Západočeská univerzita
Fakulta aplikovaných věd
Katerdra Kybernetiky

První semestrální práce z STP

Samuel Kokoška, Martin Hamar

KKY/STP

Datum: 21. května 2025

1 Úvod

V rámci první semestrální práce ze přemětu ‘Stochastické systémy a procesy’ je cílem vypracovat dva příklady týkající se Markovských řetězců. V prvním příkladu musí být řetězec regulární a homogenní a máme pro něj určit stření počet kroků, které jsou třeba k prvnímu dosažení stavu `j` za předpokladu, že se vycházelo ze stavu `i`. Poté máme také určit finální pravděpodobnosti.

V druhém příkladu pracujeme s homogenním řetězecem, kde jsou dva absorpční stavy. Zde máme určit střední počet průchodů stavem `j`, pokud se vychází ze stavu `i`, do té doby než dojde k pohlcení. Poté musíme vypočítat dobu pobytu v tranzientním stavu. Poslední podúkol příkladu 2 je spočtení ppst skončení v absorpčím stavu, pro všechny tranzientní stavy. Celé zadání je k vidění v sekci 1.1.

Během vypracovávání byl použit Matlab pro jeho schopnost pracování s maticemi a rovnicemi. Postupy řešení pro jednotlivé příklady jsou k vidění v sekci 2.

1.1 Zadání

ZČU v Plzni – Katedra kybernetiky — Stochastické systémy a procesy

Markovské řetězce

Zadání semestrální práce č. 1

Zvolte si grafy prezentující Markovské řetězce, jehož uzly značí stavy a hrany určují pravděpodobnosti přechodu $p_{i,j}$ z uzlu i do uzlu j, tak aby měl 6 uzlů a aby platilo že

Příklad č. 1

Markovský řetězec je homogenní a regulární. Pro tento řetězec určete:

- M – střední počet kroků, které jsou třeba k (prvnímu) dosažení stavu j za předpokladu, že se vycházelo ze stavu i,
- a – finální pravděpodobnosti.

Příklad č. 2

Markovský řetězec je homogenní a absorpční se dvěma absorpčními stavy. Pro tento řetězec určete:

- T – střední počet průchodů stavem j, pokud se vychází ze stavu i, do té doby, než dojde k pohlcení (pokud $j = i$, výchozí stav se započítává za první průchod),
- t – dobu pobytu v tranzientním stavu,
- d – pravděpodobnost, že Markovský řetězec vycházející ze stavu i skončí v daném absorpčním stavu.

2 Postup Řešení

2.1 Příklad 1

Pro tento příklad by zvolen řetězec znázorněn na obrázku 1. Odpovídající matice **P** vypadá takto:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nejdříve je snažší si u tohoto příkladu spočítat finální ppsti, ty si spočítáme pomocí vztahu $\pi = \pi\mathbf{P}$, kde π je vektor, který hledáme. Po úpravě řešíme soustavu rovnic: $(P^T - \mathbf{I})\pi^T = \mathbf{0}$, za podmínky že členy vektoru π musí mít součet jedna. S vyřešením této rovnice nám pomůže matlab a jejím výsledkem pro matici **P** sepsanou výše je:

$$\pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

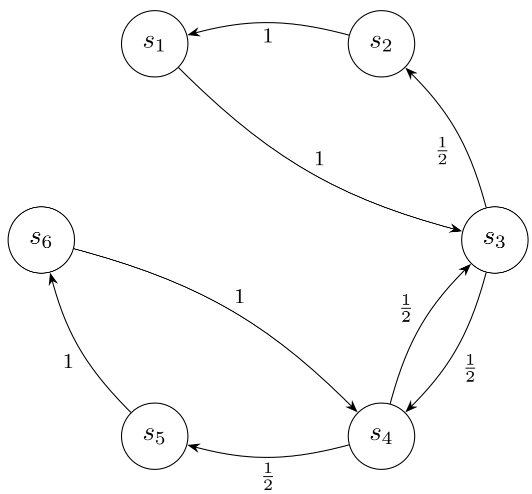
Nyní si spočítáme matici **M**, která určuje střední počet kroků, které jsou třeba k prvnímu dosažení stavu `j` za předpokladu, že se vycházelo ze stavu `i`. Zde na to půjdeme přes simulaci absorpčních stavů. Postupně uděláme z každého stavu absorpční a spočítáme pro něj fundamentální matici $\mathbf{T} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})$. Z té poté spočítáme střední dobu strávenou v tranzientních stavech $t = \mathbf{T1}$ - to jsou všechny ty co nejsou absorpční. Tento vektor poté vložíme do matice **M**, na místo určené vybraným absorpčním stavem.

Je důležité podotknout, že tímto postupem získáme na diagonále nulové prvky, protože tímto výpočtem vždy považujeme prvek za absorpční a nemá smysl pro něj spočítat první dosažení. Tyto diagonální prvky musíme spočítat pomocí následující rovnice: $m_{i,i} = \frac{1}{\pi_i}$, kde $m_{i,i}$ představuje prvek matice **M** na pozici i, i.

Matice **M** nám vyjde následovně:

$$\begin{bmatrix} 8.0 & 7.0 & 1.0 & 5.0 & 11.0 & 12.0 \\ 1.0 & 8.0 & 2.0 & 6.0 & 12.0 & 13.0 \\ 7.0 & 6.0 & 4.0 & 4.0 & 10.0 & 11.0 \\ 11.0 & 10.0 & 4.0 & 4.0 & 6.0 & 7.0 \\ 13.0 & 12.0 & 6.0 & 2.0 & 8.0 & 1.0 \\ 12.0 & 11.0 & 5.0 & 1.0 & 7.0 & 8.0 \end{bmatrix}$$

3 Závěr



Obrázek 1: Regulární Markovský řetězec