

CSC-4MI13 : Perles de programmation de structures de données et d'algorithmes

Les matroïdes

Bertrand Meyer

7 octobre 2024

Les matroïdes

Motivations informatiques

Problème d'optimisation combinatoire classique

Soit E un ensemble, $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction poids. On étend w à

$$\forall X \subseteq E, \quad w(X) = \sum_{e \in X} w(e).$$

Trouver un sous-ensemble $I \in 2^E$ qui maximise $w(I)$ et qui obéit à « certaines contraintes » d'admissibilité.

Systèmes d'indépendance

Définition

Un **système d'indépendance** est un couple $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$ formé d'un *ensemble de base* E et d'une *collection d'ensembles indépendants* $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ tels que

Systèmes d'indépendance

Définition

Un **système d'indépendance** est un couple $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$ formé d'un *ensemble de base* E et d'une *collection d'ensembles indépendants* $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ tels que

Vide : $\emptyset \in \mathcal{I}$;

Systèmes d'indépendance

Définition

Un **système d'indépendance** est un couple $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$ formé d'un *ensemble de base* E et d'une *collection d'ensembles indépendants* $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ tels que

Vide : $\emptyset \in \mathcal{I}$;

Hérité : si $A \in \mathcal{I}$ et si $A' \subseteq A$, alors $A' \in \mathcal{I}$;

Systèmes d'indépendance

Définition

Un **système d'indépendance** est un couple $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$ formé d'un *ensemble de base* E et d'une *collection d'ensembles indépendants* $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ tels que

Vide : $\emptyset \in \mathcal{I}$;

Hérité : si $A \in \mathcal{I}$ et si $A' \subseteq A$, alors $A' \in \mathcal{I}$;

Vocabulaire

Un **dépendant** est un élément de $2^E \setminus \mathcal{I}$.

Systèmes d'indépendance

Définition

Un **système d'indépendance** est un couple $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$ formé d'un *ensemble de base* E et d'une *collection d'ensembles indépendants* $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ tels que

Vide : $\emptyset \in \mathcal{I}$;

Hérité : si $A \in \mathcal{I}$ et si $A' \subseteq A$, alors $A' \in \mathcal{I}$;

Vocabulaire

Un **dépendant** est un élément de $2^E \setminus \mathcal{I}$.

Une **base** est un élément maximal dans (\mathcal{I}, \subseteq) .

Systèmes d'indépendance

Définition

Un **système d'indépendance** est un couple $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$ formé d'un *ensemble de base* E et d'une *collection d'ensembles indépendants* $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ tels que

Vide : $\emptyset \in \mathcal{I}$;

Hérité : si $A \in \mathcal{I}$ et si $A' \subseteq A$, alors $A' \in \mathcal{I}$;

Vocabulaire

Un **dépendant** est un élément de $2^E \setminus \mathcal{I}$.

Une **base** est un élément maximal dans (\mathcal{I}, \subseteq) .

Un **circuit** est élément minimal dans $(2^E \setminus \mathcal{I}, \subseteq)$.

Rang et fermeture

Définition

Soit (E, \mathcal{I}) un système d'indépendance. Le **rang** est l'application

$$\text{rg} : \begin{cases} 2^E & \rightarrow \mathbb{N} \\ X & \mapsto \max\{|I| ; I \in \mathcal{I}, I \subseteq X\} \end{cases}$$

Rang et fermeture

Définition

Soit (E, \mathcal{I}) un système d'indépendance. Le **rang** est l'application

$$\text{rg} : \begin{cases} 2^E & \rightarrow \mathbb{N} \\ X & \mapsto \max\{|I|; I \in \mathcal{I}, I \subseteq X\} \end{cases}$$

La **fermeture** de l'ensemble X est

$$\sigma : \begin{cases} 2^E & \rightarrow 2^E \\ X & \mapsto \{y \in E; \text{rg}(X \cup \{y\}) = \text{rg}(X)\} \end{cases}$$

Matroïdes

Définition

Un matroïde est un système d'indépendance $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$ tels que

Augmentation : si $A, B \in \mathcal{I}$ et $|A| < |B|$, alors

$$\exists x \in B \setminus A \text{ tel que } A + x := A \cup \{x\} \in \mathcal{I}.$$

Matroïdes

1935



Hassler Whitney (1907+89)
papa des matroïdes

Définition

Un matroïde est un système d'indépendance $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$ tels que

Augmentation : si $A, B \in \mathcal{I}$ et $|A| < |B|$, alors

$$\exists x \in B \setminus A \text{ tel que } A + x := A \cup \{x\} \in \mathcal{I}.$$

Remarque

En pratique, on souhaite que \mathcal{I} soit donné via un oracle

$$2^E \rightarrow \{\text{Vrai}, \text{Faux}\}$$

qui rend une décision en temps raisonnable (polynomial).

Matroïdes classiques

Le matroïde uniforme $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$

E : ensemble à n éléments.

\mathcal{I} : choix de $\leq k$ éléments de E .

Matroïdes classiques

Le matroïde uniforme $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$

E : ensemble à n éléments.

\mathcal{I} : choix de $\leq k$ éléments de E .

Cas $n = 4, k = 2$

$$E = \{1, 2, 3, 4\}$$

Matroïdes classiques

Le matroïde uniforme $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$

E : ensemble à n éléments.

\mathcal{I} : choix de $\leq k$ éléments de E .

Cas $n = 4, k = 2$

$$E = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\mathcal{I} = \{\emptyset,$$

Matroïdes classiques

Le matroïde uniforme $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$

E : ensemble à n éléments.

\mathcal{I} : choix de $\leq k$ éléments de E .

Cas $n = 4, k = 2$

$$E = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I} = & \left\{ \emptyset, \right. \\ & \left. \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{3\}, \right.\end{aligned}$$

Matroïdes classiques

Le matroïde uniforme $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$

E : ensemble à n éléments.

\mathcal{I} : choix de $\leq k$ éléments de E .

Cas $n = 4, k = 2$

$$E = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I} = & \left\{ \emptyset, \right. \\ & \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{3\}, \\ & \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \\ & \left. \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\} \right\}\end{aligned}$$

Matroïdes classiques

Le matroïde uniforme $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$

E : ensemble à n éléments.

\mathcal{I} : choix de $\leq k$ éléments de E .

Cas $n = 4, k = 2$

$$E = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I} = & \left\{ \emptyset, \right. \\ & \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \\ & \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \\ & \left. \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\} \right\}\end{aligned}$$

L'ensemble $\{1, 3, 4\}$ n'est pas indépendant dans le matroïde $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$.

Matroïdes classiques

Le matroïde de partition

E_1, E_2, \dots, E_ℓ : ensembles disjoints à n_1, n_2, \dots, n_ℓ éléments.

\mathcal{I} : choix de $\leq k_i$ éléments de E_i .

Matroïdes classiques

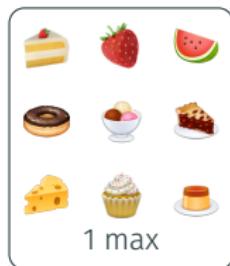
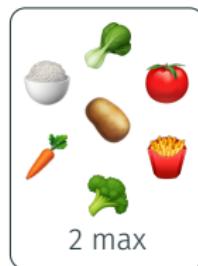
Le matroïde de partition

E_1, E_2, \dots, E_ℓ : ensembles disjoints à n_1, n_2, \dots, n_ℓ éléments.

\mathcal{I} : choix de $\leq k_i$ éléments de E_i .

Exemple : le matroïde de la cantine

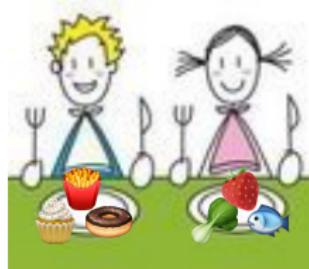
1 entrée, 1 plat, 2 accompagnements et 1 dessert au maximum.



Exercice

Quizz

Voici les plateaux de Serge et de Francine.



Dans le matroïde de la cantine,

Réponse A : les deux plateaux sont indépendants

Réponse B : seul le plateau de Serge est indépendant.

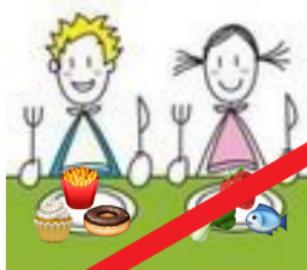
Réponse C : seul le plateau de Francine est indépendant.

Réponse D : aucun plateau n'est indépendant.

Exercice

Quizz

Voici les plateaux de Serge et de Francine.



Dans le matroïde de la cantine,

Réponse A : les deux plateaux sont indépendants

Réponse B : seul le plateau de Serge est indépendant.

Réponse C : seul le plateau de Francine est indépendant.

Réponse D : aucun plateau n'est indépendant.

Réponse C

Matroïdes classiques

Le matroïde vectoriel

Soit E une famille de vecteurs et \mathcal{I} l'ensemble des sous-familles de E linéairement indépendantes. Alors (E, \mathcal{I}) est un matroïde.

Matroïdes classiques

Le matroïde vectoriel

Soit E une famille de vecteurs et \mathcal{I} l'ensemble des sous-familles de E linéairement indépendantes. Alors (E, \mathcal{I}) est un matroïde.

Exemple : le matroïde des engrais organiques

Composant	💩cow	💩horse	💩chicken	🍯honey	⽊log	Nimbus bone	捐助 fish
Azote	12	13	22	0	4	9	
Phosphore	2	1	11	1	20	10	
Potassium	14	12	17	10	0	5	

$$E = \left\{ \text{cow}, \text{horse}, \text{chicken}, \text{log}, \text{bone}, \text{fish} \right\},$$

Matroïdes classiques

Le matroïde vectoriel

Soit E une famille de vecteurs et \mathcal{I} l'ensemble des sous-familles de E linéairement indépendantes. Alors (E, \mathcal{I}) est un matroïde.

Exemple : le matroïde des engrais organiques

Composant	💩cow	💩horse	💩chicken	焜锅	木棍	云骨	粪鱼
Azote	12	13	22	0	4	9	
Phosphore	2	1	11	1	20	10	
Potassium	14	12	17	10	0	5	

$$E = \left\{ \text{cow}, \text{horse}, \text{chicken}, \text{木棍}, \text{云骨}, \text{粪鱼} \right\}, I = \left\{ \text{cow}, \text{木棍}, \text{云骨} \right\} \in \mathcal{I}$$

Intérêt : Pour maîtriser la variation d'apport de chaque composant, un ensemble linéaire indépendant d'engrais suffit.

Matroïdes classiques

Le matroïde vectoriel

Soit E une famille de vecteurs et \mathcal{I} l'ensemble des sous-familles de E linéairement indépendantes. Alors (E, \mathcal{I}) est un matroïde.

Exemple : le matroïde des engrains organiques

Composant	💩cow	💩horse	💩chicken	🍯honey	🥕carrot	☁️cloud	뼈bone	🥔potato	🐟fish
Azote	12	13	22	0	4	9			
Phosphore	2	1	11	1	20	10			
Potassium	14	12	17	10	0	5			

$$E = \left\{ \text{cow}, \text{horse}, \text{chicken}, \text{carrot}, \text{bone}, \text{fish} \right\}, I = \left\{ \text{cow}, \text{carrot}, \text{bone} \right\} \in \mathcal{I} \text{ mais } K = \left\{ \text{horse}, \text{chicken}, \text{fish} \right\} \notin \mathcal{I}$$

Intérêt : Pour maîtriser la variation d'apport de chaque composant, un ensemble linéaire indépendant d'engrais suffit. Ce n'est pas le cas de K par exemple.

Matroïdes classiques

Le matroïde graphique

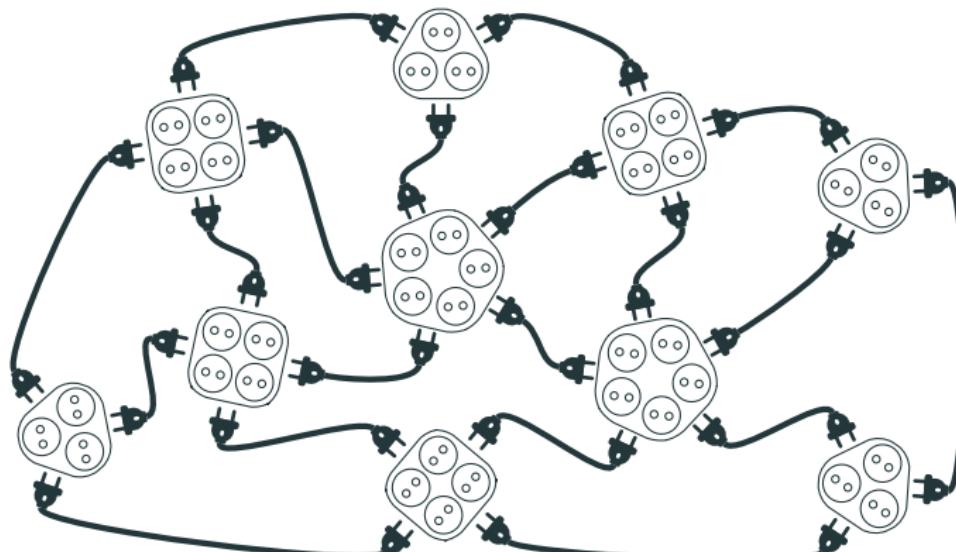
Soit $G = (V, E)$ un graphe et \mathcal{I} l'ensemble de ses forêts. Alors (E, \mathcal{I}) est un matroïde.

Matroïdes classiques

Le matroïde graphique

Soit $G = (V, E)$ un graphe et \mathcal{I} l'ensemble de ses forêts. Alors (E, \mathcal{I}) est un matroïde.

Exemple : le matroïde des câbles du respo « Sound and Music »

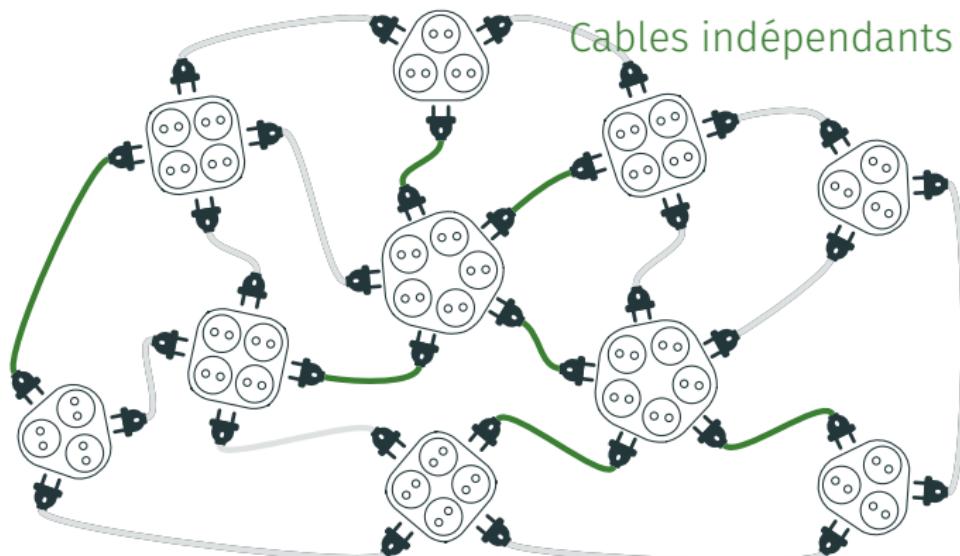


Matroïdes classiques

Le matroïde graphique

Soit $G = (V, E)$ un graphe et \mathcal{I} l'ensemble de ses forêts. Alors (E, \mathcal{I}) est un matroïde.

Exemple : le matroïde des câbles du respo « Sound and Music »

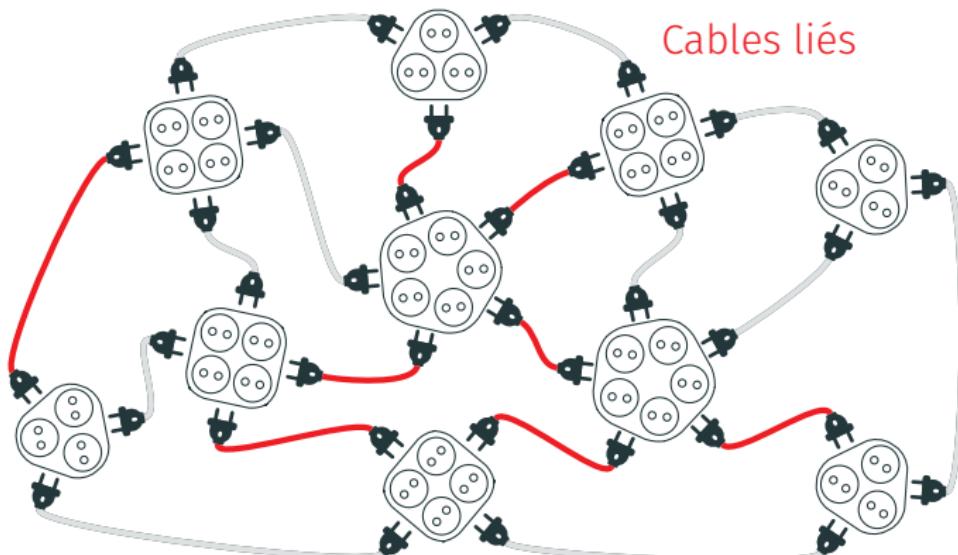


Matroïdes classiques

Le matroïde graphique

Soit $G = (V, E)$ un graphe et \mathcal{I} l'ensemble de ses forêts. Alors (E, \mathcal{I}) est un matroïde.

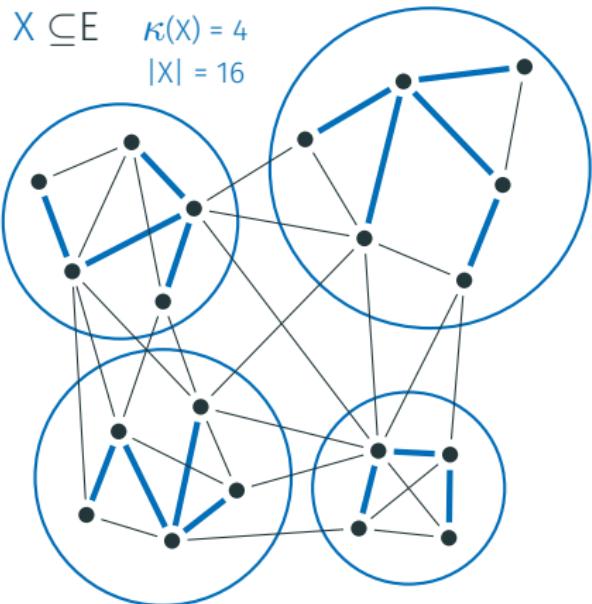
Exemple : le matroïde des câbles du respo « Sound and Music »



Démonstration (propriété d'augmentation)

Notons $\kappa(X)$ le nombre de composantes connexes.

Pour une forêt, $\kappa(X) + |X| = |V|$.



$$G = (V, E)$$
$$|V| = 20$$

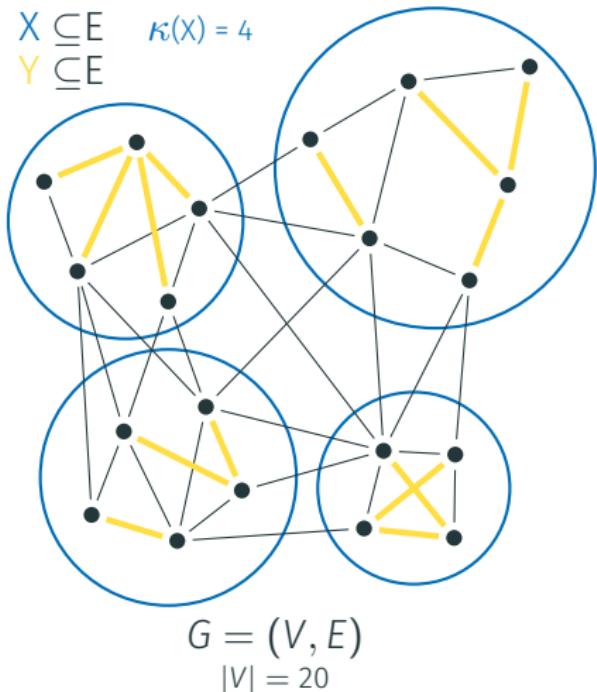
Démonstration (propriété d'augmentation)

Notons $\kappa(X)$ le nombre de composantes connexes.

Pour une forêt, $\kappa(X) + |X| = |V|$.

Supposons que

- $X, Y \subseteq E$ deux forêts
- toute arête de Y est dans une composante connexe de X .



Démonstration (propriété d'augmentation)

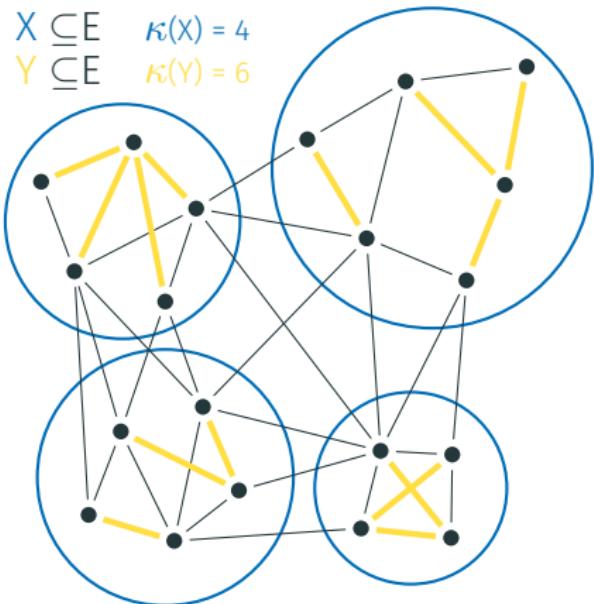
Notons $\kappa(X)$ le nombre de composantes connexes.

Pour une forêt, $\kappa(X) + |X| = |V|$.

Supposons que

- $X, Y \subseteq E$ deux forêts
- toute arête de Y est dans une composante connexe de X .

Alors $\kappa(Y) \geq \kappa(X)$. Donc $|Y| \leq |X|$.



$$G = (V, E)$$
$$|V| = 20$$

Démonstration (propriété d'augmentation)

Notons $\kappa(X)$ le nombre de composantes connexes.

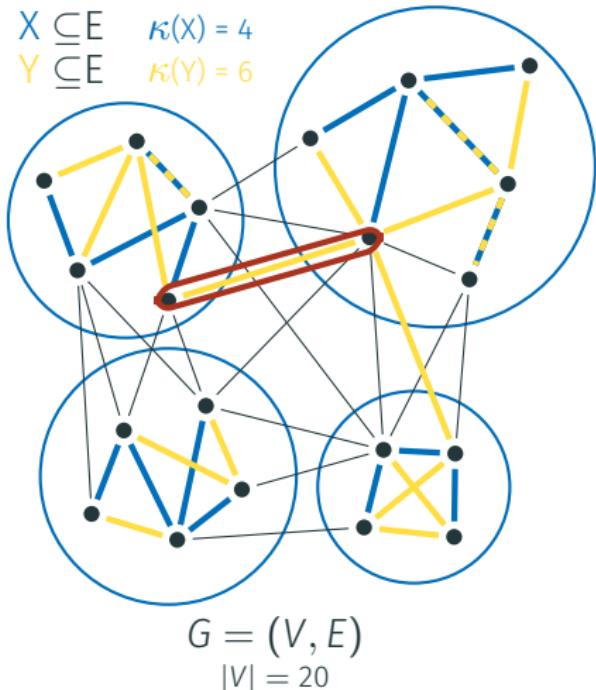
Pour une forêt, $\kappa(X) + |X| = |V|$.

Supposons que

- $X, Y \subseteq E$ deux forêts
- toute arête de Y est dans une composante connexe de X .

Alors $\kappa(Y) \geq \kappa(X)$. Donc $|Y| \leq |X|$.

Contraposée : la propriété d'augmentation est vraie.



Matroïdes classiques

Le matroïde des couplages

Soit $G = (V, E)$ un graphe et \mathcal{I} contient les ensembles de sommets que l'on peut recouvrir par un couplage. Alors (V, \mathcal{I}) est un matroïde.

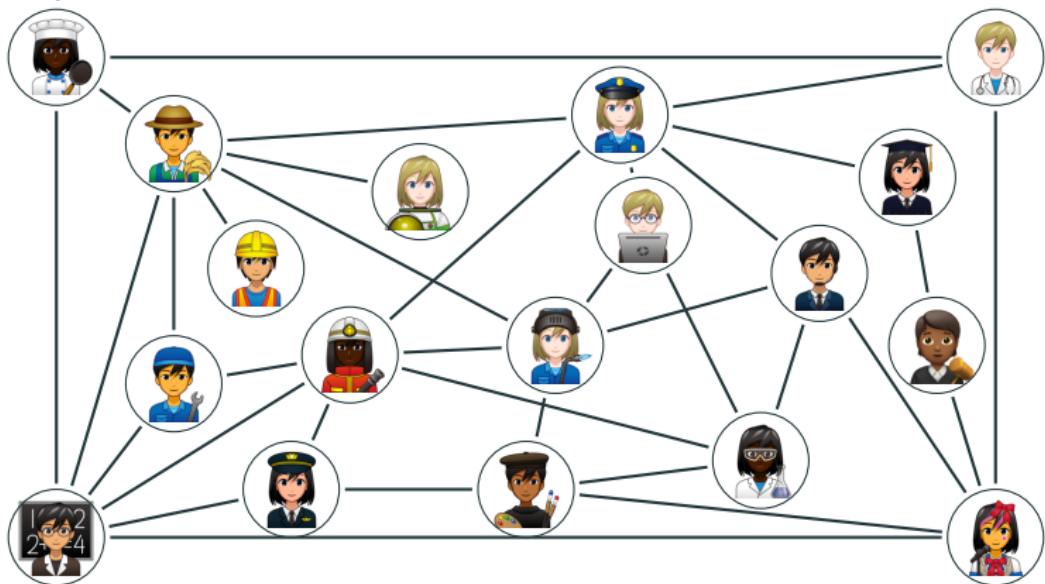
Matroïdes classiques

Le matroïde des couplages

Soit $G = (V, E)$ un graphe et \mathcal{I} contient les ensembles de sommets que l'on peut recouvrir par un couplage. Alors (V, \mathcal{I}) est un matroïde.

Exemple : le matroïde de Tinder

$$V = \{ \text{Chef emoji}, \text{Programmer emoji}, \text{Farmer emoji}, \text{Mechanic emoji}, \text{Businessman emoji}, \text{Student emoji}, \text{Construction worker emoji}, \text{Police officer emoji}, \text{Doctor emoji}, \text{Graduate emoji}, \text{Teacher emoji}, \text{Artist emoji}, \text{Scientist emoji}, \text{Pilot emoji}, \text{Painter emoji}, \text{Nurse emoji} \}.$$



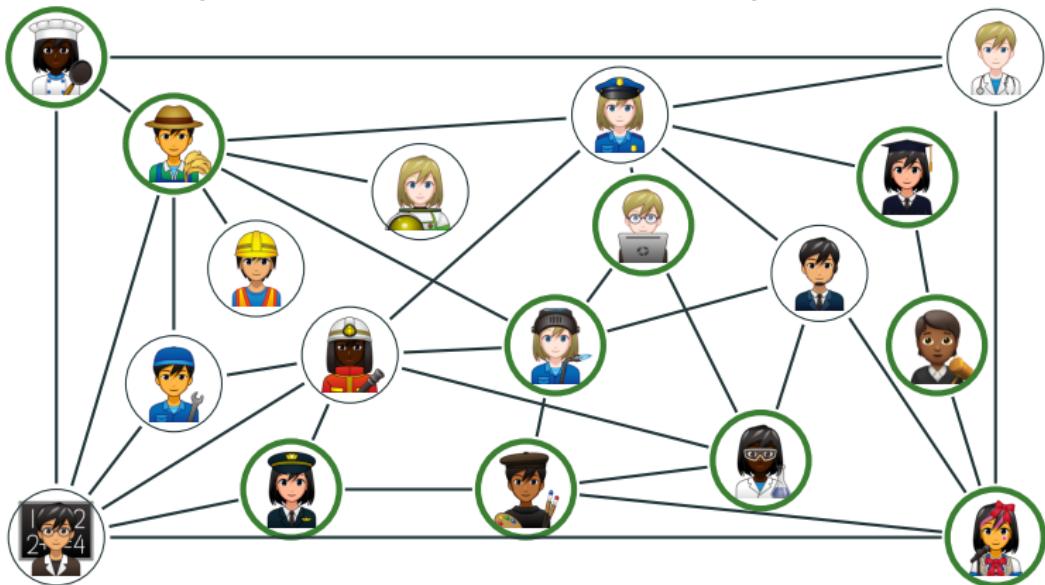
Matroïdes classiques

Le matroïde des couplages

Soit $G = (V, E)$ un graphe et \mathcal{I} contient les ensembles de sommets que l'on peut recouvrir par un couplage. Alors (V, \mathcal{I}) est un matroïde.

Exemple : le matroïde de Tinder

$$\left\{ \text{Chef emoji}, \text{Femme emoji}, \text{Homme emoji}, \text{Femme emoji}, \text{Homme emoji}, \text{Femme emoji}, \text{Homme emoji}, \text{Femme emoji}, \text{Homme emoji}, \text{Femme emoji} \right\} \in ?\mathcal{I}.$$



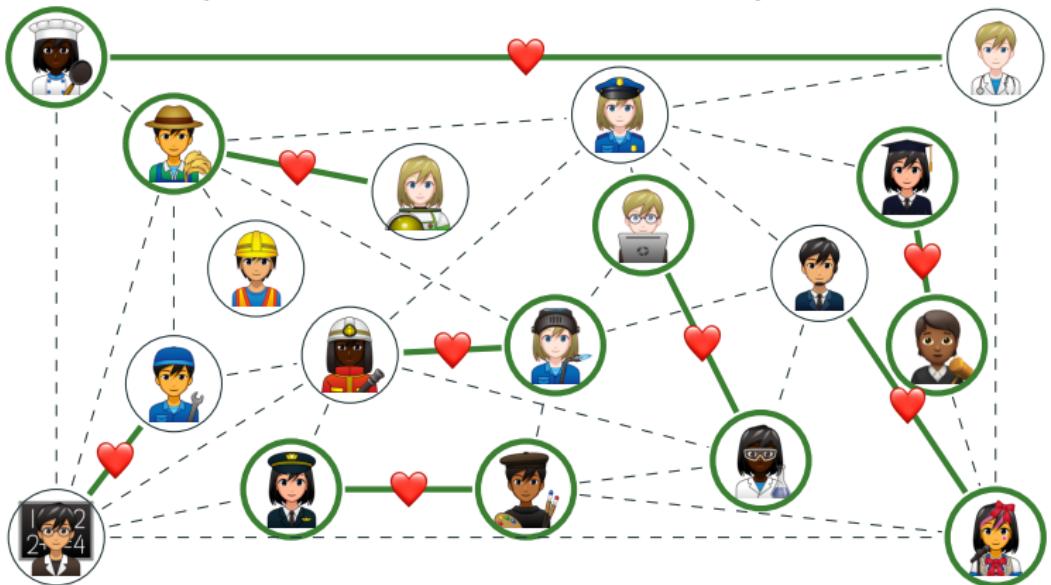
Matroïdes classiques

Le matroïde des couplages

Soit $G = (V, E)$ un graphe et \mathcal{I} contient les ensembles de sommets que l'on peut recouvrir par un couplage. Alors (V, \mathcal{I}) est un matroïde.

Exemple : le matroïde de Tinder

$$\left\{ \text{Chef emoji}, \text{Femme emoji}, \text{Homme emoji}, \text{Femme emoji}, \text{Homme emoji}, \text{Femme emoji}, \text{Homme emoji}, \text{Femme emoji}, \text{Homme emoji}, \text{Femme emoji} \right\} \in \mathcal{I}.$$



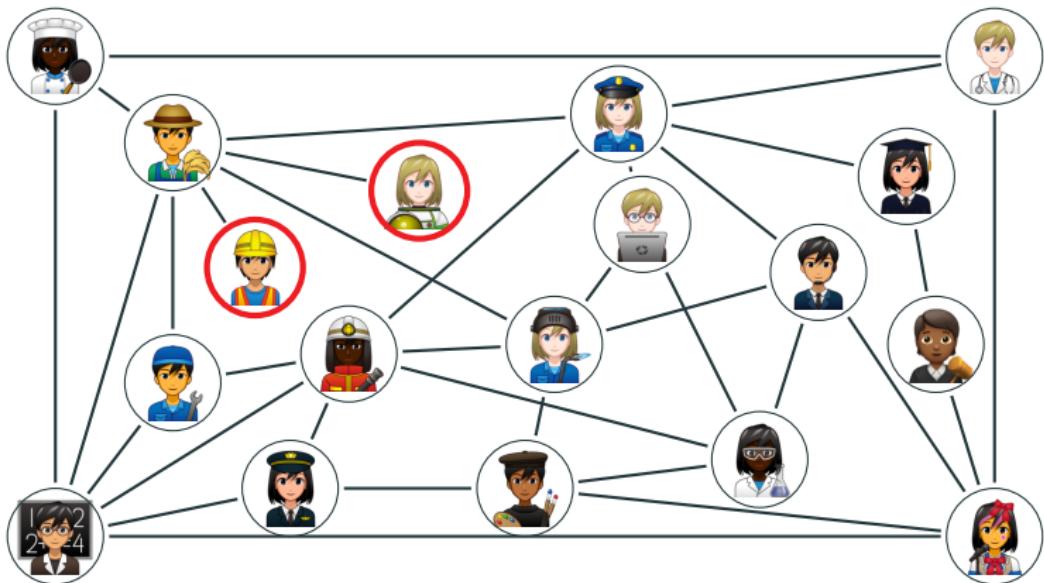
Matroïdes classiques

Le matroïde des couplages

Soit $G = (V, E)$ un graphe et \mathcal{I} contient les ensembles de sommets que l'on peut recouvrir par un couplage. Alors (V, \mathcal{I}) est un matroïde.

Exemple : le matroïde de Tinder

$$\left\{ \text{Alice}, \text{Bob} \right\} \in ?\mathcal{I}.$$



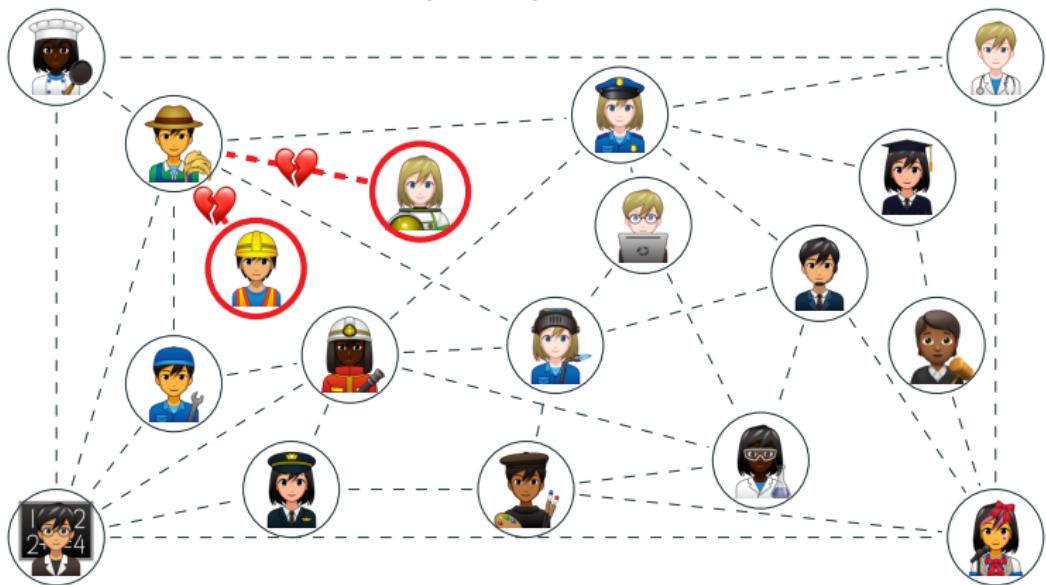
Matroïdes classiques

Le matroïde des couplages

Soit $G = (V, E)$ un graphe et \mathcal{I} contient les ensembles de sommets que l'on peut recouvrir par un couplage. Alors (V, \mathcal{I}) est un matroïde.

Exemple : le matroïde de Tinder

$$\left\{ \text{ } \begin{matrix} \text{ } \\ \text{ } \end{matrix} , \text{ } \begin{matrix} \text{ } \\ \text{ } \end{matrix} \right\} \notin \mathcal{I}.$$



Esquisse de démonstration (propriété d'augmentation)

Soient $X, Y \in \mathcal{I}$ tels que $|X| < |Y|$. Soient M_X et M_Y leur couverture.

Esquisse de démonstration (propriété d'augmentation)

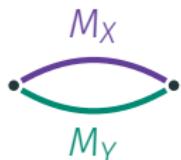
Soient $X, Y \in \mathcal{I}$ tels que $|X| < |Y|$. Soient M_X et M_Y leur couverture. On étudie $M_X \Delta M_Y$ (différence symétrique des arêtes).

Esquisse de démonstration (propriété d'augmentation)

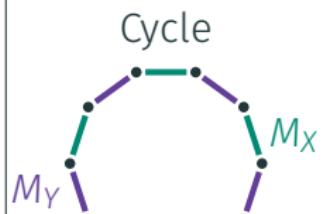
Soient $X, Y \in \mathcal{I}$ tels que $|X| < |Y|$. Soient M_X et M_Y leur couverture. On étudie $M_X \Delta M_Y$ (différence symétrique des arêtes).

4 cas :

Répétition



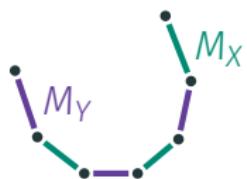
Cycle



Chaîne impaire



Chaîne paire

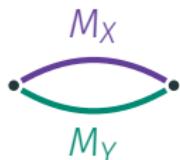


Esquisse de démonstration (propriété d'augmentation)

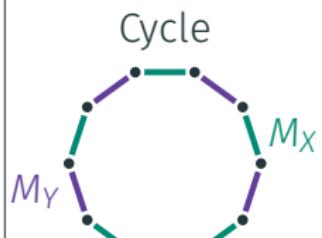
Soient $X, Y \in \mathcal{I}$ tels que $|X| < |Y|$. Soient M_X et M_Y leur couverture. On étudie $M_X \Delta M_Y$ (différence symétrique des arêtes).

4 cas :

Répétition



Cycle



Chaîne impaire



Chaîne paire



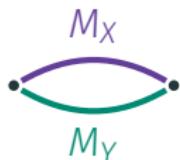
Cas 1-3 : M_Y est une couverture quel que soit le sommet de Y ajouté à X .

Esquisse de démonstration (propriété d'augmentation)

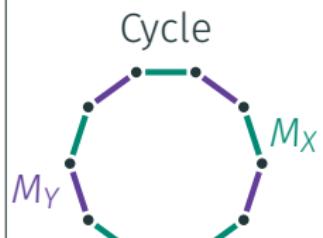
Soient $X, Y \in \mathcal{I}$ tels que $|X| < |Y|$. Soient M_X et M_Y leur couverture. On étudie $M_X \Delta M_Y$ (différence symétrique des arêtes).

4 cas :

Répétition



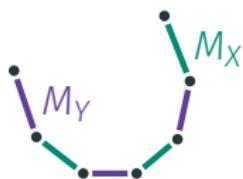
Cycle



Chaîne impaire



Chaîne paire



Cas 1-3 : M_Y est une couverture quel que soit le sommet de Y ajouté à X .

Cas 4 : Comme $|X| < |Y|$, [...] on doit avoir $X, Y \subseteq M_Y$ ou un cas antérieur.

Matroïdes classiques

Le matroïde transversal

Soit X_1, \dots, X_k des sous-ensembles de E et dans \mathcal{I} des ensembles $\{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_\ell}\}$ tels que $e_i \in X_i$. Alors (E, \mathcal{I}) est un matroïde.

Matroïdes classiques

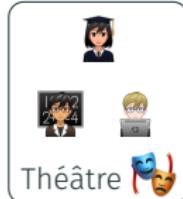
Le matroïde transversal

Soit X_1, \dots, X_k des sous-ensembles de E et dans \mathcal{I} des ensembles $\{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_\ell}\}$ tels que $e_i \in X_i$. Alors (E, \mathcal{I}) est un matroïde.

Exemple : le matroïde des délégués de clubs

Trouver un délégué distinct par club.

$$E = \{ \text{👤, 📱, 🎓, 🧑, 🎨, 🎬} \}$$



Matroïdes classiques

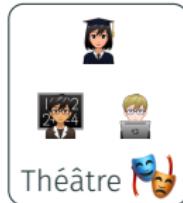
Le matroïde transversal

Soit X_1, \dots, X_k des sous-ensembles de E et dans \mathcal{I} des ensembles $\{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_\ell}\}$ tels que $e_i \in X_i$. Alors (E, \mathcal{I}) est un matroïde.

Exemple : le matroïde des délégués de clubs

Trouver un délégué distinct par club.

$$\mathcal{I} = \{\text{👤, 🚧, 🕵️}\} \in \mathcal{I}$$



Matroïdes classiques

Le matroïde transversal

Soit X_1, \dots, X_k des sous-ensembles de E et dans \mathcal{I} des ensembles $\{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_\ell}\}$ tels que $e_i \in X_i$. Alors (E, \mathcal{I}) est un matroïde.

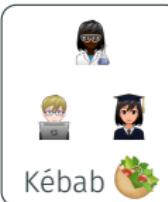
Exemple : le matroïde des délégués de clubs

Trouver un délégué distinct par club.

$$K = \{\text{以人为象徵的图标}, \text{人为图标}\} \notin \mathcal{I}$$



Théâtre



Kébab



BDS



Comète



JE



MAD

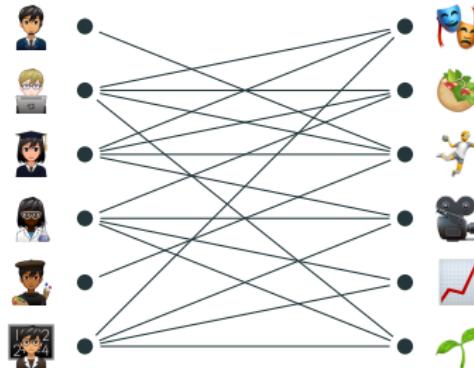
Matroïdes classiques

Le matroïde transversal

Soit X_1, \dots, X_k des sous-ensembles de E et dans \mathcal{I} des ensembles $\{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_\ell}\}$ tels que $e_i \in X_i$. Alors (E, \mathcal{I}) est un matroïde.

Exemple : le matroïde des délégués de clubs

Sommets gauches dans le matroïde de couplage



Récap'

Quizz

Dans le matroïde graphique, les éléments du matroïde sont

Réponse A : Les sommets du graphe

Réponse B : Les arêtes du graphe

Réponse C : Ah oui! Je n'avais pas vu la différence.

Réponse D : Je ne peux pas répondre : mon chat vient de reverser mon bol de céréales sur mon ordi.

Quizz

Dans le matroïde graphique, les éléments du matroïde sont

Réponse A : Les sommets du graphe

Réponse B : Les arêtes du graphe

Réponse C : Ah oui ! Je n'avais pas vu la différence.

Réponse D : Je ne peux pas répondre : mon chat vient de renverser mon bol de céréales sur mon ordi.

Réponse B

Récap'

Quizz

Dans le matroïde des couplages, les éléments du matroïde sont

Réponse A : Les sommets du graphe

Réponse B : Les arêtes du graphe

Réponse C : Ok, ça doit être l'autre cette fois-ci. C'était quoi déjà avant ?

Réponse D : Je ne peux pas répondre : il y a une promo flash de *machines à pain* sur Amazon.

Récap'

Quizz

Dans le matroïde des couplages, les éléments du matroïde sont

Réponse A

Réponse A : Les sommets du graphe

Réponse B : Les arêtes du graphe

Réponse C : Ok, ça doit être l'autre cette fois-ci. C'était quoi déjà avant?

Réponse D : Je ne peux pas répondre : il y a une promo flash de machines à pain sur Amazon.

Base et rang

Définition (rappel)

Une **base** est un élément maximal de (\mathcal{I}, \subseteq) .

Proposition

Un système d'indépendance est un matroïde ssi toutes ses bases ont même cardinal.

Démonstration.

\Rightarrow : Soient deux bases B et B' . Si $|B| < |B'|$, nous pourrions trouver $x \in B' \setminus B$ tel que $B + x$ est indépendant, ce qui réfute le caractère maximal de B dans \mathcal{I} .

\Leftarrow : Soient deux indépendants I et J avec $|I| < |J|$. Alors I n'est pas une base de $K = (I \cup J)$. Mais alors il existe $I \subset I' \subseteq K$ indépendant. Par hérédité, en choisissant un élément de $I' \setminus I$, $I + x$ est indépendant et $x \in J \setminus I$.



Circuit

Définition (rappel)

Un circuit est un élément minimal
de $(2^E \setminus \mathcal{I}, \subseteq)$.



Circuit

Définition (rappel)

Un circuit est un élément minimal de $(2^E \setminus \mathcal{I}, \subseteq)$.

Proposition

Si S est indépendant et $S + e$ est dépendant, alors $S + e$ contient un unique circuit (noté $C(S, e)$).



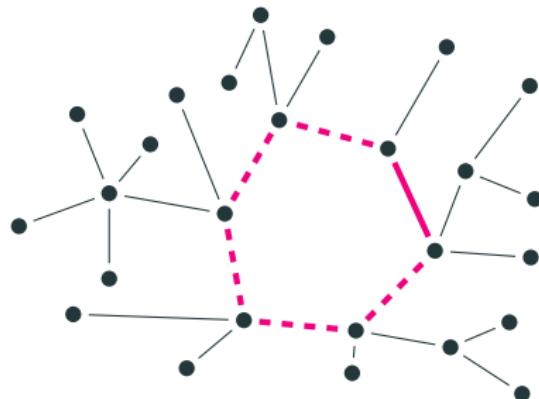
Circuit

Définition (rappel)

Un circuit est un élément minimal de $(2^E \setminus \mathcal{I}, \subseteq)$.

Proposition

Si S est indépendant et $S + e$ est dépendant, alors $S + e$ contient un unique circuit (noté $C(S, e)$).



Circuit

Définition (rappel)

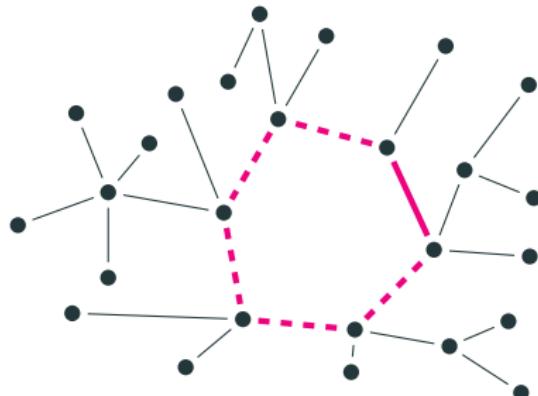
Un circuit est un élément minimal de $(2^E \setminus \mathcal{I}, \subseteq)$.

Proposition

Si S est indépendant et $S + e$ est dépendant, alors $S + e$ contient un unique circuit (noté $C(S, e)$).

Démonstration.

Si $S + e$ contient deux circuits C_1 et C_2 . Soit $f \in C_1 \setminus C_2$. Alors $C_1 \setminus f \in \mathcal{I}$. On étend $C_1 \setminus f$ en une base X de $S + e$. Alors $|X| = \text{rg}(S + e) = |S|$. Donc $X = S + e \setminus f$. Mais comme $C_2 \subseteq S + e$ et $f \notin C_2$, $C_2 \subseteq X$ et est indépendant. Contradiction. □



Récap'

Quizz

Commentez :

Réponse A : Les notions de base, rang et circuit d'un matroïde s'inspirent de l'algèbre linéaire.

Réponse B : Les notions de base et rang d'un matroïde s'inspirent de l'algèbre linéaire; celle de circuit de la théorie des graphes.

Réponse C : Les notions de base et rang d'un matroïde s'inspirent de la théorie des graphes; celle de circuit de l'algèbre linéaire.

Réponse D : La notion de base, rang et circuit d'un matroïde s'inspirent de la théorie des graphes.

Récap'

Quizz

Commentez :

Réponse A : Les notions de base, rang et circuit d'un matroïde s'inspirent de l'algèbre linéaire.

Réponse B : Les notions de base et rang d'un matroïde s'inspirent de l'algèbre linéaire, celle de circuit de la théorie des graphes.

Réponse C : Les notions de base et rang d'un matroïde s'inspirent de la théorie des graphes; celle de circuit de l'algèbre linéaire.

Réponse D : La notion de base, rang et circuit d'un matroïde s'inspirent de la théorie des graphes.

Réponse B

L'algorithme glouton

Sélection gloutonne d'éléments

Problème

Données : $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$ matroïde, $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ poids

Tâche : trouver une base de poids maximum.

Algorithme 1 : Sélection gloutonne

Entrées : matroïde pondéré $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I}, w)$

Sorties : une base $B \in \mathcal{I}$ de poids maximum.

- 1 Trier les éléments $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ tel que
 $w(e_1) \geq w(e_2) \geq \dots \geq w(e_n).$
 - 2 $S \leftarrow \emptyset$
 - 3 pour i to n faire
 - 4 si $S + e_i \in \mathcal{I}$ alors
 - 5 $S \leftarrow S + e_i$
 - 6 retourner S
-

Récap'

Quizz

Dans le cadre du matroïde graphique,
l'algorithme de sélection gloutonne s'appelle
l'algorithme de



Joseph Kruskal
(1928†2010)



Robert Prim
(1921)

Réponse A : Kruskal

Réponse B : Picsou

Réponse C : Prim

Réponse D : Ça me rappelle un truc mais je ne fais pas dans les
mondanités.

Récap'

Quizz

Dans le cadre du matroïde graphique,
l'algorithme de sélection gloutonne s'appelle
l'algorithme de

Réponse A : Kruskal

Réponse B : Picsou

Réponse C : Prim

Réponse D : Ça me rappelle un truc mais je ne fais pas dans les
mondanités.



Joseph Kruskal
(1928†2010)



Robert Prim
(1921)

Réponse A

Correction

Théorème

L'algorithme de sélection gloutonne est correct.

Correction

Théorème

L'algorithme de sélection gloutonne est correct.

Démonstration.

$S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$: sortie gloutonne

$$w(s_1) \geq w(s_2) \geq w(s_3) \geq \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \geq w(s_k)$$



Correction

Théorème

L'algorithme de sélection gloutonne est correct.

Démonstration.

$S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$: sortie gloutonne

$T = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$: meilleure solution

$$w(s_1) \geq w(s_2) \geq w(s_3) \geq \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \geq w(s_k)$$

$$w(t_1) \geq w(t_2) \geq w(t_3) \geq \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \geq w(t_k)$$



Correction

Théorème

L'algorithme de sélection gloutonne est correct.

Démonstration.

$S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$: sortie gloutonne

$T = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$: meilleure solution

Supposons (absurde) $w(T) > w(S)$,

$$w(s_1) \geq w(s_2) \geq w(s_3) \geq \dots \geq w(s_{\ell-1}) \geq w(s_\ell) \geq \dots \geq w(s_k)$$

| \vee | \vee | \vee | \vee \wedge

$$w(t_1) \geq w(t_2) \geq w(t_3) \geq \dots \geq w(t_{\ell-1}) \geq w(t_\ell) \geq \dots \geq w(t_k)$$



Correction

Théorème

L'algorithme de sélection gloutonne est correct.

Démonstration.

$S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$: sortie gloutonne

$T = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$: meilleure solution

Supposons (absurde) $w(T) > w(S)$,

$$w(s_1) \geq w(s_2) \geq w(s_3) \geq \cdots \geq w(s_{\ell-1}) \geq w(s_\ell)$$

IV IV IV IV A

$$w(t_1) \geq w(t_2) \geq w(t_3) \geq \cdots \geq w(t_{\ell-1}) \geq w(t_\ell)$$



Correction

Théorème

L'algorithme de sélection gloutonne est correct.

Démonstration.

$S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$: sortie gloutonne

$T = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$: meilleure solution

Supposons (absurde) $w(T) > w(S)$,

$$w(s_1) \geq w(s_2) \geq w(s_3) \geq \dots \geq w(s_{\ell-1}) \geq w(s_\ell)$$

IV IV IV IV A

$$w(t_1) \geq w(t_2) \geq w(t_3) \geq \dots \geq w(t_{\ell-1}) \geq w(t_\ell)$$

*L'algorithme
s'est trompé!*



□

Equivalence entre matroïde et sélection gloutonne

Théorème

L'algorithme de sélection gloutonne est correct ssi \mathcal{I} dote E d'une structure de matroïde.

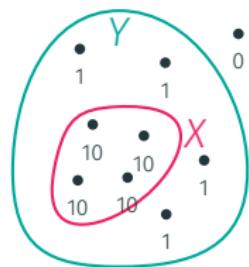
Équivalence entre matroïde et sélection gloutonne

Théorème

L'algorithme de sélection gloutonne est correct ssi \mathcal{I} dote E d'une structure de matroïde.

Démonstration.

Importance de l'hérédité : Supposons $X \subset Y$ avec $X \notin \mathcal{I}$, $Y \in \mathcal{I}$.



L'algorithme commence par les éléments de poids 10, puis 1, puis 0. Il ne choisit pas X tout entier, donc termine avec un sous-ensemble strict de Y . Erreur!



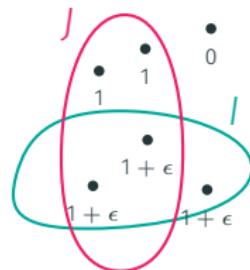
Équivalence entre matroïde et sélection gloutonne

Théorème

L'algorithme de sélection gloutonne est correct ssi \mathcal{I} dote E d'une structure de matroïde.

Démonstration.

Importance de l'échange : Supposons $I, J \in \mathcal{I}$ avec $|I| < |J|$ et $\forall x \in J, I + x \notin \mathcal{I}$.



L'algorithme commence par les éléments I et ne peut en ajouter plus. Erreur, car J a un plus grand poids.

□

Intersection de matroïdes

Intersection de systèmes d'indépendance

Définition

Étant donnés plusieurs systèmes d'indépendance $\mathcal{M}_i = (E, \mathcal{I}_i)$, on appelle **intersection** le couple $(E, \bigcap_i \mathcal{I}_i)$ qui est encore un système d'indépendance.

Intersection de systèmes d'indépendance

Définition

Étant donnés plusieurs systèmes d'indépendance $\mathcal{M}_i = (E, \mathcal{I}_i)$, on appelle **intersection** le couple $(E, \bigcap_i \mathcal{I}_i)$ qui est encore un système d'indépendance.

Proposition

Tout système d'indépendance est une intersection de matroïdes.

Intersection de systèmes d'indépendance

Définition

Étant donnés plusieurs systèmes d'indépendance $\mathcal{M}_i = (E, \mathcal{I}_i)$, on appelle **intersection** le couple $(E, \bigcap_i \mathcal{I}_i)$ qui est encore un système d'indépendance.

Proposition

Tout système d'indépendance est une intersection de matroïdes.

Démonstration.

Pour tout circuit C de $\mathcal{S} = (E, \mathcal{I})$

$$\mathcal{M}_C = (E, \mathcal{C}) \quad \text{où} \quad \mathcal{C} = \{X \in 2^E; C \setminus X \neq \emptyset\}.$$

est un matroïde (de partition)

Intersection de systèmes d'indépendance

Définition

Étant donnés plusieurs systèmes d'indépendance $\mathcal{M}_i = (E, \mathcal{I}_i)$, on appelle **intersection** le couple $(E, \bigcap_i \mathcal{I}_i)$ qui est encore un système d'indépendance.

Proposition

Tout système d'indépendance est une intersection de matroïdes.

Démonstration.

Pour tout circuit C de $\mathcal{S} = (E, \mathcal{I})$

$$\mathcal{M}_C = (E, \mathcal{C}) \quad \text{où} \quad \mathcal{C} = \{X \in 2^E; C \setminus X \neq \emptyset\}.$$

est un matroïde (de partition) et

$$\mathcal{S} = \bigcap_{C \text{ circuit}} \mathcal{M}_C$$

Problème d'optimisation

Problème

Données : $\mathcal{M}_i = (E, \mathcal{I}_i)$ matroïdes, $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ poids

Tâche : Trouver $X \in \bigcap_i \mathcal{I}_i$ de poids maximum.

Problème d'optimisation

Problème

Données : $\mathcal{M}_i = (E, \mathcal{I}_i)$ matroïdes, $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ poids

Tâche : Trouver $X \in \bigcap_i \mathcal{I}_i$ de poids maximum.

- Dans P pour ≤ 2 matroïdes
- NP-complet (en g^{al}) pour ≥ 3 matroïdes.

Problème d'optimisation

Problème

Données : $\mathcal{M}_i = (E, \mathcal{I}_i)$ matroïdes, $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ poids

Tâche : Trouver $X \in \bigcap_i \mathcal{I}_i$ de poids maximum.

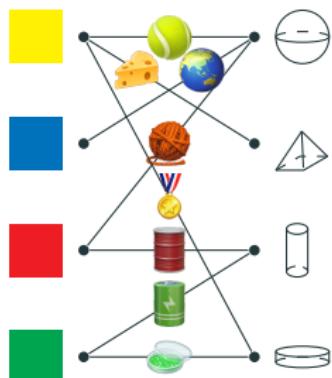
- Dans P pour ≤ 2 matroïdes
- NP-complet (en gal) pour ≥ 3 matroïdes.

Dans ce cours : algorithme pour maximiser le cardinal ($w \equiv 1$).

Exemple d'intersection de 2 matroïdes

Les couplages bipartis

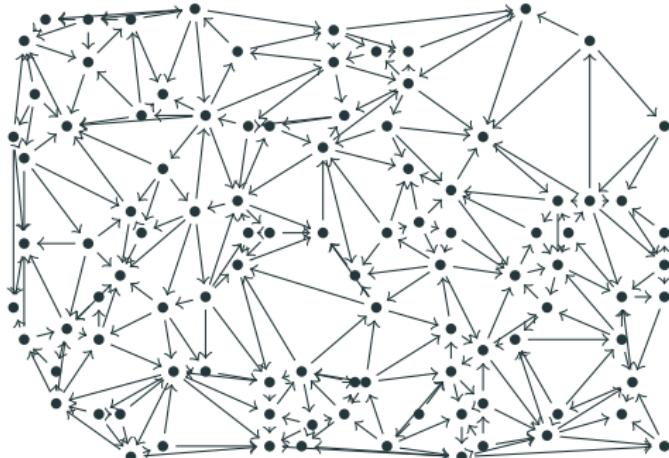
Les arêtes d'un couplage dans un graphe biparti sont caractérisées par l'intersection de deux matroïdes de partition.



Exemple d'intersection de 2 matroïdes

Les (forêts d') arborescences

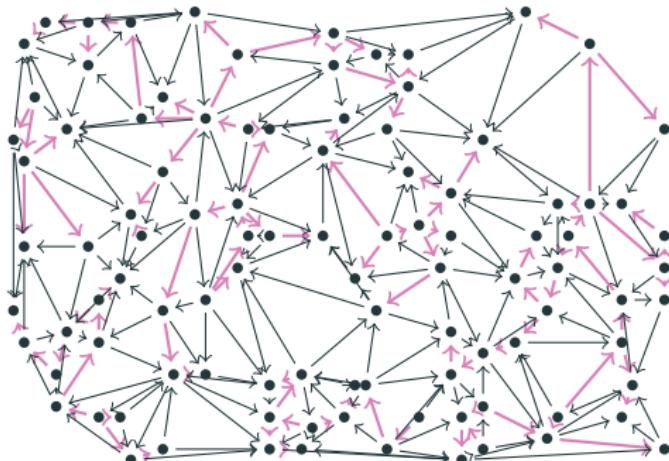
Les arborescences sont caractérisées par l'intersection du matroïde graphique et d'un matroïde de partition (1 arête entrante par sommet).



Exemple d'intersection de 2 matroïdes

Les (forêts d') arborescences

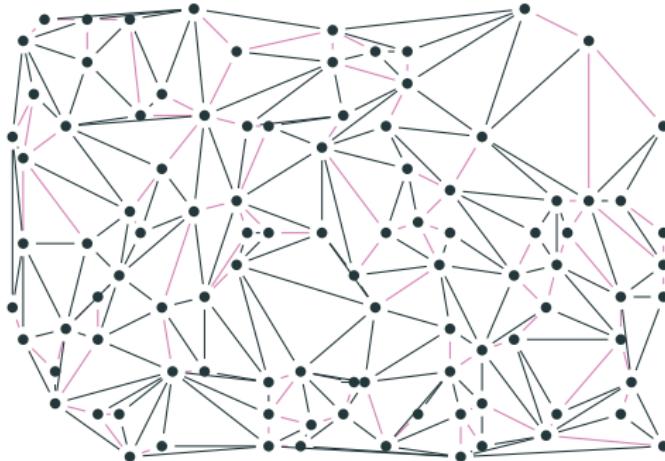
Les arborescences sont caractérisées par l'intersection du matroïde graphique et d'un matroïde de partition (1 arête entrante par sommet).



Exemple d'intersection de 2 matroïdes

Les (forêts d') arborescences

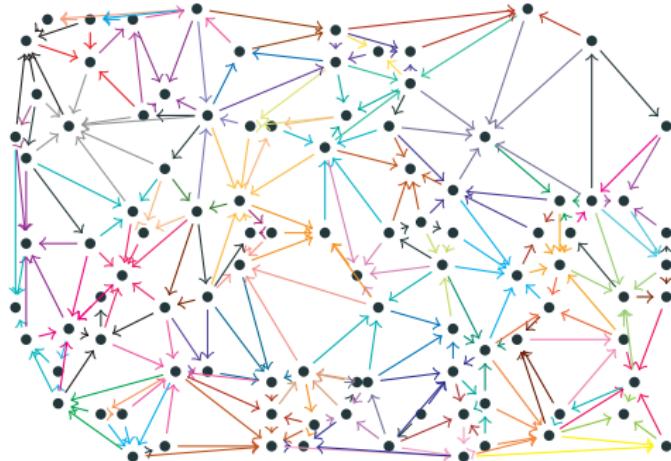
Les arborescences sont caractérisées par l'intersection du matroïde graphique et d'un matroïde de partition (1 arête entrante par sommet).



Exemple d'intersection de 2 matroïdes

Les (forêts d') arborescences

Les arborescences sont caractérisées par l'intersection du matroïde graphique et d'un matroïde de partition (1 arête entrante par sommet).



Problème d'optimisation

Problème

Données : $\mathcal{M}_1 = (E, \mathcal{I}_1)$, $\mathcal{M}_2 = (E, \mathcal{I}_2)$ deux matroïdes, $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ poids

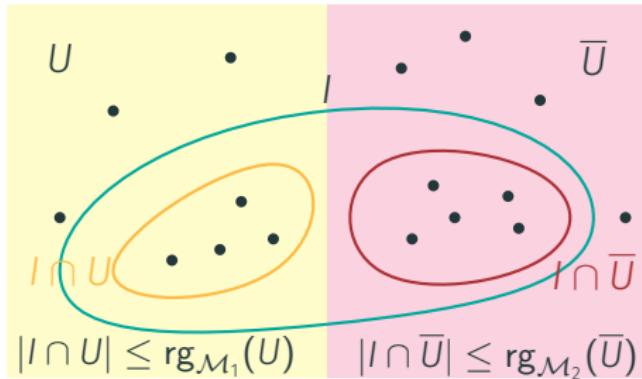
Tâche : Trouver $X \in \bigcap_i \mathcal{I}_i$ de cardinal maximum.

Critère d'optimalité

Lemme

Pour tout indépendant $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$, pour toute coupe (U, \bar{U}) de E , on a

$$|I| \leq \text{rg}_{\mathcal{M}_1}(U) + \text{rg}_{\mathcal{M}_2}(\bar{U}).$$



Le cas d'égalité certifie l'optimalité.

Source d'inspiration

Cas particulier connu

Problème : couplage maximum M dans un graphe biparti

Source d'inspiration

Cas particulier connu

Problème : couplage maximum M dans un graphe biparti

Instrument du succès : augmentation de M par un chemin M -alternant

$$e_0 - f_1 - e_1 - \cdots - f_t - e_t$$

Source d'inspiration

Cas particulier connu

Problème : couplage maximum M dans un graphe biparti

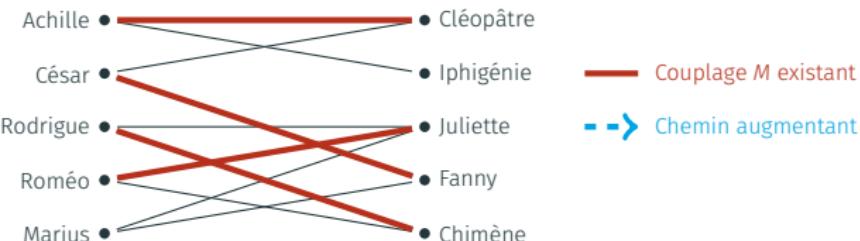
Instrument du succès : augmentation de M par un chemin M -alternant

$$e_0 - f_1 - e_1 - \cdots - f_t - e_t$$

Pourquoi ça marche : e_0 couvre un nouveau sommet à gauche, échanger $f_k \leftrightarrow e_k$ ne découvre pas les sommets déjà couverts à gauche.

e_t couvre un nouveau sommet à droite, échanger $f_k \leftrightarrow e_{k-1}$ ne découvre pas les sommets déjà couverts à droite.

Exemple



Source d'inspiration

Cas particulier connu

Problème : couplage maximum M dans un graphe biparti

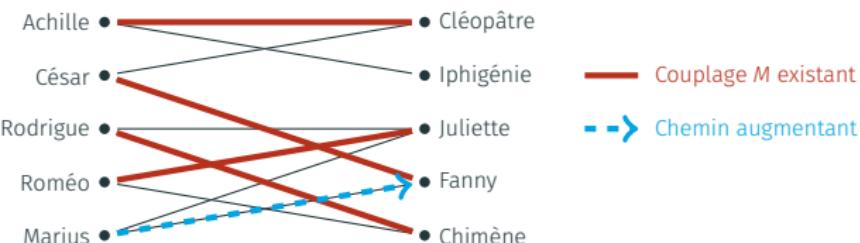
Instrument du succès : augmentation de M par un chemin M -alternant

$$e_0 - f_1 - e_1 - \cdots - f_t - e_t$$

Pourquoi ça marche : e_0 couvre un nouveau sommet à gauche, échanger $f_k \leftrightarrow e_k$ ne découvre pas les sommets déjà couverts à gauche.

e_t couvre un nouveau sommet à droite, échanger $f_k \leftrightarrow e_{k-1}$ ne découvre pas les sommets déjà couverts à droite.

Exemple



Source d'inspiration

Cas particulier connu

Problème : couplage maximum M dans un graphe biparti

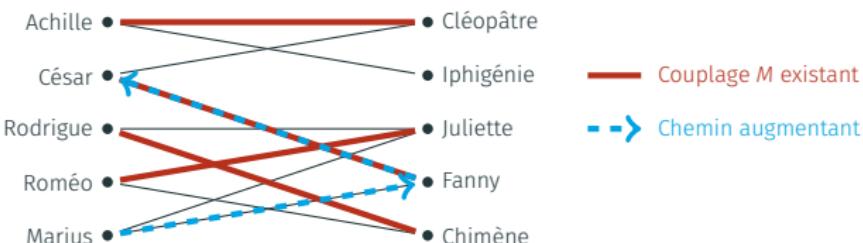
Instrument du succès : augmentation de M par un chemin M -alternant

$$e_0 - f_1 - e_1 - \cdots - f_t - e_t$$

Pourquoi ça marche : e_0 couvre un nouveau sommet à gauche, échanger $f_k \leftrightarrow e_k$ ne découvre pas les sommets déjà couverts à gauche.

e_t couvre un nouveau sommet à droite, échanger $f_k \leftrightarrow e_{k-1}$ ne découvre pas les sommets déjà couverts à droite.

Exemple



Source d'inspiration

Cas particulier connu

Problème : couplage maximum M dans un graphe biparti

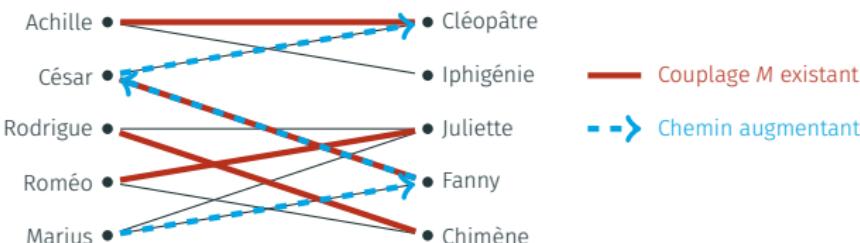
Instrument du succès : augmentation de M par un chemin M -alternant

$$e_0 - f_1 - e_1 - \cdots - f_t - e_t$$

Pourquoi ça marche : e_0 couvre un nouveau sommet à gauche, échanger $f_k \leftrightarrow e_k$ ne découvre pas les sommets déjà couverts à gauche.

e_t couvre un nouveau sommet à droite, échanger $f_k \leftrightarrow e_{k-1}$ ne découvre pas les sommets déjà couverts à droite.

Exemple



Source d'inspiration

Cas particulier connu

Problème : couplage maximum M dans un graphe biparti

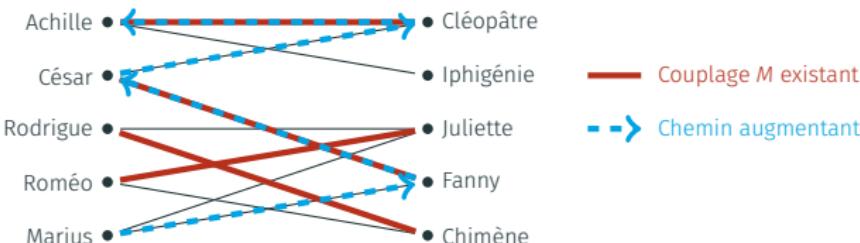
Instrument du succès : augmentation de M par un chemin M -alternant

$$e_0 - f_1 - e_1 - \cdots - f_t - e_t$$

Pourquoi ça marche : e_0 couvre un nouveau sommet à gauche, échanger $f_k \leftrightarrow e_k$ ne découvre pas les sommets déjà couverts à gauche.

e_t couvre un nouveau sommet à droite, échanger $f_k \leftrightarrow e_{k-1}$ ne découvre pas les sommets déjà couverts à droite.

Exemple



Source d'inspiration

Cas particulier connu

Problème : couplage maximum M dans un graphe biparti

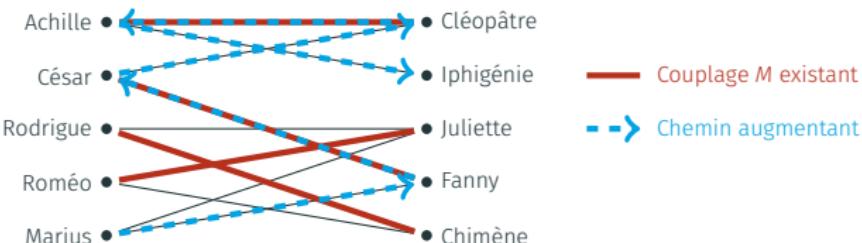
Instrument du succès : augmentation de M par un chemin M -alternant

$$e_0 - f_1 - e_1 - \cdots - f_t - e_t$$

Pourquoi ça marche : e_0 couvre un nouveau sommet à gauche, échanger $f_k \leftrightarrow e_k$ ne découvre pas les sommets déjà couverts à gauche.

e_t couvre un nouveau sommet à droite, échanger $f_k \leftrightarrow e_{k-1}$ ne découvre pas les sommets déjà couverts à droite.

Exemple



Algorithme d'Edmonds : idée vague

Principe

Pour augmenter $S \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$,

- Trouver une suite alternante :

$$e_0 - f_1 - e_1 - \cdots - f_t - e_t$$

où $\text{rg}_{\mathcal{M}_1}(S \cup \{e_k\}_{k \geq 1} \setminus \{f_k\}) = \text{rg}_{\mathcal{M}_1}(S)$ et $S + e_0 \in \mathcal{I}_1$ et

$\text{rg}_{\mathcal{M}_2}(S \cup \{e_k\}_{k < r} \setminus \{f_k\}) = \text{rg}_{\mathcal{M}_2}(S)$ et $S + e_t \in \mathcal{I}_2$.

Algorithme d'Edmonds : idée vague

Principe

Pour augmenter $S \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$,

- Trouver une suite alternante :

$$e_0 - f_1 - e_1 - \cdots - f_t - e_t$$

où $\text{rg}_{\mathcal{M}_1}(S \cup \{e_k\}_{k \geq 1} \setminus \{f_k\}) = \text{rg}_{\mathcal{M}_1}(S)$ et $S + e_0 \in \mathcal{I}_1$ et

$\text{rg}_{\mathcal{M}_2}(S \cup \{e_k\}_{k < r} \setminus \{f_k\}) = \text{rg}_{\mathcal{M}_2}(S)$ et $S + e_t \in \mathcal{I}_2$.

- Remplacer S par

$$S' = S \cup \{e_0, \dots, e_t\} \setminus \{f_1, \dots, f_t\}$$

Algorithme d'Edmonds : idée vague

Principe

Pour augmenter $S \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$,

- Trouver une suite alternante :

$$e_0 - f_1 - e_1 - \cdots - f_t - e_t$$

où $\text{rg}_{\mathcal{M}_1}(S \cup \{e_k\}_{k \geq 1} \setminus \{f_k\}) = \text{rg}_{\mathcal{M}_1}(S)$ et $S + e_0 \in \mathcal{I}_1$ et

$\text{rg}_{\mathcal{M}_2}(S \cup \{e_k\}_{k < r} \setminus \{f_k\}) = \text{rg}_{\mathcal{M}_2}(S)$ et $S + e_t \in \mathcal{I}_2$.

- Remplacer S par

$$S' = S \cup \{e_0, \dots, e_t\} \setminus \{f_1, \dots, f_t\}$$

Difficulté

Garantir que $S' \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$.

Lemme d'échange

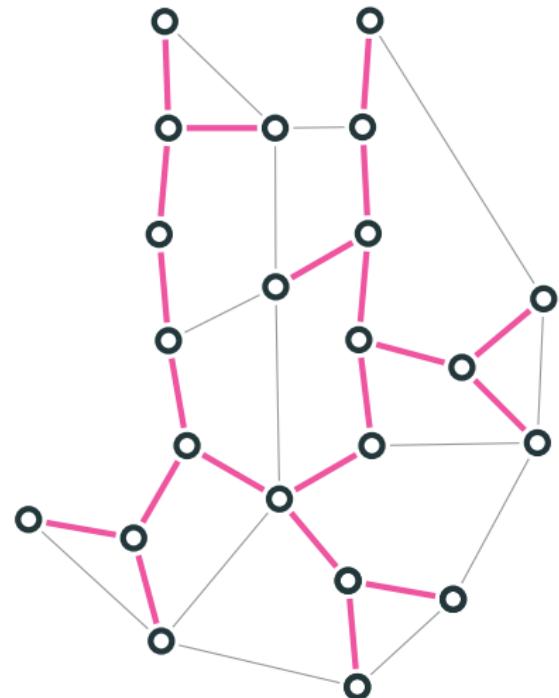
Soit $C(l, e)$ le circuit créé quand on ajoute e à l'indépendant l .

Lemme

Soient $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$ un matroïde, $l \in \mathcal{I}$, $e_1, \dots, e_t \in E \setminus l$ et $f_1, \dots, f_t \in l$ tels que, pour k entre 1 et t ,

- (i) $f_k \in C(l, e_k)$ et
- (ii) $f_k \notin C(l, e_{k+1}) \cup C(l, e_{k+2}) \cup \dots \cup C(l, e_t)$.

Alors $l \cup \{e_1, \dots, e_t\} \setminus \{f_1, \dots, f_t\} \in \mathcal{I}$.



Lemme d'échange

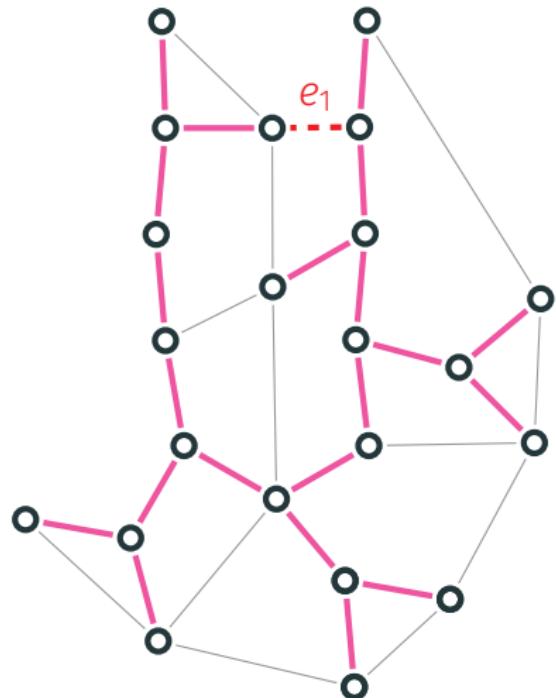
Soit $C(l, e)$ le circuit créé quand on ajoute e à l'indépendant l .

Lemme

Soient $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$ un matroïde, $l \in \mathcal{I}$, $e_1, \dots, e_t \in E \setminus l$ et $f_1, \dots, f_t \in l$ tels que, pour k entre 1 et t ,

- (i) $f_k \in C(l, e_k)$ et
- (ii) $f_k \notin C(l, e_{k+1}) \cup C(l, e_{k+2}) \cup \dots \cup C(l, e_t)$.

Alors $l \cup \{e_1, \dots, e_t\} \setminus \{f_1, \dots, f_t\} \in \mathcal{I}$.



Lemme d'échange

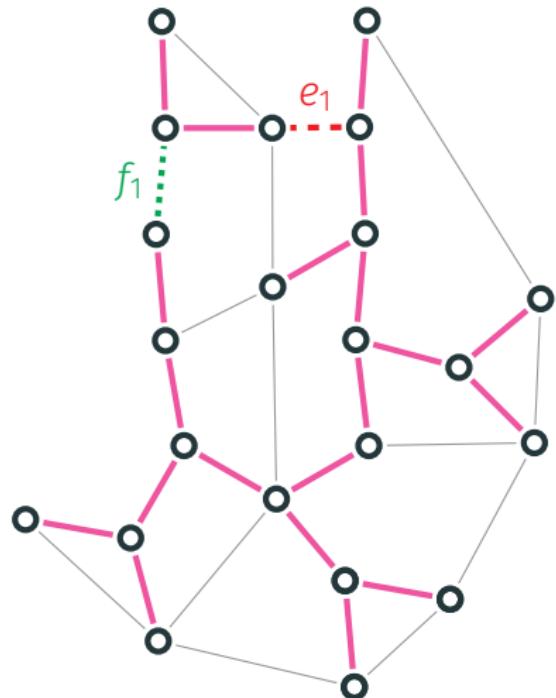
Soit $C(l, e)$ le circuit créé quand on ajoute e à l'indépendant l .

Lemme

Soient $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$ un matroïde, $l \in \mathcal{I}$, $e_1, \dots, e_t \in E \setminus l$ et $f_1, \dots, f_t \in l$ tels que, pour k entre 1 et t ,

- (i) $f_k \in C(l, e_k)$ et
- (ii) $f_k \notin C(l, e_{k+1}) \cup C(l, e_{k+2}) \cup \dots \cup C(l, e_t)$.

Alors $l \cup \{e_1, \dots, e_t\} \setminus \{f_1, \dots, f_t\} \in \mathcal{I}$.



Lemme d'échange

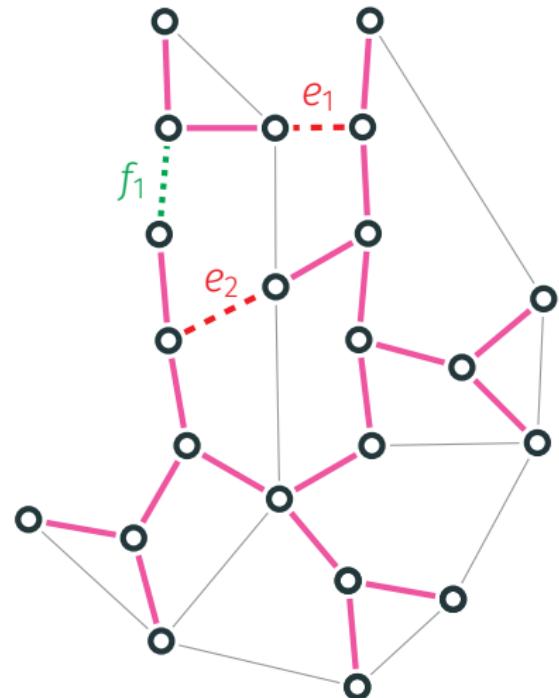
Soit $C(l, e)$ le circuit créé quand on ajoute e à l'indépendant l .

Lemme

Soient $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$ un matroïde, $l \in \mathcal{I}$, $e_1, \dots, e_t \in E \setminus l$ et $f_1, \dots, f_t \in l$ tels que, pour k entre 1 et t ,

- (i) $f_k \in C(l, e_k)$ et
- (ii) $f_k \notin C(l, e_{k+1}) \cup C(l, e_{k+2}) \cup \dots \cup C(l, e_t)$.

Alors $l \cup \{e_1, \dots, e_t\} \setminus \{f_1, \dots, f_t\} \in \mathcal{I}$.



Lemme d'échange

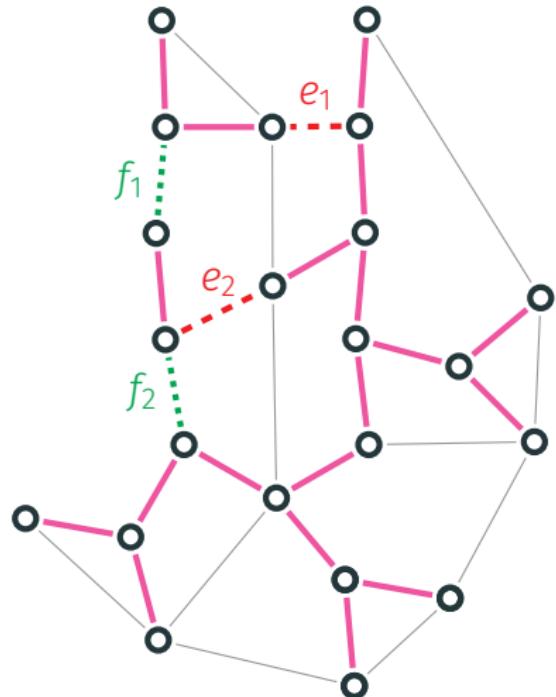
Soit $C(l, e)$ le circuit créé quand on ajoute e à l'indépendant l .

Lemme

Soient $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$ un matroïde, $l \in \mathcal{I}$, $e_1, \dots, e_t \in E \setminus l$ et $f_1, \dots, f_t \in l$ tels que, pour k entre 1 et t ,

- (i) $f_k \in C(l, e_k)$ et
- (ii) $f_k \notin C(l, e_{k+1}) \cup C(l, e_{k+2}) \cup \dots \cup C(l, e_t)$.

Alors $l \cup \{e_1, \dots, e_t\} \setminus \{f_1, \dots, f_t\} \in \mathcal{I}$.



Lemme d'échange

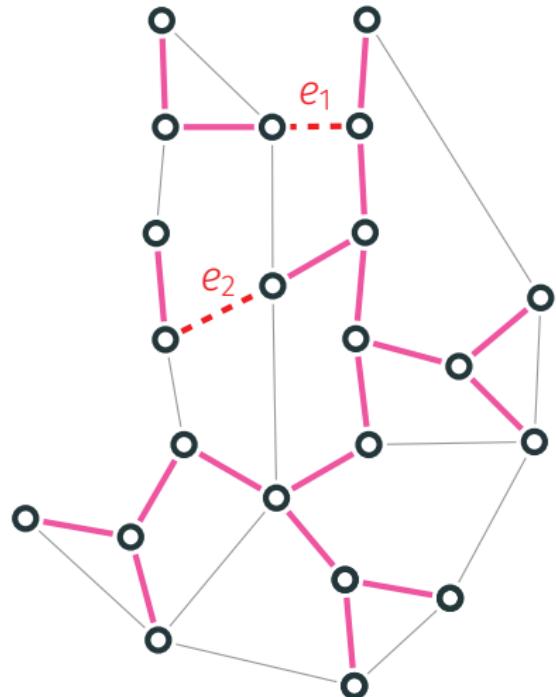
Soit $C(l, e)$ le circuit créé quand on ajoute e à l'indépendant l .

Lemme

Soient $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$ un matroïde, $l \in \mathcal{I}$, $e_1, \dots, e_t \in E \setminus l$ et $f_1, \dots, f_t \in l$ tels que, pour k entre 1 et t ,

- (i) $f_k \in C(l, e_k)$ et
- (ii) $f_k \notin C(l, e_{k+1}) \cup C(l, e_{k+2}) \cup \dots \cup C(l, e_t)$.

Alors $l \cup \{e_1, \dots, e_t\} \setminus \{f_1, \dots, f_t\} \in \mathcal{I}$.



Preuve du lemme

Réurrence (sur k) : « $I_k = I \cup \{e_1, \dots, e_k\} \setminus \{f_1, \dots, f_k\} \in \mathcal{I}$ ».

Init. Si $k = 0$, $I_0 = I \in \mathcal{I}$

Preuve du lemme

Réurrence (sur k) : « $I_k = I \cup \{e_1, \dots, e_k\} \setminus \{f_1, \dots, f_k\} \in \mathcal{I}$ ».

Init. Si $k = 0$, $I_0 = I \in \mathcal{I}$

Hérédité. Si $k > 0$,

- Ou bien $I_{k-1} + e_k \in \mathcal{I}$, alors RAS.

Preuve du lemme

Réurrence (sur k) : « $I_k = I \cup \{e_1, \dots, e_k\} \setminus \{f_1, \dots, f_k\} \in \mathcal{I}$ ».

Init. Si $k = 0$, $I_0 = I \in \mathcal{I}$

Hérédité. Si $k > 0$,

- Ou bien $I_{k-1} + e_k \in \mathcal{I}$, alors RAS.
- Ou bien $I_{k-1} + e_k$ contient un unique circuit $C(I_{k-1}, e_k)$.

Preuve du lemme

Réurrence (sur k) : « $I_k = I \cup \{e_1, \dots, e_k\} \setminus \{f_1, \dots, f_k\} \in \mathcal{I}$ ».

Init. Si $k = 0$, $I_0 = I \in \mathcal{I}$

Hérédité. Si $k > 0$,

- Ou bien $I_{k-1} + e_k \in \mathcal{I}$, alors RAS.
- Ou bien $I_{k-1} + e_k$ contient un unique circuit $C(I_{k-1}, e_k)$.

Mais alors $C(I, e_k) \subseteq C(I_{k-1}, e_k)$ est un circuit de $I + e_k$. Sinon, il y aurait un élément, qui serait forcément parmi f_1, \dots, f_{k-2} dans $C(I_{k-1}, e_k)$, contredisant (ii).

Preuve du lemme

Réurrence (sur k) : « $I_k = I \cup \{e_1, \dots, e_k\} \setminus \{f_1, \dots, f_k\} \in \mathcal{I}$ ».

Init. Si $k = 0$, $I_0 = I \in \mathcal{I}$

Hérédité. Si $k > 0$,

- Ou bien $I_{k-1} + e_k \in \mathcal{I}$, alors RAS.
- Ou bien $I_{k-1} + e_k$ contient un unique circuit $C(I_{k-1}, e_k)$.

Mais alors $C(I, e_k) \subseteq C(I_{k-1}, e_k)$ est un circuit de $I + e_k$. Sinon, il y aurait un élément, qui serait forcément parmi f_1, \dots, f_{k-2} dans $C(I_{k-1}, e_k)$, contredisant (ii).

Par minimalité pour \subseteq , $C(I, e_k) = C(I_{k-1}, e_k)$, donc
 $I_{k-1} + e_k \setminus f_k \in \mathcal{I}$.

Graphe d'échange

Définition

Soient deux matroïdes $\mathcal{M}_1 = (E, \mathcal{I}_1)$, $\mathcal{M}_2 = (E, \mathcal{I}_2)$ et $S \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$,

$$\overline{S} = E \setminus S.$$

Graphe d'échange

Définition

Soient deux matroïdes $\mathcal{M}_1 = (E, \mathcal{I}_1)$, $\mathcal{M}_2 = (E, \mathcal{I}_2)$ et $S \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$,
 $\bar{S} = E \setminus S$.

Le **graphe d'échanges** $\mathcal{G}(S)$ est le graphe biparti entre S et \bar{S} où

Graphe d'échange

Définition

Soient deux matroïdes $\mathcal{M}_1 = (E, \mathcal{I}_1)$, $\mathcal{M}_2 = (E, \mathcal{I}_2)$ et $S \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$,
 $\bar{S} = E \setminus S$.

Le **graphe d'échanges** $\mathcal{G}(S)$ est le graphe biparti entre S et \bar{S} où

- arc $(x, \bar{x}) \in S \times \bar{S}$ si $S \setminus x + \bar{x} \in \mathcal{I}_1$

Graphe d'échange

Définition

Soient deux matroïdes $\mathcal{M}_1 = (E, \mathcal{I}_1)$, $\mathcal{M}_2 = (E, \mathcal{I}_2)$ et $S \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$,
 $\bar{S} = E \setminus S$.

Le **graphe d'échanges** $\mathcal{G}(S)$ est le graphe biparti entre S et \bar{S} où

- arc $(x, \bar{x}) \in S \times \bar{S}$ si $S \setminus x + \bar{x} \in \mathcal{I}_1$
- arc $(\bar{x}, x) \in \bar{S} \times S$ si $S \setminus x + \bar{x} \in \mathcal{I}_2$

Graphe d'échange

Définition

Soient deux matroïdes $\mathcal{M}_1 = (E, \mathcal{I}_1)$, $\mathcal{M}_2 = (E, \mathcal{I}_2)$ et $S \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$,
 $\bar{S} = E \setminus S$.

Le **graphe d'échanges** $\mathcal{G}(S)$ est le graphe biparti entre S et \bar{S} où

- arc $(x, \bar{x}) \in S \times \bar{S}$ si $S \setminus x + \bar{x} \in \mathcal{I}_1$
- arc $(\bar{x}, x) \in \bar{S} \times S$ si $S \setminus x + \bar{x} \in \mathcal{I}_2$
- source : $X_1 = \{\bar{x} \in \bar{S}; S + \bar{x} \in \mathcal{I}_1\}$

Graphe d'échange

Définition

Soient deux matroïdes $\mathcal{M}_1 = (E, \mathcal{I}_1)$, $\mathcal{M}_2 = (E, \mathcal{I}_2)$ et $S \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$,
 $\bar{S} = E \setminus S$.

Le **graphe d'échanges** $\mathcal{G}(S)$ est le graphe biparti entre S et \bar{S} où

- arc $(x, \bar{x}) \in S \times \bar{S}$ si $S \setminus x + \bar{x} \in \mathcal{I}_1$
- arc $(\bar{x}, x) \in \bar{S} \times S$ si $S \setminus x + \bar{x} \in \mathcal{I}_2$
- source : $X_1 = \{\bar{x} \in \bar{S}; S + \bar{x} \in \mathcal{I}_1\}$
- puits : $X_2 = \{\bar{x} \in \bar{S}; S + \bar{x} \in \mathcal{I}_2\}$

Graphe d'échange

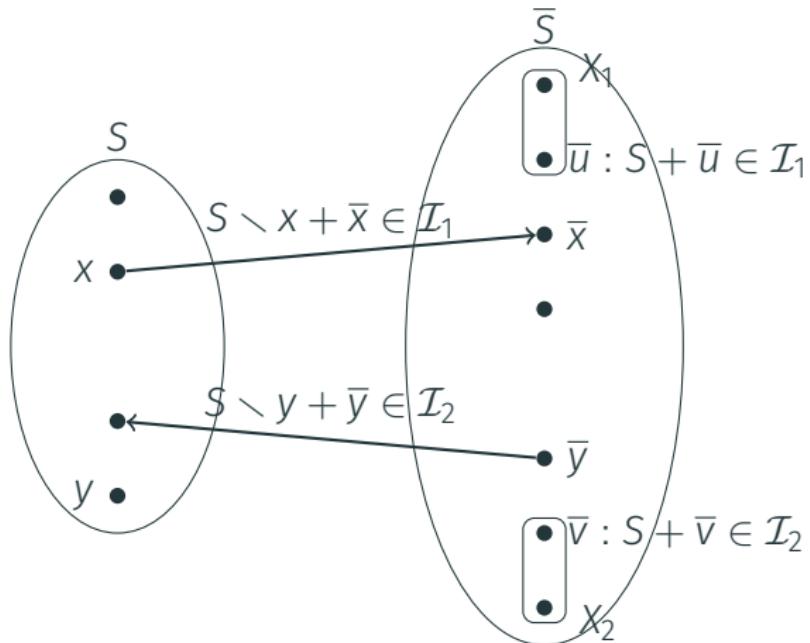
Définition

Soient deux matroïdes $\mathcal{M}_1 = (E, \mathcal{I}_1)$, $\mathcal{M}_2 = (E, \mathcal{I}_2)$ et $S \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$,
 $\bar{S} = E \setminus S$.

Le **graphe d'échanges** $\mathcal{G}(S)$ est le graphe biparti entre S et \bar{S} où

- arc $(x, \bar{x}) \in S \times \bar{S}$ si $S \setminus x + \bar{x} \in \mathcal{I}_1$
- arc $(\bar{x}, x) \in \bar{S} \times S$ si $S \setminus x + \bar{x} \in \mathcal{I}_2$
- source : $X_1 = \{\bar{x} \in \bar{S}; S + \bar{x} \in \mathcal{I}_1\}$
- puits : $X_2 = \{\bar{x} \in \bar{S}; S + \bar{x} \in \mathcal{I}_2\}$

Illustration du graphe d'échange



Chemin augmentant dans le graphe d'échange

Proposition

Soit $e_0 - f_1 - e_1 - \dots - f_t - e_t$ un plus court chemin de X_1 à X_2 dans $\mathcal{G}(S)$, alors

$$S' = S \cup \{e_0, e_1, \dots, e_t\} \setminus \{f_1, \dots, f_t\} \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2.$$

Chemin augmentant dans le graphe d'échange

Proposition

Soit $e_0 - f_1 - e_1 - \cdots - f_t - e_t$ un plus court chemin de X_1 à X_2 dans $\mathcal{G}(S)$, alors

$$S' = S \cup \{e_0, e_1, \dots, e_t\} \setminus \{f_1, \dots, f_t\} \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2.$$

Démonstration.

Comme $e_0 \in X_1$, $S + e_0 \in \mathcal{I}_1$. De plus, le lemme d'échange s'applique à $e_1 \leftrightarrow f_1, \dots, e_t \leftrightarrow f_t$. En effet, si (ii) était violé par $f_k \in C(S, e_j)$ (avec $k < j$), $e_0 - f_1 - e_1 - \cdots - f_k - e_j - \cdots - f_t - e_t$ serait un chemin plus court.

Chemin augmentant dans le graphe d'échange

Proposition

Soit $e_0 - f_1 - e_1 - \cdots - f_t - e_t$ un plus court chemin de X_1 à X_2 dans $\mathcal{G}(S)$, alors

$$S' = S \cup \{e_0, e_1, \dots, e_t\} \setminus \{f_1, \dots, f_t\} \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2.$$

Démonstration.

Comme $e_0 \in X_1$, $S + e_0 \in \mathcal{I}_1$. De plus, le lemme d'échange s'applique à $e_1 \leftrightarrow f_1, \dots, e_t \leftrightarrow f_t$. En effet, si (ii) était violé par $f_k \in C(S, e_j)$ (avec $k < j$), $e_0 - f_1 - e_1 - \cdots - f_k - e_j - \cdots - f_t - e_t$ serait un chemin plus court.

De même $e_t \in X_2$, $S + e_t \in \mathcal{I}_2$ et le lemme s'applique à $e_{t-1} \leftrightarrow f_t, \dots, e_0 \leftrightarrow f_1$.

Chemin augmentant dans le graphe d'échange

Proposition

Soit $e_0 - f_1 - e_1 - \cdots - f_t - e_t$ un plus court chemin de X_1 à X_2 dans $\mathcal{G}(S)$, alors

$$S' = S \cup \{e_0, e_1, \dots, e_t\} \setminus \{f_1, \dots, f_t\} \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2.$$

Démonstration.

Comme $e_0 \in X_1$, $S + e_0 \in \mathcal{I}_1$. De plus, le lemme d'échange s'applique à $e_1 \leftrightarrow f_1, \dots, e_t \leftrightarrow f_t$. En effet, si (ii) était violé par $f_k \in C(S, e_j)$ (avec $k < j$), $e_0 - f_1 - e_1 - \cdots - f_k - e_j - \cdots - f_t - e_t$ serait un chemin plus court.

De même $e_t \in X_2$, $S + e_t \in \mathcal{I}_2$ et le lemme s'applique à $e_{t-1} \leftrightarrow f_t, \dots, e_0 \leftrightarrow f_1$.

Donc $S' \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$.

□

Algorithme d'Edmonds

Algorithme 2 : Intersection de deux matroïdes

Entrées : $\mathcal{M}_1 = (E, \mathcal{I}_1)$ et $\mathcal{M}_2 = (E, \mathcal{I}_2)$

Sorties : $S \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ de cardinal maximum

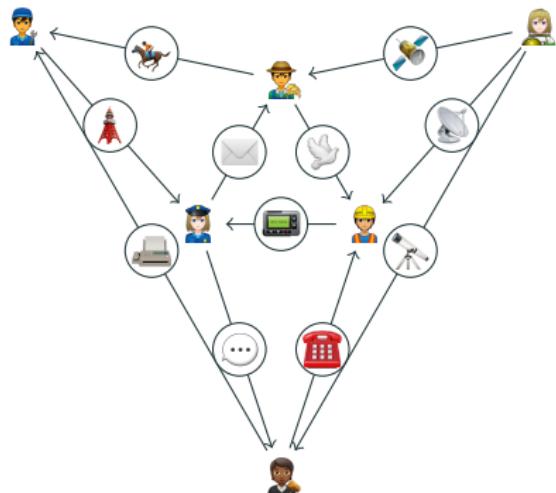
- 1 $S \leftarrow \emptyset$
 - 2 **répéter**
 - 3 Construire le graphe d'échange $\mathcal{G}(S)$
 - 4 Calculer un plus court chemin $e_0 - f_1 - e_1 - \cdots - f_t - e_t$
 de X_1 vers X_2 .
 - 5 **si** le chemin existe **alors**
 - 6 $S \leftarrow S \cup \{e_0, e_1, \dots, e_t\} \setminus \{f_1, \dots, f_t\}$.
 - 7 **jusqu'à** X_2 non accessible depuis X_1 ;
 - 8 **retourner** S
-

Exemple : recherche d'une arborescence maximum

\mathcal{M}_1 : matroïde graphique

\mathcal{M}_2 : matroïde de partition (1 arête entrante par sommet)

Étape 0 → 1



$$S = \emptyset$$

$$\bar{S} = \{\text{✉️}, \text{⌚}, \text{🐎}, \text{🕊️}, \text{💻}, \text{☎️}, \text{🚀}, \text{🐱}, \text{💻}, \text{🚀}\}$$

$$X_1 = \{\text{✉️}, \text{⌚}, \text{🐎}, \text{🕊️}, \text{💻}, \text{☎️}, \text{🚀}, \text{🐱}, \text{💻}, \text{🚀}\}$$

$$X_2 = \{\text{✉️}, \text{⌚}, \text{🐎}, \text{🕊️}, \text{💻}, \text{☎️}, \text{🚀}, \text{🐱}, \text{💻}, \text{🚀}\}$$

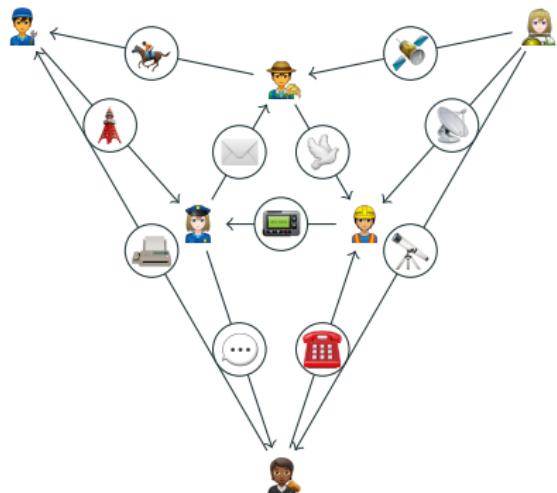
Graphe d'échange $\mathcal{G}(S)$ non représenté

Exemple : recherche d'une arborescence maximum

\mathcal{M}_1 : matroïde graphique

\mathcal{M}_2 : matroïde de partition (1 arête entrante par sommet)

Étape 0 → 1



$$S = \emptyset$$

$$\bar{S} = \{\text{✉️}, \text{⌚}, \text{🐎}, \text{🕊️}, \text{💻}, \text{☎️}, \text{🚀}, \text{🔭}, \text{💻}, \text{🚀}\}$$

$$X_1 = \{\text{✉️}, \text{⌚}, \text{🐎}, \text{🕊️}, \text{💻}, \text{☎️}, \text{🚀}, \text{🔭}, \text{💻}, \text{🚀}\}$$

$$X_2 = \{\text{✉️}, \text{⌚}, \text{🐎}, \text{🕊️}, \text{💻}, \text{☎️}, \text{🚀}, \text{🔭}, \text{💻}, \text{🚀}\}$$

Graphe d'échange $\mathcal{G}(S)$ non représenté

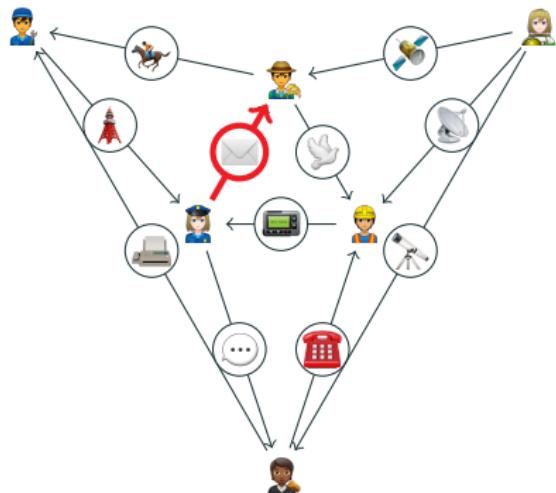
Plus court chemin $X_1 \rightarrow X_2$ dans $\mathcal{G}(S)$: ✉️

Exemple : recherche d'une arborescence maximum

\mathcal{M}_1 : matroïde graphique

\mathcal{M}_2 : matroïde de partition (1 arête entrante par sommet)

Étape 1 → 2



$$S = \{\text{✉}\}$$

$$\overline{S} = \{\dots, \text{horse}, \text{bird}, \text{computer}, \text{telephone}, \text{satellite}, \text{telescope}, \text{moon}, \text{radio}, \text{rocket}\}$$

$$X_1 = \{\dots, \text{horse}, \text{bird}, \text{computer}, \text{telephone}, \text{satellite}, \text{telescope}, \text{satellite dish}, \text{tablet}, \text{rocket}\}$$

$$X_2 = \{\dots, \text{horse}, \text{dove}, \text{computer}, \text{telephone}, \text{telescope}, \text{satellite}, \text{calculator}, \text{rocket}\}$$

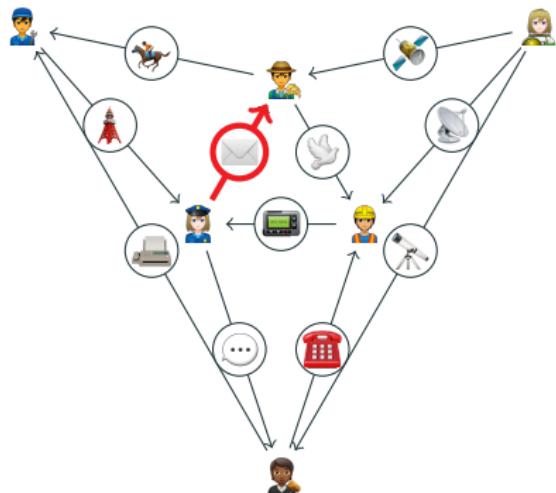
Graphe d'échange $\mathcal{G}(S)$ non représenté

Exemple : recherche d'une arborescence maximum

\mathcal{M}_1 : matroïde graphique

\mathcal{M}_2 : matroïde de partition (1 arête entrante par sommet)

Étape 1 → 2



$$S = \{\text{✉}\}$$

$$\bar{S} = \{\text{∅}, \text{🐴}, \text{🕊}, \text{💻}, \text{📞}, \text{📡}, \text{🏃}, \text{🐀}, \text{📱}, \text{🚀}\}$$

$$X_1 = \{\text{∅}, \text{🐴}, \text{@}, \text{💻}, \text{📞}, \text{📡}, \text{🏃}, \text{🐀}, \text{📱}, \text{🚀}\}$$

$$X_2 = \{\text{∅}, \text{🐴}, \text{@}, \text{💻}, \text{📞}, \text{🏃}, \text{🐀}, \text{📱}, \text{🚀}\}$$

Graphe d'échange $\mathcal{G}(S)$ non représenté

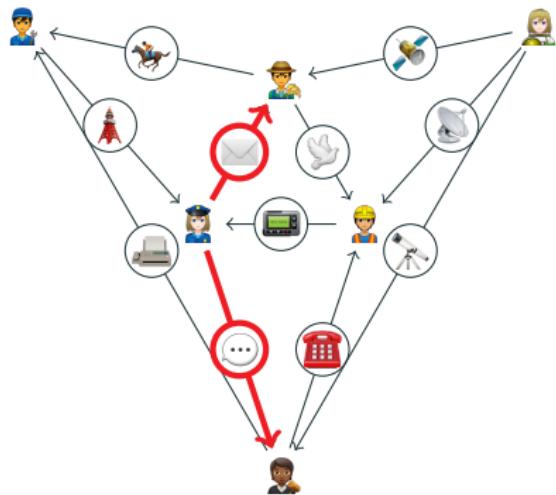
Plus court chemin $X_1 \rightarrow X_2$ dans $\mathcal{G}(S)$: ☰

Exemple : recherche d'une arborescence maximum

\mathcal{M}_1 : matroïde graphique

\mathcal{M}_2 : matroïde de partition (1 arête entrante par sommet)

Étape 2 → 3



$$S = \{\text{✉}, \text{💬}\}$$

$$\overline{S} = \{\text{horse, dove, typewriter, telephone, satellite, telescope, satellite dish, radio, rocket}\}$$

$$X_1 = \{ \text{horse, dove, typewriter, telephone, satellite, telescope, satellite dish, digital device, rocket} \}$$

$$X_2 = \{ \text{🐎, 🕊, 📲, 📞, 🐶, 🚧, 🚭} \}$$

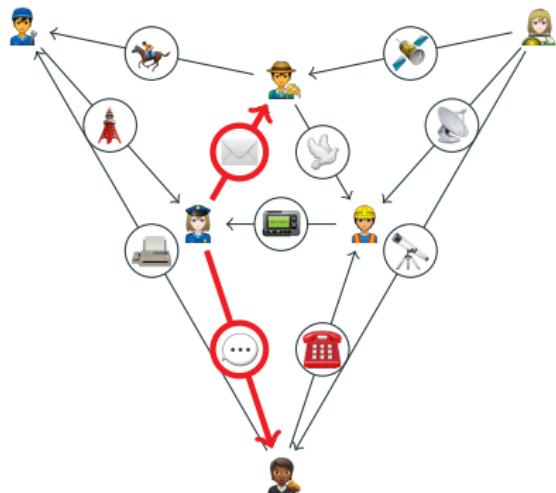
Graphe d'échange $\mathcal{G}(S)$ non représenté

Exemple : recherche d'une arborescence maximum

\mathcal{M}_1 : matroïde graphique

\mathcal{M}_2 : matroïde de partition (1 arête entrante par sommet)

Étape 2 → 3



$$S = \{\text{✉}, \odot\}$$

$$\bar{S} = \{\text{🐎}, \text{🕊}, \text{💻}, \text{☎}, \text{📡}, \text{👤}, \text{🛸}, \text{⌚}, \text{🚀}\}$$

$$X_1 = \{\text{🐎}, \text{🕊}, \text{💻}, \text{☎}, \text{📡}, \text{👤}, \text{🛸}, \text{⌚}, \text{🚀}\}$$

$$X_2 = \{\text{🐎}, \text{🕊}, \text{💻}, \text{☎}, \text{🛸}, \text{⌚}, \text{🚀}\}$$

Graphe d'échange $\mathcal{G}(S)$ non représenté

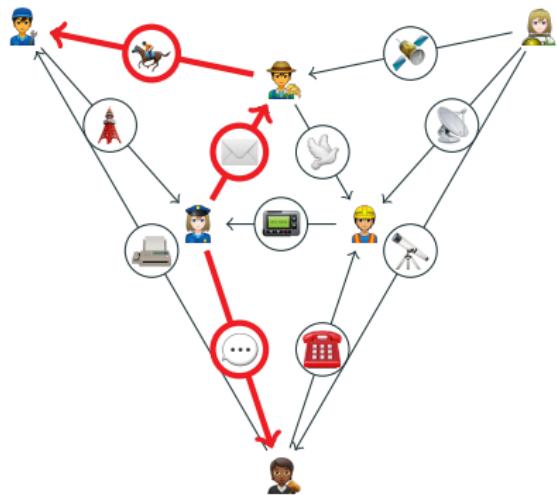
Plus court chemin $X_1 \rightarrow X_2$ dans $\mathcal{G}(S)$:

Exemple : recherche d'une arborescence maximum

\mathcal{M}_1 : matroïde graphique

\mathcal{M}_2 : matroïde de partition (1 arête entrante par sommet)

Étape 3 → 4



$$S = \{\text{✉}, \text{⌚}, \text{🐎}\}$$

$$\bar{S} = \{\text{🕊}, \text{💻}, \text{☎}, \text{✎}, \text{🚀}, \text{🖱}, \text{⌚}, \text{💻}, \text{🚀}\}$$

$$X_1 = \{\text{🕊}, \text{💻}, \text{✎}, \text{🚀}, \text{🖱}, \text{⌚}, \text{💻}\}$$

$$X_2 = \{\text{🕊}, \text{☎}, \text{🖱}, \text{💻}, \text{🚀}\}$$

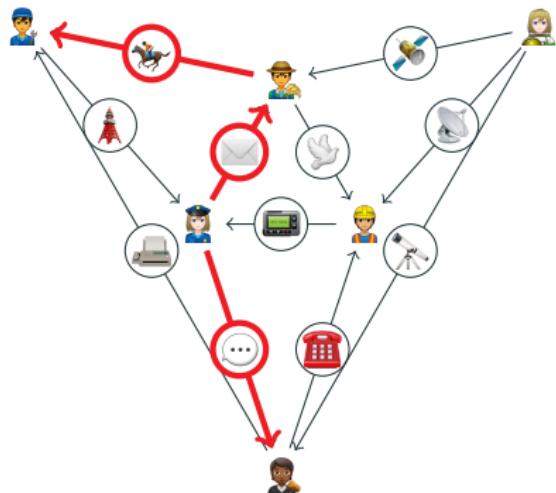
Graphe d'échange $\mathcal{G}(S)$ non représenté

Exemple : recherche d'une arborescence maximum

\mathcal{M}_1 : matroïde graphique

\mathcal{M}_2 : matroïde de partition (1 arête entrante par sommet)

Étape 3 → 4



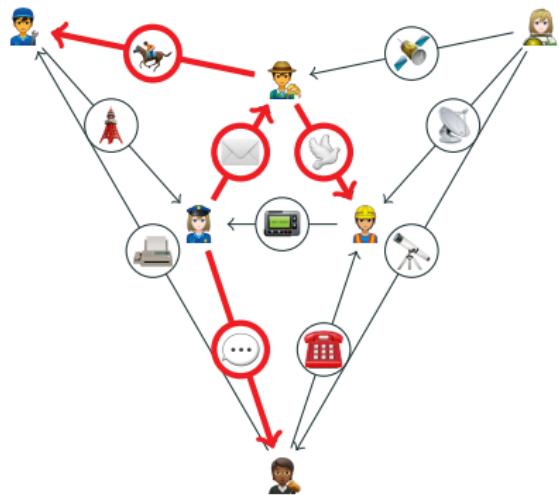
$$S = \{\text{✉}, \text{..., 🐾}\}$$

Graphe d'échange $\mathcal{G}(S)$ non représenté

Plus court chemin $X_1 \rightarrow X_2$ dans $\mathcal{G}(S)$:

Exemple : recherche d'une arborescence maximum

Étape 4 → 5

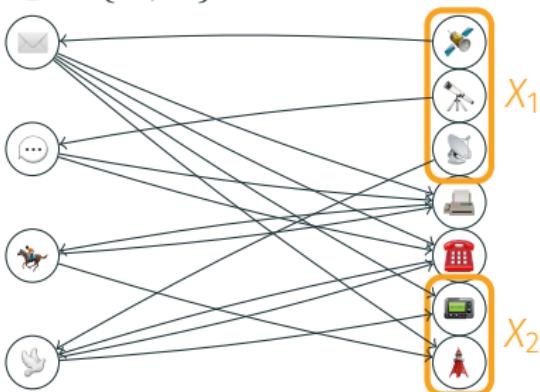


$$S = \{\text{✉}, \text{💬}, \text{🐴}, \text{@}\}$$

$$\bar{S} = \{\text{💻}, \text{☎}, \text{🛸}, \text{🔭}, \text{🖱}, \text{⌚}, \text{🚀}\}$$

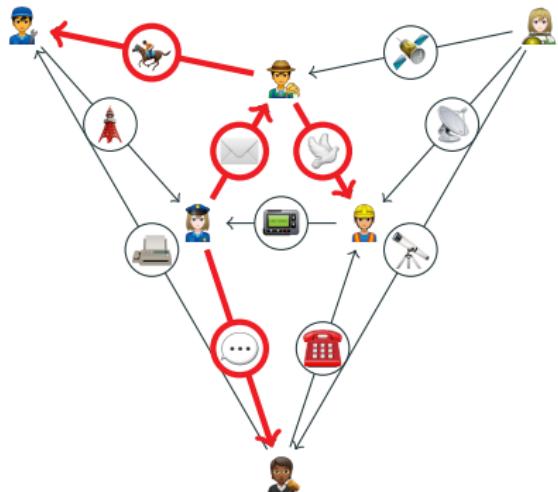
$$X_1 = \{\text{🛸}, \text{🔭}, \text{🖱}\}$$

$$X_2 = \{\text{⌚}, \text{🚀}\}$$



Exemple : recherche d'une arborescence maximum

Étape 4 → 5

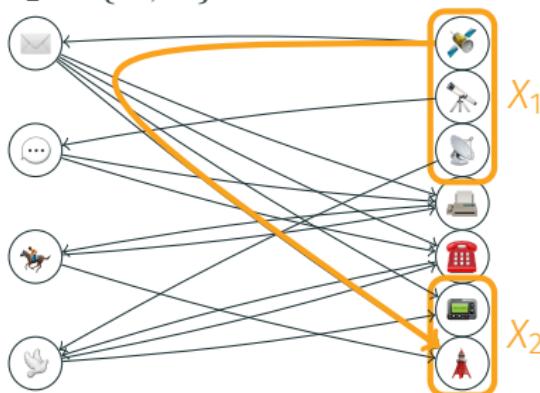


$$S = \{\text{✉}, \text{💬}, \text{🐎}, \text{@}\}$$

$$\bar{S} = \{\text{💻}, \text{☎}, \text{📡}, \text{-worker}, \text{-cat}, \text{-tv}, \text{-rocket}\}$$

$$X_1 = \{\text{📡}, \text{-worker}, \text{-cat}\}$$

$$X_2 = \{\text{-tv}, \text{-rocket}\}$$

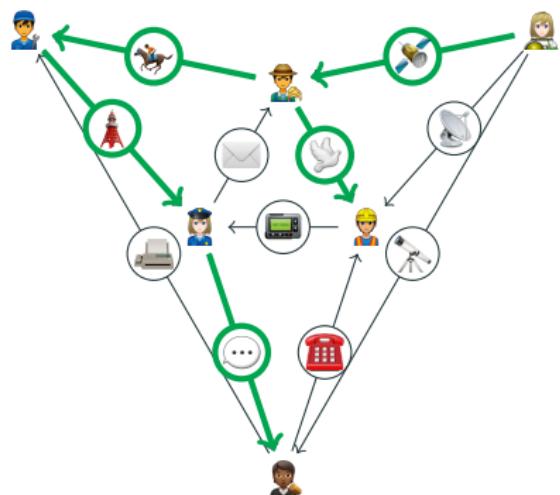


Plus court chemin $X_1 \rightarrow X_2$ dans $\mathcal{G}(S)$:

$\text{📡} - \text{✉} - \text{Rocket}$.

Exemple : recherche d'une arborescence maximum

État final



$$S = \{\dots, \text{horse}, \text{dove}, \text{calculator}, \text{rocket}\}$$

$$\bar{S} = \{\text{mail}, \text{laptop}, \text{printer}, \text{person with tool}, \text{cat}, \text{calculator}\}$$

$$X_1 = \emptyset$$

$$X_2 = \emptyset$$

Correction du cas d'arrêt

Lemme

Si le puits X_2 n'est pas accessible depuis la source X_1 , alors S est de cardinal maximum.

Correction du cas d'arrêt

Lemme

Si le puits X_2 n'est pas accessible depuis la source X_1 , alors S est de cardinal maximum.

Démonstration.

Soit \overline{U} les sommets accessibles depuis X_1 . Montrons que

$$\text{rg}_{\mathcal{M}_2}(\overline{U}) = |S \cap \overline{U}|.$$

Correction du cas d'arrêt

Lemme

Si le puits X_2 n'est pas accessible depuis la source X_1 , alors S est de cardinal maximum.

Démonstration.

Soit \bar{U} les sommets accessibles depuis X_1 . Montrons que

$$\text{rg}_{\mathcal{M}_2}(\bar{U}) = |S \cap \bar{U}|.$$

Par l'absurde, on pourrait compléter $S \cap \bar{U}$ avec $\bar{x} \in \bar{U} \setminus S$ dans \mathcal{I}_2 . Par hyp., $\bar{x} \notin X_2$, donc $S + \bar{x}$ contient un circuit C . Soit $x \in C$ tq $S + \bar{x} \setminus x \in \mathcal{I}_2$. Or x ne peut venir de $S \cap \bar{U}$. Bilan : (\bar{x}, x) est un arc de $\mathcal{G}(S)$ sortant de \bar{U} : contradiction.

Correction du cas d'arrêt

Lemme

Si le puits X_2 n'est pas accessible depuis la source X_1 , alors S est de cardinal maximum.

Démonstration.

Soit \bar{U} les sommets accessibles depuis X_1 . Montrons que

$$\text{rg}_{\mathcal{M}_2}(\bar{U}) = |S \cap \bar{U}|.$$

Par l'absurde, on pourrait compléter $S \cap \bar{U}$ avec $\bar{x} \in \bar{U} \setminus S$ dans \mathcal{I}_2 . Par hyp., $\bar{x} \notin X_2$, donc $S + \bar{x}$ contient un circuit C . Soit $x \in C$ tq $S + \bar{x} \setminus x \in \mathcal{I}_2$. Or x ne peut venir de $S \cap \bar{U}$. Bilan : (\bar{x}, x) est un arc de $\mathcal{G}(S)$ sortant de \bar{U} : contradiction.

De même $\text{rg}_{\mathcal{M}_1}(U) = |S \cap U|$. La coupe (U, \bar{U}) certifie l'optimalité. □

Correction et complexité

Théorème

L'algorithme d'Edmonds résout correctement le problème d'intersection de deux matroïdes en temps $O(r^2n(1 + C_1 + C_2))$ où r est le cardinal de la solution, C_1 (resp. C_2) la complexité de l'oracle d'indépendance de \mathcal{M}_1 (resp. \mathcal{M}_2).

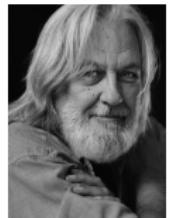
Principe de min-max

Pour toute coupe (U, \bar{U}) de E , on a

$$|I| \leq \text{rg}_{\mathcal{M}_1}(U) + \text{rg}_{\mathcal{M}_2}(\bar{U}).$$



Richard Rado
(1906–1989)

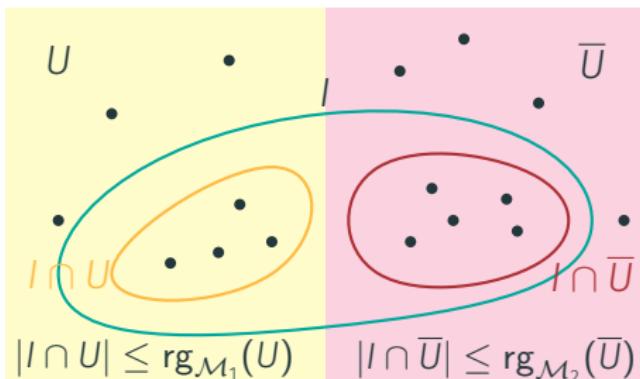


Jack Edmonds
(1934)

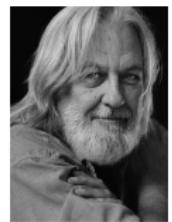
Principe de min-max

Pour toute coupe (U, \bar{U}) de E , on a

$$|I| \leq \text{rg}_{\mathcal{M}_1}(U) + \text{rg}_{\mathcal{M}_2}(\bar{U}).$$



Richard Rado
(1906–1989)

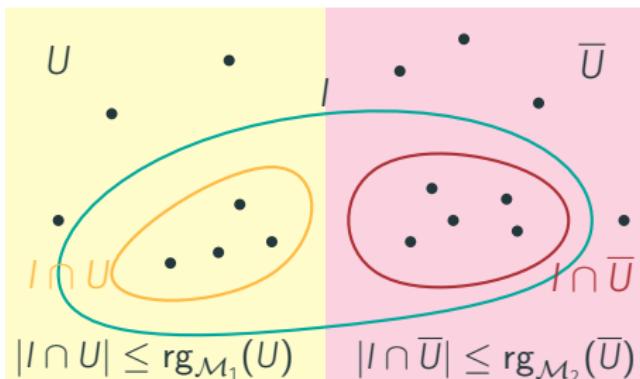


Jack Edmonds
(1934)

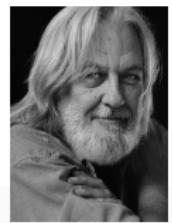
Principe de min-max

Pour toute coupe (U, \bar{U}) de E , on a

$$|I| \leq \text{rg}_{\mathcal{M}_1}(U) + \text{rg}_{\mathcal{M}_2}(\bar{U}).$$



Richard Rado
(1906-1989)



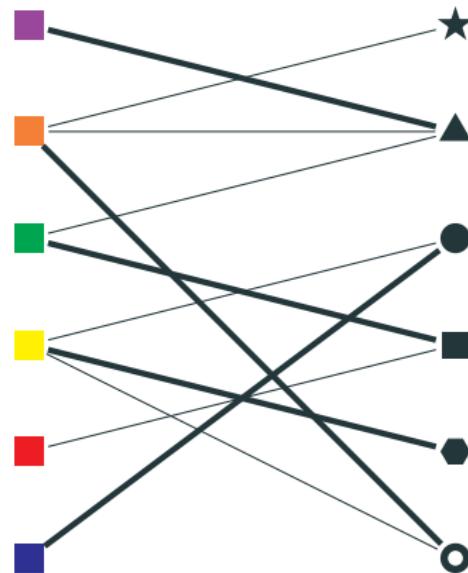
Jack Edmonds
(1934)

Théorème d'Edmonds

$$\max_{I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2} |I| = \min_{U \subseteq E} [\text{rg}_{\mathcal{M}_1}(U) + \text{rg}_{\mathcal{M}_2}(\bar{U})]$$

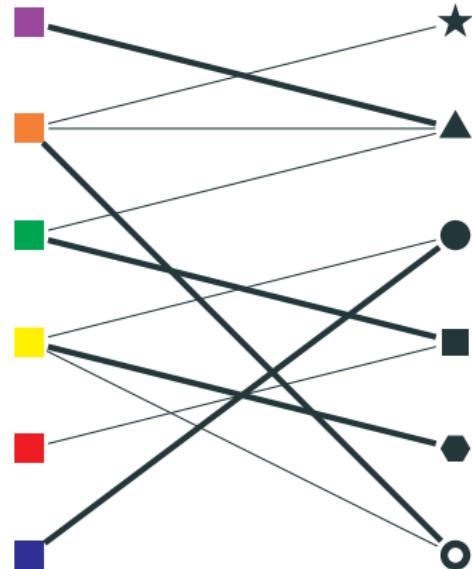
Exemple

Montrer que le couplage S est de cardinal maximum.



Exemple

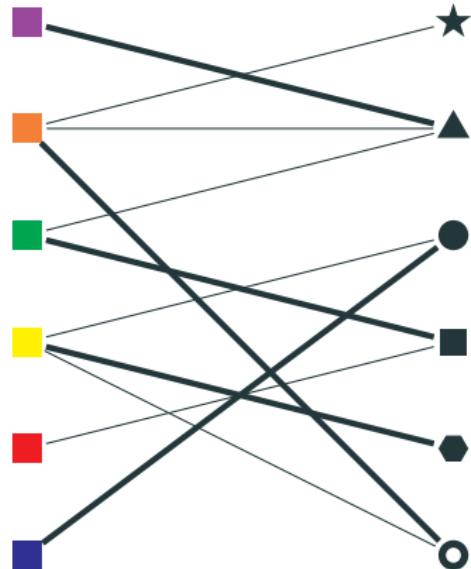
Montrer que le couplage S est de cardinal maximum.



Soit \mathcal{M}_1 le matroïde de partition sur les couleurs des arêtes et \mathcal{M}_2 le matroïde de partition sur les formes des arêtes.

Exemple

Montrer que le couplage S est de cardinal maximum.



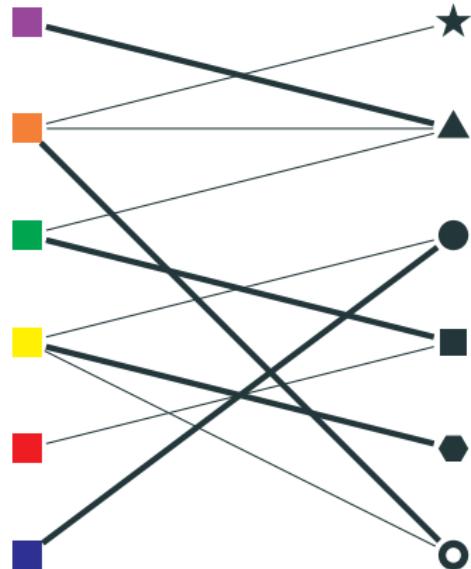
Soit \mathcal{M}_1 le matroïde de partition sur les couleurs des arêtes et \mathcal{M}_2 le matroïde de partition sur les formes des arêtes.

On considère la partition

$$U = \{\star, \triangle, \bullet, \circlearrowleft, \circlearrowright, \circlearrowright\},$$
$$\overline{U} = \{\triangle, \square, \square, \square\}.$$

Exemple

Montrer que le couplage S est de cardinal maximum.



Soit \mathcal{M}_1 le matroïde de partition sur les couleurs des arêtes et \mathcal{M}_2 le matroïde de partition sur les formes des arêtes.

On considère la partition

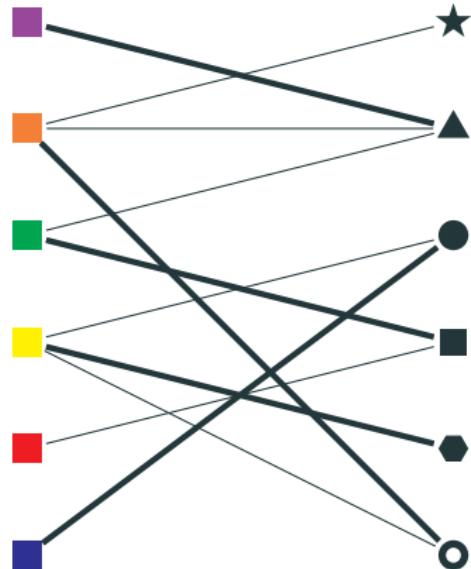
$$U = \{\star, \triangle, \bullet, \circlearrowleft, \circlearrowright, \circlearrowuparrow, \circlearrowdownarrow\},$$

$$\bar{U} = \{\triangle, \square, \blacksquare, \blacksquare\}.$$

On a $\text{rg}_{\mathcal{M}_1}(U) = 3$ et $\text{rg}_{\mathcal{M}_2}(\bar{U}) = 2$.

Exemple

Montrer que le couplage S est de cardinal maximum.



Soit \mathcal{M}_1 le matroïde de partition sur les couleurs des arêtes et \mathcal{M}_2 le matroïde de partition sur les formes des arêtes.

On considère la partition

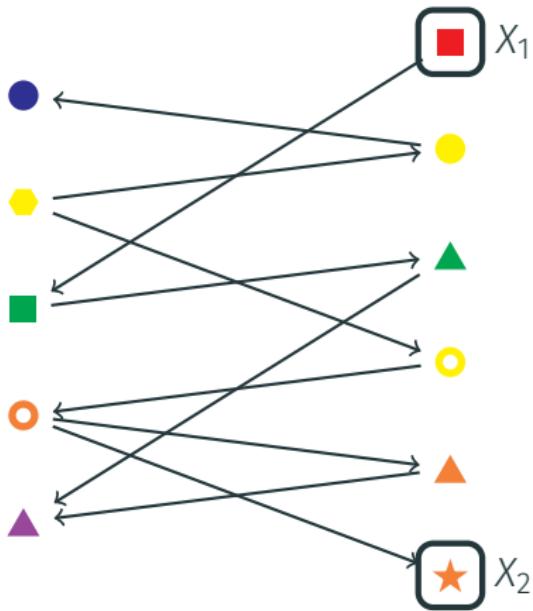
$$U = \{\star, \triangle, \bullet, \circlearrowleft, \circlearrowright, \circlearrowuparrow, \circlearrowdownarrow\},$$

$$\bar{U} = \{\triangle, \square, \blacksquare, \blacksquare\}.$$

On a $\text{rg}_{\mathcal{M}_1}(U) = 3$ et $\text{rg}_{\mathcal{M}_2}(\bar{U}) = 2$.

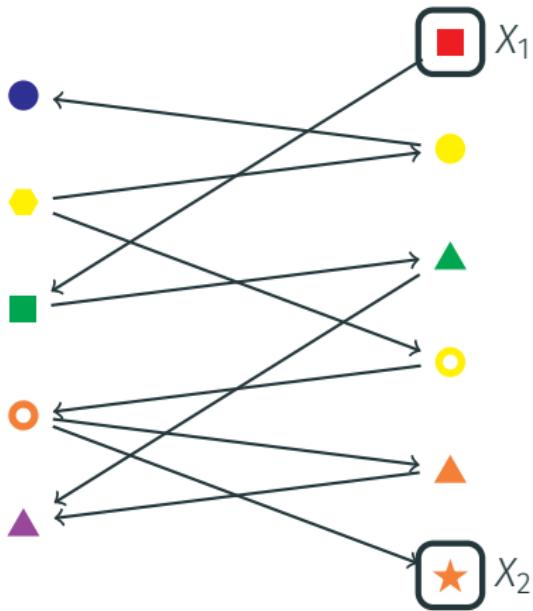
$$|S| \leq 3 + 2.$$

Exemple (suite) : graphe d'échange $\mathcal{G}(S)$



Comment calculer une coupe (U, \bar{U}) dans le graphe d'échange $\mathcal{G}(S)$?

Exemple (suite) : graphe d'échange $\mathcal{G}(S)$

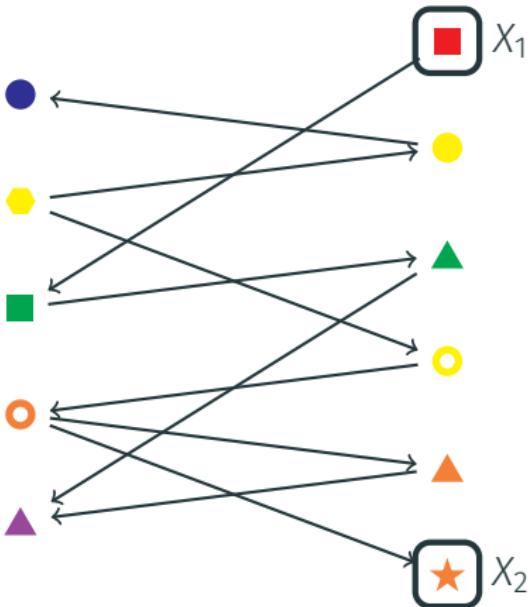


Comment calculer une coupe (U, \overline{U}) dans le graphe d'échange $\mathcal{G}(S)$?

- Sommets accessibles depuis X_1 .

$$U = \{\star, \blacktriangle, \bullet, \circ, \textcolor{blue}{\bullet}, \textcolor{red}{\circ}, \textcolor{yellow}{\circ}\},$$
$$\overline{U} = \{\blacksquare, \blacksquare, \blacktriangle, \blacktriangle\}.$$

Exemple (suite) : graphe d'échange $\mathcal{G}(S)$



Comment calculer une coupe (U, \overline{U}) dans le graphe d'échange $\mathcal{G}(S)$?

- Sommets accessibles depuis X_1 .

$$U = \{\star, \blacktriangle, \bullet, \textcolor{blue}{\circ}, \textcolor{red}{\circ}, \textcolor{yellow}{\circ}, \textcolor{yellow}{\circ}\},$$
$$\overline{U} = \{\blacksquare, \blacksquare, \blacktriangle, \blacktriangle\}.$$

- Sommets co-accessibles vers X_2

$$U = \{\star, \textcolor{orange}{\circ}, \textcolor{yellow}{\circ}, \textcolor{yellow}{\circ}\},$$
$$\overline{U} = \{\blacktriangle, \blacktriangle, \textcolor{orange}{\triangle}, \blacksquare, \textcolor{red}{\square}, \textcolor{yellow}{\circ}, \bullet\}.$$