

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA  
FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD  
KATEDRA KYBERNETIKY



## První semestrální práce z STP

*Samuel Kokoška, Martin Hamar*

# 1 Úvod

V rámci první semestrální práce ze předmětu ‘Stochastické systémy a procesy’ je cílem vypracovat dva příklady týkající se Markovských řetězců. V prvním příkladu musí být řetězec regulární a homogenní a máme pro něj určit střední počet kroků, které jsou třeba k prvnímu dosažení stavu  $j$  za předpokladu, že se vycházelo ze stavu  $i$ . Poté máme také určit finální pravděpodobnosti.

V druhém příkladu pracujeme s homogenním řetězcem, kde jsou dva absorpční stavy. Zde máme určit střední počet průchodů stavem  $j$ , pokud se vychází ze stavu  $i$ , do té doby než dojde k pohlcení. Poté musíme vypočítat dobu pobytu v tranzientním stavu. Poslední podúkol příkladu 2 je spočtení ppst skončení v absorpčním stavu, pro všechny tranzientní stavy. Celé zadání je k vidění v sekci 1.1.

Během vypracovávání byl použit Matlab pro jeho schopnost pracování s maticemi a rovnicemi. Postupy řešení pro jednotlivé příklady jsou k vidění v sekci 2.

## 1.1 Zadání

### Markovské řetězce

#### *Zadání semestrální práce č. 1*

Zvolte si grafy prezentující Markovské řetězce, jehož uzly značí stavy a hrany určují pravděpodobnosti přechodu  $p_{i,j}$  z uzlu  $i$  do uzlu  $j$ , tak aby měl 6 uzlů a aby platilo že

#### **Příklad č. 1**

Markovský řetězec je homogenní a regulární. Pro tento řetězec určete:

- $M$  – střední počet kroků, které jsou třeba k (prvnímu) dosažení stavu  $j$  za předpokladu, že se vycházelo ze stavu  $i$ ,
- $a$  – finální pravděpodobnosti.

#### **Příklad č. 2**

Markovský řetězec je homogenní a absorpční se dvěma absorpčními stavy. Pro tento řetězec určete:

- $T$  – střední počet průchodů stavem  $j$ , pokud se vychází ze stavu  $i$ , do té doby, než dojde k pohlcení (pokud  $j = i$ , výchozí stav se započítává za první průchod),
- $t$  – dobu pobytu v tranzientním stavu,
- $d$  – pravděpodobnost, že Markovský řetězec vycházející ze stavu  $i$  skončí v daném absorpčním stavu.

## 2 Postup Řešení

### 2.1 Příklad 1

Pro tento příklad by zvolen řetězec znázorněn na obrázku 1. Odpovídající matice  $\mathbf{P}$  vypadá takto:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nejdříve je snažší si u tohoto příkladu spočítat finální ppsti, ty si spočítáme pomocí vztahu  $\pi = \pi\mathbf{P}$ , kde  $\pi$  je vektor, který hledáme. Po úpravě řešíme soustavu rovnic:  $(\mathbf{P}^T - \mathbf{I})\pi^T = \mathbf{0}$ , za podmínky že členy vektoru  $\pi$  musí mít součet jedna. S vyřešením této rovnice nám pomůže matlab a jejím výsledkem pro matici  $\mathbf{P}$  sepsanou výše je:

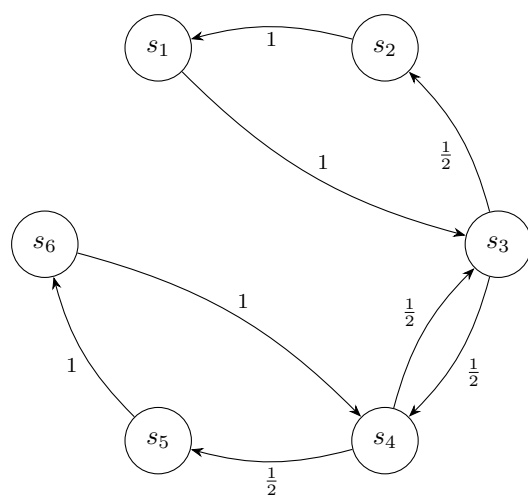
$$\pi = \left[ \frac{1}{8} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{8} \right].$$

Nyní si spočítáme matici  $\mathbf{M}$ , která určuje střenění počet kroků, které jsou třeba k prvnímu dosažení stavu  $j$  za předpokladu, že se vycházelo ze stavu  $i$ . Zde na to půjdeme přes simulaci absorpčních stavů. Postupně uděláme z každého stavu absorpční a spočítáme pro něj fundamentální matici  $\mathbf{T} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$ . Z té poté spočítáme střední dobu strávenou v tranzientních stavech  $t = \mathbf{T}\mathbf{1}$  - to jsou všechny ty co nejsou absorpční. Tento vektor poté vložíme do matice  $\mathbf{M}$ , na místo určené vybraným absorpčním stavem.

Je důležité podotknout, že tímto postupem získáme na diagonále nulové prvky, protože tímto výpočtem vždy považujeme prvek za absorpční a nemá smysl pro něj spočítat první dosažení. Tyto diagonální prvky musíme spočítat pomocí následující rovnice:  $m_{i,i} = \frac{1}{\pi_i}$ , kde  $m_{i,i}$  představuje prvek matice  $\mathbf{M}$  na pozici  $i, i$ .

Opět zde využijeme síly Matlabu a matice  $\mathbf{M}$  nám vyjde následovně:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 1 & 5 & 11 & 12 \\ 1 & 8 & 2 & 6 & 12 & 13 \\ 7 & 6 & 4 & 4 & 10 & 11 \\ 11 & 10 & 4 & 4 & 6 & 7 \\ 13 & 12 & 6 & 2 & 8 & 1 \\ 12 & 11 & 5 & 1 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$



Obrázek 1: Regulární Markovský řetězec

## 2.2 Příklad 2

Pro příklad vezmeme podobný řetězec jako v prvním příkladu, ale ze stavů  $s_1$  a  $s_6$  uděláme absorpční - znázorněno na obrázku 2. Tomuto řetězci odpovídá následující matice  $\mathbf{P}$ :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pro splnění prvního podúkolu hledáme fundamentální matici  $\mathbf{T}$ . Tu nalezneme pomocí rovnice:  $\mathbf{T} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$ . Matice  $\mathbf{Q}$  zde odpovídá matici  $\mathbf{P}$ , kde je vynechaný první a poslední řádek i sloupec (ty totiž odpovídají absorpčním stavům). K odečtení jednotkové diagonální matice  $\mathbf{I}$  a spočtení inverze opět použijeme Matlab a získáme následující matici  $\mathbf{T}$ :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Střední dobu strávenou v tranzitních stavech  $t$  získáme sečtením hodnot jednotlivých řádků - tedy vynásobením matice  $\mathbf{T}$  vektorem jedniček  $\mathbf{1} = [1, 1, 1, 1]^T$ .

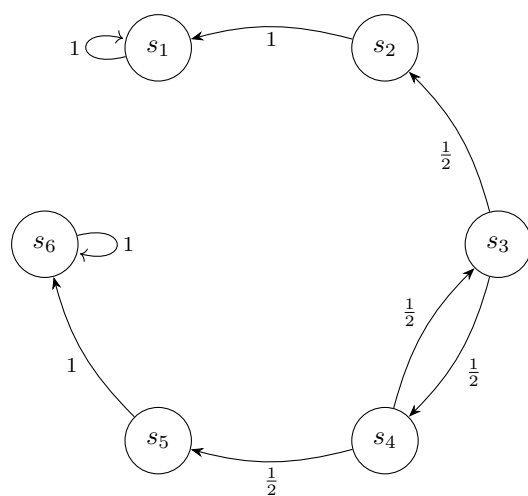
$$t = [1 \quad 3 \quad 3 \quad 1]^T.$$

Nyní si musíme spočítat pravděpodobnost pohlcení pro oba absorpční stavy, začínáme-li ve stavu i. Pro oba stavy budeme řešit následující rovnici:  $d = \mathbf{P}d$ , kde vektor  $d$ , který má vždy pro jeden absorpční stav hodnotu 1 a pro ostatní absorpční stavy 0. Pro absorpční stav  $s_1$  tedy je:  $d = [1, d_2, d_3, d_4, d_5, 0]^T$ , kde  $d_2, d_3, d_4, d_5$  jsou prvky co hledáme. K vyřešení obou rovnic pro oba absorpční stavy byl využit `syms` toolbox Matlabu. Pro absorpční stav  $s_1$  nám vyšel vektor  $d$ :

$$d = [1 \quad 1 \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 0]^T.$$

A pro stav  $s_6$  nám vyšel vektor  $d$ :

$$d = [0 \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad 1 \quad 1]^T.$$



Obrázek 2: Markovský řetězec s dvěma absorpčními stavy

### 3 Závěr

Cílem této práce bylo naučit se základní úlohy týkající se Markovských řetězců. Pracovali jsme jak s regulárními řetězci tak s řetězcem obsahující absorpční stav. Práce byla vypracována v Matlabu a tímto referátem ji považuji za úspěšně splněnou.