CSC-4MI13 : Perles de programmation de structures de données et d'algorithmes

Couplages

Bertrand Meyer

18 septembre 2024

Qui suis-je ?

Bertrand Meyer — département Informatique et Réseau

Me contacter
Courriel : bertrand.meyer@telecom-paris.fr

Bureau : 4.D25

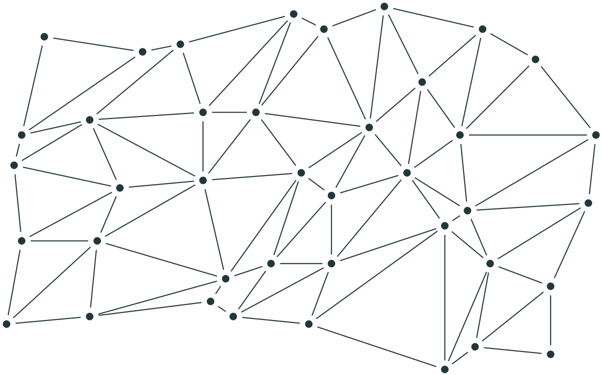
Mieux vaut prendre rendez-vous pour me voir.

Graphes & généralités

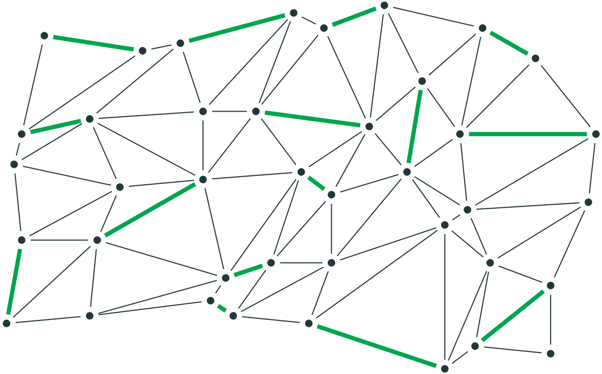
Graphes

Définition
Un graphe non orienté est un couple $G = (V, E)$ où

- V est un ensemble fini (de sommets)
- et $E \subseteq \binom{V}{2}$ est un ensemble de paires de sommet (les arêtes).



Définition
Un couplage dans un graphe non orienté est un ensemble d'*arêtes deux à deux non adjacentes* (*i.e.* ayant des extrémités distinctes).



Couplage maximal, couplage maximum

Soit $\mathfrak{M} \subseteq 2^E$ l'ensemble des couplages d'un graphe G.

Couplage maximal, couplage maximum

Soit $\mathfrak{M} \subseteq 2^E$ l'ensemble des couplages d'un graphe G.

Définition
Un couplage M de G est dit maximal si M est un élément maximal de $\mathfrak{M}$ pour la relation d'ordre « inclusion » dans 2^E.

Autrement dit, M est maximal ss'il n'existe pas d'arête e telle que $M' = M \cup \{e\}$ est un couplage.

Couplage maximal, couplage maximum

Soit $\mathfrak{M} \subseteq 2^E$ l'ensemble des couplages d'un graphe G.

Définition
Un couplage M de G est dit maximal si M est un élément maximal de $\mathfrak{M}$ pour la relation d'ordre « inclusion » dans 2^E.

Autrement dit, M est maximal ss'il n'existe pas d'arête e telle que $M' = M \cup \{e\}$ est un couplage.

Définition
Un couplage est dit maximum s'il maximise la fonction cardinal $\mathfrak{M} \to \mathbb{N}$.

Autrement dit, M est maximum ss'il n'existe pas de couplage M' avec $|M'| > |M|$.

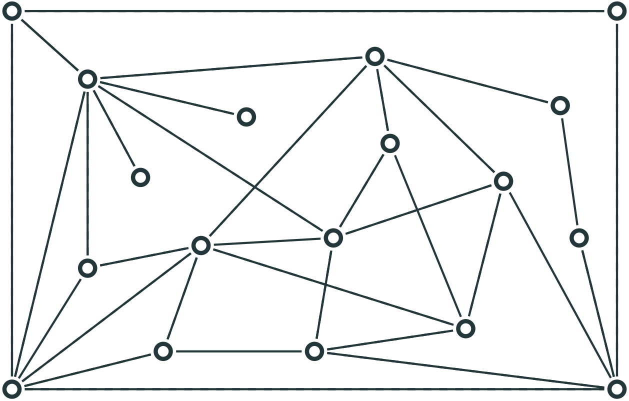
Problème d'optimisation

Problème du Couplage Maximum :
Données : $G = (V, E)$ graphe non orienté.

Tâche : Trouver un couplage de cardinal maximum.

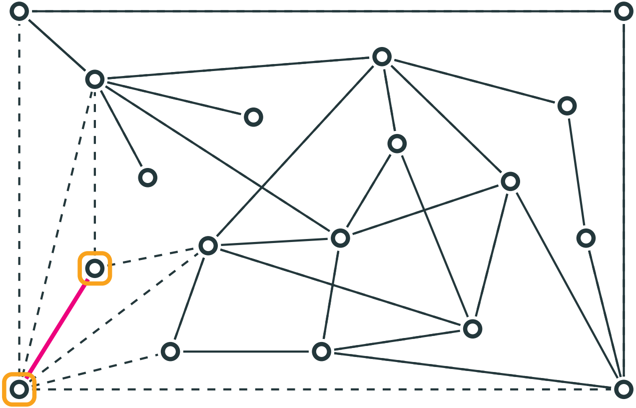
Algorithme glouton

Une stratégie gloutonne calcule un couplage maximal mais non pas toujours maximum.



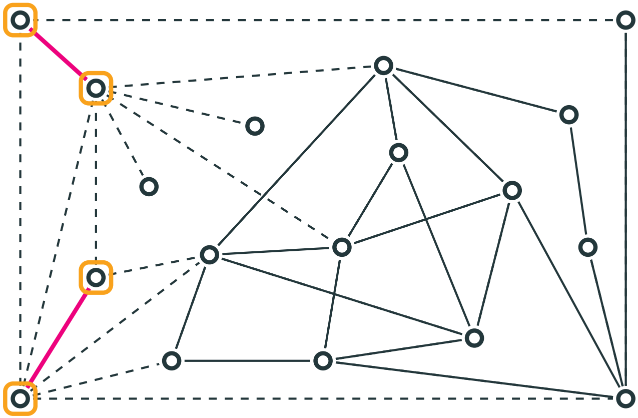
Algorithme glouton

Une stratégie gloutonne calcule un couplage maximal mais non pas toujours maximum.

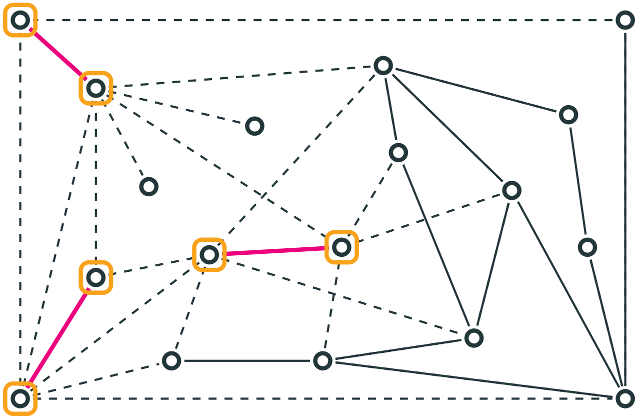


Algorithme glouton

Une stratégie gloutonne calcule un couplage maximal mais non pas toujours maximum.

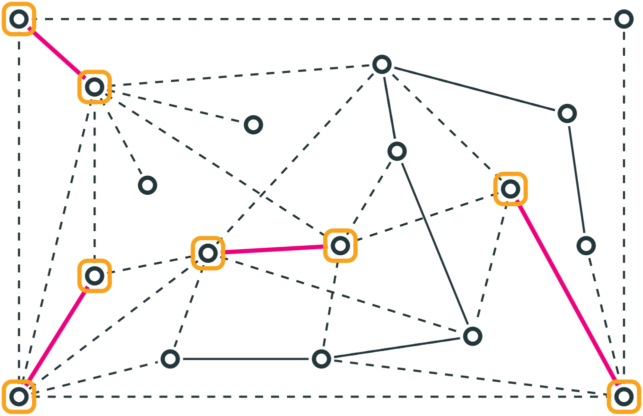


Une stratégie gloutonne calcule un couplage maximal mais non pas toujours maximum.



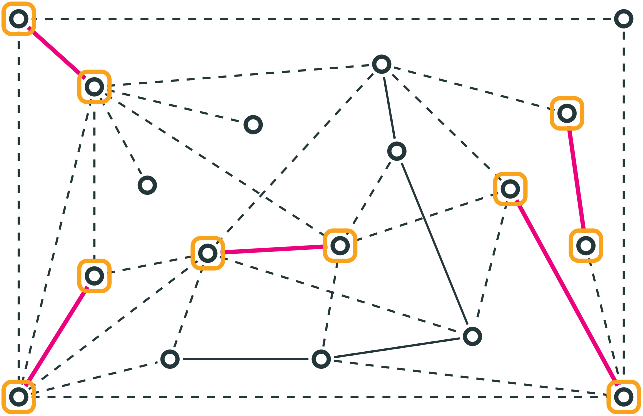
Algorithme glouton

Une stratégie gloutonne calcule un couplage maximal mais non pas toujours maximum.



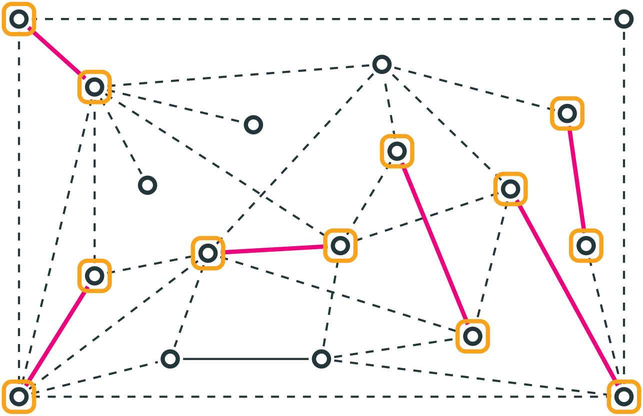
Algorithme glouton

Une stratégie gloutonne calcule un couplage maximal mais non pas toujours maximum.



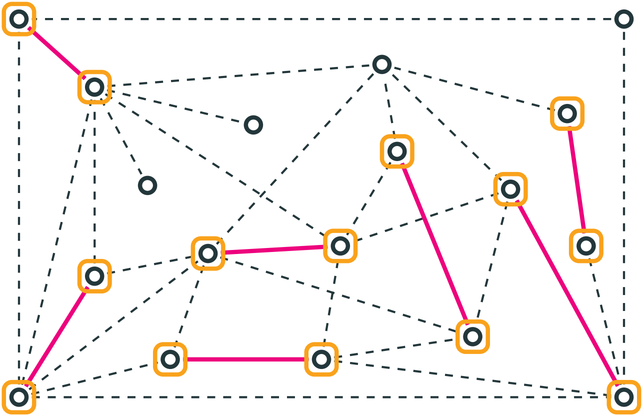
Algorithme glouton

Une stratégie gloutonne calcule un couplage maximal mais non pas toujours maximum.

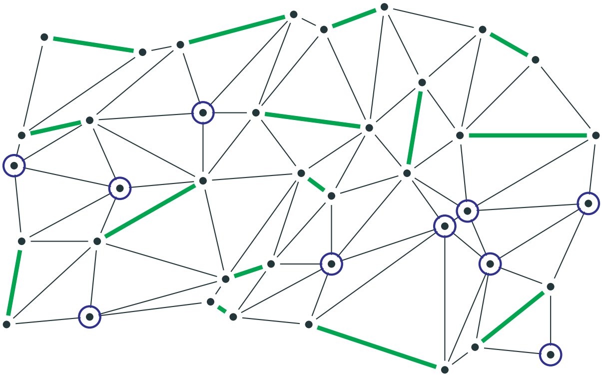


Algorithme glouton

Une stratégie gloutonne calcule un couplage maximal mais non pas toujours maximum.



Définition
Un sommet $v \in V$ d'un graphe non orienté $G = (V, E)$ est dit couvert par un couplage M s'il existe une arête M incidente à v.



Couverture des sommets par des arêtes

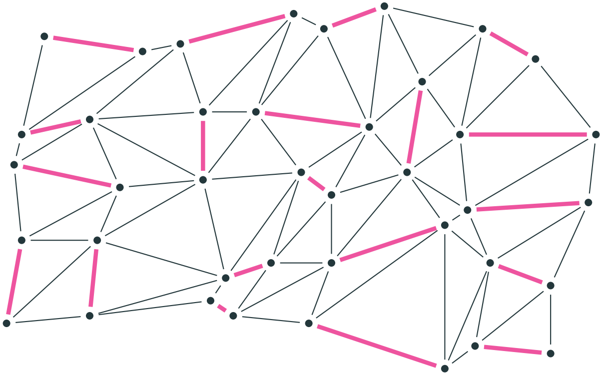
Définition
Un sommet $v \in V$ d'un graphe non orienté $G = (V, E)$ est dit couvert par un couplage M s'il existe une arête M incidente à v.

Le nombre de sommet non couvert par un couplage est

$$|V| - 2|M|.$$

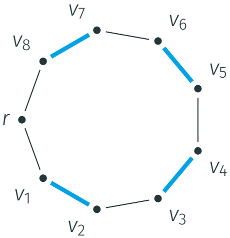
Maximiser le cardinal d'un couplage équivaut à minimiser le nombre de sommets non couverts.

Définition
Un couplage est parfait si tous les sommets du graphe sont couverts.



Couplage presque parfait

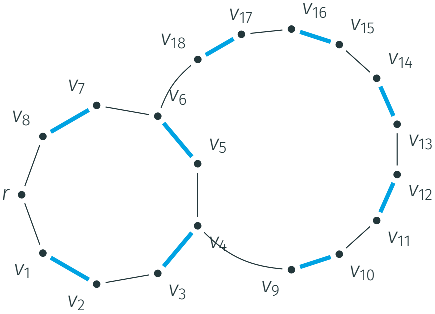
Définition
Un couplage est presque parfait si tous les sommets du graphe sont couverts sauf un.



Couplage presque parfait

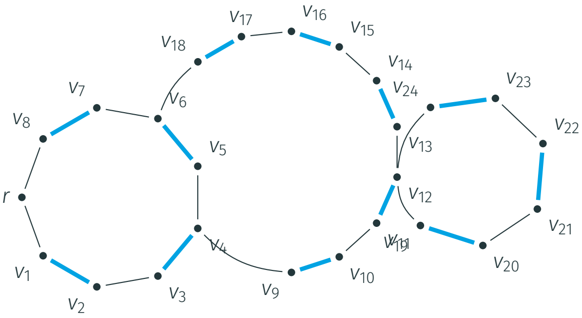
Définition

Un couplage est presque parfait si tous les sommets du graphe sont couverts sauf un.



Définition

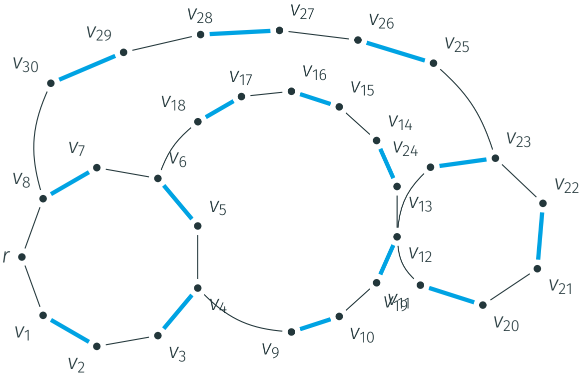
Un couplage est presque parfait si tous les sommets du graphe sont couverts sauf un.



Couplage presque parfait

Définition

Un couplage est presque parfait si tous les sommets du graphe sont couverts sauf un.



Dans cet exemple, on parle de décomposition en oreilles de longueur impaire.

Une contrainte sur le nombre de sommets non couverts

Soit $G = (V, E)$ un graphe et $X \subseteq V$ un ensemble de sommets. Notons $q_G(X)$ le nombre de composante connexes impaires du graphe $G \setminus X$.

Une contrainte sur le nombre de sommets non couverts

Soit $G = (V, E)$ un graphe et $X \subseteq V$ un ensemble de sommets. Notons $q_G(X)$ le nombre de composante connexes impaires du graphe $G \setminus X$.

Lemme
Soit M un couplage de G, alors au moins $q_G(X) - |X|$ sommets de V ne sont pas couverts par M :

$$q_G(X) - |X| \leq |V| - 2|M|.$$

Une contrainte sur le nombre de sommets non couverts

Soit $G = (V, E)$ un graphe et $X \subseteq V$ un ensemble de sommets. Notons $q_G(X)$ le nombre de composante connexes impaires du graphe $G \setminus X$.

1947

William Tutte
(1917†2002)

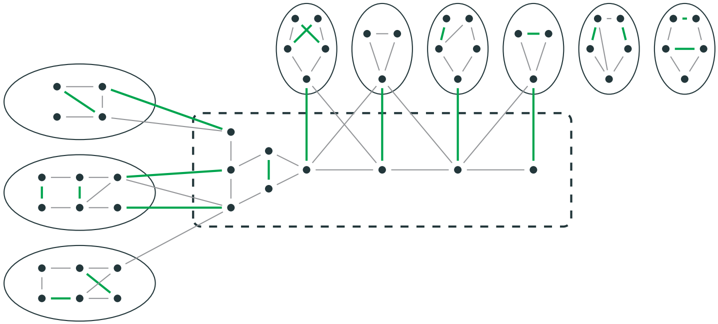
Lemme
Soit M un couplage de G, alors au moins $q_G(X) - |X|$ sommets de V ne sont pas couverts par M :

$$q_G(X) - |X| \leq |V| - 2|M|.$$

Corollaire (Tutte)
Si le graphe $G = (V, E)$ possède un couplage parfait, alors, pour tout ensemble de sommet $X \subseteq V$, on a

$$q_G(X) \leq |X|$$

Démonstration.



□

Théorème de Berge

1958

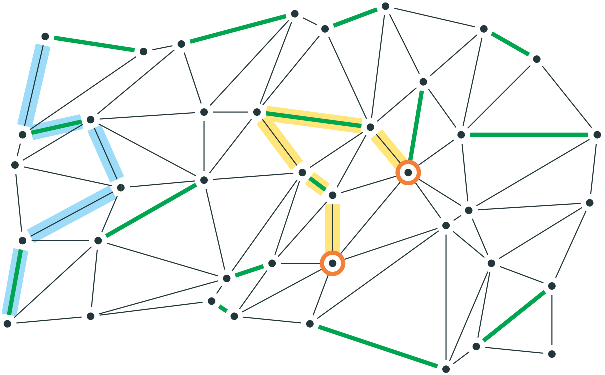
Claude Berge
(1926†2002)

Théorème (Berge)
Dans le cas où M est un couplage maximum, le nombre de sommets non couverts vérifie

$$|V| - 2|M| = \max_{X \subseteq V} q_G(X) - |X|.$$

Chaîne alternante

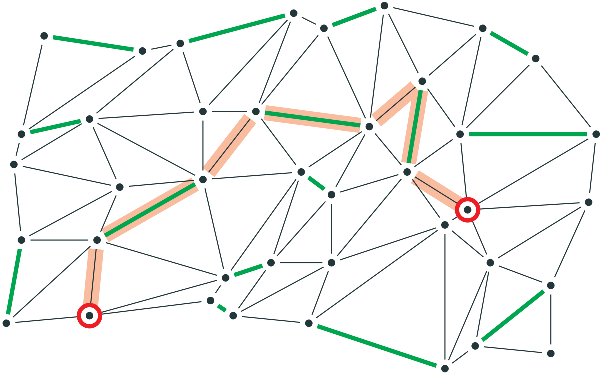
Définition
Soit $M \subseteq E$ un couplage d'un graphe $G = (V, E)$.
Une chaîne $P \subseteq E$ est *M-alternée* si $P \setminus M$ est *aussi* un couplage.



Chaîne augmentante

Définition

Soit $M \subseteq E$ un couplage d'un graphe. Une chaîne *M-augmentante* est une chaîne M-alternée entre deux sommets *non couverts* par M.

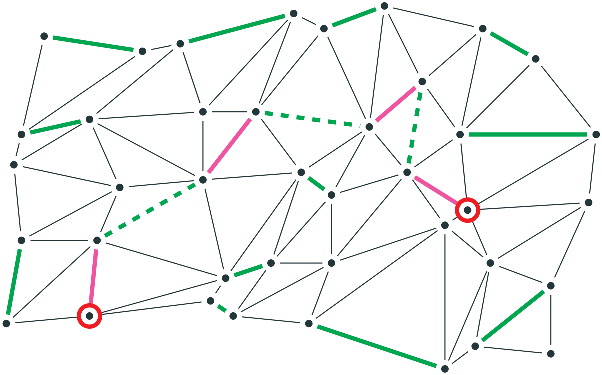


Remarque

Une chaîne augmentante est de longueur impaire.

Incrémentation du cardinal d'un couplage

Définition
Soit $M \subseteq E$ un couplage d'un graphe et P un chaîne M-augmentante.
Alors $M' = M \triangle P$ est un couplage de cardinal $|M| + 1$.



Rappel
Différence symétrique : $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. En logique : XOR.

Lemme de Berge

Théorème
Un couplage est de cardinal maximum si et seulement s'il n'existe pas de chaîne augmentante.

Lemme de Berge

Théorème
Un couplage est de cardinal maximum si et seulement s'il n'existe pas de chaîne augmentante.

Démonstration.
Soit G un graphe et M un couplage.

S'il existe une chaîne augmentante P, alors $M' = M \triangle P$ est aussi un couplage de cardinal strictement supérieur. Donc M n'est pas maximum.

Lemme de Berge

Théorème

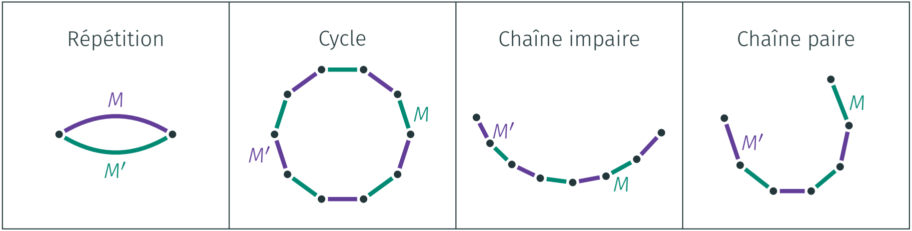
Un couplage est de cardinal maximum si et seulement s'il n'existe pas de chaîne augmentante.

Démonstration.

Soit G un graphe et M un couplage.

S'il existe une chaîne augmentante P, alors $M' = M \triangle P$ est aussi un couplage de cardinal strictement supérieur. Donc M n'est pas maximum.

S'il existe un couplage M' tel que $|M'| > |M|$, alors $M \triangle M'$ est l'union d'une ou plusieurs chaînes et de cycles de longueur paire sommets-disjoints. Une des chaînes est M-augmentante.



□

Cas des graphes bipartis

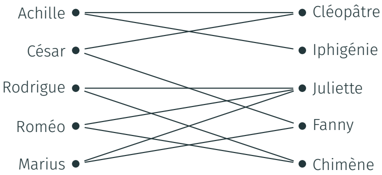
Les graphes bipartis

Définition
Un graphe non orienté $G = (V, E)$ est dit biparti s'il existe une partition de l'ensemble des sommets en deux parts $V = V_0 \sqcup V_1$ telle que l'ensemble des arêtes vérifie $E \subseteq V_0 \times V_1 \cup V_1 \times V_0$.

Les graphes bipartis

Définition
Un graphe non orienté $G = (V, E)$ est dit biparti s'il existe une partition de l'ensemble des sommets en deux parts $V = V_0 \sqcup V_1$ telle que l'ensemble des arêtes vérifie $E \subseteq V_0 \times V_1 \cup V_1 \times V_0$.

Exemple



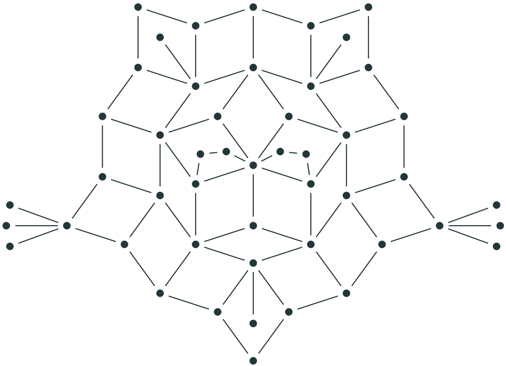
La bipartition se fait entre sommets à gauche et à droite.

Les graphes bipartis

Définition

Un graphe non orienté $G = (V, E)$ est dit biparti s'il existe une partition de l'ensemble des sommets en deux parts $V = V_0 \sqcup V_1$ telle que l'ensemble des arêtes vérifie $E \subseteq V_0 \times V_1 \cup V_1 \times V_0$.

Exemple

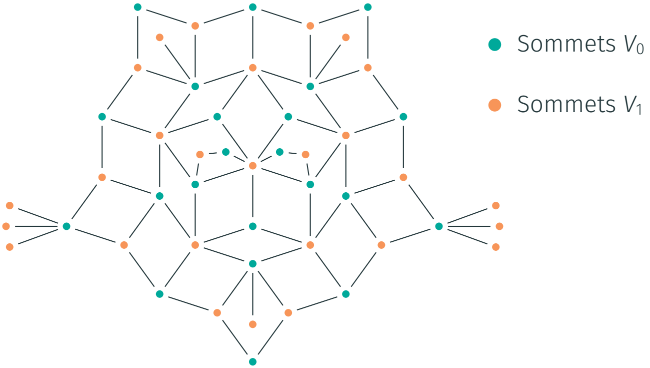


Les graphes bipartis

Définition

Un graphe non orienté $G = (V, E)$ est dit biparti s'il existe une partition de l'ensemble des sommets en deux parts $V = V_0 \sqcup V_1$ telle que l'ensemble des arêtes vérifie $E \subseteq V_0 \times V_1 \cup V_1 \times V_0$.

Exemple



Algorithme pour les graphes bipartis

Fait marquant
Dans le cas d'un graphe biparti, pour trouver un chemin augmentant, il suffit d'effectuer un parcours de graphe au départ des sommets non couverts !

Illustration de la recherche de couplage maximum

Exemple

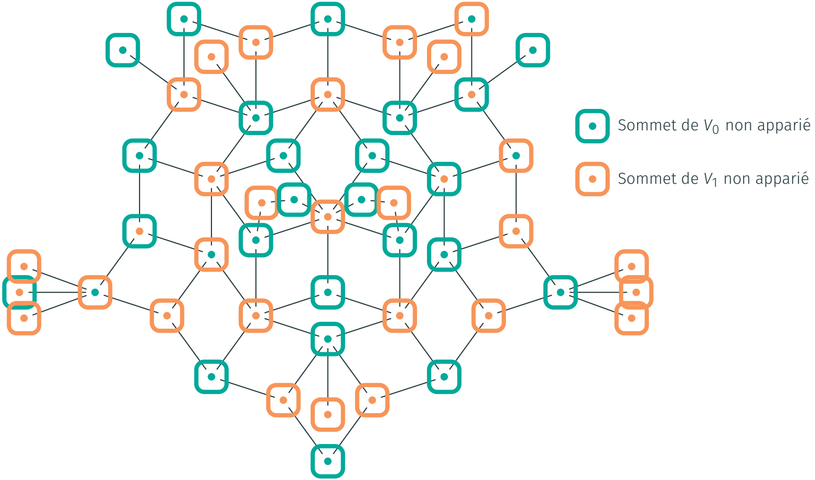
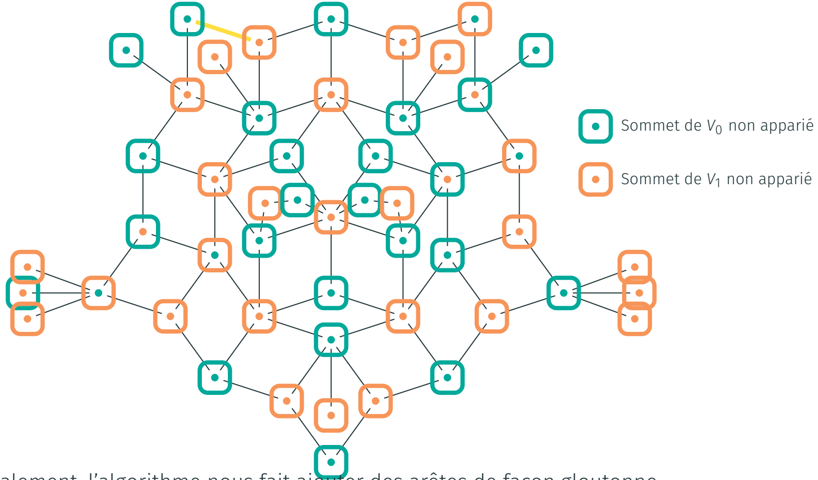


Illustration de la recherche de couplage maximum

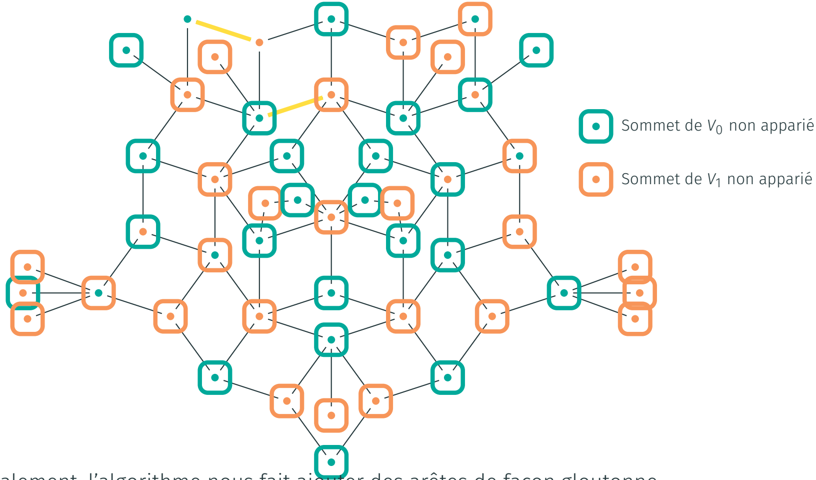
Exemple



Initialement, l'algorithme nous fait ajouter des arêtes de façon gloutonne.

Illustration de la recherche de couplage maximum

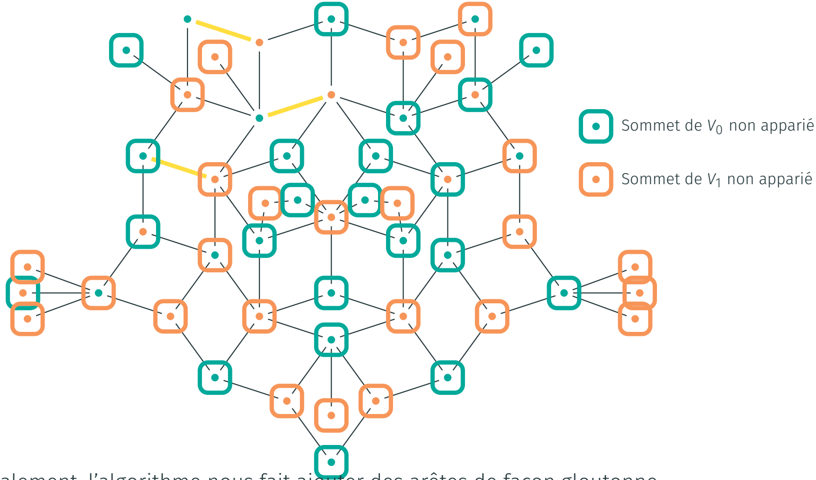
Exemple



Initialement, l'algorithme nous fait ajouter des arêtes de façon gloutonne.

Illustration de la recherche de couplage maximum

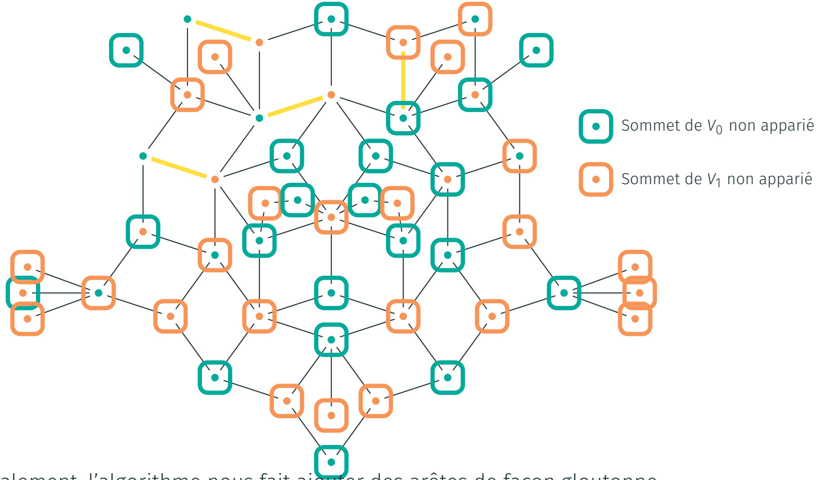
Exemple



Initialement, l'algorithme nous fait ajouter des arêtes de façon gloutonne.

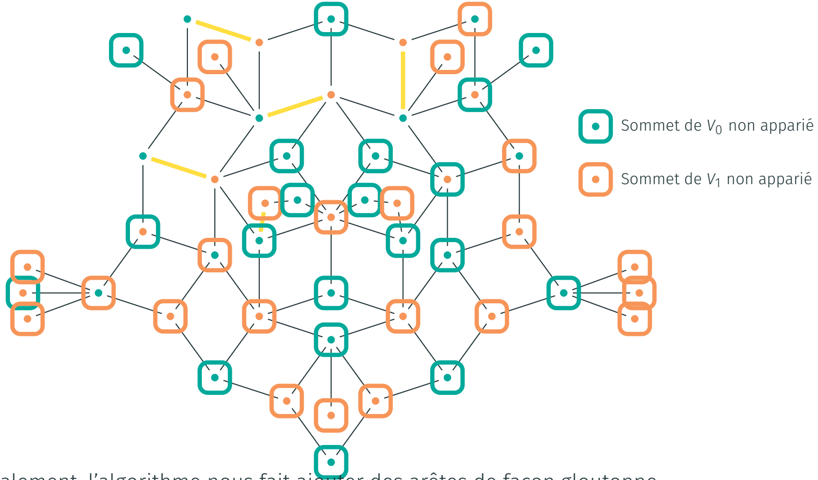
Illustration de la recherche de couplage maximum

Exemple



Initialement, l'algorithme nous fait ajouter des arêtes de façon gloutonne.

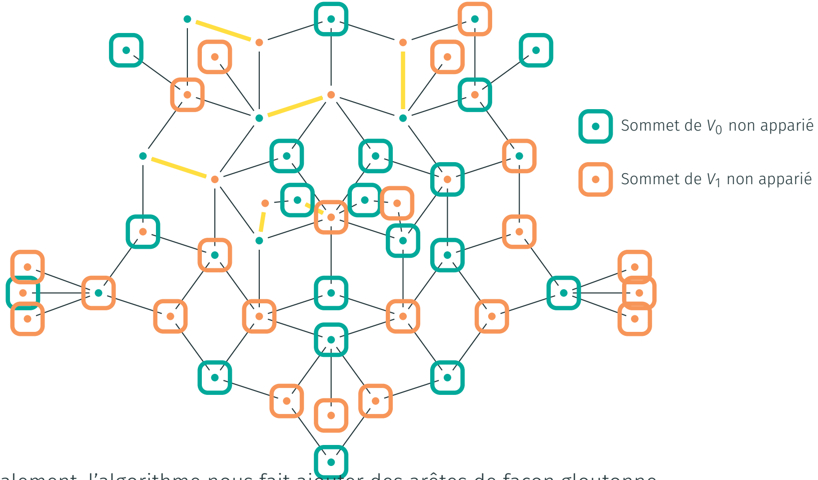
Exemple



Initialement, l'algorithme nous fait ajouter des arêtes de façon gloutonne.

Illustration de la recherche de couplage maximum

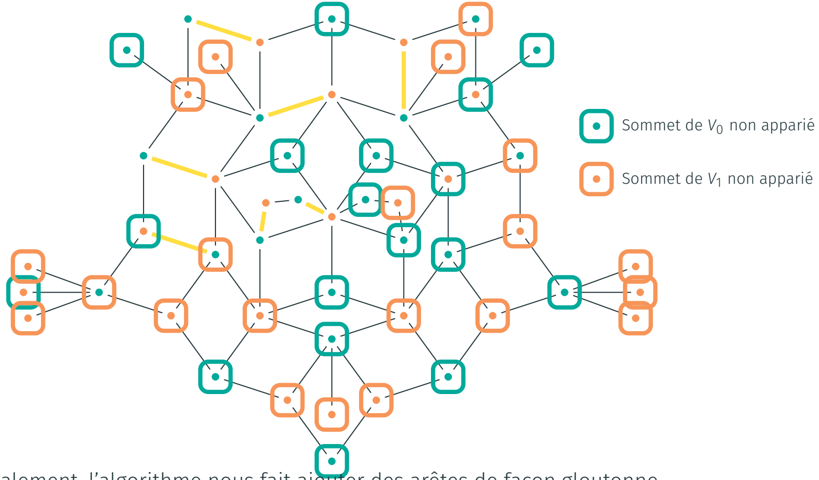
Exemple



Initialement, l'algorithme nous fait ajouter des arêtes de façon gloutonne.

Illustration de la recherche de couplage maximum

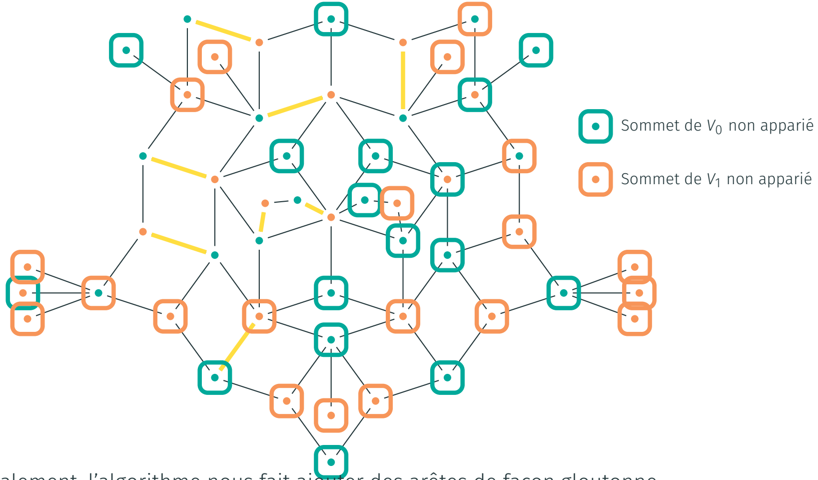
Exemple



Initialement, l'algorithme nous fait ajouter des arêtes de façon gloutonne.

Illustration de la recherche de couplage maximum

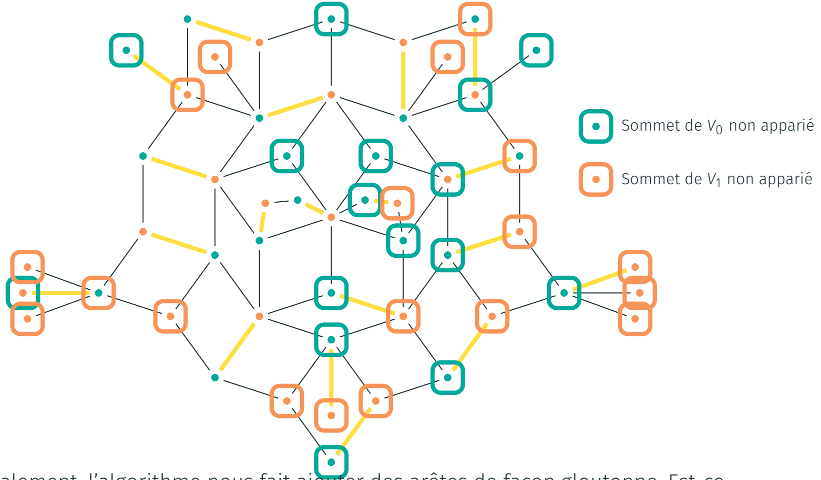
Exemple



Initialement, l'algorithme nous fait ajouter des arêtes de façon gloutonne.

Illustration de la recherche de couplage maximum

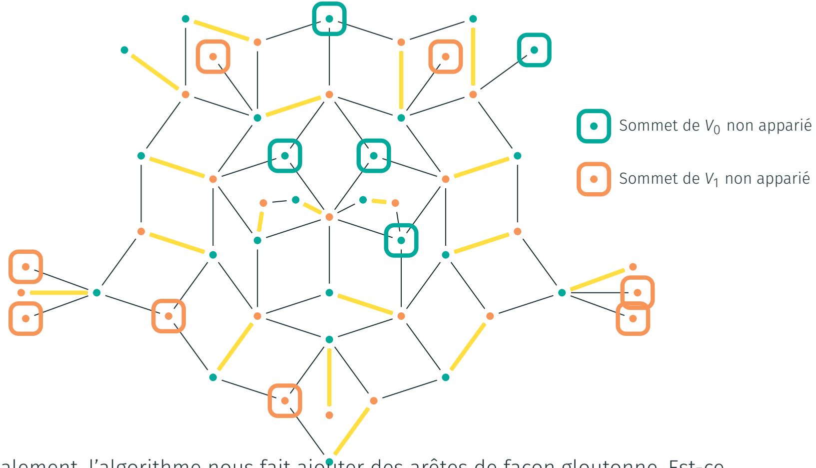
Exemple



Initialement, l'algorithme nous fait ajouter des arêtes de façon gloutonne. Est-ce optimal ?

Illustration de la recherche de couplage maximum

Exemple



Initialement, l'algorithme nous fait ajouter des arêtes de façon gloutonne. Est-ce optimal ?Déroulons la suite de l'algorithme plus soigneusement.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite)

Exemple

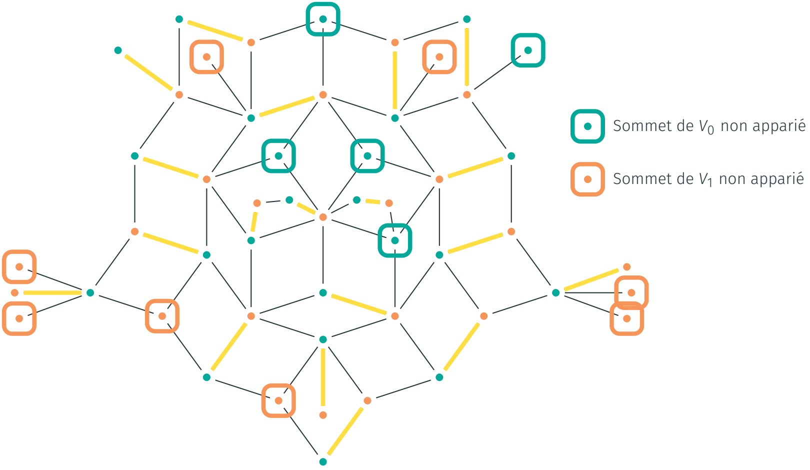
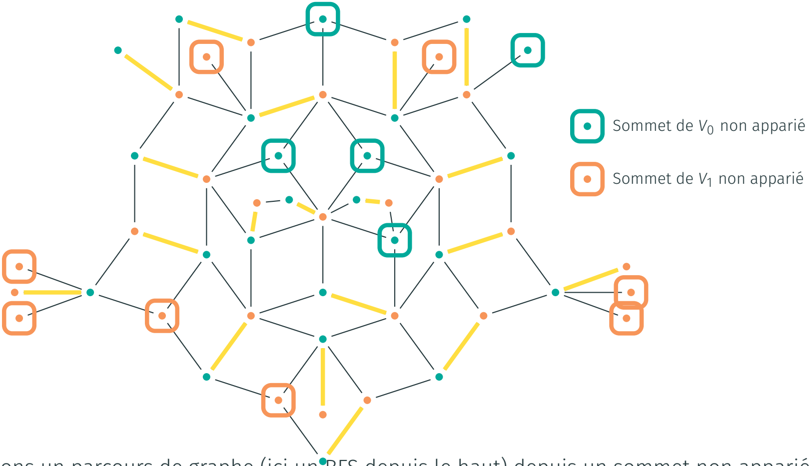


Illustration de la recherche de couplage maximum (suite)

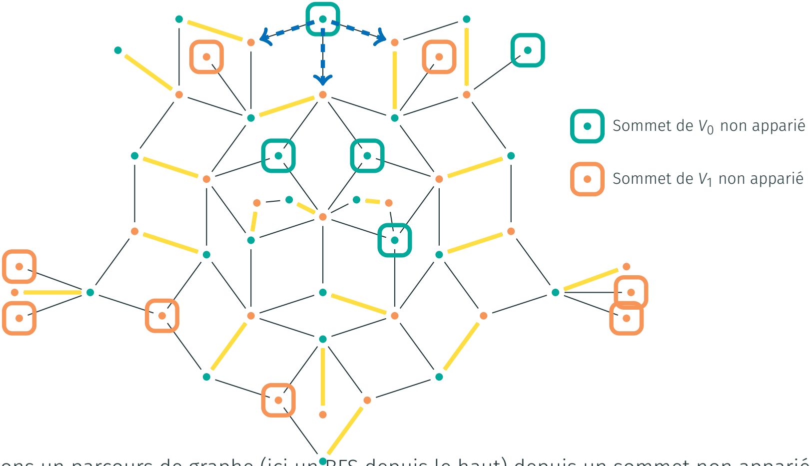
Exemple



Lançons un parcours de graphe (ici un BFS depuis le haut) depuis un sommet non apparié ●.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite)

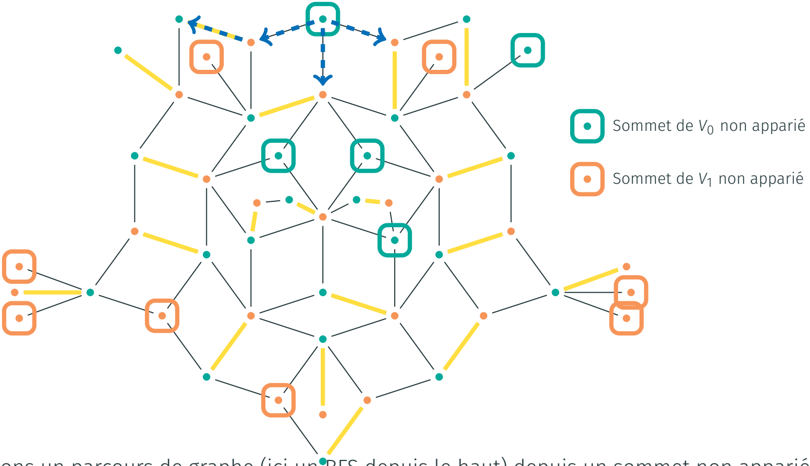
Exemple



Lançons un parcours de graphe (ici un BFS depuis le haut) depuis un sommet non apparié ●.
Les arêtes hors couplages peuvent être utilisée dans le sens ● vers ●.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite)

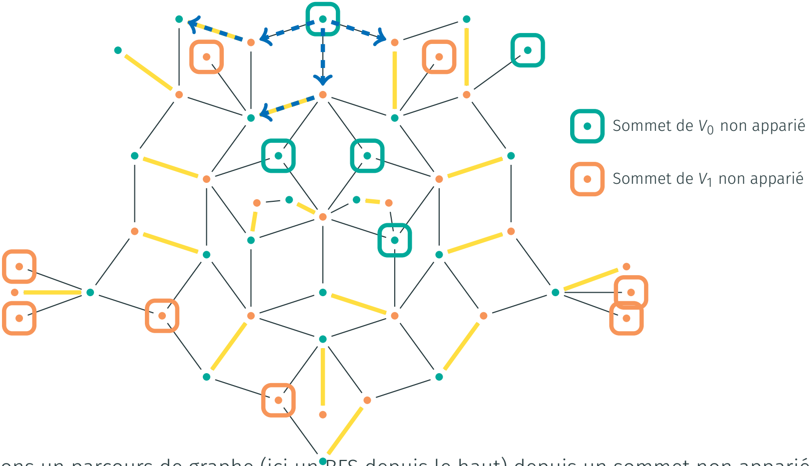
Exemple



Lançons un parcours de graphe (ici un BFS depuis le haut) depuis un sommet non apparié ●. Les arêtes hors couplages peuvent être utilisée dans le sens ● vers ●. Les arêtes du couplages peuvent être utilisée dans le sens ● vers ●.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite)

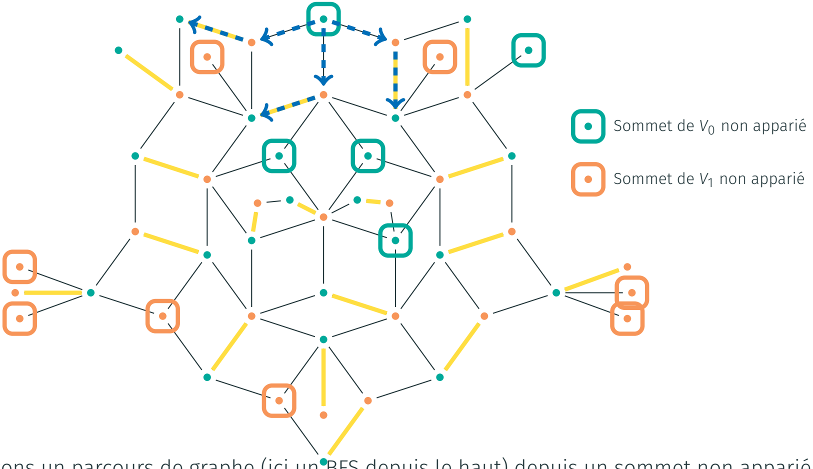
Exemple



Lançons un parcours de graphe (ici un BFS depuis le haut) depuis un sommet non apparié ●. Les arêtes hors couplages peuvent être utilisée dans le sens ● vers ●. Les arêtes du couplages peuvent être utilisée dans le sens ● vers ●.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite)

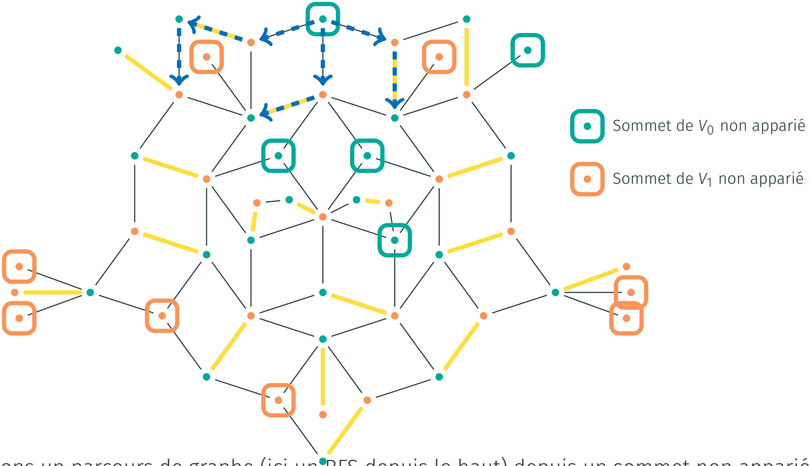
Exemple



Lançons un parcours de graphe (ici un BFS depuis le haut) depuis un sommet non apparié ●. Les arêtes hors couplages peuvent être utilisée dans le sens ● vers ●. Les arêtes du couplages peuvent être utilisée dans le sens ● vers ●.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite)

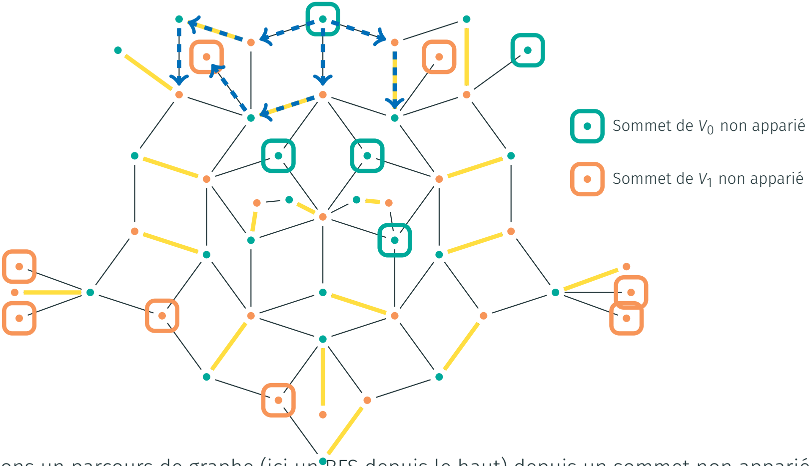
Exemple



Lançons un parcours de graphe (ici un BFS depuis le haut) depuis un sommet non apparié ●. Les arêtes hors couplages peuvent être utilisée dans le sens ● vers ●. Les arêtes du couplages peuvent être utilisée dans le sens ● vers ●.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite)

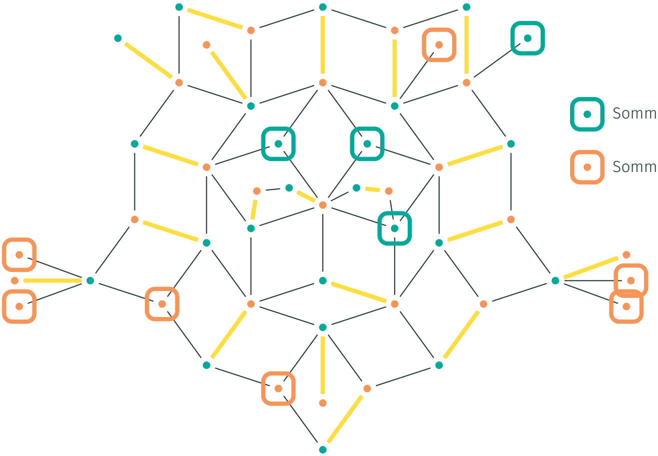
Exemple



Lançons un parcours de graphe (ici un BFS depuis le haut) depuis un sommet non apparié ● . Les arêtes hors couplages peuvent être utilisée dans le sens ● vers ● . Les arêtes du couplages peuvent être utilisée dans le sens ● vers ● . On a trouvé un chemin augmentant entre deux sommets non appariés : on peut mettre à jour le couplage !

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 2)

Exemple

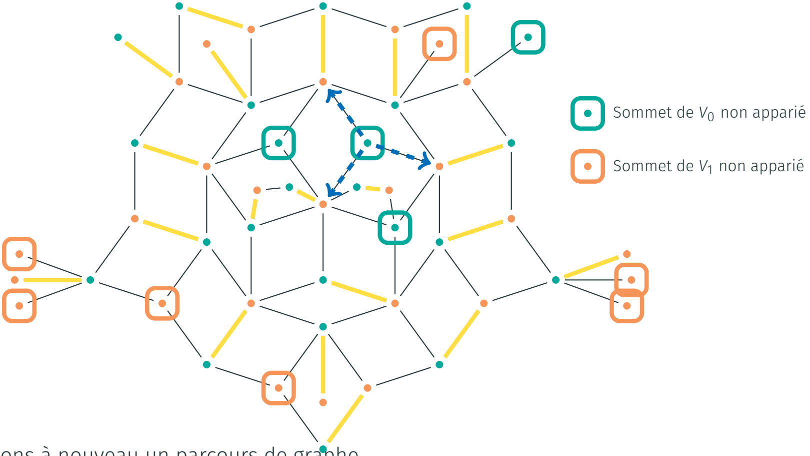


Sommet de V_0 non apparié

Sommet de V_1 non apparié

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 2)

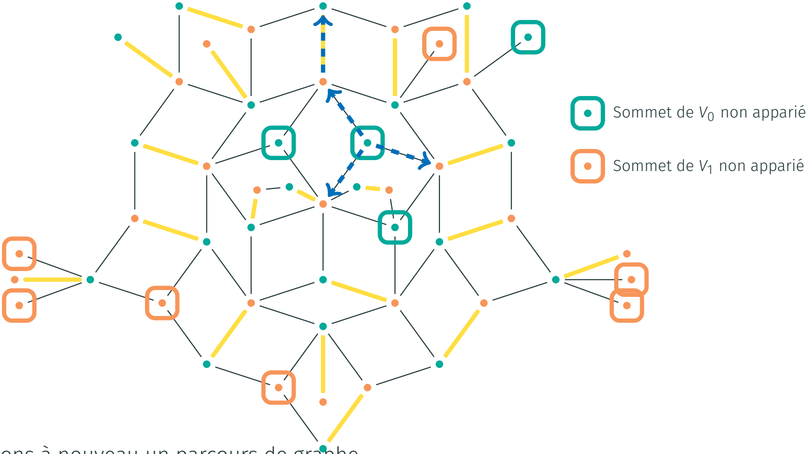
Exemple



Lançons à nouveau un parcours de graphe.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 2)

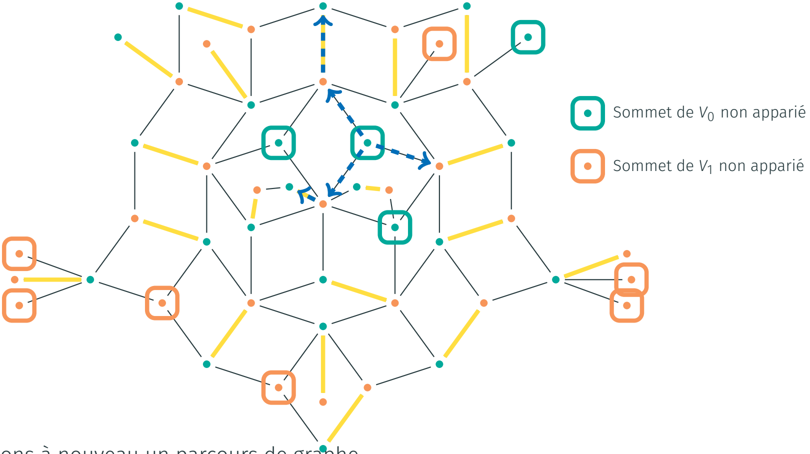
Exemple



Lançons à nouveau un parcours de graphe.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 2)

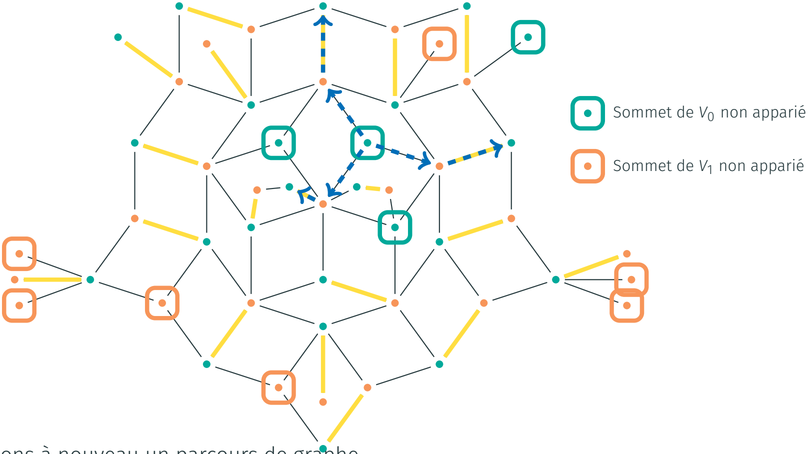
Exemple



Lançons à nouveau un parcours de graphe.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 2)

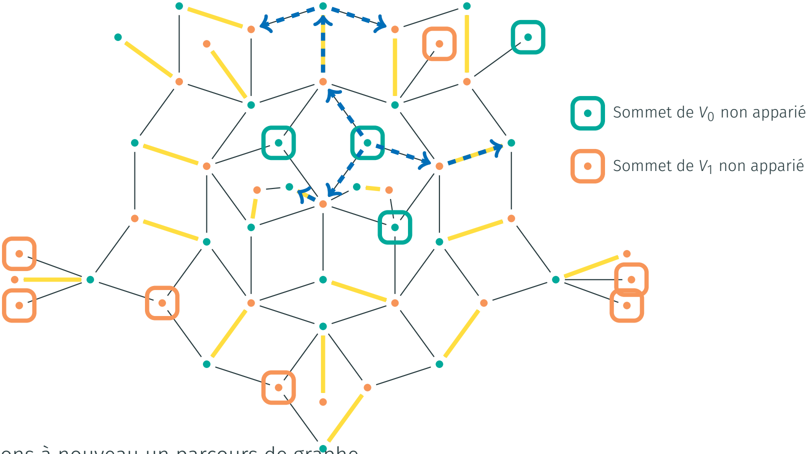
Exemple



Lançons à nouveau un parcours de graphe.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 2)

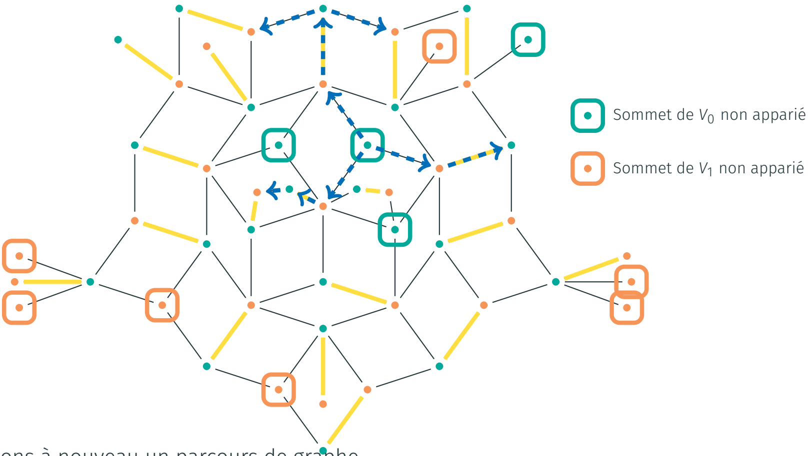
Exemple



Lançons à nouveau un parcours de graphe.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 2)

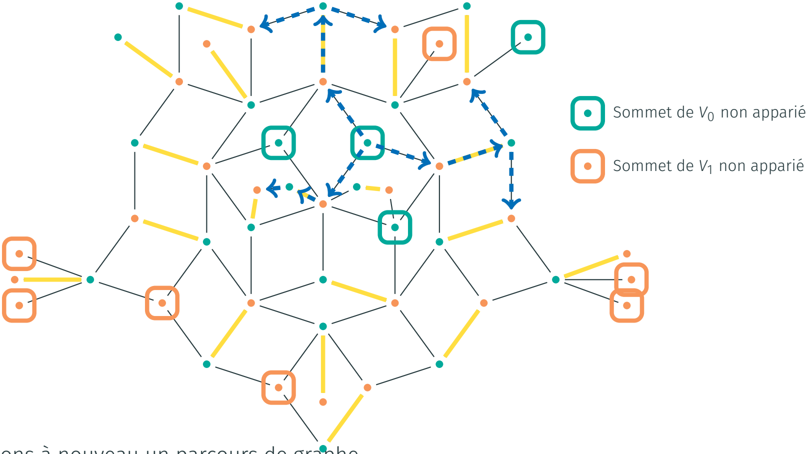
Exemple



Lançons à nouveau un parcours de graphe.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 2)

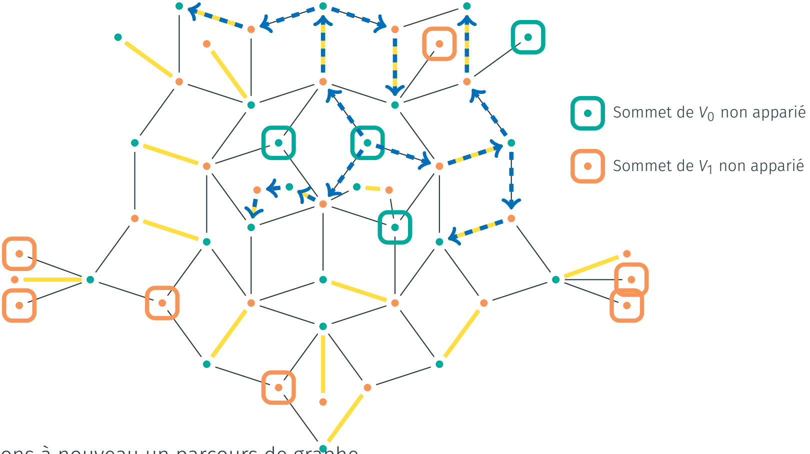
Exemple



Lançons à nouveau un parcours de graphe.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 2)

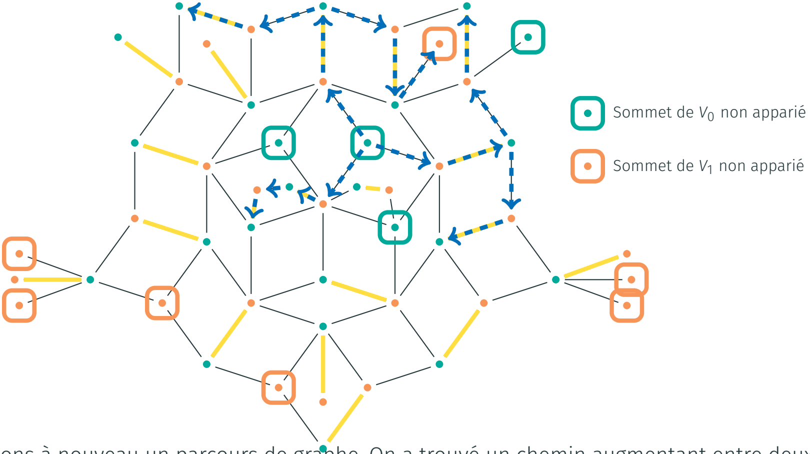
Exemple



Lançons à nouveau un parcours de graphe.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 2)

Exemple



Lançons à nouveau un parcours de graphe. On a trouvé un chemin augmentant entre deux sommets non appariés : on peut mettre à jour le couplage !

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 3)

Exemple

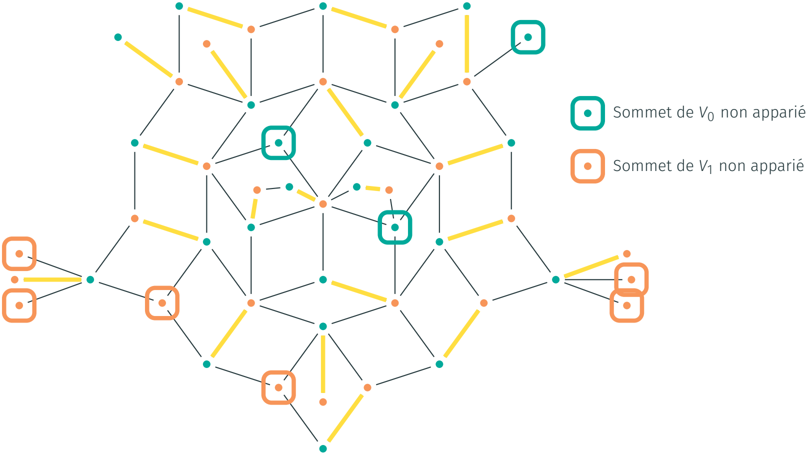
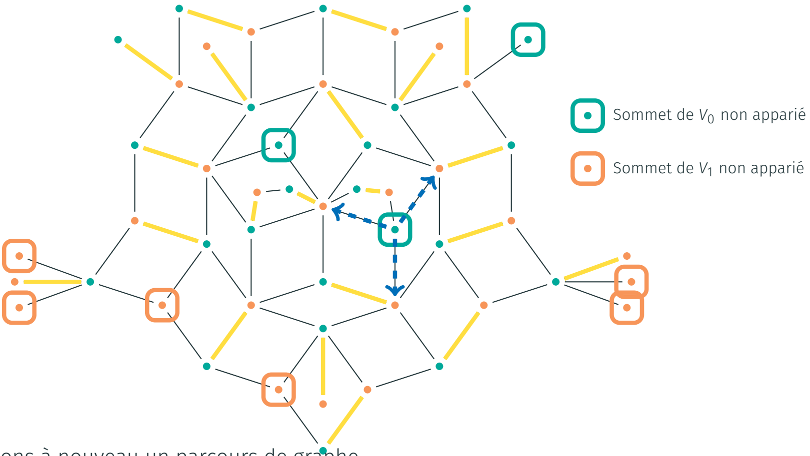


Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 3)

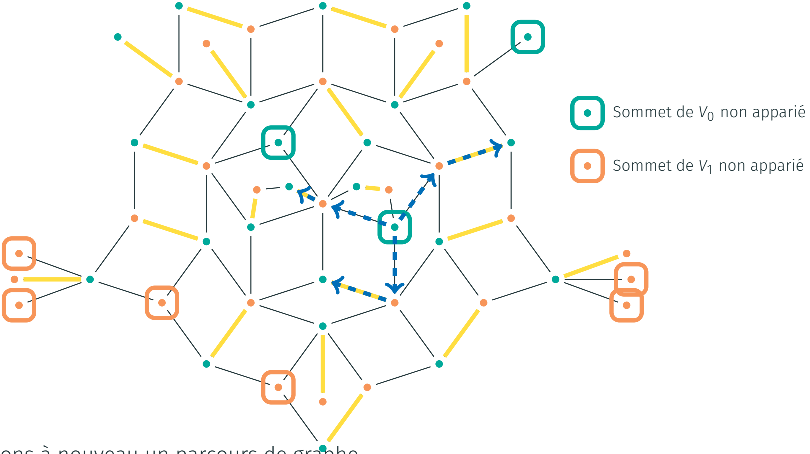
Exemple



Lançons à nouveau un parcours de graphe.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 3)

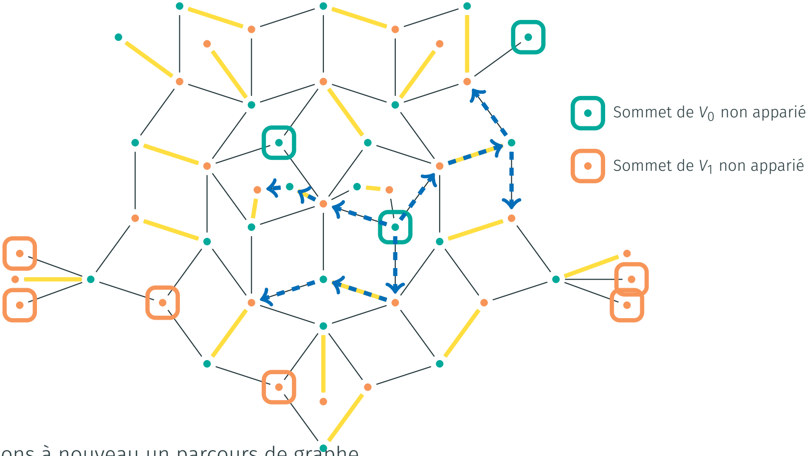
Exemple



Lançons à nouveau un parcours de graphe.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 3)

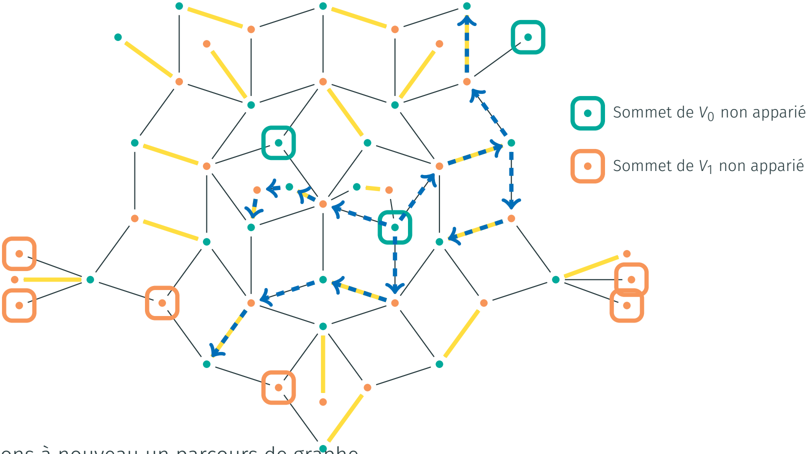
Exemple



Lançons à nouveau un parcours de graphe.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 3)

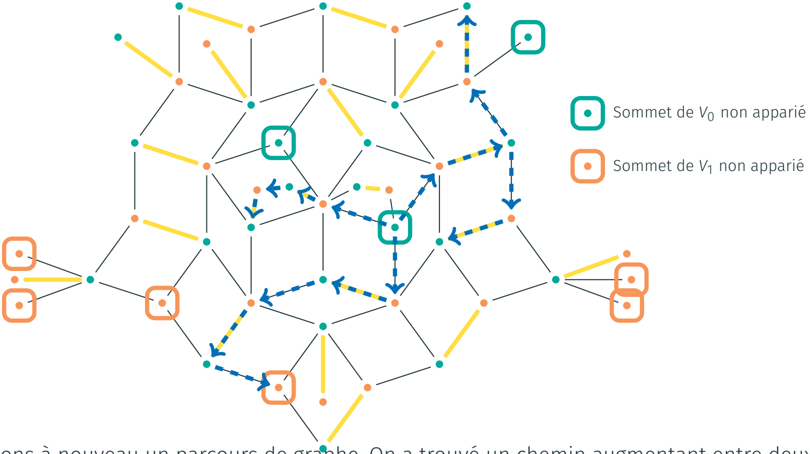
Exemple



Lançons à nouveau un parcours de graphe.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 3)

Exemple



Lançons à nouveau un parcours de graphe. On a trouvé un chemin augmentant entre deux sommets non appariés : on peut mettre à jour le couplage !

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 4)

Exemple

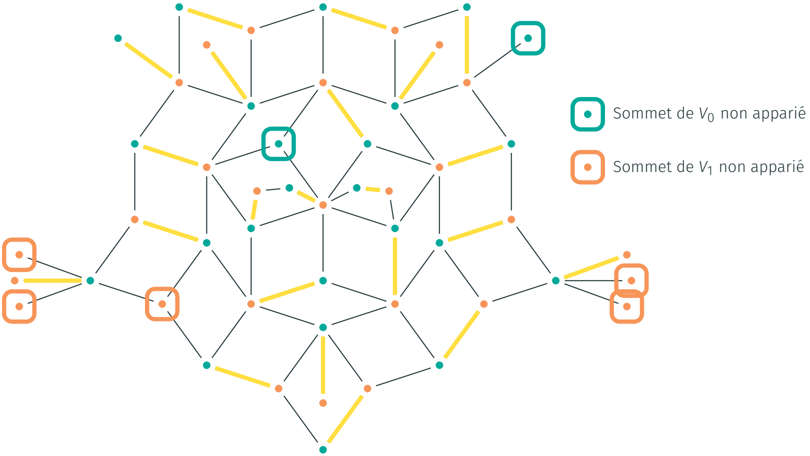
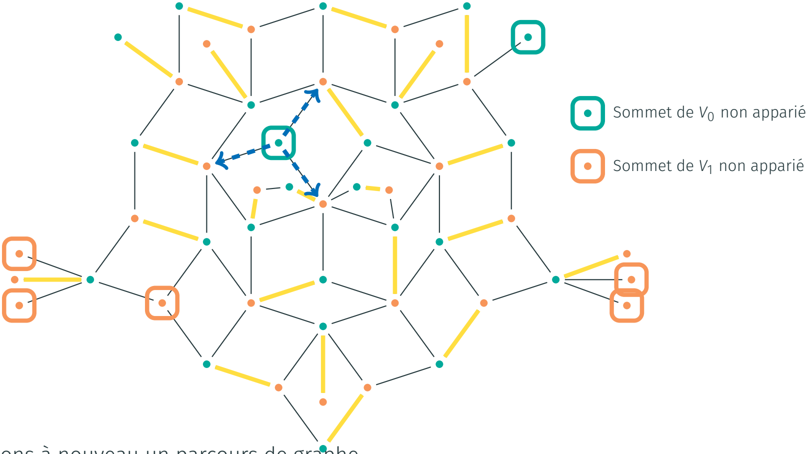


Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 4)

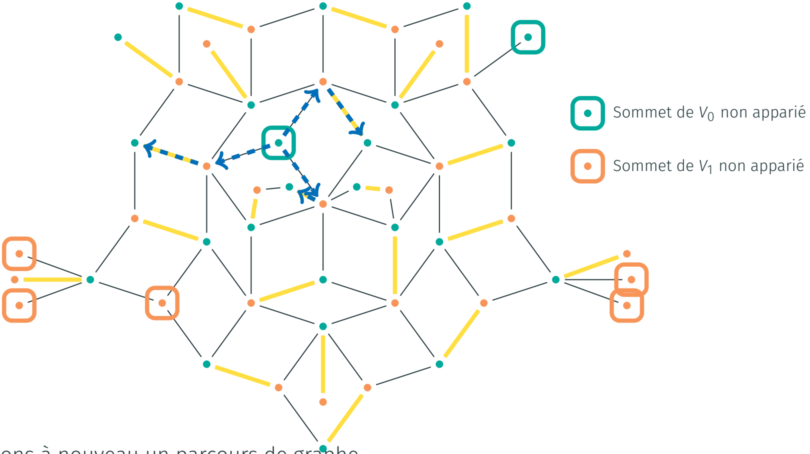
Exemple



Lançons à nouveau un parcours de graphe.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 4)

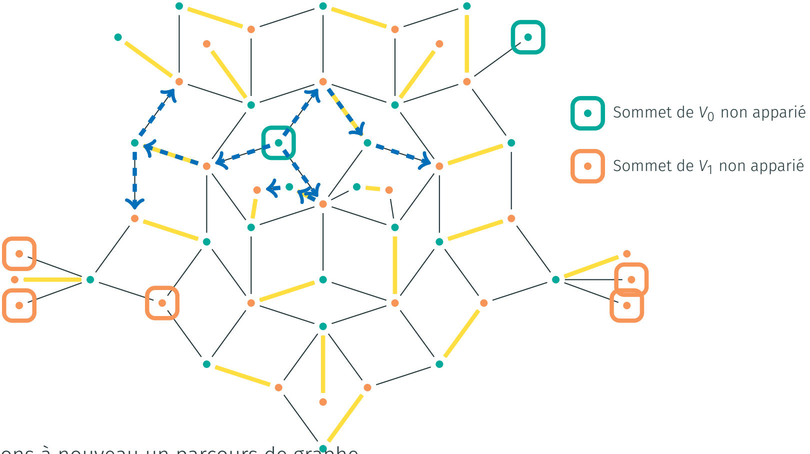
Exemple



Lançons à nouveau un parcours de graphe.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 4)

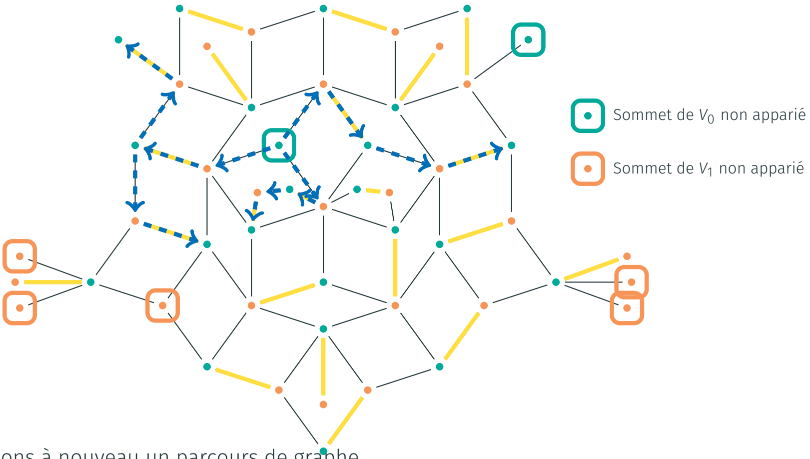
Exemple



Lançons à nouveau un parcours de graphe.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 4)

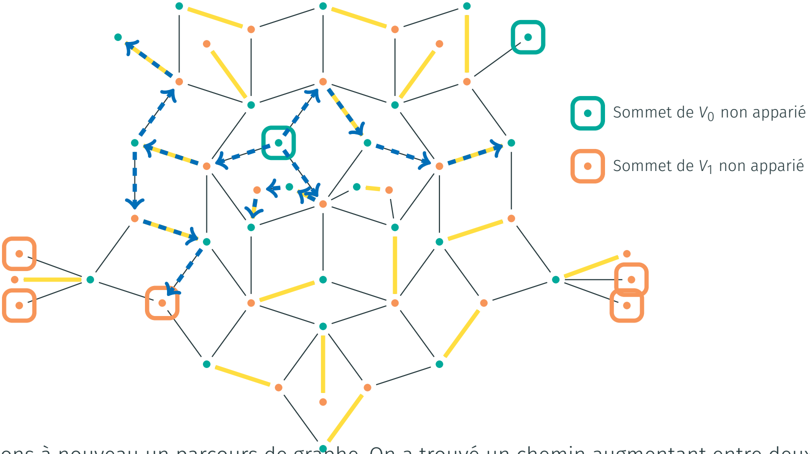
Exemple



Lançons à nouveau un parcours de graphe.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 4)

Exemple



Lançons à nouveau un parcours de graphe. On a trouvé un chemin augmentant entre deux sommets non appariés : on peut mettre à jour le couplage !

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 5)

Exemple

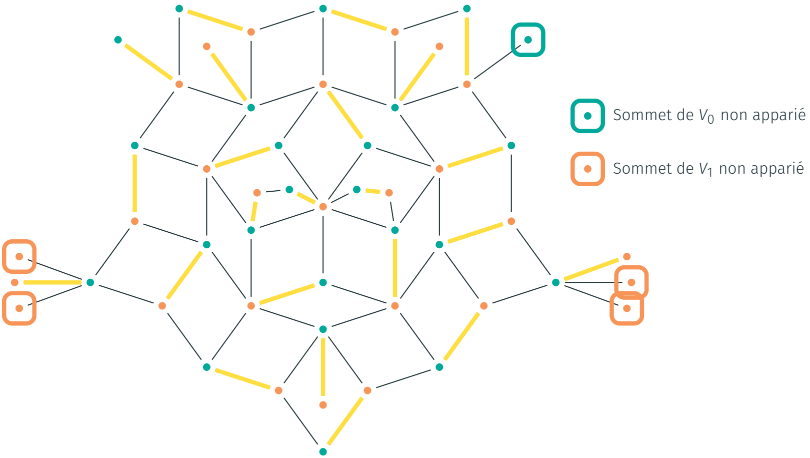
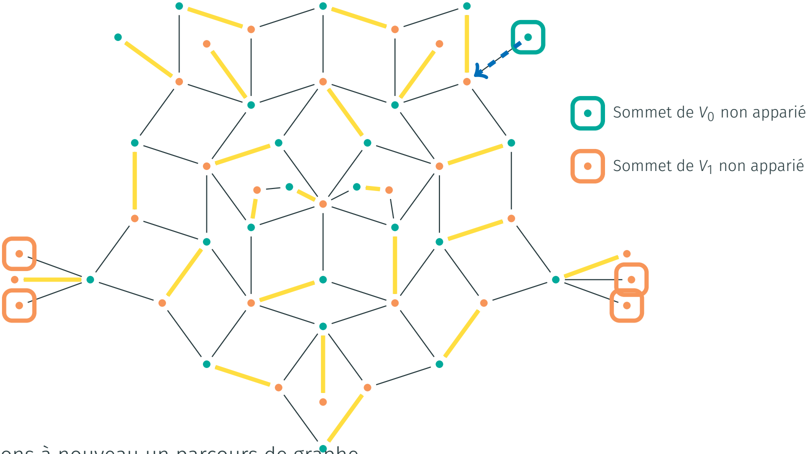


Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 5)

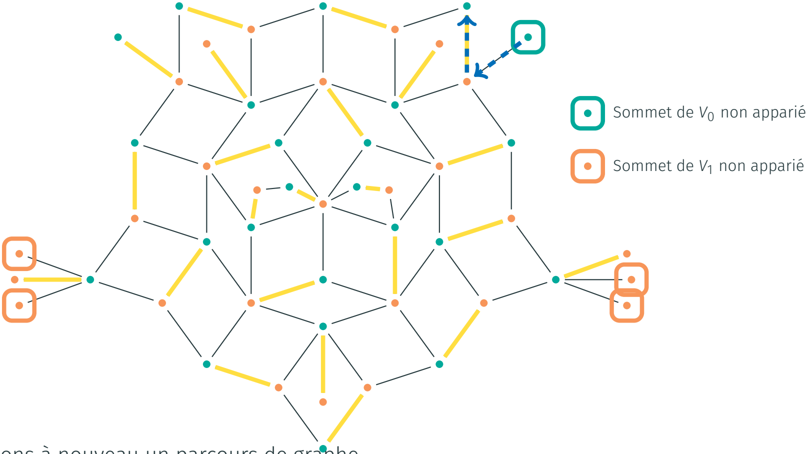
Exemple



Lançons à nouveau un parcours de graphe.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 5)

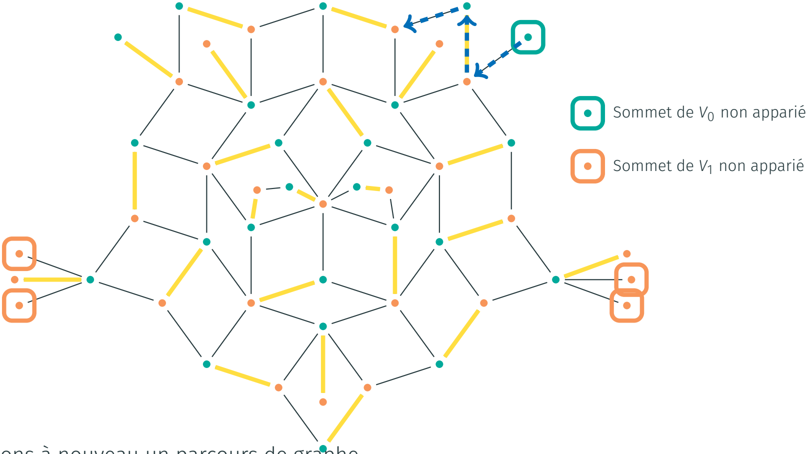
Exemple



Lançons à nouveau un parcours de graphe.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 5)

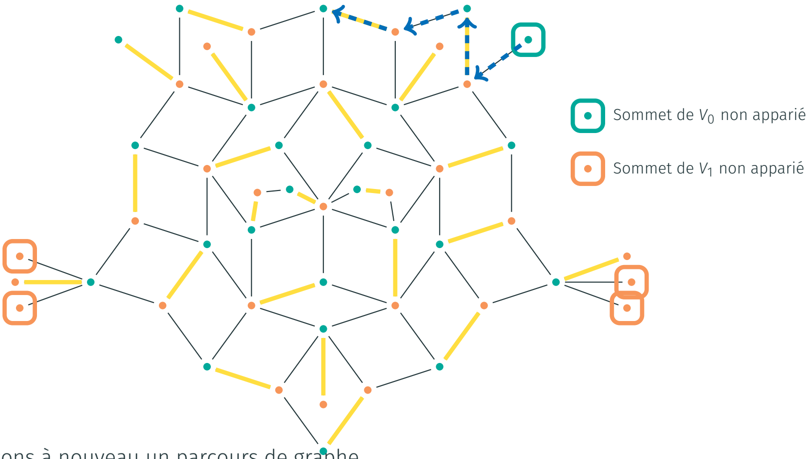
Exemple



Lançons à nouveau un parcours de graphe.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 5)

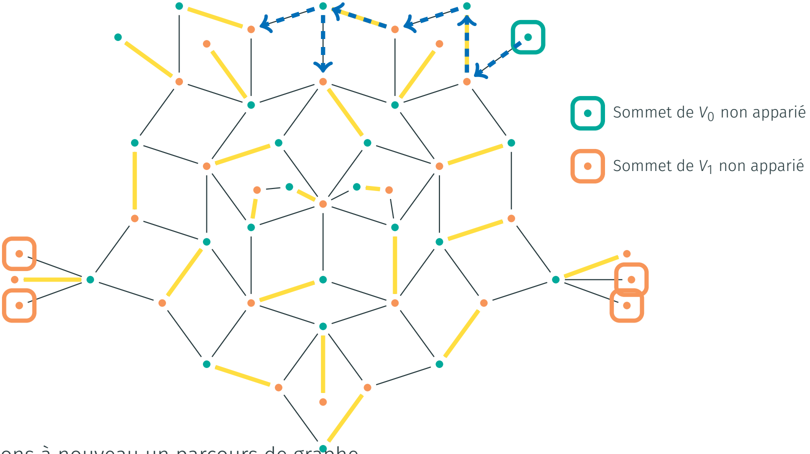
Exemple



Lançons à nouveau un parcours de graphe.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 5)

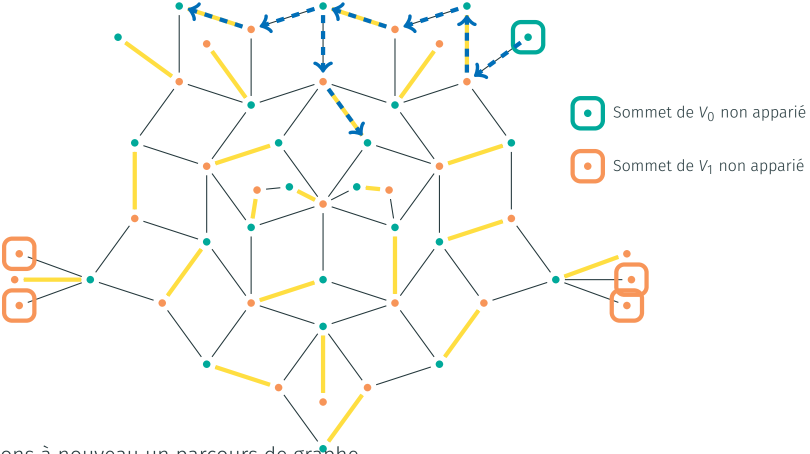
Exemple



Lançons à nouveau un parcours de graphe.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 5)

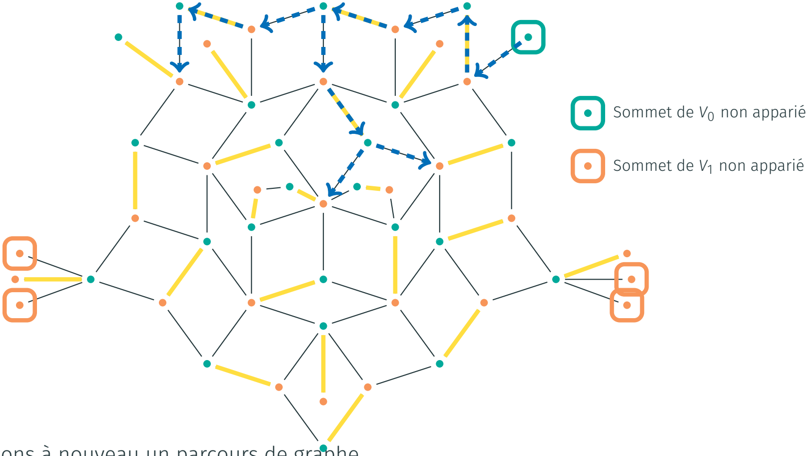
Exemple



Lançons à nouveau un parcours de graphe.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 5)

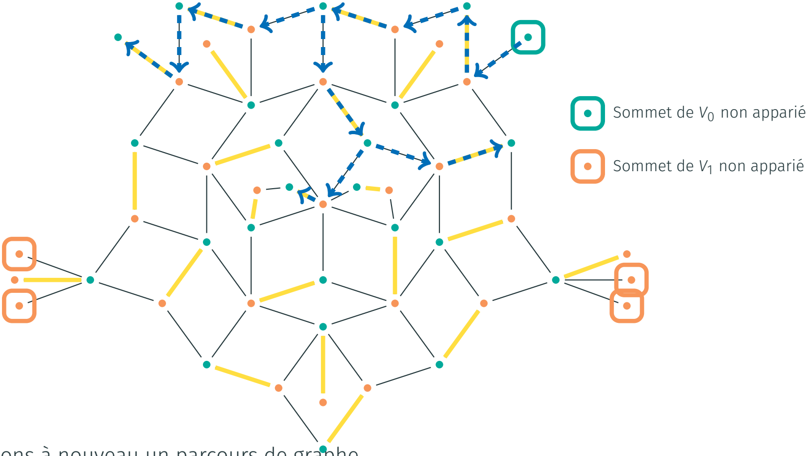
Exemple



Lançons à nouveau un parcours de graphe.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 5)

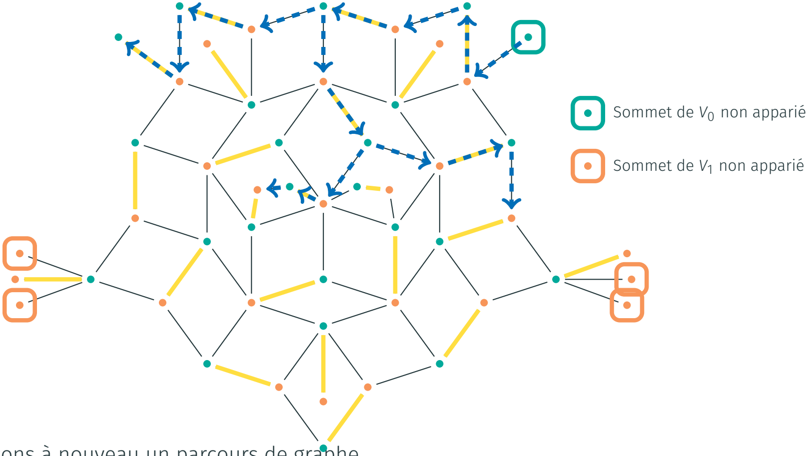
Exemple



Lançons à nouveau un parcours de graphe.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 5)

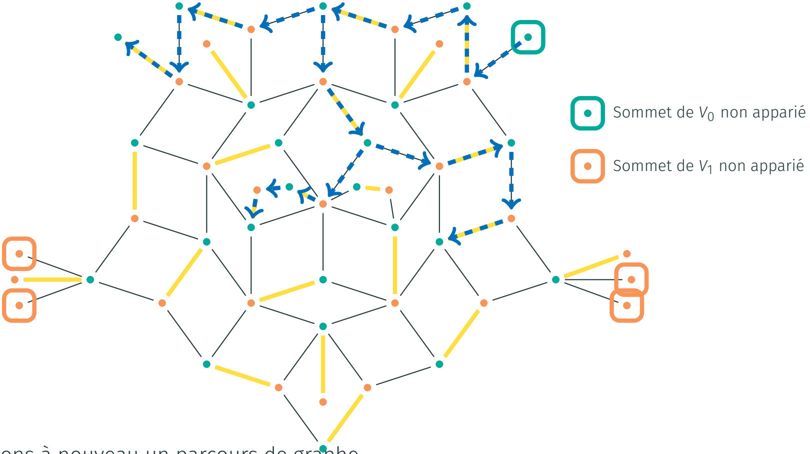
Exemple



Lançons à nouveau un parcours de graphe.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 5)

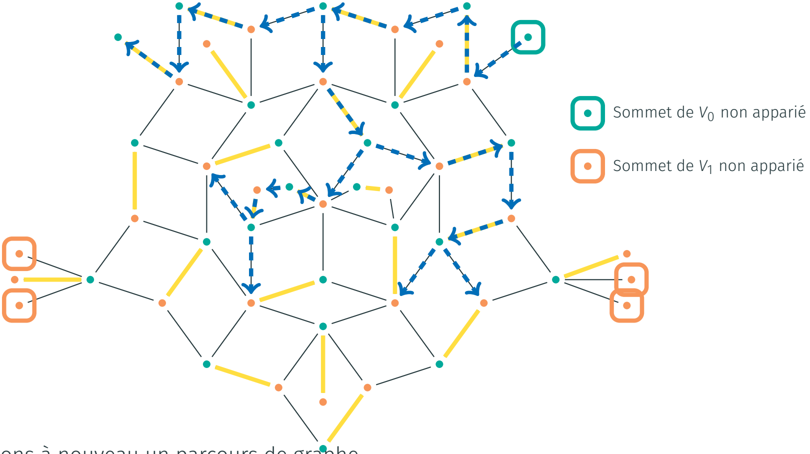
Exemple



Lançons à nouveau un parcours de graphe.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 5)

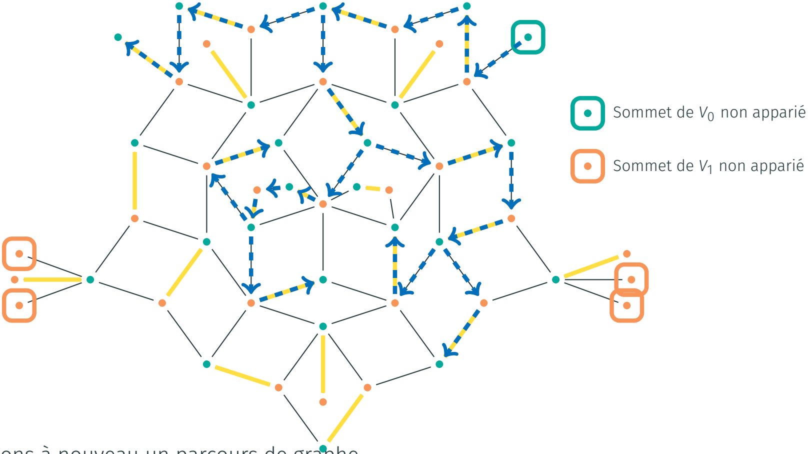
Exemple



Lançons à nouveau un parcours de graphe.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 5)

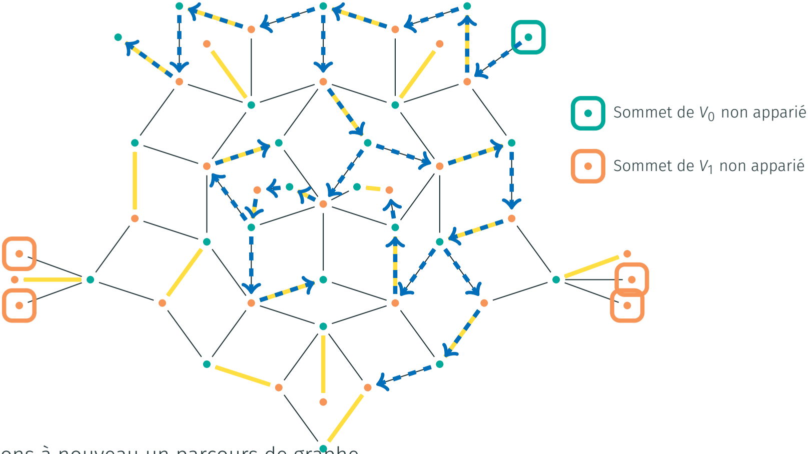
Exemple



Lançons à nouveau un parcours de graphe.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 5)

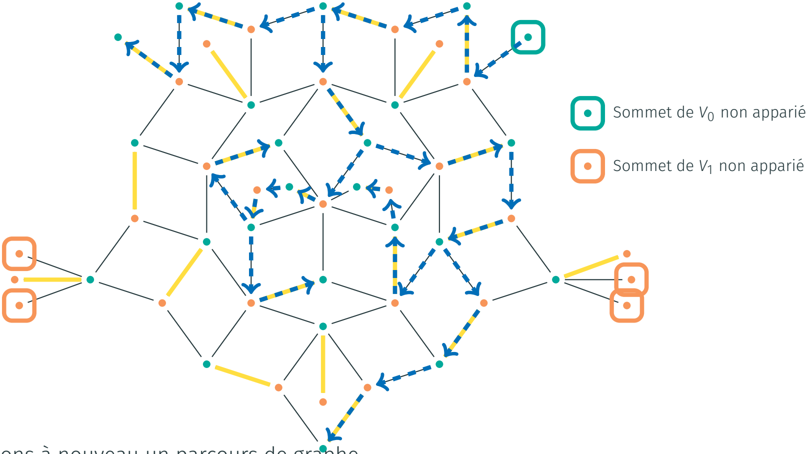
Exemple



Lançons à nouveau un parcours de graphe.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 5)

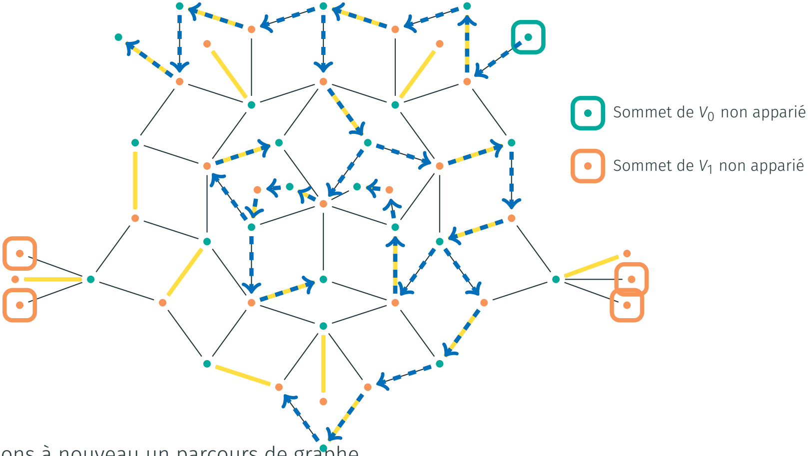
Exemple



Lançons à nouveau un parcours de graphe.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 5)

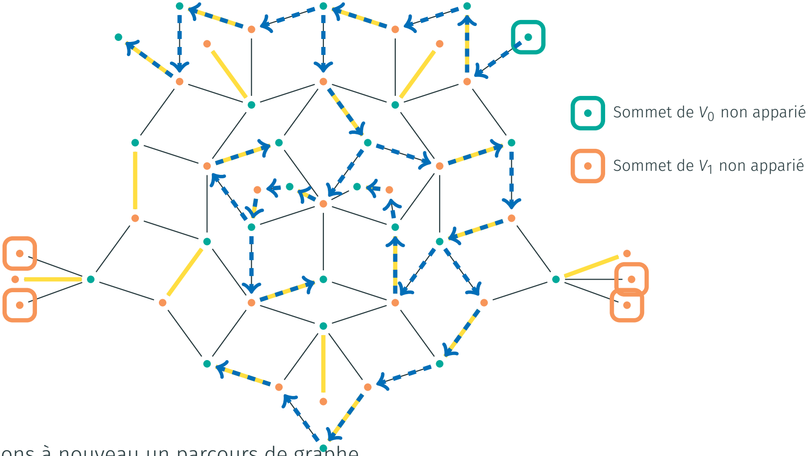
Exemple



Lançons à nouveau un parcours de graphe.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 5)

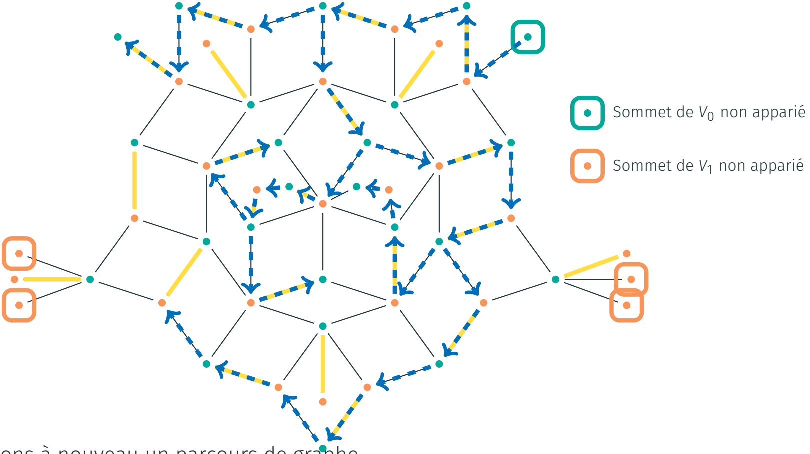
Exemple



Lançons à nouveau un parcours de graphe.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 5)

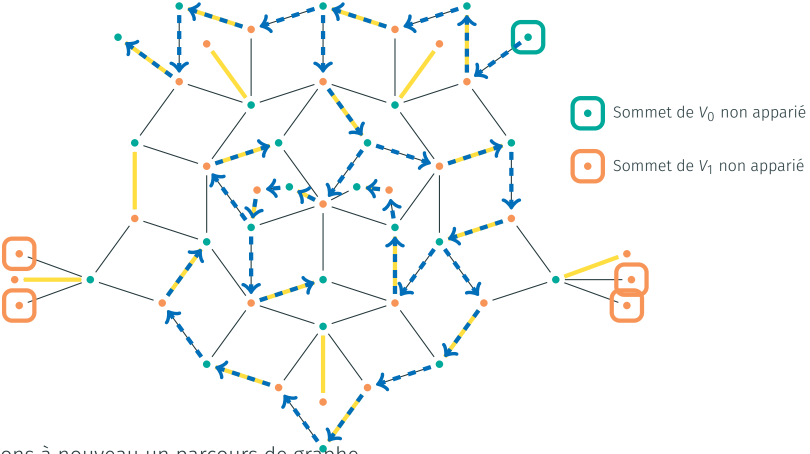
Exemple



Lançons à nouveau un parcours de graphe.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 5)

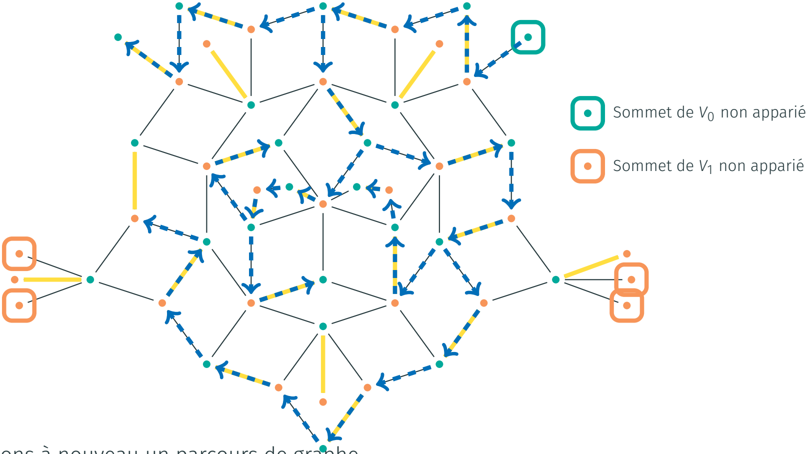
Exemple



Lançons à nouveau un parcours de graphe.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 5)

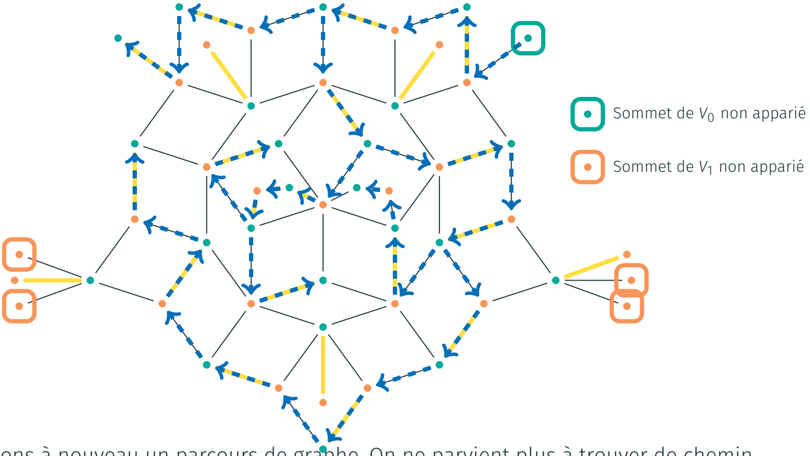
Exemple



Lançons à nouveau un parcours de graphe.

Illustration de la recherche de couplage maximum (suite 5)

Exemple

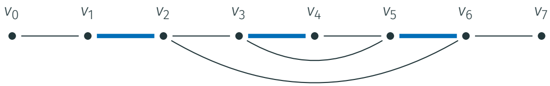


Lançons à nouveau un parcours de graphe. On ne parvient plus à trouver de chemin augmentant entre des sommets non appariés.

L’algorithme du couplage maximum d’Edmonds

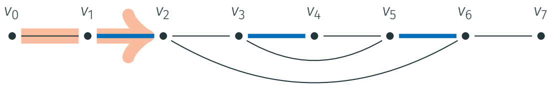
Contre exemple

Peut-on se contenter d'un parcours de graphe pour trouver un chemin M-augmentant comme dans le cas biparti ?



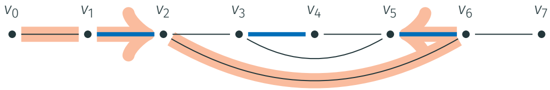
Contre exemple

Peut-on se contenter d'un parcours de graphe pour trouver un chemin M-augmentant comme dans le cas biparti ?



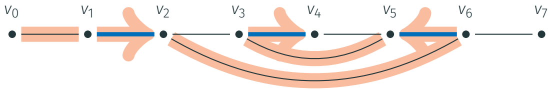
Contre exemple

Peut-on se contenter d'un parcours de graphe pour trouver un chemin M-augmentant comme dans le cas biparti ?



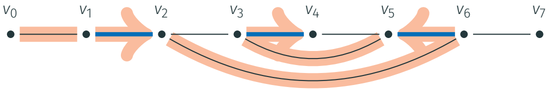
Contre exemple

Peut-on se contenter d'un parcours de graphe pour trouver un chemin M-augmentant comme dans le cas biparti ?



Contre exemple

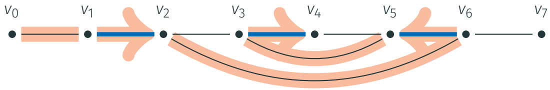
Peut-on se contenter d'un parcours de graphe pour trouver un chemin M-augmentant comme dans le cas biparti ?



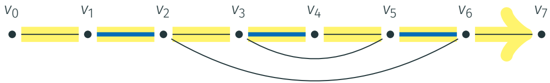
NON, une recherche de chemin M-augmentant par parcours de graphe peut se fourvoyer

Contre exemple

Peut-on se contenter d'un parcours de graphe pour trouver un chemin M-augmentant comme dans le cas biparti ?



Non, une recherche de chemin M-augmentant par parcours de graphe peut se fourvoyer



alors qu'il existe un chemin augmentant.

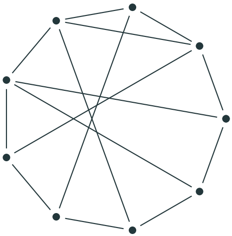
Facteur critique

Définition
Un graphe $C = (W, F)$ est un facteur critique si, pour tout sommet $v \in W$, le graphe $G \setminus v$ possède un couplage parfait.

Facteur critique

Définition
Un graphe $C = (W, F)$ est un facteur critique si, pour tout sommet $v \in W$, le graphe $G \setminus v$ possède un couplage parfait.

Exemple
Le graphe suivant est un facteur critique.

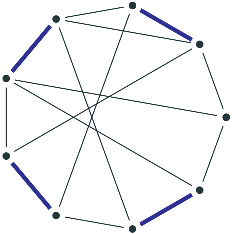


Facteur critique

Définition
Un graphe $C = (W, F)$ est un facteur critique si, pour tout sommet $v \in W$, le graphe $G \setminus v$ possède un couplage parfait.

Exemple
Le graphe suivant est un facteur critique.

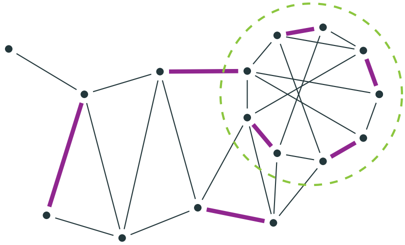
(Ici, on repère un tour hamiltonien de longueur impaire.)



Fleur

Définition
Soit $G = (V, E)$ un graphe et M un couplage. Une fleur par rapport à M est un sous-graphe $C = (W, F)$ qui est un facteur critique de G et tel que

$$|M \cap F| = \frac{|W| - 1}{2}.$$

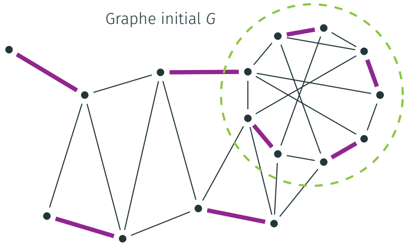


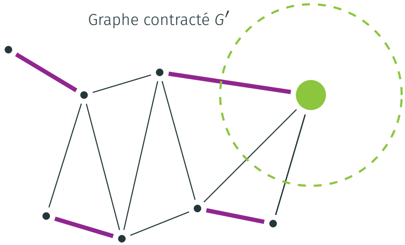
Le sommet non couvert par $M \cap F$ s'appelle la base de la fleur C.

Réduction de fleurs

Lemme

Soit G un graphe, M un couplage de G et $C = (W, F)$ une fleur par rapport à M. Notons G' le graphe obtenu en contractant W en un unique sommet et M' le couplage induit. Alors M est un couplage maximum de G si et seulement si M' est un couplage maximum de G'.





Observation

On peut remonter un couplage de cardinal m' de G' en un couplage de cardinal $m = m' + (|W| - 1)/2$ dans G.

Idée vague de l'algorithme du couplage maximum d'Edmonds

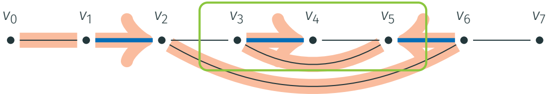
Répéter :

- Chercher un chemin alternant en partant d'un sommet non couvert.
- Si on obtient un cycle (forcément de longueur impaire), on a trouvé une fleur. On la contracte.

Idée vague de l'algorithme du couplage maximum d'Edmonds

Répéter :

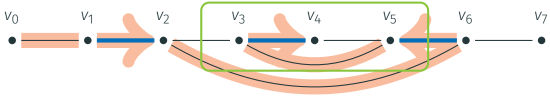
- Chercher un chemin alternant en partant d'un sommet non couvert.
- Si on obtient un cycle (forcément de longueur impaire), on a trouvé une fleur. On la contracte.

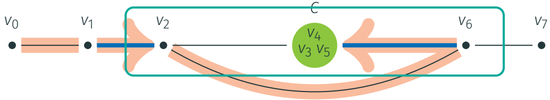


Idée vague de l'algorithme du couplage maximum d'Edmonds

Répéter :

- Chercher un chemin alternant en partant d'un sommet non couvert.
- Si on obtient un cycle (forcément de longueur impaire), on a trouvé une fleur. On la contracte.

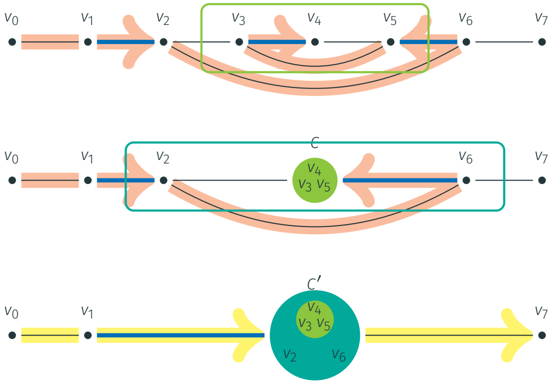




Idée vague de l'algorithme du couplage maximum d'Edmonds

Répéter :

- Chercher un chemin alternant en partant d'un sommet non couvert.
- Si on obtient un cycle (forcément de longueur impaire), on a trouvé une fleur. On la contracte.



Forêt M-alternée

Définition
Une forêt alternée par rapport à un couplage M dans un graphe $G = (V, E)$ est une forêt (W, F), avec $W \subseteq V$ et $F \subseteq E$, telle que

1. tout sommet de V non couvert par M est dans W
2. chaque composante connexe contient exactement un sommet non couvert par M, que l'on fixe comme racine
3. en appelant externe (interne) tout sommet à distance paire (impaire) de la racine, les sommets impairs sont de degrés 2 dans F.
4. tout chaîne élémentaire dans (W, F) issue d'une racine est alternée.

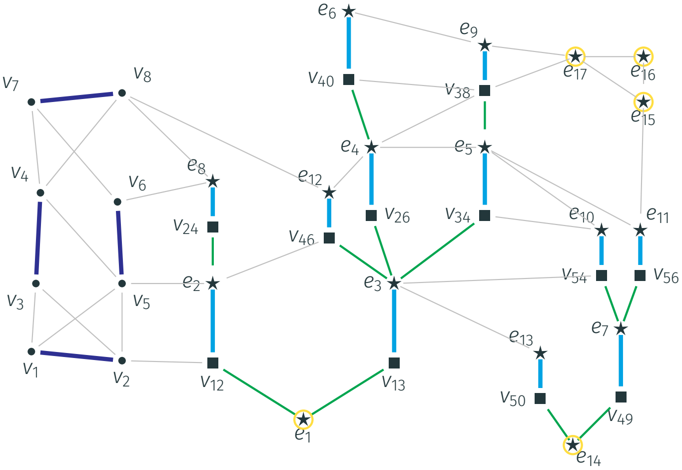
Forêt M-alternée triviale associée à M

Un graphe $G = (V, E)$ et un couplage M étant fixés, on peut construire la forêt M-alternée triviale où

- W est l'ensemble des sommets non couverts par M
- $F = \emptyset$.

(Chaque sommet non couvert forme un arbre isolé ; les sommets couverts sont tous hors forêt)

Exemple de forêt M-alternée



Algorithme d'Edmonds (version un peu plus précise)

On maintient un couplage M et une forêt M-alternée (W,F).

Algorithme d'Edmonds (version un peu plus précise)

On maintient un couplage M et une forêt M-alternée (W,F).

Répéter Soit $x \in W$ un sommet externe et $y \in V$ un de ses voisins dans G.

Algorithme d'Edmonds (version un peu plus précise)

On maintient un couplage M et une forêt M-alternée (W,F).

Répéter Soit $x \in W$ un sommet externe et $y \in V$ un de ses voisins dans G.

Cas 1 : Si $y \notin W$: y est couvert par une arête $yz \in M$.
Grossir la forêt

Algorithme d'Edmonds (version un peu plus précise)

On maintient un couplage M et une forêt M-alternée (W,F).

Répéter Soit $x \in W$ un sommet externe et $y \in V$ un de ses voisins dans G.

Cas 1 : Si $y \notin W$: y est couvert par une arête $yz \in M$.
GROSSIR LA FORÊT

Cas 2 : Si $y \in W$ est externe et dans un arbre distinct.
AUGMENTER LE COUPLAGE

Algorithme d'Edmonds (version un peu plus précise)

On maintient un couplage M et une forêt M-alternée (W,F).

Répéter Soit $x \in W$ un sommet externe et $y \in V$ un de ses voisins dans G.

Cas 1 : Si $y \notin W$: y est couvert par une arête $yz \in M$.
GROSSIR LA FORÊT

Cas 2 : Si $y \in W$ est externe et dans un arbre distinct.
AUGMENTER LE COUPLAGE

Cas 3 : Si $y \in W$ est externe et dans le même arbre
CONTRACTER UNE FLEUR

Algorithme d'Edmonds (version un peu plus précise)

On maintient un couplage M et une forêt M-alternée (W,F).

Répéter Soit $x \in W$ un sommet externe et $y \in V$ un de ses voisins dans G.

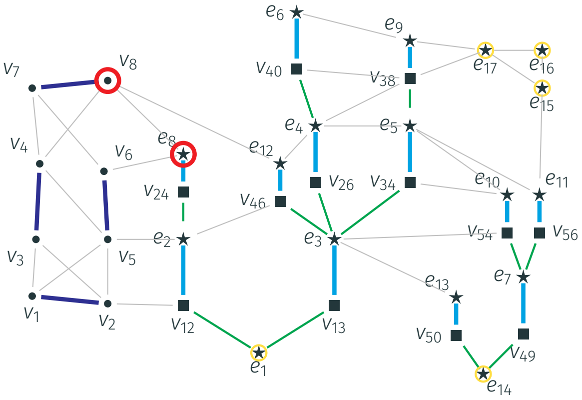
Cas 1 : Si $y \notin W$: y est couvert par une arête $yz \in M$.
GROSSIR LA FORÊT

Cas 2 : Si $y \in W$ est externe et dans un arbre distinct.
AUGMENTER LE COUPLAGE

Cas 3 : Si $y \in W$ est externe et dans le même arbre
CONTRACTER UNE FLEUR

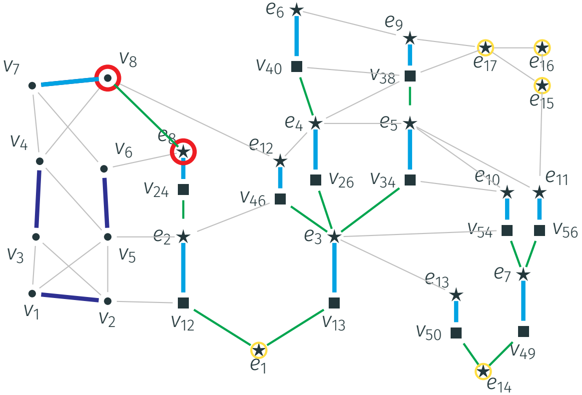
Cas restant Cas 1, 2 3 épuisés : les voisins de tout sommet externe sont tous internes.
ARRÊT DE L'ALGORITHME

Cas 1 Le sommet $x \in W$ est externe, son voisin y est hors W. Soi z tq y est couvert par l'arête $yz \in M$.



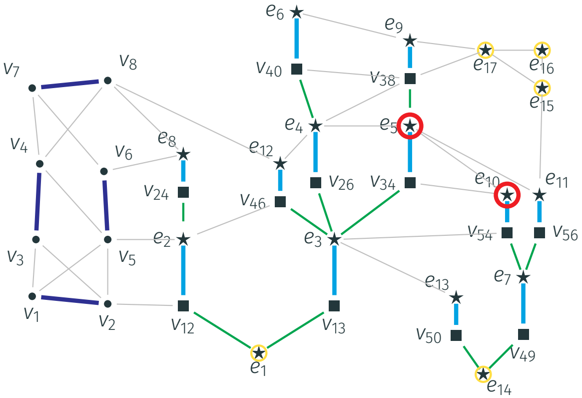
Cas 1 : Grossir la forêt

Cas 1 Le sommet $x \in W$ est externe, son voisin y est hors W. Soi z tq y est couvert par l'arête $yz \in M$.
Ajouter les sommets y, z à W ; ajouter les arêtes xz yz à F.



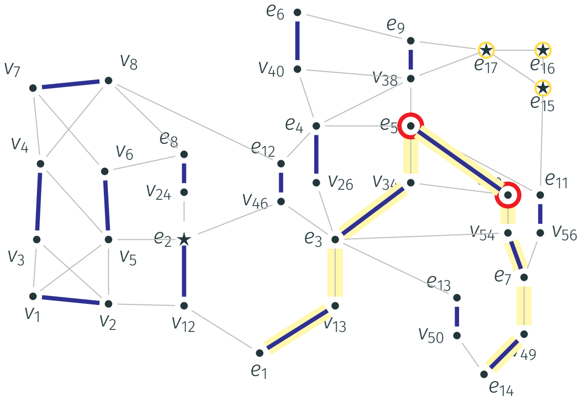
On note $P(v)$ l'unique chaîne de v à la racine dans (W, F).

Cas 2 Le sommet $x \in W$ est externe, son voisin y est externe dans un arbre distinct.

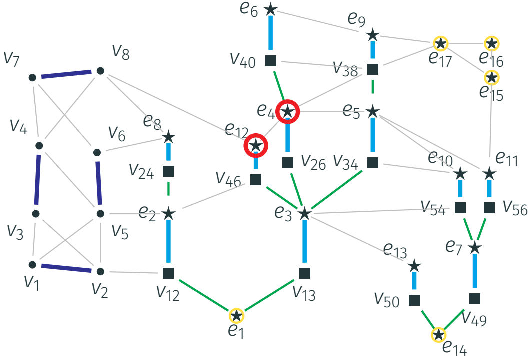


On note $P(v)$ l'unique chaîne de v à la racine dans (W, F).

Cas 2 Le sommet $x \in W$ est externe, son voisin y est externe dans un arbre distinct. Augmenter le couplage $M' \leftarrow M \triangle (P(x) \cup \{xy\} \cup P(y))$; réinitialiser la forêt avec la forêt triviale.



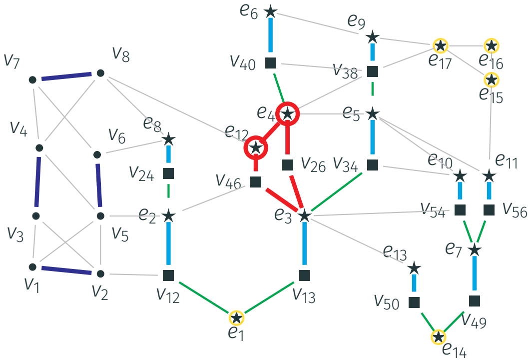
Cas 3 Le sommet $x \in W$ est externe, son voisin y est externe dans le même arbre.



Cas 3 Le sommet $x \in W$ est externe, son voisin y est externe dans le même arbre. Soit z le plus proche ancêtre commun, qui est forcément externe.

$$C = P(x)_{[z,x]} \cup \{xy\} \cup P(y)_{[z,y]}$$

est un cycle de longueur impair, donc une fleur. On contracte C.



Lemme
Soit G un graphe, M un couplage et (W, F) une forêt M-alternée dans laquelle les voisins de tout sommet externe sont internes. Alors le couplage M est un couplage maximum de G.

Démonstration.
Soit $X \subseteq W$ l'ensemble des sommets internes, $s = |X|$ et $t = |W \setminus X|$. M laisse $|V| - 2|M| = t - s$ sommets découverts.

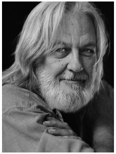
Dans $G \setminus X$, les composantes connexes impaires sont les sommets externes isolées. Donc $q_G(X) = t$.

D'après la formule de Tutte-Berge, on a $|V| - 2|M_{\mathsf{max}}| \geq q_G(X) - |X| = t - s$.

Cette inégalité est atteinte ici, ce qui prouve l'optimalité du cardinal du couplage M. $\square$

Correction de l'algorithme d'Edmonds

$\sim$1961



Jack Edmonds
(1934)

Théorème
L'algorithme d'Edmonds se termine et construit un couplage de cardinal maximum.

Démonstration.
La correction partielle provient du lemme.
La quantité $(|V| - 2|M|, |V| - |W|, |V|) \in \mathbb{N}^3$ est un variant : l'algorithme d'Edmonds se termine. $\square$