Západočeská univerzita
Fakulta aplikovaných věd
Katerdra Kybernetiky

FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD
ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY V PLZNI

První semestrální práce z STP

Samuel Kokoška, Martin Hamar

KKY/STP Datum: 21. května 2025

1 Úvod

V rámci první semestrální práce ze předmětu 'Stochastické systémy a procesy' je cílem vypracovat dva příklady týkající se Markovských řetězců. V prvním příkladu musí být řetězec regulární a homogenní a máme pro něj určit střední počet kroků, které jsou třeba k prvnímu dosažení stavu `j` za předpokladu, že se vycházelo ze stavu `i`. Poté máme také určit finální pravděpodobnosti.

V druhém příkladu pracujeme s homogenním řetězecem, kde jsou dva absorpční stavy. Zde máme určit střední počet průchodů stavem `j`, pokud se vychází ze stavu `i`, do té doby než dojde k pohlcení. Poté musíme vypočítat dobu pobytu v každém tranzientním stavu. Poslední podúkol příkladu 2 je spočtení ppsti skončení v absorpčím stavu, pro všechny tranzientní stavy. Celé zadání je k vidění v sekci 1.1.

Během vypracovávání byl použit Matlab pro jeho schopnost pracování s maticemi a rovnicemi. Postupy řešení pro jednotlivé příklady jsou k vidění v sekci 2.

1.1 Zadání

ZČU v Plzni – Katedra kybernetiky Stochastické systémy a procesy

Markovské řetězce

Zadání semestrální práce č. 1

Zvolte si grafy prezentující Markovské řetězce, jehož uzly značí stavy a hrany určují pravděpodobnosti přechodu $p_{i,j}$ z uzlu i do uzlu j, tak aby měl 6 uzlů a aby platilo že

Příklad č. 1

Markovský řetězec je homogenní a regulární. Pro tento řetězec určete:

- M – střední počet kroků, které jsou třeba k (prvnímu) dosažení stavu j za předpokladu, že se vycházelo ze stavu i,
- a – finální pravděpodobnosti.

Příklad č. 2

Markovský řetězec je homogenní a absorpční se dvěma absorpčními stavy. Pro tento řetězec určete:

- T – střední počet průchodů stavem j, pokud se vychází ze stavu i, do té doby, než dojde k pohlcení (pokud $j = i$, výchozí stav se započítává za první průchod),
- t – dobu pobytu v tranzientním stavu,
- d – pravděpodobnost, že Markovský řetězec vycházející ze stavu i skončí v daném absorpčním stavu.

2 Postup Řešení

2.1 Příklad 1

Pro tento příklad by zvolen řetězec znázorněn na obrázku 1. Odpovídající matice $\mathbf{P}$ vypadá takto:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

U tohoto příkladu je snažší nejdříve spočítat finální ppsti. Ty si spočítáme pomocí vztahu $\pi = \pi\mathbf{P}$, kde π je vektor, který hledáme. Po úpravě řešíme soustavu rovnic: $(\mathbf{P}^T - \mathbf{I})\pi^T = \mathbf{0}$, za podmínky že členy vektoru π mají součet jedna. S vyřešením této rovnice nám pomůže Matlab a jejím výsledkem pro matici $\mathbf{P}$ sepsanou výše je:

$$\pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

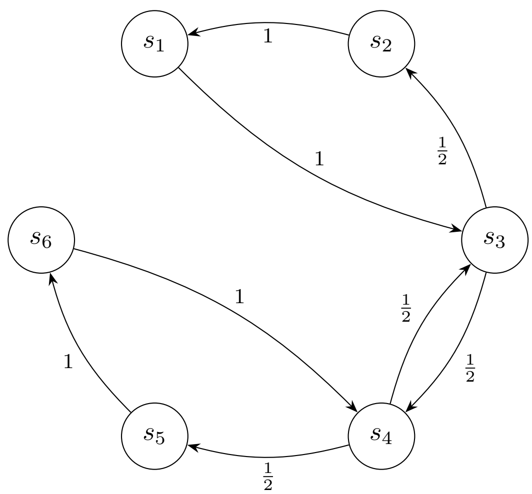
Nyní si spočítáme matici $\mathbf{M}$, která určuje stření počet kroků, které jsou třeba k prvnímu dosažení stavu `j` za předpokladu, že se vycházelo ze stavu `i`. Zde na to půjdeme přes simulaci absorpčních stavů. Postupně uděláme z každého stavu absorpční a spočítáme pro něj fundamentální matici[1] $\mathbf{T} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$. Z té poté spočítáme střední dobu strávenou v tranzientních stavech $t = \mathbf{T1}$ - to jsou všechny ty co nejsou absorpční. Tento vektor poté vložíme do matice $\mathbf{M}$, na místo určené vybraným absorpčním stavem.

Je důležité podotknout, že tímto postupem získáme na diagonále nulové prvky, protože u tohoto výpočtu vždy považujeme daný diagonální prvek za absorpční a nemá smysl pro něj spočítat první dosažení. Tyto diagonální prvky musíme spočítat pomocí následující rovnice: $m_{i,i} = \frac{1}{\pi_i}$, kde $m_{i,i}$ představuje prvek matice $\mathbf{M}$ na pozici i, i. Prvek π_i představuje i-tý prvek vektoru π, vypočítaný v předchozím kroku.

Opět zde využijeme síly Matlabu a matice $\mathbf{M}$ nám vyjde následovně:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 1 & 5 & 11 & 12 \\ 1 & 8 & 2 & 6 & 12 & 13 \\ 7 & 6 & 4 & 4 & 10 & 11 \\ 11 & 10 & 4 & 4 & 6 & 7 \\ 13 & 12 & 6 & 2 & 8 & 1 \\ 12 & 11 & 5 & 1 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

[1] Tento postup je využit i u příkladu 2, kde je vysvětlen podrobněji.



Obrázek 1: Regulární Markovský řetězec

2.2 Příklad 2

Pro příklad vezmeme podobný řetězec jako v prvním příkladu, ale ze stavů s_1 a s_6 uděláme absorpční - znázorněno na obrázku 2. Tomuto řetězci odpovídá následující matice $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pro splnění prvního podúkolu hledáme fundamentální matici $\mathbf{T}$. Tu nalezneme pomocí rovnice: $\mathbf{T} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$. Matice $\mathbf{Q}$ zde odpovídá matici $\mathbf{P}$, kde je vynechaný první a poslední řádek i sloupec (ty totiž odpovídají absorpčním stavům). K odečtení jednotkové diagonální matice $\mathbf{I}$ a spočtení inverze opět použijeme Matlab a získáme následující matici $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Střední dobu strávenou v tranzietních stavech t získáme sečtením hodnot jednotlivých řádků - tedy vynásobení matice $\mathbf{T}$ vektorem jedniček $\mathbf{1} = [1, 1, 1, 1]^T$.

$$t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

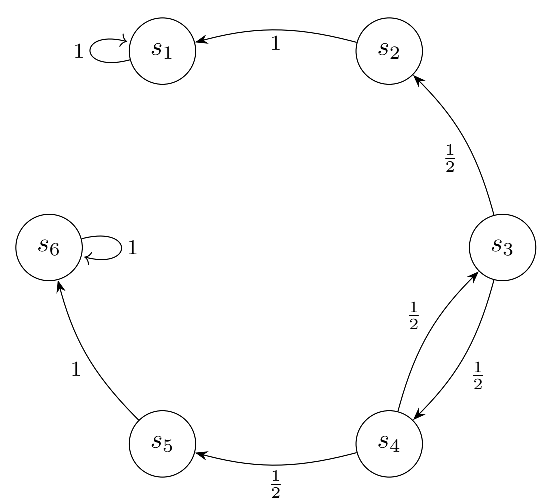
Nyní si musíme spočítat pravděpodobnost pohlcení pro oba absorpční stavy, začínáme-li ve stavu `i`. Pro oba stavy budeme řešit následující rovnici: $d = \mathbf{P}d$, kde vektor d, který má vždy pro jeden absorpční stav hodnotu 1 a pro ostatní absorpční stavy 0. Pro absorpční stav s_1 tedy je: $d = [1, d_2, d_3, d_4, d_5, 0]^T$, kde d_2, d_3, d_4, d_5 jsou prvky co hledáme. Pro stav s_6 je vektor velice podobný, má prohozenou ovšem jedničku s nulou. K vyřešení obou rovnic (jedna rovnice odpovídá jednomu absorpčnímu stavu) byl využit `syms` toolbox Matlabu.

Pro absorpční stav s_1 nám vyšel vektor d:

$$d = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

A pro stav s_6 nám vyšel vektor d:

$$d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix}^T.$$



Obrázek 2: Markovský řetězec s dvěma absorpčními stavy

3 Závěr

Cílem této práce bylo naučit se základní úlohy týkající se Markovských řetězeců. Pracovali jsme jak s regulárními řetězci, tak s řetězecem obsahující absorpční stav. Práce byla vypracována v Matlabu a napsáním tohoto referátu ji považuji za úspěšně splněnou.