Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «ИНФОРМАТИКА И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ»

КАФЕДРА «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ИНФОРМАТИКА И КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»

Отчёт по лабораторной работе № 5 «Приближенное вычисление определенного интеграла» «Приближенное вычисление двойного интеграла»

по курсу

«Численные методы»

Студент группы ИУ9-61Б Бакланова А.Д.

Преподаватель Домрачева А.Б.

Москва, 2020 г.

Цель работы

Целью данной работы является реализация метода средних (центральных) прямоугольников, а также метода ячеек.

Задание

Метод средних прямоугольников:

Найти $\int_a^b f(x)dx$ по формуле прямоугольников с погрешностью $\varepsilon = 0.001$.

Метод ячеек:

Вычислить интеграл методом ячеек с погрешностью $\varepsilon = 0.001$ (начальное значение длины шага $h_0 = \sqrt{\varepsilon}$).

Теоретические сведения:

Метод средних прямоугольников:

Когда первообразная функция $f(x)$ неэлементарна, для вычисления интеграла $I = \int_a^b f(x)dx$ приходится прибегать к одной из формул приближенного численного интегрирования (квадратичным формулам).

Отрезок $[a, b]$ разобьем точками $x_i, i = 0,..,n$, с постоянным шагом $h = \frac{(b-a)}{n}$. Обозначим $y_i = f(x_i), i = 0,..,n$.

Формула прямоугольников: $I = S(h) = h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i + \frac{h}{2})$

$$\Delta S(h) = \frac{|S(h) - S(2h)|}{2^2 - 1}$$

Метод ячеек:

Правильная область $G = \{a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$ может быть преобразована в прямоугольник $\prod(a, b,0,1)$ заменой переменных

$x = u,$

$y = \varphi_1(u) + v[\varphi_2(u) - \varphi(u)]$

Поэтому

$$\iint\limits_G f(x, y)dxdy = \iint\limits_{\prod(a,b,0,1)} f(u, y(u, v))\,|J(u, v)|\,dudv,$$

где

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\delta x}{\delta u} & \frac{\delta x}{\delta v} \\ \frac{\delta y}{\delta u} & \frac{\delta y}{\delta v} \end{vmatrix} = \varphi_2(u) - \varphi_1(u) \text{ — якобиан преобразования.}$$

Метод ячеек легко обобщается на любое количество измерений и позволяет вычислить интеграл по непрямоугольной области.

На прямоульгоную область $\prod(a, b,0,1)$ нанесем равномерную сетку прямыми $x_i = a + ih_x, \quad i = 0,1,..,n, \quad y_j = c + jh_y, \quad j = 0,1,..,m$

Формула метода ячеек имеет вид

$$I = \iint\limits_{\prod(a,b,c,d)} f(x, y)dxdy = S(h_x, h_y) = h_x h_y \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} f(x_i + \frac{h_x}{2}, \quad y_j + \frac{h_y}{2})$$

$$\Delta S(h_x, h_y) = \frac{|S(h_x, h_y) - S(2h_x, 2h_y)|}{3}$$

Метод средних прямоугольников

Дано:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Входные данные:

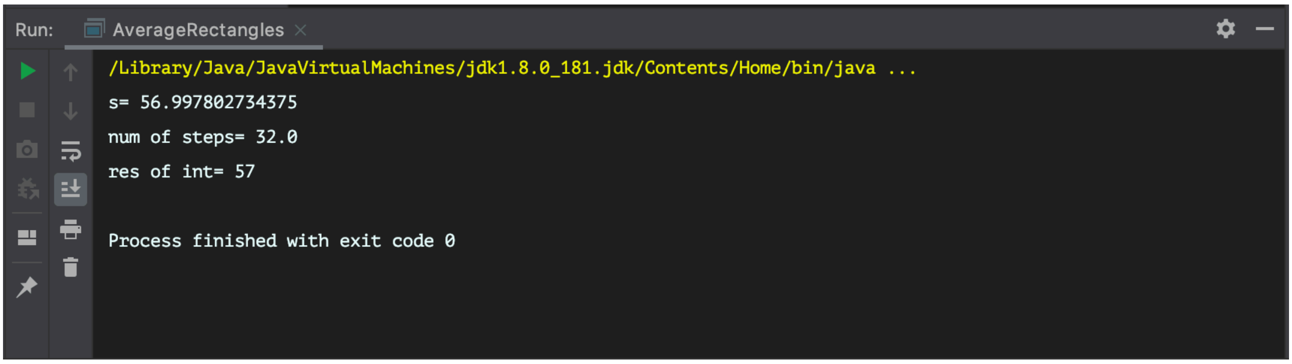
$$\int_0^3 (x\sqrt{x^2} + 16)dx$$

Программная реализация:

AverageRectangles.java

```java
import static java.lang.Math.abs;
import static java.lang.Math.sqrt;

public class AverageRectangles {
    static double a = 0.0;
    static double b = 3.0;
    public static  void main(String[] args) {

        double n = 2;
        double e = 0.001;
        double res = 57;

        while (abs(method(n) - method(2*n))/3 > e) {
            n *= 2;
        }
        System.out.println("s= " + method(n));
        System.out.println("num of steps= "+ n);
        System.out.println("res of int= 57");
    }

    public static double f(double x) {
        return x*sqrt(x*x)+16;
    }

    public static double method(double n) {
        double h = (b-a)/n;
        double sum = 0;
        for (int i=0; i<n; i++) {
            sum += f(a + i*h + h/2);
        }
        return sum*h;
    }

}
```

Результат:



Метод ячеек

Дано:

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

Входные данные:

$$\int_1^2 dx \int_0^{1+\ln x} e^y dy$$

Программная реализация:

Lab7.java

```java
public class Lab7 {
    static double a = 1.0;
    static double b = 2.0;
    static double c = 0.0;
    static double d = 1.0;
    static double e = 0.001;

    public static double f(double x, double y) { return exp(y); }

    public static double y(double u, double v) { return 0+v*(1+log(u)); }

    public static  void main(String[] args) {

        double h = sqrt(e);
        int c = 0;

        while (abs(method(h) - method(2*h))/3 > e) {
            h = h/2;
            c++;
        }
        System.out.println("s= " + method(h));
        System.out.println("num of steps= "+ c);
        System.out.println("res of int= 3.07");

    }

    public static double method(double h) {
        double s = 0;
        double xi = a;
        double v;
        while (xi < b) {
            v = c;
            while (v < d) {
                s += f(xi+h/2, y(xi,v) + h/2) * (1 + log(xi) + h/2);
                v+=h;
            }
            xi += h;
        }
        return h*h*s;
    }

}
```

Результат:

Run: Lab7

```
/Library/Java/JavaVirtualMachines/jdk1.8.0_181.jdk/Contents/Home/bin/java ...
s= 3.076286477003278
num of steps= 4
res of int= 3.07

Process finished with exit code 0
```

Вывод:

Итого, в результате лабораторной работы были реализованы два метода — метод средних прямоугольников и метод ячеек. Метод средних прямоугольников имеет большую точность, чем метод ячеек. При увеличении сложности задачи происходит накопление ошибок. Однако у метода ячеек шагов алгоритма гораздо меньше, чем у метода средних прямоугольников.