

UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES
Faculté des Sciences
Département d'Informatique

Projet Informatique Fondamentale

ROSETTE Arnaud
VERANNEMAN Philippe

Année académique 2013 - 2014

Table des matières

1	Question 1	2
1.1	Définition de variables :	2
1.2	Nouvelles contraintes :	2
1.2.1	Contrainte : Définition de $P_{a,c}$ par rapport a $X_{a,b,c}$	2
1.2.2	Contrainte : Un musicien est dans au moins un groupe (pour un instrument qu'il sait jouer)	2
1.2.3	Contrainte : Au plus un même musicien dans un même groupe	2
1.2.4	Contrainte : Un musicien est dans au plus un groupe	2
1.2.5	Contrainte : Au plus un musicien pour le même instrument au sein d'un même groupe	3
1.2.6	Contrainte : Un groupe doit être soit complet soit vide	3
2	Question 2	3
2.1	Contraintes reprises de la question précédente :	3
2.1.1	Contrainte : Définition de $P_{a,c}$ par rapport a $X_{a,b,c}$	3
2.1.2	Contrainte : Un musicien est dans au moins un groupe (pour un instrument qu'il sait jouer)	4
2.1.3	Contrainte : Au plus un même musicien dans un même groupe	4
2.1.4	Contrainte : Au plus un musicien pour le même instrument au sein d'un même groupe	4
2.1.5	Contrainte : Un groupe doit être soit complet soit vide	4
2.2	Nouvelles contraintes :	4
2.2.1	Contrainte : Un musicien est dans au plus n groupes (Max_a)	4
2.2.2	Contrainte : Un musicien ne peut pas apparaître dans un groupe pour un instrument qu'il ne sait pas jouer	5
2.3	Le nombre de clauses que l'encodage de la contrainte 'au plus k' génère	5
3	Question 3	5
3.1	Définition de variables :	5
3.2	Contraintes reprises de la question précédente :	5
3.2.1	Contrainte : Définition de $P_{a,c}$ par rapport a $X_{a,b,c}$	5
3.2.2	Contrainte : Au plus un même musicien dans un même groupe	5
3.2.3	Contrainte : Au plus un musicien pour le même instrument au sein d'un même groupe	6
3.2.4	Contrainte : Un groupe doit être soit complet soit vide	6
3.2.5	Contrainte : Un musicien est dans au plus n groupes (Max_a)	6
3.2.6	Contrainte : Un musicien ne peut pas apparaître dans un groupe pour un instrument qu'il ne sait pas jouer	6
3.3	Nouvelles contraintes :	6
3.3.1	Contrainte : Un musicien est dans au moins un groupe (pour un instrument qu'il sait jouer) ou pour chanter	6
3.3.2	Contrainte : Au moins un chanteur par groupe	7
3.3.3	Contrainte : Seuls les musiciens qui maîtrisent le chant peuvent chanter au sein d'un groupe	7
3.4	Impact de la modification sur la présentation du problème	7

1 Question 1

1.1 Définition de variables :

$X_{a,b,c}$ = vrai ssi musicien a joue de l'instrument b dans le groupe c.

$P_{a,c}$ = vrai ssi le musicien a joue dans le groupe c.

A_c = vrai ssi le groupe c est actif (un groupe est actif lorsqu'il y a au moins un musicien dans le groupe)

$instrumentsPlayed(a)$ = l'ensemble des instruments que a sait jouer

1.2 Nouvelles contraintes :

1.2.1 Contrainte : Définition de $P_{a,c}$ par rapport a $X_{a,b,c}$

Pour tout musicien $a \in M$, pour tout un groupe $c \in G$,
(il existe un instrument $b \in I$ tel que $X_{a,b,c}$) équivalent à $P_{a,c}$

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{a=1}^m \bigwedge_{c=1}^k [(\bigvee_{b=1}^n X_{a,b,c}) \leftrightarrow P_{a,c}] \\ & \equiv \bigwedge_{a=1}^m \bigwedge_{c=1}^k [((\bigvee_{b=1}^n X_{a,b,c}) \rightarrow P_{a,c}) \wedge (P_{a,c} \rightarrow (\bigvee_{b=1}^n X_{a,b,c}))] \\ & \equiv \bigwedge_{a=1}^m \bigwedge_{c=1}^k [(\neg (\bigvee_{b=1}^n X_{a,b,c}) \vee P_{a,c}) \wedge (\neg P_{a,c} \vee (\bigvee_{b=1}^n X_{a,b,c}))] \\ & \equiv \bigwedge_{a=1}^m \bigwedge_{c=1}^k [((\bigwedge_{b=1}^n \neg X_{a,b,c}) \vee P_{a,c}) \wedge (\neg P_{a,c} \vee (\bigvee_{b=1}^n X_{a,b,c}))] \\ & \equiv \bigwedge_{a=1}^m \bigwedge_{c=1}^k [\bigwedge_{b=1}^n (\neg X_{a,b,c} \vee P_{a,c}) \wedge (\neg P_{a,c} \vee (\bigvee_{b=1}^n X_{a,b,c}))] \end{aligned}$$

1.2.2 Contrainte : Un musicien est dans au moins un groupe (pour un instrument qu'il sait jouer)

Pour tout musicien $a \in M$, il existe un groupe $c \in G$, il existe un instrument $b \in instrumentsPlayed(a)$
tel que $X_{a,b,c}$

$$\bigwedge_{a=1}^m (\bigvee_{c=1}^k \bigvee_{b \in instrumentsPlayed(a)} X_{a,b,c})$$

1.2.3 Contrainte : Au plus un même musicien dans un même groupe

Pour tout groupe $c \in G$, pour tout musicien $a \in M$, il n'existe pas deux instruments différents b,b' $\in I$ tel que $b < b'$ et $X_{a,b,c}$ et $X_{a,b',c}$.

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{c=1}^k \bigwedge_{a=1}^m \neg [\bigvee_{b,b' \in (1..n); b < b'} (X_{a,b,c} \wedge X_{a,b',c})] \\ & \equiv \bigwedge_{c=1}^k \bigwedge_{a=1}^m \bigwedge_{b,b' \in (1..n); b < b'} (\neg X_{a,b,c} \vee \neg X_{a,b',c}) \end{aligned}$$

1.2.4 Contrainte : Un musicien est dans au plus un groupe

Pour tout musicien $a \in M$, il n'existe pas deux groupes différents $c, c' \in G$, tel que $c < c'$, $P_{a,c}$ et $P_{a,c'}$.

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{a=1}^m \neg [\bigvee_{c,c' \in (1..k); c < c'} (P_{a,c} \wedge P_{a,c'})] \\ & \equiv \bigwedge_{a=1}^m \bigwedge_{c,c' \in (1..k); c < c'} (\neg P_{a,c} \vee \neg P_{a,c'}) \end{aligned}$$

1.2.5 Contrainte : Au plus un musicien pour le même instrument au sein d'un même groupe

Pour tout groupe $c \in G$, pour tout instrument $b \in I$ il n'existe pas $a, a' \in M$ tel que $a < a'$ et $X_{a,b,c}$ et $X_{a',b,c}$.

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{c=1}^k \bigwedge_{b=1}^n \neg \left[\bigvee_{a, a' \in (1..m); a < a'} (X_{a,b,c} \wedge X_{a',b,c}) \right] \\ & \equiv \bigwedge_{c=1}^k \bigwedge_{b=1}^n \bigwedge_{a, a' \in (1..m); a < a'} (\neg X_{a,b,c} \vee \neg X_{a',b,c}) \end{aligned}$$

1.2.6 Contrainte : Un groupe doit être soit complet soit vide

1. Si un musicien joue d'un instrument dans un groupe, alors ce groupe est actif.

Pour tout groupe $c \in G$, pour tout musicien $a \in M$ pour tout instrument $b \in I$ si $X_{a,b,c}$ alors A_c .

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{c=1}^k \bigwedge_{a=1}^m \bigwedge_{b=1}^n (X_{a,b,c} \rightarrow A_c) \\ & \equiv \bigwedge_{c=1}^k \bigwedge_{a=1}^m \bigwedge_{b=1}^n (\neg X_{a,b,c} \vee A_c) \end{aligned}$$

2. Si un groupe est actif, alors ce groupe est complet.

Pour tout groupe $c \in G$, si A_c alors pour tout instrument $b \in I$ il existe un musicien $a \in M$ tel que $X_{a,b,c}$.

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{c=1}^k [A_c \rightarrow (\bigwedge_{b=1}^n \bigvee_{a=1}^m X_{a,b,c})] \\ & \equiv \bigwedge_{c=1}^k [\neg A_c \vee (\bigwedge_{b=1}^n \bigvee_{a=1}^m X_{a,b,c})] \\ & \equiv \bigwedge_{c=1}^k \bigwedge_{b=1}^n [\neg A_c \vee (\bigvee_{a=1}^m X_{a,b,c})] \end{aligned}$$

2 Question 2

Les 5 premières contraintes de la Question 2 sont les mêmes que celles de la Question 1 à part qu'un musicien peut maintenant appartenir à plusieurs groupes (selon son 'Max') donc la contrainte 'Un musicien est dans au plus un groupe' doit être modifiée en 'Un musicien est dans au plus n groupes'.

De plus on rajoute une contrainte qui précise que un musicien ne peut pas être dans un groupe pour un instrument qu'il ne sait pas jouer.

2.1 Contraintes reprises de la question précédente :

2.1.1 Contrainte : Définition de $P_{a,c}$ par rapport à $X_{a,b,c}$

Pour tout musicien $a \in M$, pour tout un groupe $c \in G$,
(il existe un instrument $b \in I$ tel que $X_{a,b,c}$) équivalent à $P_{a,c}$

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{a=1}^m \bigwedge_{c=1}^k [(\bigvee_{b=1}^n X_{a,b,c}) \leftrightarrow P_{a,c}] \\ & \equiv \bigwedge_{a=1}^m \bigwedge_{c=1}^k [((\bigvee_{b=1}^n X_{a,b,c}) \rightarrow P_{a,c}) \wedge (P_{a,c} \rightarrow (\bigvee_{b=1}^n X_{a,b,c}))] \\ & \equiv \bigwedge_{a=1}^m \bigwedge_{c=1}^k [(\neg(\bigvee_{b=1}^n X_{a,b,c}) \vee P_{a,c}) \wedge (\neg P_{a,c} \vee (\bigvee_{b=1}^n X_{a,b,c}))] \\ & \equiv \bigwedge_{a=1}^m \bigwedge_{c=1}^k [((\bigwedge_{b=1}^n \neg X_{a,b,c}) \vee P_{a,c}) \wedge (\neg P_{a,c} \vee (\bigvee_{b=1}^n X_{a,b,c}))] \\ & \equiv \bigwedge_{a=1}^m \bigwedge_{c=1}^k [\bigwedge_{b=1}^n (\neg X_{a,b,c} \vee P_{a,c}) \wedge (\neg P_{a,c} \vee (\bigvee_{b=1}^n X_{a,b,c}))] \end{aligned}$$

2.1.2 Contrainte : Un musicien est dans au moins un groupe (pour un instrument qu'il sait jouer)

Pour tout musicien $a \in M$, il existe un groupe $c \in G$, il existe un instrument $b \in \text{instrumentsPlayed}(a)$ tel que $X_{a,b,c}$

$$\bigwedge_{a=1}^m \left(\bigvee_{c=1}^k \bigvee_{b \in \text{instrumentsPlayed}(a)} X_{a,b,c} \right)$$

2.1.3 Contrainte : Au plus un même musicien dans un même groupe

Pour tout groupe $c \in G$, pour tout musicien $a \in M$, il n'existe pas deux instruments différents $b, b' \in I$ tel que $b < b'$ et $X_{a,b,c}$ et $X_{a,b',c}$.

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{c=1}^k \bigwedge_{a=1}^m \neg \left[\bigvee_{b, b' \in (1..n); b < b'} (X_{a,b,c} \wedge X_{a,b',c}) \right] \\ & \equiv \bigwedge_{c=1}^k \bigwedge_{a=1}^m \bigwedge_{b, b' \in (1..n); b < b'} (\neg X_{a,b,c} \vee \neg X_{a,b',c}) \end{aligned}$$

2.1.4 Contrainte : Au plus un musicien pour le même instrument au sein d'un même groupe

Pour tout groupe $c \in G$, pour tout instrument $b \in I$ il n'existe pas $a, a' \in M$ tel que $a < a'$ et $X_{a,b,c}$ et $X_{a',b,c}$.

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{c=1}^k \bigwedge_{b=1}^n \neg \left[\bigvee_{a, a' \in (1..m); a < a'} (X_{a,b,c} \wedge X_{a',b,c}) \right] \\ & \equiv \bigwedge_{c=1}^k \bigwedge_{b=1}^n \bigwedge_{a, a' \in (1..m); a < a'} (\neg X_{a,b,c} \vee \neg X_{a',b,c}) \end{aligned}$$

2.1.5 Contrainte : Un groupe doit être soit complet soit vide

1. Si un musicien joue d'un instrument dans un groupe, alors ce groupe est actif.

Pour tout groupe $c \in G$, pour tout musicien $a \in M$ pour tout instrument $b \in I$ si $X_{a,b,c}$ alors A_c .

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{c=1}^k \bigwedge_{a=1}^m \bigwedge_{b=1}^n (X_{a,b,c} \rightarrow A_c) \\ & \equiv \bigwedge_{c=1}^k \bigwedge_{a=1}^m \bigwedge_{b=1}^n (\neg X_{a,b,c} \vee A_c) \end{aligned}$$

2. Si un groupe est actif, alors ce groupe est complet.

Pour tout groupe $c \in G$, si A_c alors pour tout instrument $b \in I$ il existe un musicien $a \in M$ tel que $X_{a,b,c}$.

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{c=1}^k [A_c \rightarrow (\bigwedge_{b=1}^n \bigvee_{a=1}^m X_{a,b,c})] \\ & \equiv \bigwedge_{c=1}^k [\neg A_c \vee (\bigwedge_{b=1}^n \bigvee_{a=1}^m X_{a,b,c})] \\ & \equiv \bigwedge_{c=1}^k \bigwedge_{b=1}^n [\neg A_c \vee (\bigvee_{a=1}^m X_{a,b,c})] \end{aligned}$$

2.2 Nouvelles contraintes :

2.2.1 Contrainte : Un musicien est dans au plus n groupes (Max_a)

Pour tout musicien $a \in M$, il n'existe pas des groupes $(c^1, c^2, \dots, c^{n+1}) \in G$ tel que $c^1 < c^2 < \dots < c^{n+1}$ tel que P_{a,c^1} et P_{a,c^2} et ... et $P_{a,c^{n+1}}$

$$\bigwedge_{a=1}^m \neg \left(\bigvee_{c^1, c^2, \dots, c^{n+1} \in G; c^1 < c^2 < \dots < c^{n+1}} (P_{a,c^1} \wedge P_{a,c^2} \wedge \dots \wedge P_{a,c^{n+1}}) \right)$$

2.2.2 Contrainte : Un musicien ne peut pas apparaître dans un groupe pour un instrument qu'il ne sait pas jouer

Pour tout musicien $a \in M$, pour tout groupe $c \in G$, pour tout instrument $b \notin \text{instrumentsPlayed}(a)$ tel que $\neg X_{a,b,c}$

$$\bigwedge_{a=1}^m \bigwedge_{c=1}^k \bigwedge_{b \notin \text{instrumentsPlayed}(a)} \neg X_{a,b,c}$$

2.3 Le nombre de clauses que l'encodage de la contrainte 'au plus k' génère

Le nombre de clauses que l'encodage va générer se calcule par $\binom{k}{Max_a+1}$ c'est à dire $\frac{k!}{Max_a!(k-Max_a)!}$. En effet il s'agit du nombre de sous ensembles de littéraux de taille Max_a dans l'ensemble des littéraux de taille k (car pour chaque musicien il existe $k * C_{a,c}$ littéraux).

Si nous prenons par exemple la valeur $Max_a = 2$ et $k = 3$. Cela veut dire qu'un musicien ne peut apparaître que dans 2 groupes au maximum parmi les 3 groupes disponibles. Il peut donc se trouver dans : $(g1 \vee g2) \wedge (g1 \vee g3) \wedge (g2 \vee g3)$.

3 Question 3

Les 6 premières contraintes de la Question 3 sont les mêmes que celles de la Question 2. Nous modifions la contrainte 'Un musicien est dans au moins un groupe (pour un instrument qu'il sait jouer)' qui devient 'Un musicien est dans au moins un groupe (pour un instrument qu'il sait jouer) ou pour chanter'

De plus, on rajoute les contraintes qui précisent qu'il y a au minimum un chanteur par groupe et qu'il n'y a que les musiciens qui maîtrisent le chant qui peuvent chanter.

3.1 Définition de variables :

$C_{a,c}$ = vrai ssi le musicien a chante dans le groupe c .

$M' \subseteq M$ = ensemble des musiciens qui maîtrisent le chant.

3.2 Contraintes reprises de la question précédente :

3.2.1 Contrainte : Définition de $P_{a,c}$ par rapport a $X_{a,b,c}$

Pour tout musicien $a \in M$, pour tout un groupe $c \in G$,
(il existe un instrument $b \in I$ tel que $X_{a,b,c}$) équivalent à $P_{a,c}$

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{a=1}^m \bigwedge_{c=1}^k [(\bigvee_{b=1}^n X_{a,b,c}) \leftrightarrow P_{a,c}] \\ & \equiv \bigwedge_{a=1}^m \bigwedge_{c=1}^k [((\bigvee_{b=1}^n X_{a,b,c}) \rightarrow P_{a,c}) \wedge (P_{a,c} \rightarrow (\bigvee_{b=1}^n X_{a,b,c}))] \\ & \equiv \bigwedge_{a=1}^m \bigwedge_{c=1}^k [(\neg (\bigvee_{b=1}^n X_{a,b,c}) \vee P_{a,c}) \wedge (\neg P_{a,c} \vee (\bigvee_{b=1}^n X_{a,b,c}))] \\ & \equiv \bigwedge_{a=1}^m \bigwedge_{c=1}^k [((\bigwedge_{b=1}^n \neg X_{a,b,c}) \vee P_{a,c}) \wedge (\neg P_{a,c} \vee (\bigvee_{b=1}^n X_{a,b,c}))] \\ & \equiv \bigwedge_{a=1}^m \bigwedge_{c=1}^k [\bigwedge_{b=1}^n (\neg X_{a,b,c} \vee P_{a,c}) \wedge (\neg P_{a,c} \vee (\bigvee_{b=1}^n X_{a,b,c}))] \end{aligned}$$

3.2.2 Contrainte : Au plus un même musicien dans un même groupe

Pour tout groupe $c \in G$, pour tout musicien $a \in M$, il n'existe pas deux instruments différents $b, b' \in I$ tel que $b < b'$ et $X_{a,b,c}$ et $X_{a,b',c}$.

$$\bigwedge_{c=1}^k \bigwedge_{a=1}^m \neg [\bigvee_{b, b' \in \{1..n\}; b < b'} (X_{a,b,c} \wedge X_{a,b',c})]$$

$$\equiv \bigwedge_{c=1}^k \bigwedge_{a=1}^m \bigwedge_{b, b' \in (1..n); b < b'} (\neg X_{a,b,c} \vee \neg X_{a,b',c})$$

3.2.3 Contrainte : Au plus un musicien pour le même instrument au sein d'un même groupe

Pour tout groupe $c \in G$, pour tout instrument $b \in I$ il n'existe pas $a, a' \in M$ tel que $a < a'$ et $X_{a,b,c}$ et $X_{a',b,c}$.

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{c=1}^k \bigwedge_{b=1}^n \neg [\bigvee_{a, a' \in (1..m); a < a'} (X_{a,b,c} \wedge X_{a',b,c})] \\ & \equiv \bigwedge_{c=1}^k \bigwedge_{b=1}^n \bigwedge_{a, a' \in (1..m); a < a'} (\neg X_{a,b,c} \vee \neg X_{a',b,c}) \end{aligned}$$

3.2.4 Contrainte : Un groupe doit être soit complet soit vide

1. Si un musicien joue d'un instrument dans un groupe, alors ce groupe est actif.

Pour tout groupe $c \in G$, pour tout musicien $a \in M$ pour tout instrument $b \in I$ si $X_{a,b,c}$ alors A_c .

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{c=1}^k \bigwedge_{a=1}^m \bigwedge_{b=1}^n (X_{a,b,c} \rightarrow A_c) \\ & \equiv \bigwedge_{c=1}^k \bigwedge_{a=1}^m \bigwedge_{b=1}^n (\neg X_{a,b,c} \vee A_c) \end{aligned}$$

2. Si un groupe est actif, alors ce groupe est complet.

Pour tout groupe $c \in G$, si A_c alors pour tout instrument $b \in I$ il existe un musicien $a \in M$ tel que $X_{a,b,c}$.

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{c=1}^k [A_c \rightarrow (\bigwedge_{b=1}^n \bigvee_{a=1}^m X_{a,b,c})] \\ & \equiv \bigwedge_{c=1}^k [\neg A_c \vee (\bigwedge_{b=1}^n \bigvee_{a=1}^m X_{a,b,c})] \\ & \equiv \bigwedge_{c=1}^k \bigwedge_{b=1}^n [\neg A_c \vee (\bigvee_{a=1}^m X_{a,b,c})] \end{aligned}$$

3.2.5 Contrainte : Un musicien est dans au plus n groupes (Max_a)

Pour tout musicien $a \in M$, il n'existe pas des groupes $(c^1, c^2, ..c^{n+1}) \in G$ tel que $c^1 < c^2 < ... < c^{n+1}$ tel que P_{a,c^1} et P_{a,c^2} et ... et $P_{a,c^{n+1}}$

$$\bigwedge_{a=1}^m \neg (\bigvee_{c^1, c^2, ..c^{n+1} \in G; c^1 < c^2 < ... < c^{n+1}} (P_{a,c^1} \wedge P_{a,c^2} \wedge ... \wedge P_{a,c^{n+1}}))$$

3.2.6 Contrainte : Un musicien ne peut pas apparaître dans un groupe pour un instrument qu'il ne sait pas jouer

Pour tout musicien $a \in M$, pour tout groupe $c \in G$, pour tout instrument $b \notin \text{instrumentsPlayed}(a)$ tel que $\neg X_{a,b,c}$

$$\bigwedge_{a=1}^m \bigwedge_{c=1}^k \bigwedge_{b \notin \text{instrumentsPlayed}(a)} \neg X_{a,b,c}$$

3.3 Nouvelles contraintes :

3.3.1 Contrainte : Un musicien est dans au moins un groupe (pour un instrument qu'il sait jouer) ou pour chanter

Pour tout musicien $a \in M$, il existe un groupe $c \in G$, (il existe un instrument $b \in \text{instrumentsPlayed}(a)$ tel que $X_{a,b,c}$) ou $C_{a,c}$

$$\bigwedge_{a=1}^m [\bigvee_{c=1}^k ((\bigvee_{b \in \text{instrumentsPlayed}(a)} X_{a,b,c}) \vee C_{a,c})]$$

3.3.2 Contrainte : Au moins un chanteur par groupe

Pour tout groupe $c \in G$, si A_c alors il existe un musicien $a \in M$ tel que $C_{a,c}$.

$$\bigwedge_{c=1}^k (A_c \rightarrow \bigvee_{a=1}^m C_{a,c}) \equiv \bigwedge_{c=1}^k (\neg A_c \vee \bigvee_{a=1}^m C_{a,c})$$

3.3.3 Contrainte : Seuls les musiciens qui maitrisent le chant peuvent chanter au sein d'un groupe

Pour tout groupe $c \in G$, pour tout musicien $a \notin M'$ tel que $\neg C_{a,c}$.

$$\bigwedge_{c=1}^k \bigwedge_{a \notin M'} \neg C_{a,c}$$

3.4 Impact de la modification sur la présentation du problème

Le fait qu'un musicien peut maintenant chanter (le chant est considéré comme un 'instrument' spécial) entraîne que pour qu'un musicien soit au moins une fois dans un groupe il doit soit jouer un instrument soit chanter. Nous ne considérons pas le chant comme un instrument. Nous avons donc introduit une nouvelle variable : $C_{a,c}$ qui est vraie uniquement si le musicien a chante dans le groupe c.

Cela amène à la modification de la contrainte 'Un musicien est dans au moins un groupe (pour un instrument qu'il sait jouer)' (nous rajoutons 'ou pour chanter')

$$\bigwedge_{a=1}^m [\bigvee_{c=1}^k (\bigvee_{b \in \text{instrumentsPlayed}(a)} X_{a,b,c})]$$

devient alors

$$\bigwedge_{a=1}^m [\bigvee_{c=1}^k ((\bigvee_{b \in \text{instrumentsPlayed}(a)} X_{a,b,c}) \vee C_{a,c})]$$

Il faut également introduire les contraintes qu'il y a au moins un chanteur par groupe et que seuls les musiciens qui maitrisent le chant peuvent chanter dans un groupe.