est dit conservatif s'il n'existe pas de circuit absorbant.
Un potentiel $p : V \to \mathbb{R}$ est dit réalisable si

$$\forall e = uv \in E, \quad c_p(e) = c(e) + p(u) - p(v) \geq 0.$$

Théorème

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté et $c : E \to \mathbb{R}$ une fonction coût. Le graphe (G, c) admet un potentiel réalisable si et seulement si les coûts sont conservatifs.

Coût conservatifs : preuve

Démonstration.
$\Rightarrow$: Si p est un potentiel réalisable, alors, pour tout circuit χ, on a

$$0 \leq \sum_{e \in \chi} c_p(e) = c_p(\chi) = c(\chi).$$

Coût conservatifs : preuve

Démonstration.
$\Rightarrow$: Si p est un potentiel réalisable, alors, pour tout circuit χ, on a

$$0 \leq \sum_{e \in \chi} c_p(e) = c_p(\chi) = c(\chi).$$

$\Leftarrow$: Si les coûts c sont conservatifs, on ajoute un sommet frais au graphe G relié à tout sommet par un arc de coût nul.

Coût conservatifs : preuve

Démonstration.
$\Rightarrow$: Si p est un potentiel réalisable, alors, pour tout circuit χ, on a

$$0 \leq \sum_{e \in \chi} c_p(e) = c_p(\chi) = c(\chi).$$

$\Leftarrow$: Si les coûts c sont conservatifs, on ajoute un sommet frais au graphe G relié à tout sommet par un arc de coût nul. On exécute Moore-Bellman-Ford, qui termine dans le cas 1. La fonction $\ell : V \to \mathbb{R}$ obtenue forme un potentiel réalisable $\square$

Proposition utile pour les preuves à venir

Proposition
Soit (G, u, c, b) une instance du problème du flot de coût minimum et $p : V \to \mathbb{R}$ un potentiel. Un b-flot f est de coût minimum pour les coûts c si et seulement s'il est minimum pour les coûts réduits c_p.

Proposition utile pour les preuves à venir

Proposition
Soit (G, u, c, b) une instance du problème du flot de coût minimum et $p : V \to \mathbb{R}$ un potentiel. Un b-flot f est de coût minimum pour les coûts c si et seulement s'il est minimum pour les coûts réduits c_p.

Démonstration.
Pour tout b-flot f, on a

$$\begin{aligned} c_p(f) &= \sum_{e\in E} c_p(e)f(e) \\ &= \sum_{e=uv\in E} (c(e)+p(u)-p(v))f(e) \\ &= \sum_{e\in E} c(e)f(e) + \sum_{v\in V} p(v)b(v) \\ &= c(f) + \sum_{v\in V} p(v)b(v) \end{aligned}$$

Elimination de circuits négatifs

Algorithme : version vague

Idée
Initialiser un b-flot f.

Transformer le flot f en cherchant des circuits de coût négatif dans le graphe résiduel G_f et augmenter f en conséquence.

Algorithme : version vague

Idée
Initialiser un b-flot f.

Transformer le flot f en cherchant des circuits de coût négatif dans le graphe résiduel G_f et augmenter f en conséquence.

Difficulté
Terminaison en général ? Temps d'exécution ?

Définition
Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté, $c : E \to \mathbb{R}$ une fonction coût. Le coût moyen du circuit χ est la quantité $\dfrac{c(\chi)}{|\chi|} = \dfrac{1}{|\chi|} \displaystyle\sum_{e \in \chi} c(e)$.

Circuits de coût moyen minimum

Définition
Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté, $c : E \to \mathbb{R}$ une fonction coût. Le coût moyen du circuit χ est la quantité $\dfrac{c(\chi)}{|\chi|} = \dfrac{1}{|\chi|} \sum_{e \in \chi} c(e)$.

Problème du circuit de coût moyen minimum
Étant donné un graphe orienté $G = (V, E)$ et des coûts $c : E \to \mathbb{R}$, trouver un circuit χ de coût moyen minimum.

Plus courts chemins à destination donnée

Pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$ et pour tout sommet v, on appelle $d_k(v)$ le coût minimum d'un chemin de k arcs terminant en v.

Plus courts chemins à destination donnée

Pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$ et pour tout sommet v, on appelle $d_k(v)$ le coût minimum d'un chemin de k arcs terminant en v.

Relations de calcul

$$\forall v \in V, \quad d_0(v) = 0$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad d_{k+1}(v) = \min_{e=uv \in E} d_k(u) + c(e).$$

Identification d'un circuit de coût moyen minimum

Théorème
Le circuit de coût moyen minimum d'un graphe orienté $G = (V, E)$ *muni d'une fonction coût* $c : E \to \mathbb{R}$ *est de coût moyen*

$$\min_{v \in V} \max_{k \in [\![0, n-1]\!]} \frac{d_n(v) - d_k(v)}{n - k}.$$

Identification d'un circuit de coût moyen minimum : preuve 1

Démonstration.
Quitte à translater la fonction coût c d'une constante, on peut supposer que le coût moyen minimum vaut 0.

Autrement dit, nos hypothèses sont

$$\forall \chi \text{ circuit}, \ c(\chi) \geq 0 \quad \text{et} \quad \exists \chi_0 \text{ circuit}, \ c(\chi_0) = 0$$

On veut montrer que

$$M = \min_{v \in V} \max_{k \in [\![0, n-1]\!]} \frac{d_n(v) - d_k(v)}{n-k}.$$

vaut zéro.

$\square$

Identification d'un circuit de coût moyen minimum : preuve 2

Démonstration.
Soit v_0 un sommet de V atteignant le minimum M.

Notons π un chemin en n arcs terminant en v_0 et de coût $d_n(v_0)$.

Démonstration.
Soit v_0 un sommet de V atteignant le minimum M.

Notons π un chemin en n arcs terminant en v_0 et de coût $d_n(v_0)$. Comme π possède n arcs, π contient au moins un circuit, disons χ et on peut noter π' les arcs restants (qui forment un chemin terminant en v_0). Mais alors, en appelant k_0 le nombre d'arcs dans π', on a

$$d_n(v_0) = c(\pi) = c(\pi') + \underbrace{c(\chi)}_{\geq 0} \geq c(\pi') \geq d_{k_0}(v_0).$$

Identification d'un circuit de coût moyen minimum : preuve 2

Démonstration.
Soit v_0 un sommet de V atteignant le minimum M.

Notons π un chemin en n arcs terminant en v_0 et de coût $d_n(v_0)$. Comme π possède n arcs, π contient au moins un circuit, disons χ et on peut noter π' les arcs restants (qui forment un chemin terminant en v_0). Mais alors, en appelant k_0 le nombre d'arcs dans π', on a

$$d_n(v_0) = c(\pi) = c(\pi') + \underbrace{c(\chi)}_{\geq 0} \geq c(\pi') \geq d_{k_0}(v_0).$$

Par conséquent, M est bien positif.

Il reste à prouver que $M = 0$. □

Identification d'un circuit de coût moyen minimum : preuve 3

Démonstration.
Soient w sommet de χ_0 et $t = |\chi_0|$.
Le minimum $\min_{r \in \mathbb{N}} d_r(w)$ est atteint sur un chemin élémentaire Γ (car $c(\chi) \geq 0$). Quitte à rajouter des copies de χ_0, on prolonge le chemin Γ en un chemin à r arcs avec $n - t \leq r \leq n$. (Notons que $n - r \leq t$.)

Identification d'un circuit de coût moyen minimum : preuve 3

Démonstration.
Soient w sommet de χ_0 et $t = |\chi_0|$.
Le minimum $\min_{r\in\mathbb{N}} d_r(w)$ est atteint sur un chemin élémentaire Γ (car $c(\chi) \geq 0$). Quitte à rajouter des copies de χ_0, on prolonge le chemin Γ en un chemin à r arcs avec $n - t \leq r \leq n$. (Notons que $n - r \leq t$.)

Nous coupons le circuit χ_0 en deux chemins : le chemin $\pi : w \rightsquigarrow z$ formé de $n - r$ arcs et le chemin $\pi' : z \rightsquigarrow w$ formé des arcs $t - (n - r)$ arcs restants.

Identification d'un circuit de coût moyen minimum : preuve 3

Démonstration.
Soient w sommet de χ_0 et $t = |\chi_0|$.
Le minimum $\min_{r\in\mathbb{N}} d_r(w)$ est atteint sur un chemin élémentaire Γ (car $c(\chi) \geq 0$). Quitte à rajouter des copies de χ_0, on prolonge le chemin Γ en un chemin à r arcs avec $n - t \leq r \leq n$. (Notons que $n - r \leq t$.)

Nous coupons le circuit χ_0 en deux chemins : le chemin $\pi : w \rightsquigarrow z$ formé de $n - r$ arcs et le chemin $\pi' : z \rightsquigarrow w$ formé des arcs $t - (n - r)$ arcs restants.

On a alors $d_n(z) \leq d_r(w) + c(\pi)$
et, pour tout entier k,

$$d_k(z) + c(\pi') \geq d_{k+(t-(n-r))}(w) \geq \min_r d_r(w) = d_r(w) \geq d_n(z) - c(\pi)$$

Identification d'un circuit de coût moyen minimum : preuve 3

Démonstration.
Soient w sommet de χ_0 et $t = |\chi_0|$.
Le minimum $\min_{r\in\mathbb{N}} d_r(w)$ est atteint sur un chemin élémentaire Γ (car $c(\chi) \geq 0$). Quitte à rajouter des copies de χ_0, on prolonge le chemin Γ en un chemin à r arcs avec $n - t \leq r \leq n$. (Notons que $n - r \leq t$.)

Nous coupons le circuit χ_0 en deux chemins : le chemin $\pi : w \rightsquigarrow z$ formé de $n - r$ arcs et le chemin $\pi' : z \rightsquigarrow w$ formé des arcs $t - (n - r)$ arcs restants.

On a alors $d_n(z) \leq d_r(w) + c(\pi)$
et, pour tout entier k,

$$d_k(z) + c(\pi') \geq d_{k+(t-(n-r))}(w) \geq \min_r d_r(w) = d_r(w) \geq d_n(z) - c(\pi)$$

Mais ceci implique que

$$d_n(w) - d_k(w) \leq c(\chi_0) = 0,$$

ce qui prouve que $M = 0$. □

Identification d'un circuit de coût moyen minimum : algorithme

Algorithme 2 : Algorithme du circuit de coût moyen minimum

Entrées : Graphe orienté $G = (V, E)$ muni d'un coût $c : E \to \mathbb{R}$

Sorties : Circuit de coût minimum

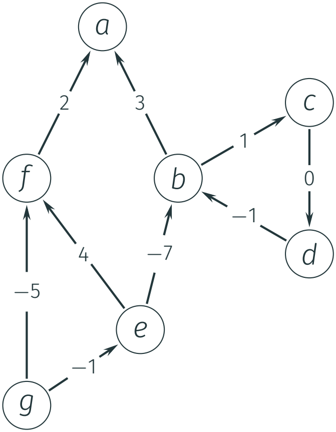
$n \leftarrow |V|$; pour $v \in V$, $d_0(v) \leftarrow 0$
pour $k \in [\![1, n]\!]$ **faire**
    pour $v \in V$ **faire**
        $d_k(v) \leftarrow +\infty$
        pour *w prédécesseur de v* **faire**
            si $d_{k-1}(w) + c(wv) < d_k(v)$ **alors**
                $d_k(v) \leftarrow d_{k-1}(w) + c(wv)$; $p_k(v) \leftarrow w$

si *pour tout sommet $v \in V$, $d_n(v) = +\infty$* **alors**
    G est sans circuit
sinon
    Soit $v_0 \in V$ minimisant $\min_{v \in V} \max_{k \in [\![0, n-1]\!]} \frac{d_n(v) - d_k(v)}{n-k}$
    Soit χ un circuit quelconque dans la suite de sommets
      $p_n(x), p_{n-1}(p_n(x)), p_{n-2}(p_{n-1}(p_n(x))), \ldots,$
    retourner χ

Identification d’un circuit de coût moyen minimum : correction

Proposition
L’algorithme d’identification d’un circuit de coût moyen minimum calcule correctement un circuit de coût moyen minimum en temps $O(mn)$.

Illustration (exemple 1)

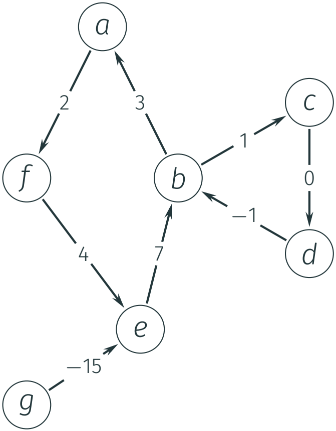


$$M = \min_{v \in V} M_v \text{ où } M_v = \max_{k \in [\![0, n-1]\!]} \frac{d_n(v) - d_k}{n-k}$$

k	a	b	c	d	e	f	g
d_0	0	0	0	0	0	0	0
d_1	2	-7	1	0	-1	-5	∞
p_1	f	e	b	c	g	g	/
d_2	-4	-8	-6	1	∞	3	∞
p_2	b	e	b	c	/	e	/
d_3	-5	0	-7	-6	∞	∞	∞
p_3	b	d	b	c	/	/	/
d_4	3	-7	1	-7	∞	∞	∞
p_4	b	d	b	c	/	/	/
d_5	-4	-8	-6	1	∞	∞	∞
p_5	b	d	b	c	/	/	/
d_6	-5	0	-7	-6	∞	∞	∞
p_6	b	d	b	c	/	/	/
d_7	3	-7	1	-7	∞	∞	∞
p_7	b	d	b	c	/	/	/
M_v	8	0	8	0	∞	∞	∞

$P(b) = e - b - c - d - b - c - d - b$ ou
$P(d) = g - e - b - c - d - b - c - d$ donnent le circuit

Illustration (exemple 2)



$$M = \min_{v \in V} M_v \text{ où } M_v = \max_{k \in [\![0, n-1]\!]} \frac{d_n(v) - d_k}{n - k}$$

k	a	b	c	d	e	f	g
d_0	0	0	0	0	0	0	0
d_1	3	−1	1	0	−15	2	∞
p_1	b	d	b	c	g	a	/
d_2	−2	−8	0	1	6	5	∞
p_2	b	e	b	c	f	a	/
d_3	−5	0	−7	0	9	4	∞
p_3	b	d	b	c	f	a	/
d_4	3	−1	1	−7	8	−3	∞
p_4	b	d	b	c	f	a	/
d_5	2	−8	0	1	1	5	∞
p_5	b	d	b	c	f	a	/
d_6	−5	0	−7	0	9	4	∞
p_6	b	d	b	c	f	a	/
d_7	3	−1	1	−7	8	−3	∞
p_7	b	d	b	c	f	a	/
M_v	8	0	0	0	23/7	7	∞

$P(b) = d - b - c - d - b - c - d - b$ ou
$P(b) = d - b - d - b - c - d - b - c$ ou
$P(d) = g - e - b - c - d - b - c - d$ donnent le circuit

Algorithme : version un peu moins vague

Idée
Initialiser un b flot f.
Transformer f en cherchant des circuits de coût moyen minimum (et négatif) dans le graphe résiduel G_f.

Flot de coût minimum par élimination du circuit de coût moyen minimum

Algorithme 3 : Algorithme par élimination du circuit de coût moyen minimum

Entrées : Graphe orienté $G = (V, E)$, capacité $u : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $b : V \to \mathbb{R}$ tel que $\sum_{v \in V} b(v) = 0$, coûts $c : E \to \mathbb{R}$.

Sorties : b-flot f de coût $c(f)$ minimum

Trouver un b-flot f
répéter
    Trouver un circuit χ dans le graphe résiduel G_f de coût moyen minimum.
    si $c(\chi) < 0$ **alors**
        Augmenter f le long du circuit χ.
jusqu'à *le circuit χ est de coût positif ou n'existe pas*;
retourner f

Terminaison

Proposition
Dans l'algorithme du flot de coût minimum par élimination du circuit de coût moyen minimum, le nombre d'itérations est au plus $4nm^2\lceil \ln n \rceil$.

Notations pour la preuve

Notons $n = |V|$ et $m = |E|$.
Appelons f_0 le flot obtenu à la ligne 1 de l'algorithme et f_k le flot après l'étape k. Notons $G_k = (V, E_k)$ le graphe résiduel manipulé après l'étape k.
Notons χ_k le circuit utilisé pour passer de G_k à G_{k+1} et γ_k sa valeur.
On a donc

$$c(f_{k+1}) = c(f_k) + \gamma_k c(\chi_k).$$

Nous notons $\mu_k = \frac{c(\chi_k)}{|\chi_k|}$ le coût moyen du circuit utilisé à l'étape k.

À cause des règles de l'algorithme, ce coût est toujours strictement négatif (Attention, il faudra s'en souvenir dans les inégalités quand on multiplie par μ_k !).

Vers la construction d'un variant de boucle

Lemme
On a, pour tout entier k et si les valeurs sont définies,

1. $\mu_k \leq \mu_{k+1}$
2. $\left(1 - \frac{2}{n}\right) \mu_k \leq \mu_{k+m}$ *(où $m = |E|$)*

Vers la construction d'un variant de boucle

Lemme
On a, pour tout entier k et si les valeurs sont définies,

1. $\mu_k \leq \mu_{k+1}$
2. $\left(1 - \frac{2}{n}\right) \mu_k \leq \mu_{k+m}$ *(où $m = |E|$)*

Caveat
Avec des coûts réels, ceci ne prouve rien sur la terminaison !

Vers la construction d'un variant de boucle : preuve 1

La preuve ne dépend par de la valeur de k. Nous détaillons chaque point en se limitant au cas $k = 0$.

Vers la construction d'un variant de boucle : preuve 1

La preuve ne dépend par de la valeur de k. Nous détaillons chaque point en se limitant au cas $k = 0$.

La valeur μ_0 est le plus petit réel tel que, en translatant c par μ_0, les coûts deviennent conservatifs. Mais alors, il existe un potentiel $p : V \to \mathbb{R}$ tel que

$$\forall e = uv \in E, \quad c(e) - \mu_0 + p(u) - p(v) \geq 0$$

Vers la construction d'un variant de boucle : preuve 1

La preuve ne dépend par de la valeur de k. Nous détaillons chaque point en se limitant au cas $k = 0$.

La valeur μ_0 est le plus petit réel tel que, en translatant c par μ_0, les coûts deviennent conservatifs. Mais alors, il existe un potentiel $p : V \to \mathbb{R}$ tel que

$$\forall e = uv \in E, \quad c(e) - \mu_0 + p(u) - p(v) \geq 0$$

Sans perte de généralité, on raisonne sur le coût réduit c_p. D'ailleurs, l'algorithme s'exécuterait identiquement avec c_p.

Vers la construction d'un variant de boucle : preuve 1

La preuve ne dépend par de la valeur de k. Nous détaillons chaque point en se limitant au cas $k = 0$.

La valeur μ_0 est le plus petit réel tel que, en translatant c par μ_0, les coûts deviennent conservatifs. Mais alors, il existe un potentiel $p : V \to \mathbb{R}$ tel que

$$\forall e = uv \in E, \quad c(e) - \mu_0 + p(u) - p(v) \geq 0$$

Sans perte de généralité, on raisonne sur le coût réduit c_p. D'ailleurs, l'algorithme s'exécuterait identiquement avec c_p.

Bref, nous pouvons raisonner dans le cas où :

$$\forall e = uv \in E, \quad c(e) \geq \mu_0 \tag{1}$$

et, pour tout arc $e \in \chi_0$, on a l'égalité $c(e) = \mu_0$.

Vers la construction d'un variant de boucle : preuve 2

Les arêtes du graphe $G_1 = (V, E_1)$ viennent soit de E_0, soit de $\overleftarrow{\chi_0}$. Dans le premier cas, nous savons que $c(e) \geq \mu_0$; dans le second, nous avons $c(\overleftarrow{e}) = \mu_0$, donc $c(e) = -\mu_0 \geq \mu_0$ (car $\mu_0 < 0$).

Vers la construction d'un variant de boucle : preuve 2

Les arêtes du graphe $G_1 = (V, E_1)$ viennent soit de E_0, soit de $\overleftarrow{\chi_0}$. Dans le premier cas, nous savons que $c(e) \geq \mu_0$; dans le second, nous avons $c(\overleftarrow{e}) = \mu_0$, donc $c(e) = -\mu_0 \geq \mu_0$ (car $\mu_0 < 0$).

Le coût moyen d'un circuit dans G_1 est donc supérieur à μ_0 et on a bien $\mu_1 \geq \mu_0$.

Ceci montre le point 1.

Vers la construction d'un variant de boucle : preuve 3

Lorsqu'on passe de G_0 à G_m, on supprime toujours au moins un arc du circuit employé pour l'augmentation. Par conséquent, il y a parmi les circuits χ_1, ..., χ_m au moins deux d'entre eux, disons les circuits χ_h et $\chi_{h'}$, qui contiennent un arc a dans l'un et son opposé $\overleftarrow{a}$ dans l'autre.

Vers la construction d'un variant de boucle : preuve 3

Lorsqu'on passe de G_0 à G_m, on supprime toujours au moins un arc du circuit employé pour l'augmentation. Par conséquent, il y a parmi les circuits χ_1, ..., χ_m au moins deux d'entre eux, disons les circuits χ_h et $\chi_{h'}$, qui contiennent un arc a dans l'un et son opposé $\overleftarrow{a}$ dans l'autre.

Nous choisissons h' aussi petit que possible, de sorte que les arcs de $\chi_{h'}$ viennent soit de E_h soit de $\overleftarrow{\chi_h}$.

Vers la construction d'un variant de boucle : preuve 3

Lorsqu'on passe de G_0 à G_m, on supprime toujours au moins un arc du circuit employé pour l'augmentation. Par conséquent, il y a parmi les circuits χ_1, ..., χ_m au moins deux d'entre eux, disons les circuits χ_h et $\chi_{h'}$, qui contiennent un arc a dans l'un et son opposé $\overleftarrow{a}$ dans l'autre.

Nous choisissons h' aussi petit que possible, de sorte que les arcs de $\chi_{h'}$ viennent soit de E_h soit de $\overleftarrow{\chi_h}$.

Identiquement à la preuve de 1, nous nous ramenons au cas où les arcs de χ_h sont de coût μ_h et celle de $\chi_{h'}$ sont de coût $\geq \mu_h$ en général et de coût $-\mu_h$ pour $\overleftarrow{a}$. Mais alors,

$$\mu_{h'} = \frac{c(\chi_{h'})}{|\chi_{h'}|} \geq \frac{(|\chi_{h'}| - 1)\mu_h - \mu_h}{|\chi_{h'}|} \geq \left(1 - \frac{2}{n}\right) \mu_h$$

Calculs administratifs

Posons $t = nm\lceil \ln n \rceil$.

À cause du lemme, en utilisant la majoration classique $\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} < e^{-1}$ avec $\alpha = \frac{n}{2}$, on a

$$0 > \mu_t \geq \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n\lceil \ln n \rceil} \mu_0 \geq e^{-2\lceil \ln n \rceil}\mu_0$$

et encore, en relâchant la majoration, on peut encore écrire :

$$0 > \mu_t \geq \frac{1}{2n}\mu_0.$$

Le lemme du non retour des arcs

Lemme
Pour tout indice i, il existe un arc a dans le circuit χ_k *qui ne réapparait plus dans les circuit* χ_h *pour* $h \geq k + t$.

Le lemme du non retour des arcs (preuve)

Preuve du lemme (pour $k = 0$).
WLOG, comme avant, les arcs de $c(\chi_0)$ sont de coût μ_0 et $\mu_0 \leq 2n\mu_t$.

Le lemme du non retour des arcs (preuve)

Preuve du lemme (pour $k = 0$).
WLOG, comme avant, les arcs de $c(\chi_0)$ sont de coût μ_0 et $\mu_0 \leq 2n\mu_t$.

Fixons un arc $a_0 \in \chi_0$ et supposons que les flots résiduels évoluent : pour un certain $h > t$, $f_h(a_0) \neq f_t(a_0)$. Comme $c(a_0) < 2n\mu_t$, on a encore $c(a_0) < \mu_t$. A cause de l'équation clé, a_0 n'appartient pas au graphe résiduel G_t, i.e. $f_t(a_0) = c(a_0)$. Ainsi $f_h(a_0) < f_t(a_0)$.

Le lemme du non retour des arcs (preuve)

Preuve du lemme (pour $k = 0$).
WLOG, comme avant, les arcs de $c(\chi_0)$ sont de coût μ_0 et $\mu_0 \leq 2n\mu_t$.

Fixons un arc $a_0 \in \chi_0$ et supposons que les flots résiduels évoluent : pour un certain $h > t$, $f_h(a_0) \neq f_t(a_0)$. Comme $c(a_0) < 2n\mu_t$, on a encore $c(a_0) < \mu_t$. A cause de l'équation clé, a_0 n'appartient pas au graphe résiduel G_t, i.e. $f_t(a_0) = c(a_0)$. Ainsi $f_h(a_0) < f_t(a_0)$.

La fonction $f_t - f_h$ est une circulation et se décompose en somme sur des circuits. Ceci prouve que E_h contient un circuit χ qui utilise l'arc a_0 tel que E_t contient $\overleftarrow{\chi}$. Or, pour tout arc e de χ, $-c(e) = c(\overleftarrow{e}) \geq \mu_t$.

Ceci conduit à

$$c(\chi) = c(a_0) + c(\chi \setminus a) < 2n\mu_t - (|\chi| - 1)\mu_t \leq n\mu_t \leq n\mu_h \leq |\chi|\mu_h$$

ce qui contredit la minimalité de μ_t. $\square$

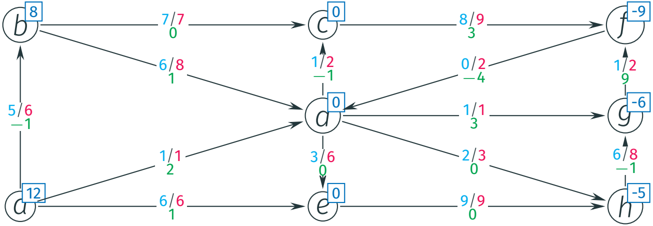
Fin de la preuve

Comme E et $\overleftarrow{E}$ contiennent m arcs, le lemme implique que le nombre d'itérations est au plus $4mt$.

Correction

Théorème
L'algorithme de calcul du flot de coût minimum par élimination des circuits de coût moyen minimum revoie une réponse correcte en temps $O(n^2 m^3 \lceil \ln n \rceil)$.

Le flot étant



Le graphe résiduel est

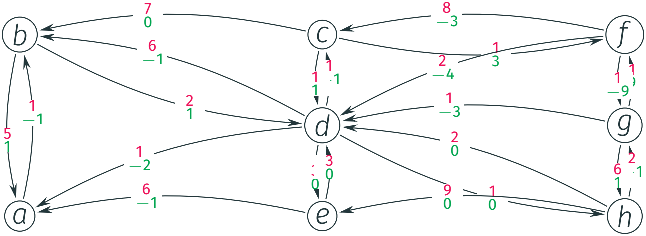
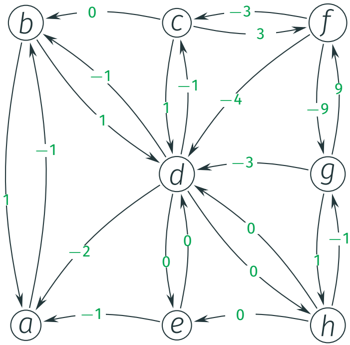


Illustration : itération nº 1, circuit de coût moyen minimum



$$M = \min_{v \in V} M_v \text{ où } M_v = \max_{k \in [\![0, n-1]\!]} \frac{d_n(v) - d_k}{n - k}$$

k	a	b	c	d	e	f	g	h
d_0	0	0	0	0	0	0	0	0
d_1	−2	−1	−3	−4	0	3	−9	0
p_1	d	a	f	f	d	c	f	d
d_2	−6	−5	−5	−12	−4	0	−6	−8
p_2	d	d	d	g	d	c	f	g
d_3	−14	−13	−13	−9	−12	−2	−9	−12
p_3	d	d	d	g	d	c	h	d
d_4	−13	−15	−10	−12	−12	−10	−13	−9
p_4	e	a	d	b	h	c	h	d
d_5	−14	−14	−13	−16	−12	−7	−19	−12
p_5	b	a	d	g	d	c	f	d
d_6	−18	−17	−17	−22	−16	−10	−16	−18
p_6	d	d	d	g	d	c	f	g
d_7	−24	−23	−23	−19	−22	−14	−19	−22
p_7	d	d	d	g	d	c	h	d
d_8	−23	−25	−20	−22	−22	−20	−23	−19
p_8	e	a	d	b	h	c	h	d
M_v	1	−2	3	0	0	−5/2	−4/3	3

$P(f) = f - g - d - c - f - g - d - c - f$ donne le circuit

$\chi = f - g - d - c - f$ de coût $c(\chi) = -10 < 0$.

Illustration : itération nº 2

L'ancien flot étant, avant augmentation,

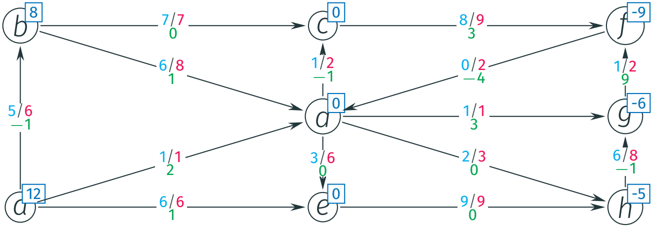


Illustration : itération nº 2

L’ancien flot étant, avant augmentation,

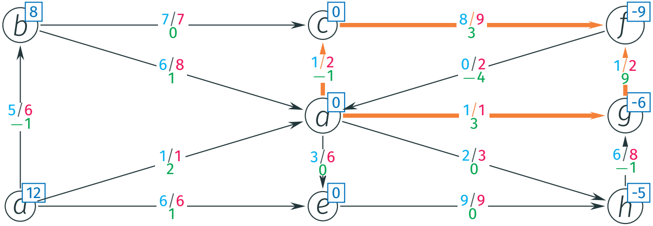


Illustration : itération nº 2

Le nouveau flot est, après augmentation de $\gamma = 1$ le long du circuit $f - g - d - c - f$, de coût $c(f) = 28$.

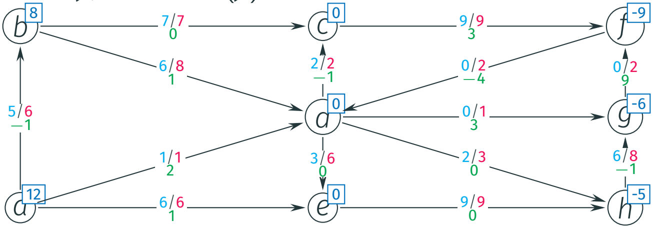
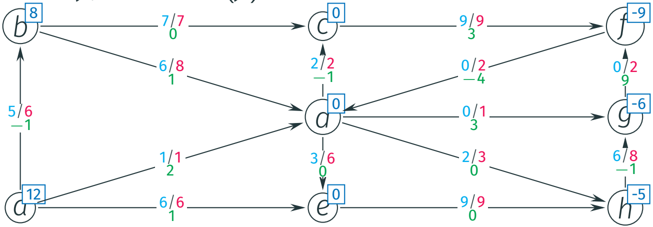


Illustration : itération nº 2

Le nouveau flot est, après augmentation de $\gamma = 1$ le long du circuit $f - g - d - c - f$, de coût $c(f) = 28$.



le graphe résiduel G_f devient

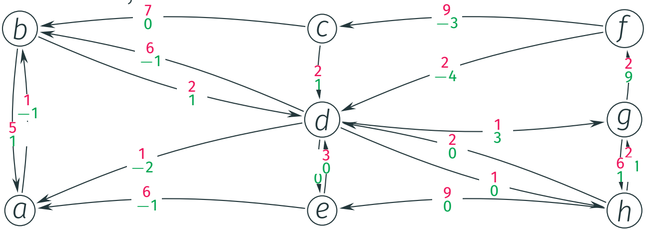
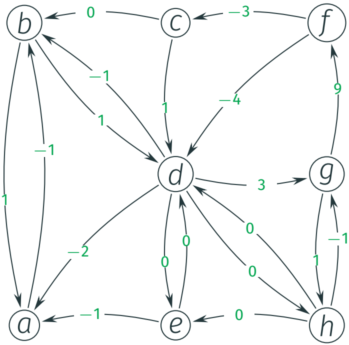


Illustration : itération nº 2, circuit de coût moyen minimum



$$M = \min_{v \in V} M_v \text{ où } M_v = \max_{k \in [\![0, n-1]\!]} \frac{d_n(v) - d_k}{n - k}$$

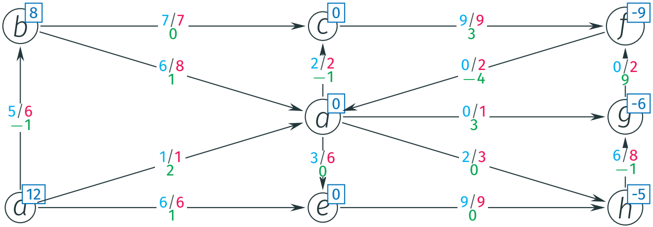
k	a	b	c	d	e	f	g	h
d_0	0	0	0	0	0	0	0	0
d_1	−2	−1	−3	−4	0	9	−1	0
p_1	d	a	f	f	d	g	h	d
d_2	−6	−5	6	−2	−4	8	−1	−4
p_2	d	d	f	c	d	g	d	d
d_3	−5	−7	5	−4	−4	8	−5	−2
p_3	e	a	f	b	h	g	h	d
d_4	−6	−6	5	−6	−4	4	−3	−4
p_4	b	a	f	b	d	g	h	d
d_5	−8	−7	1	−5	−6	6	−5	−6
p_5	d	a	f	b	d	g	h	d
d_6	−7	−9	3	−6	−6	4	−7	−5
p_6	d	a	f	b	h	g	h	d
d_7	−8	−8	1	−8	−6	2	−6	−6
p_7	b	a	f	b	d	g	h	d
d_8	−10	−9	−1	−7	−8	3	−7	−8
p_8	d	a	f	b	d	g	h	d
M_v	−2/3	0	2/7	1	−2/3	1	0	−2/3

$P(h) = f - d - a - b - d - a - b - d - h$ donne le

circuit $\chi = d - a - b - d$ de coût $c(\chi) = -2 < 0$.

Illustration : itération nº 3

L'ancien flot étant, avant augmentation,



L'ancien flot étant, avant augmentation,

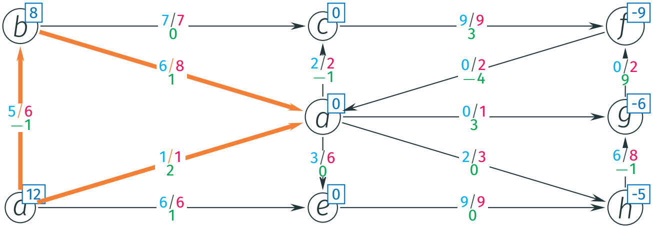
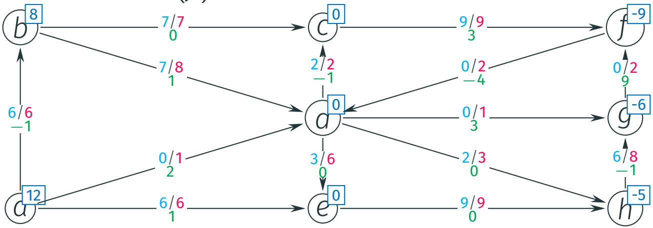
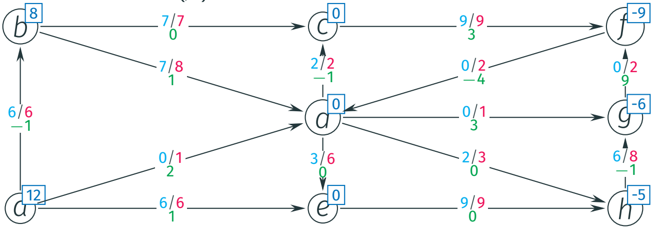


Illustration : itération nº 3

Le nouveau flot est, après augmentation de $\gamma = 1$, le long du circuit $d - a - b - d$ de coût $c(f) = 26$.



Le nouveau flot est, après augmentation de $\gamma = 1$, le long du circuit $d - a - b - d$ de coût $c(f) = 26$.



le graphe résiduel G_f devient

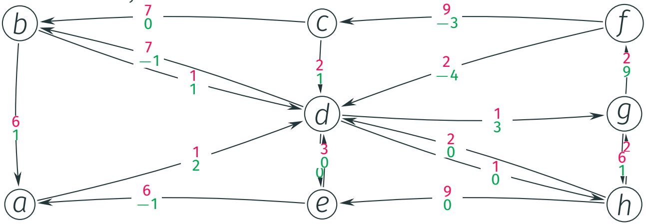
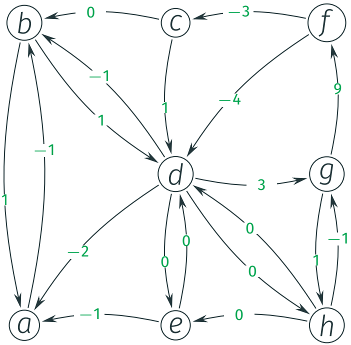


Illustration : itération n° 3, circuit de coût moyen minimum



$$M = \min_{v \in V} M_v \text{ où } M_v = \max_{k \in [\![0, n-1]\!]} \frac{d_n(v) - d_k}{n - k}$$

k	a	b	c	d	e	f	g	h
d_0	0	0	0	0	0	0	0	0
d_1	−1	−1	−3	−4	0	9	−1	0
p_1	e	d	f	f	d	g	h	d
d_2	−1	−5	6	−2	−4	8	−1	−4
p_2	e	d	f	c	d	g	d	d
d_3	−5	−3	5	−4	−4	8	−5	−2
p_3	e	d	f	b	h	g	h	d
d_4	−5	−5	5	−4	−4	4	−3	−4
p_4	e	d	f	e	d	g	h	d
d_5	−5	−5	1	−4	−4	6	−5	−4
p_5	e	d	f	b	d	g	h	d
d_6	−5	−5	3	−4	−4	4	−5	−4
p_6	e	d	f	b	d	g	h	d
d_7	−5	−5	1	−4	−4	4	−5	−4
p_7	e	d	f	b	d	g	h	d
d_8	−5	−5	1	−4	−4	4	−5	−4
p_8	e	d	f	b	d	g	h	d
M_v	0	0	4/7	0	0	1/2	0	0

Il n'y a plus de circuit de coût < 0. Le coût optimum est atteint.

Plus courts chemins

Conservation de la minimalité des coûts par plus courts chemins

Proposition
Soit (G, u, b, c) une instance du problème de flot de coût minimum et f un b-flot de coût minimum. Soit Γ un plus court chemin (au sens des coûts c) allant d'un certain sommet s à un certain sommet t. Soit f' le flot obtenu en augmentant f le long de Γ par une certaine valeur γ. Alors, en posant $b : V\mathbb{R}$ avec

$$\begin{array}{rrcl} \forall v \in V \setminus \{s, t\}, & b'(v) & = & b(v) \\ & b'(s) & = & b(s) - \gamma \\ & b'(t) & = & b(t) + \gamma \end{array}$$

le flot f' est un b'-flot de coût minimum dans (G, u, b', c).

Conservation de la minimalité des coûts : preuve

Comme f est minimum, le graphe résiduel G_f ne contient pas de circuits absorbant pour c_f. Mais alors il existe un potentiel $p : V \to \mathbb{R}$ réalisable pour c. Quitte à modifier p sur l'ensemble des sommets accessibles depuis s, nous supposons de plus que p coïncide avec $\mathrm{dist}_c(s, v)$ là où cette distance est finie.

Conservation de la minimalité des coûts : preuve

Comme f est minimum, le graphe résiduel G_f ne contient pas de circuits absorbant pour c_f. Mais alors il existe un potentiel $p : V \to \mathbb{R}$ réalisable pour c. Quitte à modifier p sur l'ensemble des sommets accessibles depuis s, nous supposons de plus que p coïncide avec $\mathrm{dist}_c(s, v)$ là où cette distance est finie.

Montrons que p est encore un potentiel réalisable dans le graphe $G_{f'}$.

Conservation de la minimalité des coûts : preuve

Comme f est minimum, le graphe résiduel G_f ne contient pas de circuits absorbant pour c_f. Mais alors il existe un potentiel $p : V \to \mathbb{R}$ réalisable pour c. Quitte à modifier p sur l'ensemble des sommets accessibles depuis s, nous supposons de plus que p coïncide avec $\mathrm{dist}_c(s, v)$ là où cette distance est finie.

Montrons que p est encore un potentiel réalisable dans le graphe $G_{f'}$.
Soit $e = uv$ un arc de $G_{f'}$:
Si $e \in G_f$, rien ne change et $c(e) + p(u) - p(v) \geq 0$.
Si $e \notin G_f$, alors $\overleftarrow{e}$ est dans Γ, donc $c(\overleftarrow{e}) = p(u) - p(v)$. Mais $c(\overleftarrow{e}) = -c(e)$. Donc $c(e) + p(u) - p(v) \geq 0$ comme voulu.

Conservation de la minimalité des coûts : preuve

Comme f est minimum, le graphe résiduel G_f ne contient pas de circuits absorbant pour c_f. Mais alors il existe un potentiel $p : V \to \mathbb{R}$ réalisable pour c. Quitte à modifier p sur l'ensemble des sommets accessibles depuis s, nous supposons de plus que p coïncide avec $\mathrm{dist}_c(s, v)$ là où cette distance est finie.

Montrons que p est encore un potentiel réalisable dans le graphe $G_{f'}$.
Soit $e = uv$ un arc de $G_{f'}$:
Si $e \in G_f$, rien ne change et $c(e) + p(u) - p(v) \geq 0$.
Si $e \notin G_f$, alors $\overleftarrow{e}$ est dans Γ, donc $c(\overleftarrow{e}) = p(u) - p(v)$. Mais $c(\overleftarrow{e}) = -c(e)$. Donc $c(e) + p(u) - p(v) \geq 0$ comme voulu.

Donc p est encore réalisable dans $G_{f'}$, et $G_{f'}$ ne possède pas de circuit absorbant pour $c_{f'}$. Ainsi f' est de coût minimum.

Identification d'un circuit de coût moyen minimum : algorithme

Algorithme 4 : Algorithme par plus courts chemins

Entrées : Graphe orienté $G = (V, E)$, capacité $u : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, offres et demandes $b : V \to \mathbb{R}$ telle que $\sum_{v \in V} b(v) = 0$, coûts $c : E \to \mathbb{R}$ conservatifs.

Sorties : b-flot f de coût $c(f)$ minimum

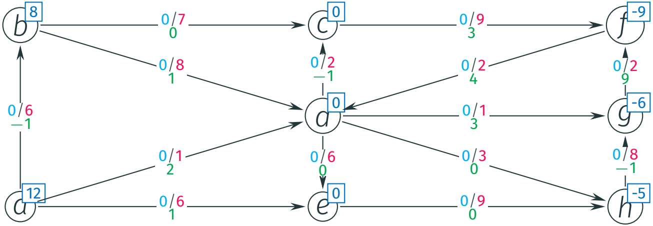
```
Initialiser b' ← b et f ← 0_{E→ℝ}.
répéter
    Choisir un sommet s avec b'(s) > 0
    Choisir un sommet t avec b'(t) < 0
    Calculer un plus court chemin Γ de s vers t
    si t n'existe pas alors
        Il n'y a pas de b-flot.
    Calculer γ ← min( min_{e∈Γ} u_f(e), b'(s), −b'(t) )
    Augmenter f le long de Γ de γ.
    b'(s) ← b'(s) − γ, b'(t) ← b'(t) + γ,
jusqu'à b' est tout à zéro;
retourner f
```

Identification d'un circuit de coût moyen minimum : complexité

Théorème
Si les capacités u et les demandes ou offres b sont toutes entières, l'algorithme par les plus courts chemins successifs peut s'exécuter en temps $O(nm + (m + n \log n)B)$ où $B = \sum_{v \in V, b(v) > 0} b(v)$.

Illustration : itération nº 1

Le flot étant



Le graphe résiduel est

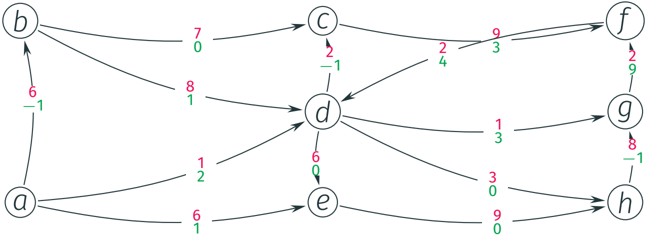
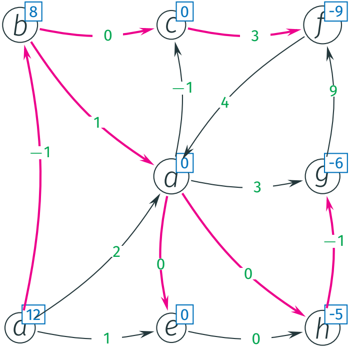


Illustration : itération n° 1, plus court chemin depuis une offre



Le sommet a est un sommet d'offre ($b(a) > 0$). On repère un plus court chemin vers f qui est en demande.

Illustration : itération n° 2

L’ancien flot est

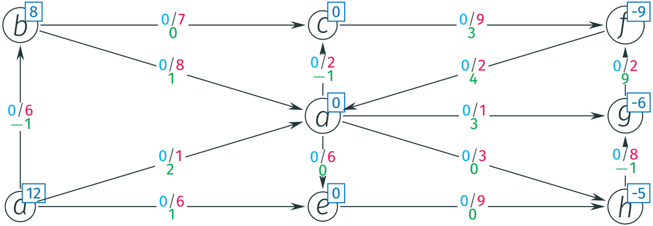


Illustration : itération nº 2

L'ancien flot est

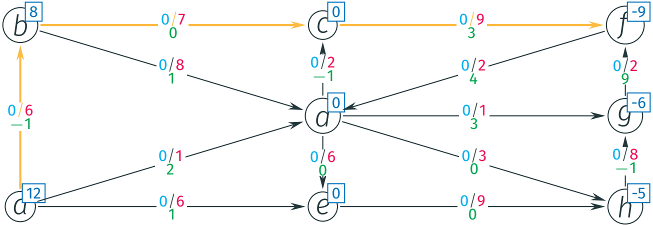


Illustration : itération nº 2

Le nouveau flot est

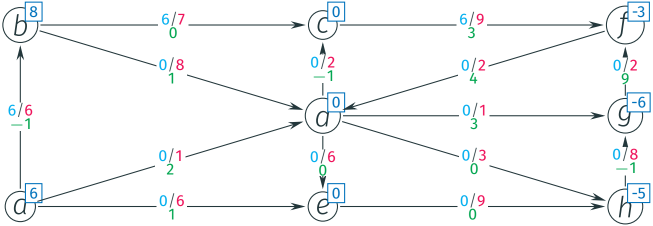
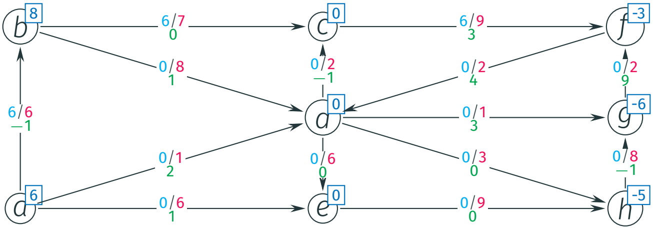


Illustration : itération nº 2

Le nouveau flot est



Le graphe résiduel est

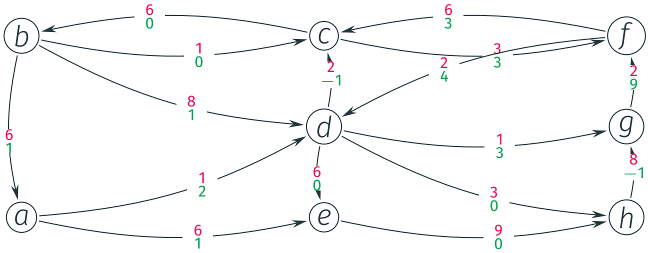
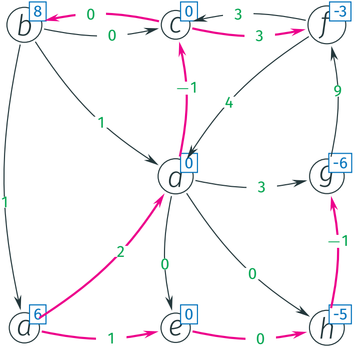


Illustration : itération nº 2, plus court chemin depuis une offre



Le sommet a est un sommet d'offre ($b(a) > 0$). On repère un plus court chemin vers f qui est en demande.

Illustration : itération nº 3

L’ancien flot est

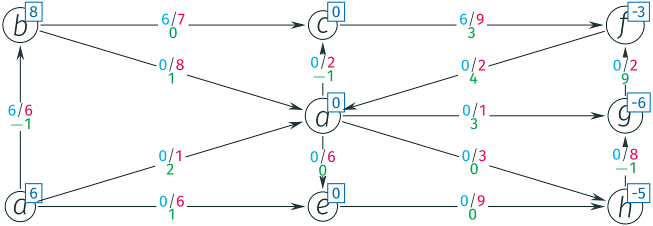
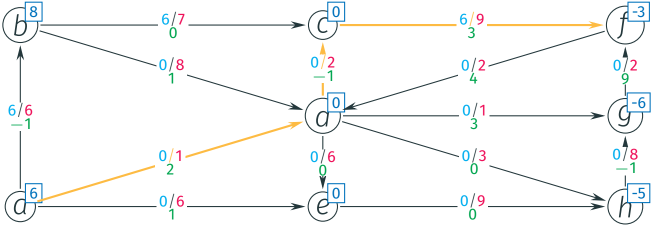


Illustration : itération nº 3

L'ancien flot est



Le nouveau flot est

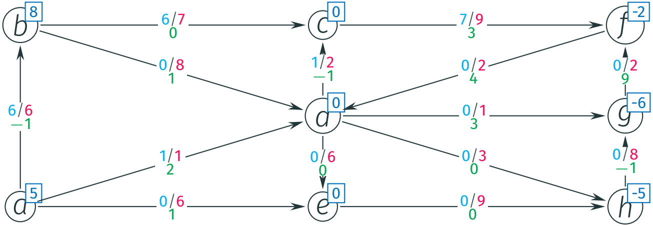
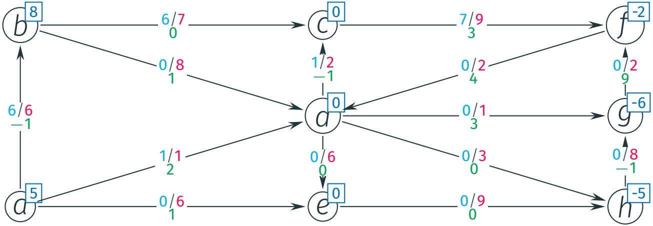


Illustration : itération nº 3

Le nouveau flot est



Le graphe résiduel est

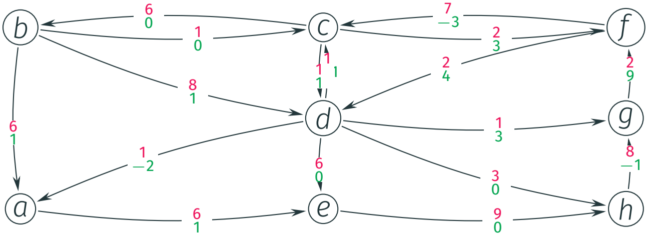
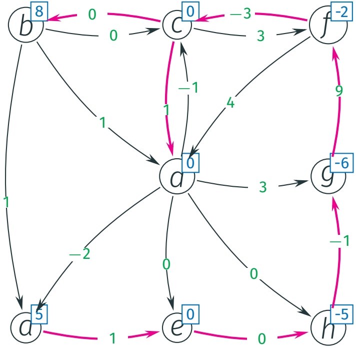


Illustration : itération n° 3, plus court chemin depuis une offre



Le sommet a est un sommet d'offre ($b(a) > 0$). On repère un plus court chemin vers h qui est en demande.

L'ancien flot est

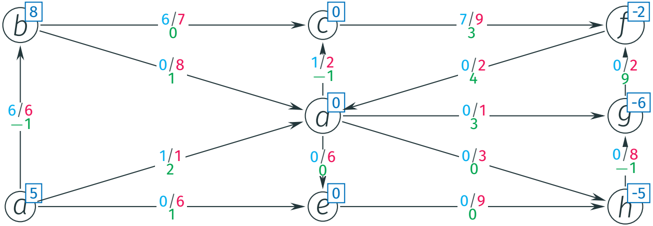


Illustration : itération nº 4

L'ancien flot est

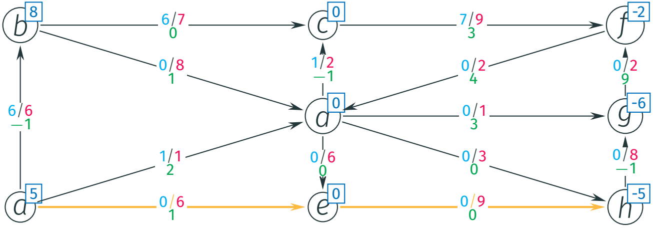
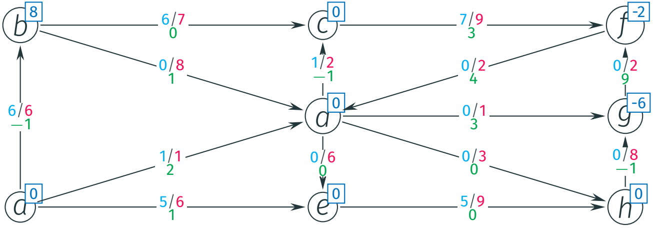
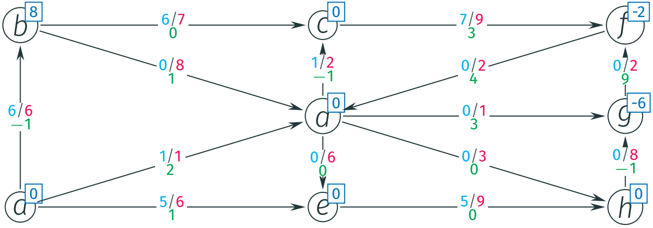


Illustration : itération nº 4

Le nouveau flot est



Le nouveau flot est



Le graphe résiduel est

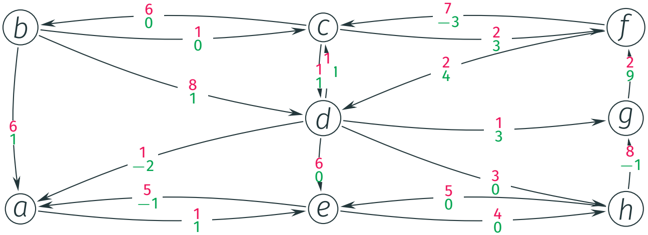
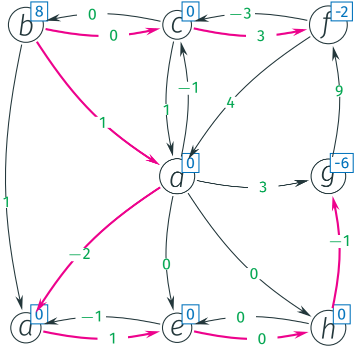


Illustration : itération nº 4, plus court chemin depuis une offre



Le sommet b est un sommet d'offre ($b(b) > 0$). On repère un plus court chemin vers f qui est en demande. On repère de même à l'étape suivante un chemin allant de b vers g.

Illustration : itération nº 6

L'ancien flot est

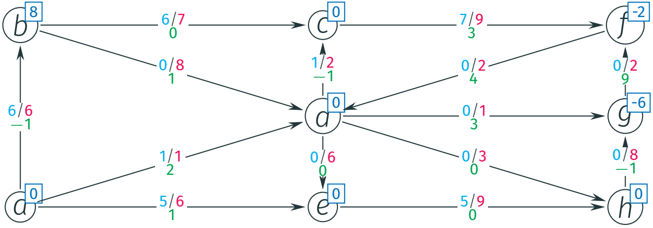


Illustration : itération nº 6

L’ancien flot est

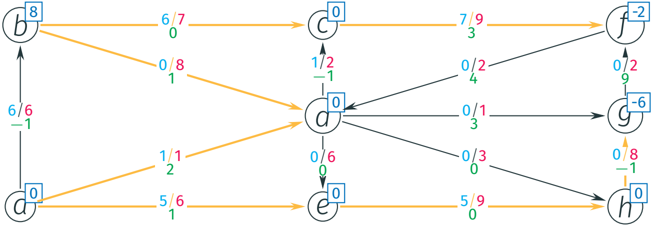


Illustration : itération n° 6

Le nouveau flot est

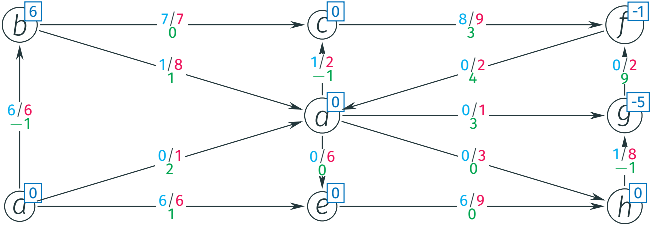
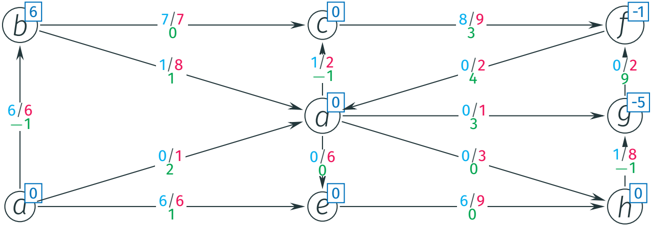


Illustration : itération nº 6

Le nouveau flot est



Le graphe résiduel est

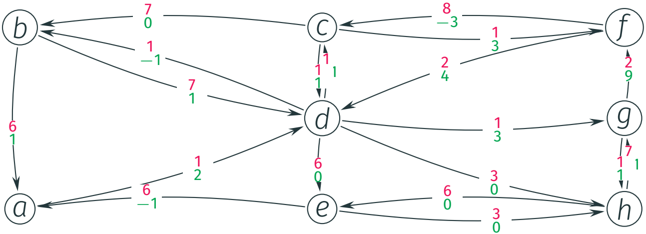
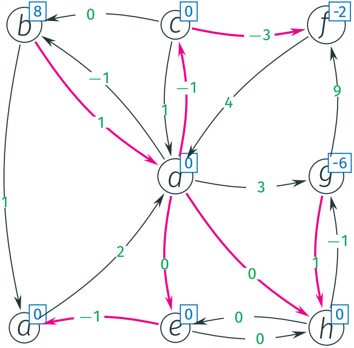


Illustration : itération nº 6, plus court chemin depuis une offre



Le sommet b est un sommet d'offre ($b(b) > 0$). On repère un plus court chemin vers f qui est en demande. On repère de même à l'étape suivante un chemin allant de b vers g.

Illustration : itération n° 8

L'ancien flot est

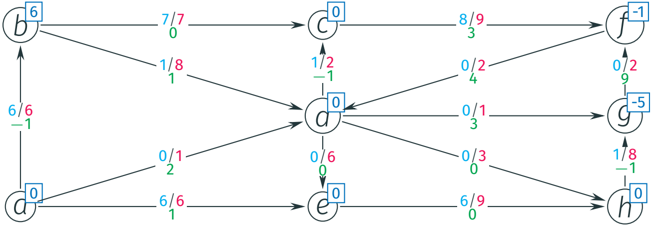


Illustration : itération n° 8

L'ancien flot est

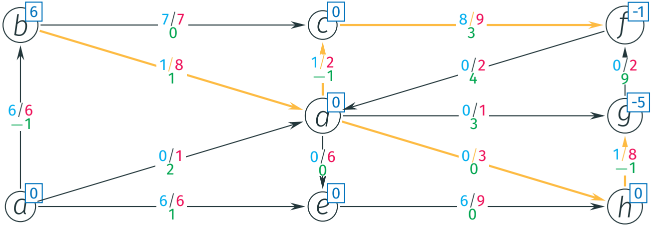
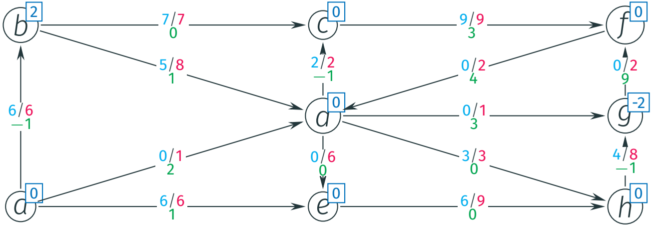
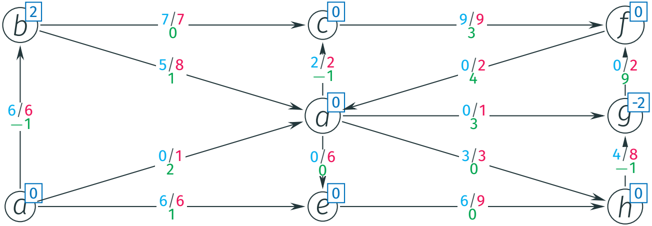


Illustration : itération nº 8

Le nouveau flot est



Le nouveau flot est



Le graphe résiduel est

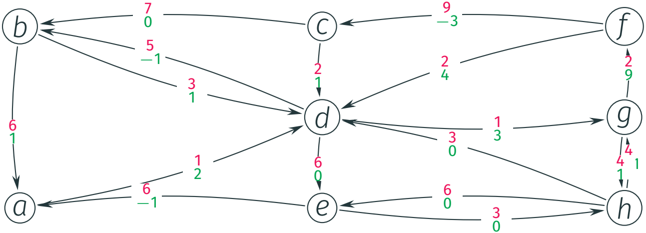
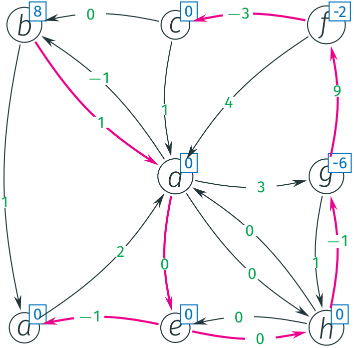


Illustration : itération nº 8, plus court chemin depuis une offre



Le sommet b est un sommet d'offre ($b(b) > 0$). On repère un plus court chemin vers f qui est en demande. On repère de même à l'étape suivante un chemin allant de b vers g.

Illustration : itération n° 9

L'ancien flot est

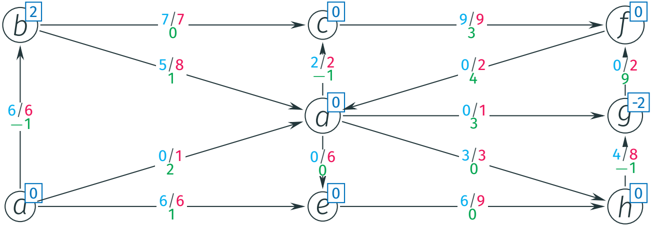


Illustration : itération nº 9

L'ancien flot est

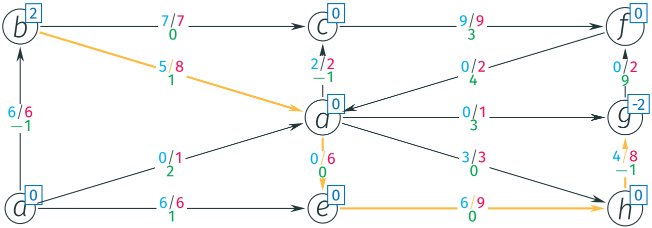


Illustration : itération nº 9

Le nouveau flot est

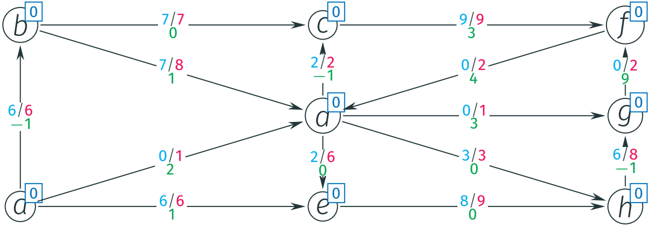
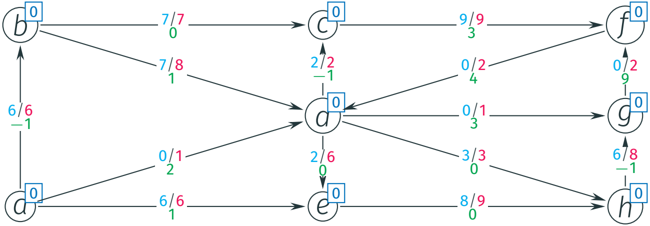


Illustration : itération n° 9

Le nouveau flot est



Il n'y a plus d'offre ni de demande. Le flot optimal est de coût 26.

Améliorations finales : état de l'art

On peut améliorer l'algorithme par plus courts chemins :

- Se ramener au cas sans capacités (i.e. $u \equiv \infty$)
- Poser $\gamma = 2^{\lfloor \max_{v \in V} |b(v)| \rfloor}$.
- Rechercher des plus courts chemins entre sommets s et t avec $|b(s)|, |b(t)| \geq \gamma$
- Réduire progressivement γ par des divisons ($\gamma \leftarrow \gamma/2$).

On obtient une complexité en $O\left(n(m + n \log n) \log \|b\|_\infty\right)$.

Améliorations finales : état de l'art

On peut améliorer l'algorithme par plus courts chemins :

- Se ramener au cas sans capacités (i.e. $u \equiv \infty$)
- Poser $\gamma = 2^{\lfloor \max_{v \in V} |b(v)| \rfloor}$.
- Rechercher des plus courts chemins entre sommets s et t avec $|b(s)|, |b(t)| \geq \gamma$
- Réduire progressivement γ par des divisons ($\gamma \leftarrow \gamma/2$).

On obtient une complexité en $O\left(n(m + n \log n) \log \|b\|_\infty\right)$.

- Éliminer des arcs « chargés ».

On obtient une complexité en $O\left(n \log m(m + n \log n)\right)$ (algorithme d'Orlin).