TD ACCQ 201

Julien Béguinot, Duong Hieu Phan

Télécom Paris

1 Rappels

1.1 Définitions Essentiels

Definition 1. Soit G un groupe et H un sous-groupe de G. On dit que H est **distingué** dans G et on note $H \lhd G$ si $\forall g \in G, gH = Hg$. En d'autre termes les classes à droites et les classes à gauches de H dans G coincident.

Definition 2. Un groupe engendré par un seul élément est dit **monogène**. Un groupe monogène et fini est dit **cyclique**.

Definition 3. Le **centre** $\mathcal{Z}(G)$ est l'ensemble des éléments de G commutants avec tous les éléments de G. Pour x un élément de G le centralisateur de x dans G est l'ensemble des éléments de G commutant avec x.

Definition 4. Soit X un ensemble et G un groupe. On dit que G **agit** sur X s'il existe une fonction (une action de groupe): $\begin{cases} X \times G \mapsto G \\ (x,g) \mapsto g \cdot x \end{cases}$ tel que (i) : $\forall (s,g) \in G^2, \forall x \in X, s \cdot (g \cdot x) = (sg) \cdot x$ et (ii) : $e \cdot x = x$. On note $\mathcal{O}_x = \{g \cdot x | g \in G\}$ l'**orbite** de x et $\mathcal{S}_x = \{g \in G | g \cdot x = x\}$ le **stabilisateur** de x.

Definition 5. On appele **indicatrice d'Euler** noté $\varphi : \mathbb{N}^* \mapsto \mathbb{N}^*$ l'application qui donne l'ordre du groupe des inversibles (pour $\times$) de $\mathbb{Z}_n$. C'est une fonction multiplicative et on peut monter que si $N = \prod p_i^{\nu_i}$ alors

$$\varphi(N) = \prod p_i^{\nu_i - 1}(p_i - 1)p_i^{\nu_i - 1} = N \prod \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

1.2 Résultats Principaux

Lemma 1 (Lagrange)**.** *Soit G un groupe fini et H un sous-groupe de G. Alors l'ordre de H divise l'ordre de G. En particulier il existe un entier noté $[G : H]$ apppelé ordre de H dans G tel que*

$$|G| = [G : H]|H|.$$

Lemma 2 (Equation aux Classes)**.** *Soit X un ensemble et G un groupe fini agissant sur X. Alors pour tout x de X,*

$$|G| = |\mathcal{O}_x||\mathcal{S}_x|.$$

En particulier en prenant un representant de chaque orbite dans un ensemble Θ on partitione X est donc

$$|X| = \sum_{x \in \Theta} |\mathcal{O}_x|.$$

Lemma 3 (Formule de Burnside)**.** *Soit G un groupe agissant sur l'ensemble X,*

$$|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\mathrm{Fix}(g)|$$

où $\mathrm{Fix}(g) = \{x \in X | g\cdot x = x\}$ *est l'ensemble des points fixe de X sous l'action de l'élement g.*

Theorem 1 (Caractérisation des Groupes Cycliques)**.** *Soit G un groupe cyclique d'ordre n on a*

$$G \simeq \mathbb{Z}_n.$$

Theorem 2 (Théorème des Restes Chinois)**.** *Soit $n = \prod_{i=1}^{d} n_i$ avec $n_1,\dots,n_d$ premiers deux à deux. Alors*

$$\theta : \begin{cases} \mathbb{Z}_n \mapsto \mathbb{Z}_{n_1}\times\ldots\times\mathbb{Z}_{n_d} \\ x[n] \mapsto (x[n_1],\ldots,x[n_d]) \end{cases}$$

est un isomorphise d'anneaux.

Theorem 3. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$n = \sum_{d|n}\varphi(d).$$

Theorem 4 (Structure des Groupes Abéliens Finis)**.** *Soit G un groupe abélien fini d'odre N. Il existe une unique suite $d_r \geqslant \ldots \geqslant d_1 > 1$ avec $d_i|d_{i+1}$ tel que*

$$G \simeq \mathbb{Z}_{d_1}\times\ldots\times\mathbb{Z}_{d_r}.$$

Les entiers $d_1,\ldots,d_r$ sont appelés les ***invariants*** *du groupe (et caractérisent donc le groupe à isomorphisme près).*

2 Exercices

Exercice 1 (Inverse du TRC)**.** *D'après le TRC $\theta : \mathbb{Z}_{35}\mapsto\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_7$ est un isomorphisme. Construire explicitement son inverse θ^{-1}.*

Exercice 2. *Soit G un groupe abélien d'ordre* 60*. Décrire à isomorphisme prêt les structures possible pour G.*

Exercice 3 (Centre et Abélianité)**.** *Soit G un groupe de centre Z.*

- *Montrer que $Z \lhd G$*
- *Montrer que si G/Z est monogène alors G est abélien.*

Exercice 4 (Lemme de Cauchy)**.** *Soit G un groupe fini dont l'ordre est un multiple de p un nombre premier. Montrer que G admet un élément d'ordre p.*

Exercice 5. *Soit G un groupe fini d'ordre p ou p^2 avec p premier. Montrer que G est abélien. En déduire l'ensemble des structures possibles pour G à isomorphisme près.*

Exercice 6 (Théorème du Rang)**.** *Soit G un groupe et $f : G\mapsto G$ un endomorphisme. Montrer que*

$$|G| = |\mathrm{Ker}f||\mathrm{Im}f|.$$

Exercice 7. *Soit G un groupe abélien d'ordre pq avec p, q deux nombres premiers. Montrer que G est un groupe cyclique. Et si G n'est pas abélien ?*

Exercice 8. *Combien y-a-t'il de collier de perles* ***différents*** *formés à partir de* 4 *perles rouges et* 4 *perles bleu ?*

Exercice 9. *Soit* G *un groupe et* H_1, H_2 *deux sous-groupes de* G*. Il est connu que* $H_1 \cap H_2$ *est un sous-groupe de* G*. Qu'en est-il de* $H_1 \cup H_2$ *?*

Exercice 10. *Soit* G, H, L *des groupes tels que* $L \lhd H$ *et* $H \lhd G$*. A-t-on* $L \lhd G$ *?*