Федеральное государственное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Лабораторная работа № 6
«Работа с системой компьютерной вёрстки $\TeX$»
Вариант 65

Выполнил: Зыков Андрей Алексеевич
Группа: P3106
Проверил: Соколов И.Д.,
Преподаватель практики факультета ПИиКТ

Санкт-Петербург, 2024

средним геометриеским имеем
$A \geq \frac{a+b+\frac{b^2}{4a}}{b-a} = \frac{4a^2+4ab+b^2}{4a(b-a)} = \frac{9a^2+6ax+x^2}{4ax} =$
$\frac{3}{2} + \frac{9a^2+x^2}{4ax} \geq \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{9a^2 \cdot x^2}}{2ax} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3,$
причем равенство $A = 3$ достиаетс, если $c = \frac{b^2}{4a}$ и $x = 3a$, т.е. при $b = c = 4a$.
Следовательно, данное выражение принимает свое наименьшее значение, равное трем, когда
$f(x) = ax^2 + 4ax + 4a = a(x+2)^2$, где a - произвольное положительное число.
Замечание. Пусть $g(t) = \frac{(t+2)^2}{4(t-1)}$. Нетрудно проверить, что $g(\frac{b}{a}) = \frac{4a^2+4ab+b^2}{4a(b-a)}$. Следовательно, наименьшее значение А можно найти, исследовав функцию $g(t)$ на экстремум при $t > 1$

6. Обозначим $\vec{AD} = \vec{a}, \vec{AB} = \vec{b}, \vec{DE} = \vec{c}$ и $\vec{BF} = \vec{d}$ (рис.14).

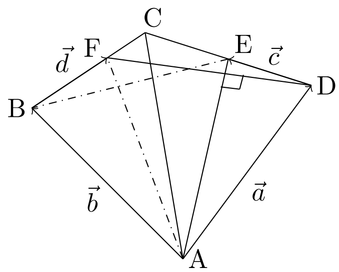

Рис.14

Тогда $\vec{DF} = \vec{b} + \vec{d} - \vec{a}$, $\vec{AE} = \vec{a} + \vec{c}$, $\vec{AF} = \vec{b} + \vec{d}$, $\vec{BE} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$. По условию $DF \perp AE$ и $AD \perp DE$, поэтому
$(\vec{b} + \vec{d} - \vec{a}) \cdot (\vec{a} + \vec{c}) = 0$, $(\vec{b} + \vec{d}) \cdot (\vec{a} + \vec{c}) - |\vec{a}|^2 = 0$.
Так как $AB \perp BF$, то
$\vec{AF} \cdot \vec{BE} = (\vec{b} + \vec{d}) \cdot (\vec{a} + \vec{c} - \vec{b}) = (\vec{b} + \vec{d}) \cdot (\vec{a} + \vec{c}) - |\vec{b}|^2$.
Отсюда в силу условия $|\vec{b}| = \vec{a}$ следует, что $\vec{AF} \cdot \vec{BE} = 0$, т.е. $AF \perp BE$.

7. Выберем в ожерелье какой-нибудь кубик и отметим его номером 1. Затем занумеруем остальные кубики по порядку, двигаясь вдоль нити в одном из двух возможных направлений. В кубике с номером n обозначим через n_1 ту вершину, которая примыкает к предыдущему кубику, а через n_2 - вершину, а через n_2 - вершину, примыкающую к следующему кубику(рис.15). Так как ожерелье замкнутое, то первый кубик следует за N^3-м.

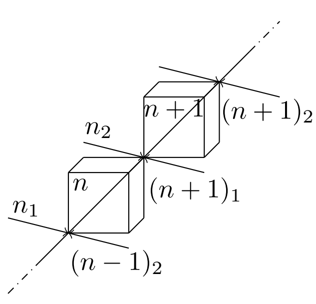

Рис.15

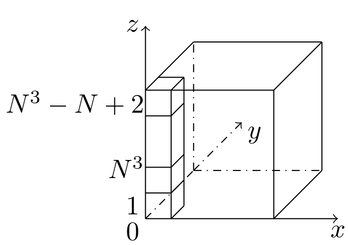

Рис.16

а) Докажем, что при четном N требуемая упаковка возможна. Выберем систему координат, направив оси вдоль ребер коробки и взяв в качестве единицы длины ребро кубика (рис.16).

Составим столбец высотой N из кубиков с номерами 1, N^3, $N^3 - 1$, ..., $N^3 - N^2 + 2$, поместив вершину 1_1 в точку с координатами $(1, 0, 1)$, а вершину 1_2 в точку с координатами $0, 1, 0$.
Заметим, что последняя вершина этого столбца, т.е. $(N^3 - N^2 + 2)_1$, имеет координаты $(0, 1, N)$. Оставшиеся $N^3 - N$ кубиков будем укладывать в виде «змеек».
1) Первый (нижний) слой - рис.17. В клетках проставлены номера кубиков. Укладывать слой начинаем с кубика 2.

$N^2 \rightarrow$	$N+1 \rightarrow$	$\rightarrow$	$2N-1$
$\uparrow$	$3N-2$	$\leftarrow$	$\downarrow$ $2N$
	$\downarrow$ $3N-1$	$\rightarrow \cdot\cdot$	
	$\cdot\cdot$	$\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$	$\cdot\cdot$
2	$\cdot\cdot$	$\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$	$3N^2-N+1$ $\downarrow$
$\uparrow$ 1	N^2	$\leftarrow$	N^2-N+2

Рис.17

Вершина $(N^2)_2$ имеет координаты $(1, 0, 1)$, т.е. $(N^2)_2 = 1_1$.
2) Второй слой - рис.18. Здесь вершины $(2N^2 - 1)_2$ и $(N^3)_1$ имеют координаты $(0, 1, 2)$, т.е. $(2N^2 - 1)_2 = (N^3)_1$

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	N^2+2N-1	N^2+2N-2
$\uparrow$	$\vdots$	$\vdots$	$\downarrow$	$\uparrow$
$2N^2-1$	$\vdots$	$\vdots$ $\leftarrow$	N^2+3N-3	N^2+N $\uparrow$
N^2	N^2+1	$\longrightarrow$		N^2+N-1

Рис.18

3) В третьем слое расположение кубиков с номерами $2N^2, \ldots, 3N^2 - 2$ повторяет расположение кубиков с номерами $2, \ldots, N^2$ в первом слое, и т.д.
Заметим, что в каждом слое координаты вершины «1» кубика из столбца совпадают с координатами вершины «2» последнего кубика из змейки. Следовательно, в N-м слое координаты вершин $(N^3 - N + 2)_1$ и $(N^3 - N + 1)_2$ совпадают. Что и требовалось доказать.
б) Если ожерелье упаковано в коробку, то вершины «1» и «2» любого кубика имеют различные по четности абсциссы. Значит, сумма этих двух координат для каждого кубика - нечетное число. Следовательно, в случае $N = 2k + 1$ сумма всех абсцисс отмеченных вершин - также нечетное число. Но каждая абсцисса повторяется дважды: для n_2 и для $(n+1)_1$. Значит, указанная сумма должна быть четной. Таким образом, при нечетном N упаковать ожерелье в коробку невозможно.