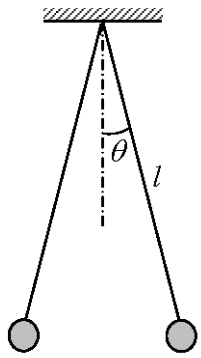
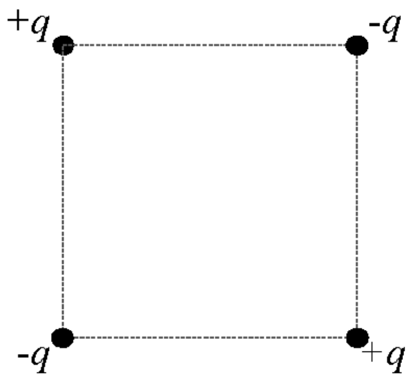
# 基礎電磁気学演習問題 1

## クーロンの法則

(1) 図のように質量 $m$, 電荷 $q$ をもつ 2 個の小球を、それぞれ長さ $l$ の電気を通さない糸で同一点から静かにつるすと、糸の張力、重力、クーロン力が釣り合う点で静止する。鉛直に対する糸の傾き $\theta$ を求めよ。ただし $\theta$ は小さいとして $\sin\theta \simeq \theta$, $\cos\theta \simeq 1$ としてよい。




(2) 図のように正方形の 4 つの頂点に電荷が置かれている ($q > 0$)。それぞれの電荷が受ける力 $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y)$ を求めよ。正方形の各辺の長さは $a$ とする。




(3) 水素原子は陽子と電子それぞれ 1 個ずつからなる。陽子と電子の距離を $5.3 \times 10^{-11}$ m とする。電気素量 $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C, 真空の誘電率 $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ $\mathrm{C^2/Nm^2}$ とする。

(a) 陽子と電子の間に働くクーロン力の大きさを求め、適切な単位を付けて答えよ。

(b) 陽子が電子の位置に作る電場の大きさを求め、適切な単位を付けて答えよ。

# 基礎電磁気学演習問題 2

## ベクトルの積, 電場

(1) 次の問に答えよ。

(a) 三つのベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ について

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}$$

が成り立つことを示せ。またこの量が何を表すか答えよ。

(b) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$

(c) 二つの二次元ベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の内積 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_xB_x + A_yB_y$ はスカラー量である。この量が座標の回転に対して不変であることを示せ。

(2) 位置 $\boldsymbol{r}_1 = (0,0,a)$ に電荷 $q$, 位置 $\boldsymbol{r}_2 = (0,0,-a)$ に電荷 $-q$ を置いた。位置 $(a,0,a)$ における電場 $\boldsymbol{E}$ を求めよ。

(3) 位置 $(a,0,0)$, $(0,a,0)$, $(0,0,a)$ にそれぞれ電荷 $q$ を置いた。位置 $(-a,-a,-a)$ における電場 $\boldsymbol{E}$ を求めよ。

(4) 問 (3) において $a = 1$ m, $q = 1\mu\mathrm{C} = 10^{-6}$ C とする。(3) で求めた電場 $\boldsymbol{E}$ の値を単位を付けて書け。

# 基礎電磁気学演習問題 3

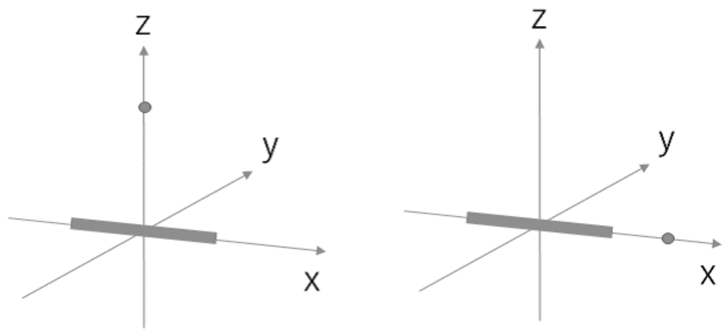
## 電場

(1) 長さ $L$ の細い棒が $x$ 軸上の $x=-L/2$ から $x=L/2$ の区間に置かれ、単位長さ当たり $\lambda$ の密度で電荷が分布している。

(a) $\boldsymbol{r}=(0,0,a)$ での電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を求めよ。

(b) $\boldsymbol{r}=(a,0,0)$ での電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を求めよ。

(c) $\boldsymbol{r}=(0,0,a)$ に電荷 $q$ を固定したとき、棒が受ける力を求めよ。また、$\boldsymbol{r}=(a,0,0)$ に電荷 $q$ を固定したとき $(a>L/2)$、棒が受ける力を求めよ。

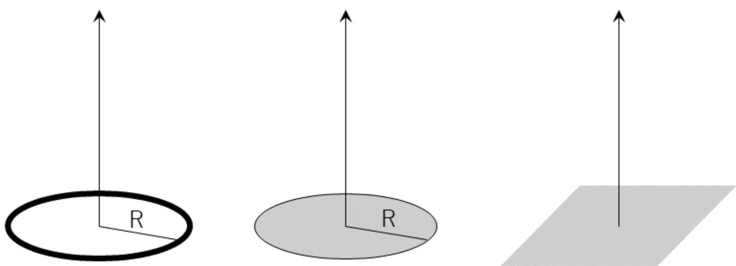



(2) 以下の電場を求めよ。

(a) 半径 $R$ の輪の上に線密度 $\lambda$ で電荷が一様に分布しているとき、輪の中心を通り輪の面に垂直な $z$ 軸上の電場を求めよ。

(b) 半径 $R$ の円板上に電荷が面密度 $\sigma$ で一様に分布しているとき、円板の中心を通り円盤に垂直な $z$ 軸上の電場を求めよ。

(c) 無限に広い平面上に電荷が一様に分布しているとき、空間の任意の点に生じる電場を求めよ。



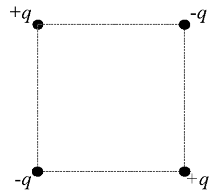
# 基礎電磁気学演習問題 4

## 電気力線, ガウスの法則

(1) 以下の場合について、電場分布の概略を電気力線で示せ。ただし $q > 0$ とする。

   (a) 3 個の点電荷 $-q,\ 2q,\ -q$ が直線上に等間隔におかれているとき。

   (b) 図のように正方形の 4 つの頂点に電荷が置かれているとき。




(2) 無限に長い直線上に線密度 $\lambda$ で電荷が一様に分布している。電場の大きさ $E(r)$ をガウスの法則により求めよ。別の方法で計算した結果（教科書 p35）と一致することを確かめよ。

(3) 半径 $R$ の無限に長い円柱内部に、電荷が密度 $\rho > 0$ で一様に分布している。円柱の中心軸からの距離 $r$ における電場の大きさを $E(r)$ とする。

   (a) 円柱の内部 $(r \leq R)$ における $E(r)$ をガウスの法則を用いて求めよ。どのような閉曲面を用いたか図示すること。

   (b) 円柱の外部 $(r > R)$ における $E(r)$ をガウスの法則を用いて求めよ。どのような閉曲面を用いたか図示すること。

   (c) グラフ

(4) 無限に広い平面上に電荷が面密度 $\sigma$ で一様に分布しているときの電場をガウスの法則により求めよ。別の方法で計算した結果（前回演習 2-c）と一致することを確かめよ。

# 基礎電磁気学演習問題 5

## ガウスの法則, 保存力

(1) 半径 $R$ の球内に電荷 $Q$ が一様に分布している。

  (a) 電荷密度 $\rho$ を求めよ。

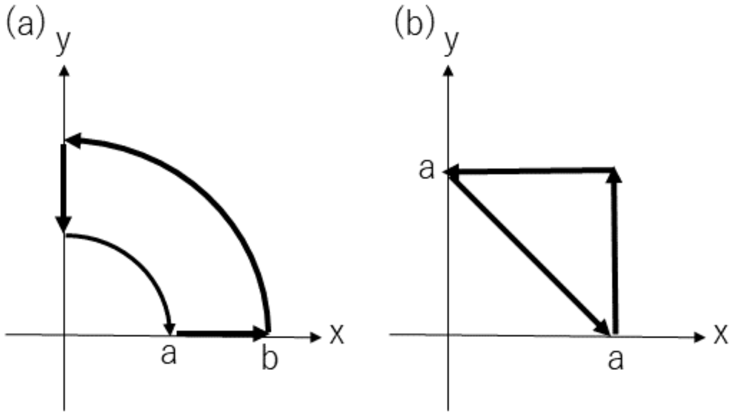
  (b) ガウスの法則を用いて、電場の大きさ $E(r)$ を求めよ。

  (c) 横軸を $r$, 縦軸を $E(r)$ としてグラフを描け。

(2) 半径 $R_1$, $R_2$ の二つの球殻が原点を中心として置かれている ($R_1 < R_2$)。両球殻にはそれぞれ面密度 $\sigma_1$, $\sigma_2$ で電荷が分布している。ガウスの法則を用いて、電場の大きさ $E(r)$ を求めよ。

(3) 半径 $R$ の球内に電荷が分布しており、電荷密度は $\rho(r)$ は中心からの距離 $r$ のみに依存する。電場の大きさが球内で一定 $E(r) = E_0$ となるような $\rho(r)$ の形を求めよ。

(4) 原点に点電荷 $q$ が置かれている。以下の閉じた周回経路 $C$ に対して、積分形の渦なしの法則 $\int_C \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{t} ds = 0$ が成り立つことを示せ。



# 基礎電磁気学演習問題 6

## 静電ポテンシャル

(1) 半径 $R$ の球内に電荷が電荷密度 $\rho$ で一様に分布している。

  (a) 球の内外における電場の大きさ $E(r)$ を求めよ。

  (b) 球の内外における静電ポテンシャル $\phi(r)$ を求めよ。ただし無限遠を基準とする $(\phi(\infty) = 0)$.

  (c) 横軸を $r$, 縦軸を $\phi(r)$ としてグラフを描け。

(2) 半径 $R$ の無限に長い円柱内部に、電荷が密度 $\rho > 0$ で一様に分布している。円柱の中心軸からの距離 $r$ における電場の大きさを $E(r)$ とする。

  (a) 円柱の内外における電場の大きさ $E(r)$ を求めよ。

  (b) 円柱の内外における静電ポテンシャル $\phi(r)$ を求めよ。円柱外の位置 $r = a > R$ を静電ポテンシャルの基準 $\phi(a) = 0$ とする。

(3) 位置 $\boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ に点電荷 $q_1$ がある。空間中の任意の位置を $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ とする。

  (a) $q_1$ によって生じる電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を位置ベクトル $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}_1$ を用いて表せ。

  (b) $q_1$ によって生じる静電ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r})$ を位置ベクトル $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}_1$ を用いて表せ。

  (c) 点電荷の位置 $\boldsymbol{r}_1$ を除く、空間中の任意の位置で、

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r}) = \left(-\frac{\partial}{\partial x}\phi(\boldsymbol{r}), -\frac{\partial}{\partial y}\phi(\boldsymbol{r}), -\frac{\partial}{\partial z}\phi(\boldsymbol{r})\right)$$

  が成立することを確かめよ。

# 基礎電磁気学演習問題 7

## 静電エネルギー

(1) 原点に電荷 $q$, $x$ 軸上 $x = \pm a$ にそれぞれ電荷 $-q$ が置かれているときの静電エネルギーを求めよ。

(2) 半径 $R$ の球面上に電荷 $Q$ が一様に分布しているときの静電エネルギーを、電荷がゼロの状態から微小電荷を無限遠から少しずつ運んで $Q$ にするのに要する仕事として、以下の順に求めよ。

(a) 球面上の電荷が $Q'$ のときの静電ポテンシャルを求めよ $(0 < Q' < Q)$。

(b) その際、微小電荷 $\Delta Q'$ を無限遠から球面まで運ぶのに必要な仕事 $\Delta W$ を求めよ。

(c) 球面上の電荷を 0 から $Q$ まで分布させるのに必要な総仕事量 $W$ （静電エネルギー）を求めよ。

(d) 半径 $R$ の球面上に電荷 $Q$ が一様に分布しているとき、ガウスの法則を用いると、電場の大きさは球外で $E(r) = Q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$, 球内で 0 となる。$\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ を全空間にわたって積分したものが、前問の $W$ に一致することを確かめよ。

(3) 1V の電位差のある 2 地点間の電子の位置エネルギーの差を 1 電子ボルト (1eV) という。1eV は何 J に当るか。また 1 Å$(= 10^{-10}\mathrm{m})$ 隔てて置かれた陽子と電子を無限遠まで引き離すために必要なエネルギーは何 eV か。

# 基礎電磁気学演習問題 8

## 微分形のガウスの法則

(1) 原点に置かれた電荷 $q$ の周りの電場が、原点以外で微分形のガウスの法則を満たすことを確かめよ。

(2) 半径 $R$ の無限に長い円筒の内部に電荷が密度 $\rho$ で一様に分布しているとき、円筒内外の電場が微分形のガウスの法則を満たすことを確かめよ。

(3) 以下の問に答えよ。

(a) 静電ポテンシャルを $\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{a}{2\varepsilon_0}|z|$ とする（$a$ は定数)。$z \neq 0$ での電場と電荷密度を求めよ。

(b) 静電ポテンシャルを $\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon 0}\log(x^2+y^2)$ とする（$\sigma$ は定数）。$x^2+y^2 \neq 0$ での電場と電荷密度を求めよ。

(c) 電場が $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{C\boldsymbol{r}}{r^3}$ である（$C$ は定数)。$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \neq 0$ での電荷密度を求めよ。

# 基礎電磁気学演習問題 9

## 微分形の渦なしの法則

(1) つぎにあげるベクトル場のうち、静電場と見なしうるものはどれか。また、静電場と見なしうるものについては、電荷密度分布および静電ポテンシャルを求めよ。$A$ は定数とする。

(a) $E_x = A(x^2 - y^2)$, $E_y = -2Axy$, $E_z = Az^2$

(b) $E_x = 2Axz$, $E_y = 2Ayz$, $E_z = A(x^2 + y^2 - 2z^2)$

(c) $E_x = A(y^2 + z^2)$, $E_y = A(z^2 + x^2)$, $E_z = A(x^2 + y^2)$

(d) $E_x = 2Axy$, $E_y = A(x^2 - y^2)$, $E_z = 0$

(2) 以下の問に答えよ。

(a) ポアソン方程式の一般形を書け。静電ポテンシャルを $\phi(\boldsymbol{r})$, 電荷密度分布を $\rho(\boldsymbol{r})$ とする。

(b) 静電ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r}) = Ax^2y - \frac{1}{3}Ay^3 + 1$ が与えられたとき、電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ の $x$, $y$, $z$ 各成分を求めよ。

(c) 前問の $\phi(\boldsymbol{r})$ がラプラスの方程式（電荷がない場合のポアソン方程式）を満たすことを確かめよ。

# 基礎電磁気学演習問題 10

## ポアソン方程式, 導体のまわりの静電場

(1) 半径 $R$ の球の内部に、電荷が電荷密度 $\rho(r) = kr^2$ で分布している（$k$ は正の定数、$r$ は球の中心からの距離）。

(a) ポアソン（ラプラス）方程式を解いて、球の内外の静電ポテンシャルを求めよ。ただし、静電ポテンシャルは無限遠でゼロとする。ここで、一般に球対称な関数 $f(r)$ について、ラプラシアンは

$$\nabla^2 f(r) = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}[rf(r)]$$

となることを用いてよい。

(b) 得られた静電ポテンシャルから電場を求めよ。

(c) ガウスの法則を用いて球の内外の電場を求め、前問で得られた電場と一致することを確かめよ。

(d) 横軸を $r$, 縦軸を静電ポテンシャルとしてグラフを描け。

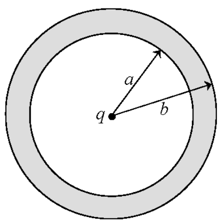
(2) 図のように、内径 $a$, 外径 $b$ の導体球殻がある。その中心に点電荷 $q > 0$ を置くと、導体球殻には電荷が誘起される。中心からの距離を $r$ とする。

(a) 球殻内面、外面の電荷面密度 $\sigma_a$, $\sigma_b$ を求めよ。

(b) 球殻の内側 $(r < a)$, 内部 $(a < r < b)$, 外側 $(b < r)$ の電場の大きさ $E(r)$ をそれぞれ求めよ。

(c) 球殻の静電ポテンシャルを求めよ。無限遠を基準とする。

(d) 球殻を接地したときの、球殻内面、外面の電荷面密度 $\sigma_a$, $\sigma_b$ を求めよ。



# 基礎電磁気学演習問題 11

## 鏡像法

(1) $z < 0$ を導体内部とし, $z = 0$ 面が導体表面とする。

(a) 位置 $\boldsymbol{r} = (0, 0, a)$ に点電荷 $q$ が置かれているとき、$z > 0$ の空間中の電場を求めよ ($a > 0$)。

(b) 導体表面に誘起される電荷密度を求めよ。

(c) 前問で求めた電荷密度を導体表面上で積分し、誘起された電荷の総量を求めよ。

(d) 点電荷に働く力を求めよ。また、点電荷を $\boldsymbol{r} = (0, 0, a)$ から無限遠に引き離すのに必要なエネルギーを求めよ。

(2) 図のように、無限に広い平らな導体面から高さ $a$ の位置に、電荷 $q$ の二つの点電荷が距離 $2a$ を隔てて配置されている。点 A, O, P, B を図のように定める。

(a) 点 P における電場の大きさと向きを求めよ。

(b) 点 P における電荷面密度を求めよ。