TP7 : Applications des bases de Gröbner

Résumé du TP

Bertrand Meyer

5 février 2025

Objectifs du TP

- s'amuser avec les bases de Gröbner
- faire un peu de géométrie, en préparation au cours ACCQ 205

Rappel
Calculer une base de Gröbner est difficile et long (algo double exponentiel) : les exemples présentés ici passent difficilement à l'échelle.

La géométrie algébrique

En géométrie algébrique, on étudie des courbes, surfaces, variétés définie comme les zéros de familles de polynômes.

Il est plus facile d'étudier l'idéal des polynômes qui s'annulent sur une variété (ses équations) et le comportement des fonctions polynômiales ou rationnelles sur cette variété.

La géométrie algébrique

En géométrie algébrique, on étudie des courbes, surfaces, variétés définie comme les zéros de familles de polynômes.

Il est plus facile d'étudier l'idéal des polynômes qui s'annulent sur une variété (ses équations) et le comportement des fonctions polynômiales ou rationnelles sur cette variété.

Si une variété $\mathcal{V}$ est définie par les équations $f_1(\mathrm{x}) = f_2(\mathrm{x}) = \cdots = 0$, une fonction polynomiale $h(\mathrm{x})$ est en fait définie modulo $\mathcal{I} = \langle f_1, f_2, \cdots \rangle$.

Exemple

Les fonctions $h(x, y) = 1 - x^2$ et $\hat{h}(x, y) = y^2$ sont les mêmes sur le cercle unité (d'équation $f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$).

Lissité

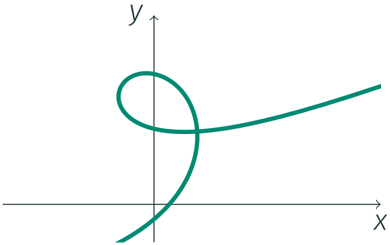
Lissité, points singuliers

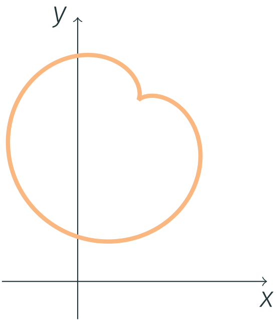
Définition
Un point est dit singulier quand l'espace tangent est mal défini en ce point. Il est dit régulier sinon.

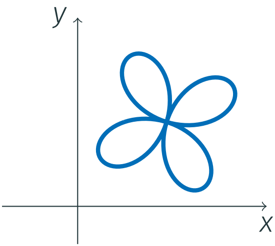
- Pour une courbe plane définie par $f(x, y) = 0$, il suffit que le gradient ∇f soit non-nul pour que le point soit régulier.
- Pour une surface de $\mathbb{K}^3$ définie par $f(x, y, z) = 0$, il suffit que le gradient ∇f soit non-nul pour que le point soit régulier.
- Pour une courbe de $\mathbb{K}^3$ définie par $f_1(x, y, z) = 0$ et $f_2(x, y, z) = 0$, il suffit que le système $\{\nabla f_1, \nabla f_2\}$ soit de rang 2, ou encore que $\nabla f_1 \wedge \nabla f_2 \neq 0$ pour que le point soit régulier.

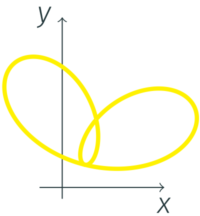
Définition
Une variété sans points singuliers est dite lisse.

Exemples









Ordre d’un zéro ou d’un pôle

Ordre d'un zéro ou d'un pôle d'une fraction rationnelle

Définition

Étant donné une fraction rationnelle h, l'ordre de h en un point M de la courbe est le nombre de fois que l'on peut factoriser dans h une fonction π qui s'annule simplement en M (on parle d'uniformisante).

Exemple

Dans la fonction

$$h = \frac{(x-3)(x-5)^3}{(x-7)^2(x-11)^2}$$

définie sur la droite,

- le point $x = 3$ est un zéro d'ordre 1,
- le point $x = 5$ est un zéro d'ordre 3,
- le point $x = 7$ est un pôle d'ordre 2,
- le point $x = 11$ est un pôle d'ordre 2.

Les ordres d'un produit s'additionnent.

Ordre d’un zéro ou d’un pôle d’une fraction rationnelle

Sur la droite, on remarque que

$$\dim \mathbb{K}[x]/\langle h(x)\rangle$$

correspond à la somme des multiplicités des zéros de h et si x_0 est un zéro de f

$$\dim \mathbb{K}[x]/\langle h(x),(x-x_0)^g\rangle$$

correspond à l’ordre de h en x_0 (pourvu que d soit assez grand, par exemple $d \geq \deg h$).

Ordre d'un zéro ou d'un pôle d'une fraction rationnelle

Soit $h(\mathrm{x}) \in \mathbb{K}[\mathrm{x}]$ défini sur une courbe d'équations $f_1(\mathrm{x}) = f_2(\mathrm{x}) = 0$. On définit de même l'ordre de h en un point M par

$$\dim \mathbb{K}[\mathrm{x}]/\langle f_1, f_2, h, \nu^d \rangle$$

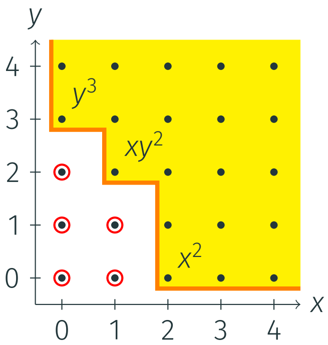
où ν est une forme linéaire qui s'annule en M mais pas en un autre zéro de h.

Ordre d'un zéro ou d'un pôle d'une fraction rationnelle

On calcule

$$\dim \mathbb{K}[\mathbf{x}]/\langle f_1, f_2, h, \nu^d \rangle$$

en comptant le nombre de monômes dans le diagramme en escalier d'une base de Groebner de l'idéal $\langle f_1, f_2, h, \nu^d \rangle$

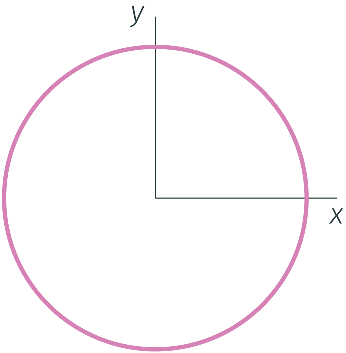


Enveloppe d’une courbe

Enveloppe

Définition
L'enveloppe d'une famille de courbes planes est une courbe tangente à chacune des courbes de la famille.

Equation : $\left\{ f(x,y,t) = 0, \frac{\partial}{\partial t} f(x,y,t) = 0 \right\}$

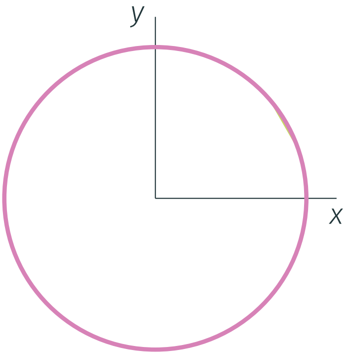


Enveloppe

Définition

L'enveloppe d'une famille de courbes planes est une courbe tangente à chacune des courbes de la famille.

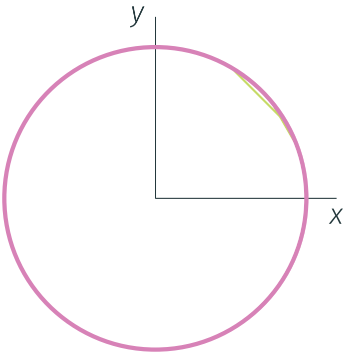
Equation : $\left\{ f(x,y,t) = 0, \dfrac{\partial}{\partial t} f(x,y,t) = 0 \right\}$



Enveloppe

Définition
L'enveloppe d'une famille de courbes planes est une courbe tangente à chacune des courbes de la famille.

Equation : $\left\{ f(x,y,t)=0, \frac{\partial}{\partial t} f(x,y,t)=0 \right\}$

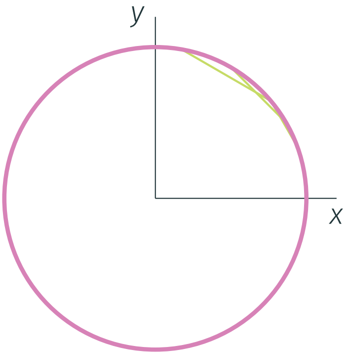


Enveloppe

Définition

L'enveloppe d'une famille de courbes planes est une courbe tangente à chacune des courbes de la famille.

Equation : $\left\{ f(x, y, t) = 0, \frac{\partial}{\partial t} f(x, y, t) = 0 \right\}$

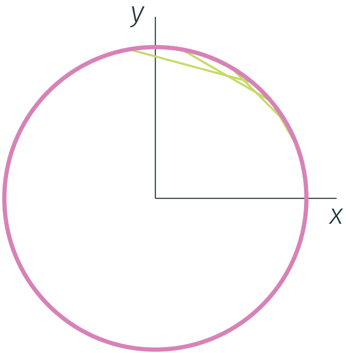


Enveloppe

Définition

L'enveloppe d'une famille de courbes planes est une courbe tangente à chacune des courbes de la famille.

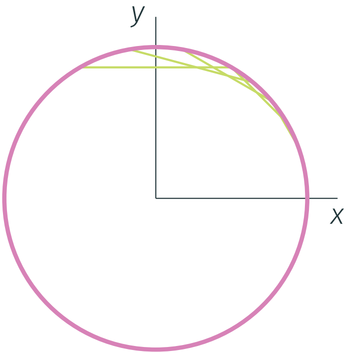
Equation : $\left\{ f(x,y,t) = 0, \frac{\partial}{\partial t} f(x,y,t) = 0 \right\}$



Enveloppe

Définition
L'enveloppe d'une famille de courbes planes est une courbe tangente à chacune des courbes de la famille.

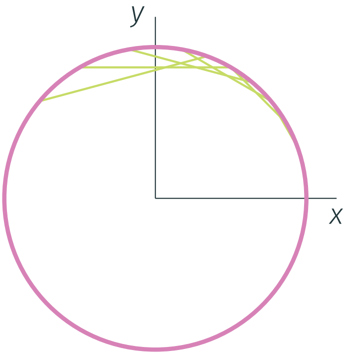
Equation : $\left\{ f(x,y,t) = 0, \frac{\partial}{\partial t} f(x,y,t) = 0 \right\}$



Enveloppe

Définition
L'enveloppe d'une famille de courbes planes est une courbe tangente à chacune des courbes de la famille.

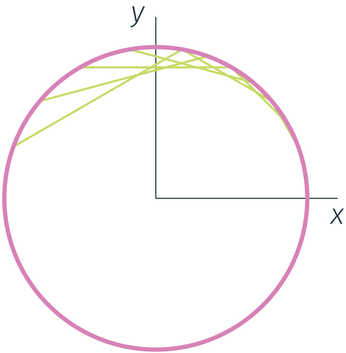
Equation : $\left\{ f(x,y,t) = 0, \frac{\partial}{\partial t} f(x,y,t) = 0 \right\}$



Enveloppe

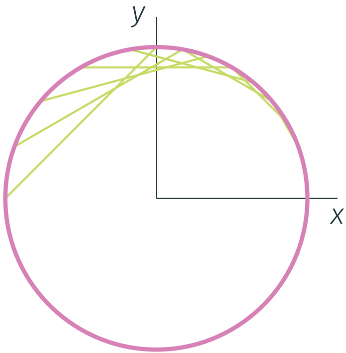
Définition
L'enveloppe d'une famille de courbes planes est une courbe tangente à chacune des courbes de la famille.

Equation : $\left\{ f(x,y,t) = 0, \frac{\partial}{\partial t} f(x,y,t) = 0 \right\}$



Définition
L'enveloppe d'une famille de courbes planes est une courbe tangente à chacune des courbes de la famille.

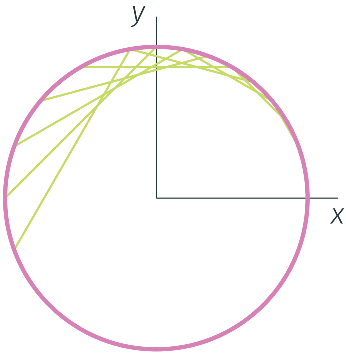
Equation : $\left\{f(x,y,t)=0, \dfrac{\partial}{\partial t}f(x,y,t)=0\right\}$



Enveloppe

Définition
L'enveloppe d'une famille de courbes planes est une courbe tangente à chacune des courbes de la famille.

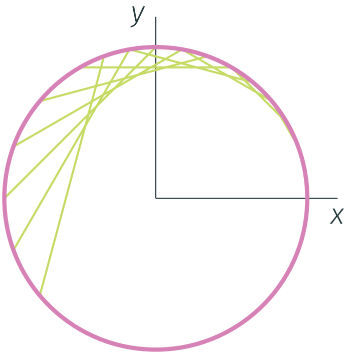
Equation : $\left\{ f(x,y,t) = 0, \frac{\partial}{\partial t} f(x,y,t) = 0 \right\}$



Enveloppe

Définition
L'enveloppe d'une famille de courbes planes est une courbe tangente à chacune des courbes de la famille.

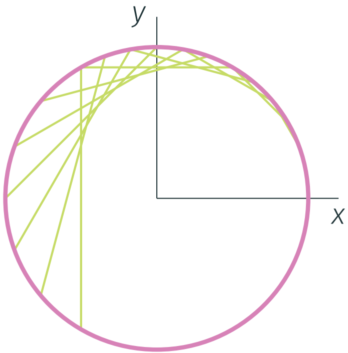
Equation : $\left\{ f(x,y,t) = 0, \frac{\partial}{\partial t} f(x,y,t) = 0 \right\}$



Enveloppe

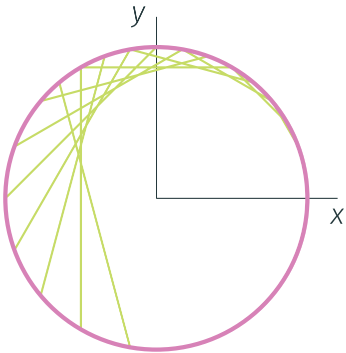
Définition
L'enveloppe d'une famille de courbes planes est une courbe tangente à chacune des courbes de la famille.

Equation : $\left\{ f(x,y,t) = 0, \dfrac{\partial}{\partial t} f(x,y,t) = 0 \right\}$



Définition
L'enveloppe d'une famille de courbes planes est une courbe tangente à chacune des courbes de la famille.

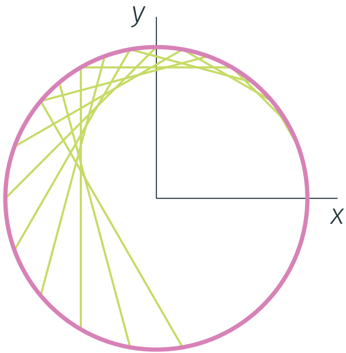
Equation : $\left\{ f(x,y,t) = 0, \dfrac{\partial}{\partial t} f(x,y,t) = 0 \right\}$



Enveloppe

Définition
L'enveloppe d'une famille de courbes planes est une courbe tangente à chacune des courbes de la famille.

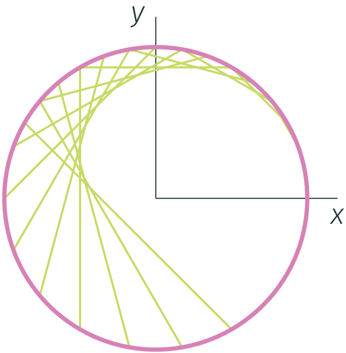
Equation : $\left\{ f(x,y,t)=0, \frac{\partial}{\partial t} f(x,y,t)=0 \right\}$



Enveloppe

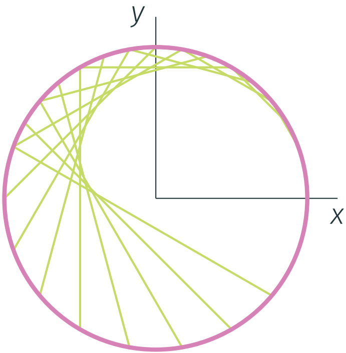
Définition
L'enveloppe d'une famille de courbes planes est une courbe tangente à chacune des courbes de la famille.

Equation : $\left\{ f(x,y,t) = 0, \frac{\partial}{\partial t} f(x,y,t) = 0 \right\}$



Définition
L'enveloppe d'une famille de courbes planes est une courbe tangente à chacune des courbes de la famille.

Equation : $\left\{ f(x,y,t) = 0, \dfrac{\partial}{\partial t} f(x,y,t) = 0 \right\}$



Définition

L'enveloppe d'une famille de courbes planes est une courbe tangente à chacune des courbes de la famille.

Equation : $\left\{ f(x,y,t) = 0, \frac{\partial}{\partial t} f(x,y,t) = 0 \right\}$