第一章　图的基本概念

定义 1.1 一个**无向图**G 是一个有序三元组 $G=(V(G),E(G),\psi_G)$，其中

- $V(G)\neq\emptyset$ 是顶点集合，任给 $v\in V(G)$ 称为一个**顶点**。
- $E(G)$ 是边集合，任给 $e\in E(G)$ 称为一条**边**。
- $\psi_G:E(G)\to\{\{u,v\}\,|u,v\in V(G)\}$ 称为边与顶点之间的**关联函数**。

图的图示

我们在平面上以一个点代表 G 的一个顶点，若存在 $\psi_G(e)=u,v$，则在顶点 u,v 对应的点之间画一条边；点的大小与位置、边的粗细与形状不定，则得到一个图的图示。在画图的图示时，有时我们不关心边与顶点的编号，就将边的标记，甚至是顶点的标记省去。

- 给定图 G，顶点的个数 $|V(G)|$ 称为图 G 的**阶**，记为 $v(G)$。
- 图 G 的边数 $|E(G)|$ 记为 $\varepsilon(G)$。
- 若 $V(G)+\varepsilon(G)$ 为无穷大，则称 G 为**无限图**，否则称 G 是**有限图**。
- 在不引起混淆的情况下，我们经常将 $V(G)$、$E(G)$、$v(G)$、$\varepsilon(G)$ 和 ψ_G 分别简记为 V、E、v、ε 和 ψ。
- 在图 G 中，若 $\psi_G(e)=u,v$，则称边 e 与两个顶点 u,v **关联**，也称 u,v 是 e 的**端点**，同时称 u 与 v **相邻**，或称 u 和 v 是**邻顶**。
- 若两条边关联同一个顶点，也称这两条边**相邻**。
- 若 $\psi_G(e_1)=\psi_G(e_2)=u,v$，则称 $e_1=e_2$ 是**重边**。
- 若 $\psi_G(e)=u,u$，也就是边 e 的两个端点重合，则称 e 为**环**。
- 无环，也没有重边的图叫作**简单图**。

几种特殊的图

- **完全图**：n 个顶点的完全图 K_n 是一个简单图，其中任意两个顶点都相邻。
- **二分图**：二分图 G 的顶点集合可以划分为 $V(G)=X\cup Y$，其中 $X\neq\emptyset$，$Y\neq\emptyset$ 且 $X\cap Y\neq\emptyset$，使得 X 内任意两个顶点不相邻，Y 内任意两个顶点之间也不相邻。**完全二分图**G 是一个简单图，其中 X 中的任意一个顶点与 Y 中的任意一个顶点都相邻。完全二分图记为 $K_{|X|,|Y|}$。

- **星图**：星图是一个二分图 $K_{1,n}$ 或 $K_{n,1}$。
- **零图**：图中仅有顶点，没有边。

定义 1.2 给定无向图 G，$v \in V(G)$ 是 G 的一个顶点，v 的**度数**$deg(v)$ 定义为

$$deg(v) = d_1(v) + 2 \times l(v)$$

其中，$d_1(v)$为 v 关联的非环边数，$l(v)$为 v 关联的环边数。

另外，我们定义图 G 的最小度数与最大度数 分别为图 G 中所有顶点度数的最小值与最大值，即

$$\delta(G) = \min_{v \in V(G)} deg(v), \Delta(G) = \max_{v \in V(G)} deg(v)$$

将图 G 中所有顶点的度数按照从大到小的顺序排列，称为图 G 的**度数序列**。

定理 1.1 (*Euler*, *1736*) 任给无向图 G

$$\sum_{v \in V(G)} deg(v) = 2\varepsilon(G)$$

推论 1.1 任给图 G，G 中度数为奇数的顶点个数为偶数。

定义 1.3 给定图 $G = (V(G), E(G))$ 与 $H = (V(H), E(H))$，若 $V(H) \subseteq V(G)$ 且 $E(H) \subseteq E(G)$，则称 H 是 G 的一个**子图**，记作 $H \subseteq G$。

定义 1.4 在有些应用中，或者在讨论图论的某些性质时，需要考虑一些特殊的子图，下面列出一些定义:

- **真子图**：若 $H \subseteq G$ 且 $H \neq G$，则称 H 是 G 的真子图，记作 $H \subset G$。
- **生成子图**：若 $H \subseteq G$ 且 $V(H) = V(G)$，则称 H 是 G 的生成子图。
- **顶点导出子图**：设 $V' \subseteq V(G)$ 是图 G 的顶点子集，由 V' 导出的顶点导出子图 $G[V'] = (V', E')$，其中 $E' = \{uv | uv \in E(G), u, v \in V'\}$。也就是将两个端点都在 V' 中的边要放到顶点导出子图中。
- **边导出子图**：设 $E' \subseteq E(G)$ 是图 G 的边子集，由 E' 导出的边导出子图 $G[E'] = (V', E')$，其中 $V' = \{v | \text{存在边} uv \in E'\}$。也就是每条边的两个端点都放入边导出子图中。

定义 1.5 给定简单图 $G = (V(G), E(G))$，G 对应的补图与边图定义为

- **补图**：图 G 的补图定义为 $G^c = (V(G^c), E(G^c))$， 其中，$V(G^c) = V(G)$，$E(G^c) = \{uv | u, v \in V(G^c) = V(G) \text{且} uv \notin E\}$。也就是补图与原图的顶点集合相等，补图两顶点相邻等价于在原图中相应的两个顶点不相邻。
- **边图**：图 G 的边图定义为 $L(G) = (V(L(G)), E(L(G)))$，其中，$V(L(G)) = E(G)$，$E(L(G)) = \{e_1e_2 | e_1, e_2 \in E(G) \text{且} e_1, e_2 \text{在} G \text{中相邻}\}$。也就是边图的顶点对应于原图的边，而边图中两顶点相邻对应于原图中相应两条边相邻。

为了方便，对于图 G 中的顶点 v 与边 e，我们还定义了 $G - v$ 与 $G - e$。

定义 1.6 给定简单图 $G=(V(G),E(G))$ 和 $H=(V(H),E(H))$，图 G 与图 H 的并、交和积分别定义为

- **并**：图 G 与 H 的并定义为 $G\cup H=(V(G)\cup V(H),E(G)\cup E(H))$。
- **交**：图 G 与 H 的交定义为 $G\cap H=(V(G)\cap V(H),E(G)\cap E(H))$。
- **积**：图 G 与 H 的积定义为 $G\times H=(V',E')$，其中 $V'=V(G)\times V(H)=\{(u,v)|u\in V(G),v\in V(H)\}$，$E'=\{(u_1,v_1)(u_2,v_2)|u_1=u_2\text{且}v_1v_2\in E(H);\text{或者}u_1u_2\in E(G)\text{且}v_1=v_2;\text{或者}u_1u_2\in E(G)\text{且}v_1v_2\in E(H)\}$。也就是图 $G\times H$ 的顶点集合为 $V(G)$ 与 $V(H)$ 的积，而其边集合分为三类：（*1*）两个顶点的第一个分量相同且第二个分量在 H 中相邻；（*2*）两个顶点的第一个分量在 G 中相邻且第二个分量相同；（*3*）两个顶点的两个分量分别在 G 与 H 中相邻。

若两个图没有公共顶点，则称这两个图**不相交**。若两个图没有公共边，则称这两个图是**边不相交**的。若两个图不相交，则称这两个图的并为**不相交的并**。G 与 H 的不相交的并简记为 $G+H$。两个不相交图的交为空图。

定义 1.7 给定简单图 $G=(V(G),E(G))$，定义以下一些基本的概念：

- **路径**：图 G 的一条路径 W 定义为 $W=v_0e_1v_1e_2v_2\dots e_kv_k$，其中 $v_i\in V(G)(0\leqslant i\leqslant k)$；$e_i\in E(G)(1\leqslant i\leqslant k)$；$e_i$ 与 v_{i-1}、v_i 关联，也就是说 v_{i-1} 和 v_i 是 e_i 的端点，$1\leqslant i\leqslant k$。我们称 k 为 W 的长度，v_0 与 v_k 分别为 W 的起点与终点。
- **行迹**：边不重复的路径称为行迹。
- **轨道**：顶点不重复的路径称为轨道。
- **回路**：起点与终点相同的路径称为回路。
- **圈**：除了起点和终点相同之外，没有相同顶点的回路称为圈。

定义 1.8 给定图 $G=(V(G),E(G))$，定义 $V(G)$ 上的二元关系 $R\subseteq V(G)\times V(G)$ 如下：任给 $u,v\in V(G),(u,v)\in R$ 当且仅当 u 与 v 在 G 中连通。

由 R 的定义可知，R 是自反的、对称的与可传递的。因此，R 是一个等价关系，由 R 将 $V(G)$ 分成了一些等价类，$V_1,V_2,...,V_\omega$，即满足：

(1) $V_i\neq 0,1\leqslant i\leqslant\omega$

(2) $V_i\cap V_j=\emptyset,1\leqslant i\neq j\leqslant\omega$

(3) $V_1\cup V_2\cup...\cup V_\omega=V(G)$

使得任给 $u,v\in V(G)$，u 与 v 在 G 中连通等价于存在 $1\leqslant i\leqslant\omega,u,v\in V_i$。此时，顶点导出子图 $G[V_i](1\leqslant i\leqslant\omega)$ 称为 G 的一个**连通片**，ω 为 G 的**连通片个数**。假设非连通的图 G 有 ω 个连通片 $G_1,G_2,...,G_\omega(\omega\geqslant 2)$，可以将每个 G_i 看作一个独立的图 $(1\leqslant i\leqslant\omega)$，则 G 是 ω 个不相交的图的并，即 $G=G_1+G_2+...+G_\omega$。

定理 1.2 图 G 是二分图，当且仅当 G 中无奇圈。

定义 1.9 给定图 $G=(V(G),E(G),\psi_G)$、$H=(V(H),E(H),\psi_H)$，若存在两个一一映射

$\theta:V(G)\to V(H)$，$\varphi:E(G)\to E(H)$，

使得任给 $e\in E(G)$，当且仅当 $\psi_G(e)=uv$ 时，有 $\psi_H(\varphi(e))=\theta(u)\theta(v)$，则称图 G 与图 H **同构**，记作 $G\cong H$。

Ulam 猜想（1929）：设 G 与 H 是两个图，$|V(G)|=|V(H)|$，若存在一一映射 $\theta:V(G)\to V(H)$，使得任给 $v\in V(G),G-v\cong H-\theta(v)$，则 $G\cong H$。

与 Ulam 猜想类似，有下面的猜想，同样至今尚未解决。

设 G 与 H 是两个图，$|E(G)|=|E(H)|$，若存在一一映射 $\theta:E(G)\to E(H)$，使得任给 $e\in E(G),G-e\cong H-\theta(e)$，则 $G\cong H$。

若 $G\cong H$，则有如下一些性质：

(1) 顶点数相等，且边数也相等。

(2) 顶点的度数序列相同。

(3) 若 G 是简单图，则 H 也是简单图。

(4) 若 G 是连通图，则 H 也是连通图。

(5) 若 G 中有长度为 k 的圈，则 H 也有长度为 k 的圈。

定义 1.10 一个**有向图**D是一个有序三元组 $D=(V(D),E(D),\psi_D)$，其中

- $V(D)\neq\emptyset$ 是顶点集合，任给 $v\in V(D)$ 称为一个**顶点**。
- $E(D)$ 是有向边集合，任给 $e\in E(D)$ 称为一条**有向边**。在不引起混淆的情况下，也简称为边。
- $\psi_D:E(D)\to V(D)\times V(D)$ 称为有向边与顶点之间的**关联函数**。

与无向图不同的是，有向图中的边用有序二元组表示，而无向图的边则用二元集合来表示。若存在边 $\psi_D(e)=(u,v)$，则称 u 是 e 的**起点**（或**尾**），v 是 e 的**终点**（或**头**），u 与 v 都称为 e 的**端点**。

给定有向图 $D=(V(D),E(D),\psi_D)$，对于顶点 $u\in V(D)$，我们定义 u 的**出度**$deg^+(u)$ 为以 u 为起点的边数，u 的**入度**$deg^-(u)$ 为以 u 为终点的边数，即

$$deg^+(u)=|\{e|e=(u,v)\in E(D)\}|,deg^-(u)=|\{e|e=(v,u)\in E(D)\}|$$

而 u 的度数则定义为两者之和，即 $deg(u)=deg^+(u)+deg^-(u)$。

定理 1.3 任给有向图 D

$$\sum_{v\in V(D)}deg^+(v)=\sum_{v\in V(D)}deg^-(v)=\varepsilon(D)$$

边加权图：

(1) $G=(V(G),E(G))$

(2) $\omega:E(G)\to R^+$

给定两个顶点 $u,v \in V(G)$，设 $P(u,v)$ 是 u,v 之间的一条轨道，则 $P(u,v)$ 的**权**定义为

$$\omega(P(u,v)) = \sum_{e\in E(P(u,v))} \omega(e)$$

设 $\mathcal{P}(u,v)$ 是 u,v 之间所有轨道构成的集合。则最短路径问题就是找到 u,v 之间的一条轨道 $P_0(u,v)$，使得

$$\omega(P_0(u,v)) = \min_{P(u,v)\in\mathcal{P}(u,v)} \omega(P(u,v))$$

$P_0(u,v)$ 称为 u,v 之间的**最短路径**，而 $\omega(P_0(u,v))$ 则称为 u,v 之间的**距离**，记作 $dist(u,v)$。

算法 1.1 *Dijkstra* 算法

输入： 加权图 $G=(V(G),E(G)),\omega : E(G)\to R^+$，顶点 $u_0 \in V(G)$。

输出： u_0 到其余所有顶点的距离和最短路径。

(1) 任给 $u,v \in V(G)$，若 $uv \notin E(G)$，令 $\omega(uv)=\infty$

(2) 令 $d(u_0)=0, l(u_0)=\$$；任给 $u\in V(G), u\neq u_0, d(u)=\infty, l(u)=*; S_0=\{u_0\}; i=0$

(3) 对任给 $u\in V(G)-S_i$，若 $d(u_i)+\omega(u_iu)<d(u)$，则令 $d(u)\leftarrow d(u_i)+\omega(u_iu)$，且令 $l(u)=u_i$

(4) 选出 $u_{i+1}\in V(G)-S_i$，使得 $d(u_{i+1})=\min_{u\in V(G)-S_i} d(u)$，令 $S_{i+1}=S_i\cup\{u_{i+1}\}$

(5) 若 $i=v(G)-1$，算法停止；否则，令 $i\leftarrow i+1$，转 *(3)*。

定理 1.4 在 *Dijkstra* 算法中，当算法执行到第 $i(0\leqslant i\leqslant v(G)-1)$ 次循环时，满足

(1) 任给 $u\in S_i$，都有 $d(u)$ 为 u_0 到 u 的距离，而 $l(u)$ 为从 u_0 到 u 的最短路径 u 上的前驱顶点

(2) 在执行完算法的第 *(3)* 步后，任给 $u\in V(G)-S_i$，$d(u)$ 是从 u_0 到 u 在满足下述条件下的最短路径长度。这个条件就是除了 u 之外，该最短路径上其余顶点全部属于 S_i，而 $l(u)$ 为该最短路径上 u 的前驱顶点

(3) 在算法执行完第 *(4)* 步后，$d(u_{i+1})$ 为 u_0 到 u_{i+1} 的距离，而 $l(u_{i+1})$ 为从 u_0 到 u_{i+1} 的最短路径上 u_{i+1} 的前驱顶点

第二章　树

定义 2.1 连通无圈图称为**树**，用 T 表示。树中度数为 1 的顶点称为**树叶**，度数大于 *1* 的顶点称为**分支点**，边称为**树枝**。每个连通片都是树的非连通图称为**森林**。孤立点称为**平凡树**。

定理 2.1 设 $G=(V(G),E(G))$ 是简单无向图，则以下命题等价:

(1) G 是树。

(2) G 的任意两个顶点之间有且仅有一条轨道。

(3) G 不含圈，且 $\varepsilon(G)=v(G)-1$。

(4) G 是连通图，且 $\varepsilon(G)=v(G)-1$。

(5) G 是连通图，且删去任意一条边都不连通。

(6) G 不含圈，且任意添加一条边后恰好含一个圈。

定理 2.2 任一非平凡树 T 至少有两片树叶。

定义 2.2 设图 $G=V,E$ 是连通图，任取 $v\in V$，称 $l(v)=\max\{dist(u,v)|u\in V\}$ 是顶点 v 的**离心率**，称 $r(G)=\min\{l(v)|v\in V\}$ 是图 G 的**半径**。

离心率恰好等于半径（即 $l(v)=r(G)$）的顶点 v，称为 G 的一个**中心点**，G 的全体中心点的集合称为 G 的**中心**。

定义 2.3 如果图 G 的生成子图 T 是树，则称 T 是 G 的一棵**生成树**；如果 T 是森林，称它为 G 的**生成森林**。生成树的边称为**树枝**，图 G 中非生成树的边称为**弦**。T 相对于 G 的补图 T_G^c 称为 G 的**余树**。T_G^c 是 G 的生成子图，其边集合由 G 中不在 T 上的边组成。

定理 2.3 每个连通图都有生成树。

推论 2.1 若 G 是连通图，则 $\varepsilon(G)\geqslant v(G)-1$。

推论 2.2 G 是连通图的充分必要条件是 G 有生成树。

记 G 的生成树的数目为 $\tau(G)$。

定理 2.4（*Cayley*）设 G 是连通图，$e=uv\in E(G)$ 且不是环，则

$$\tau(G)=\tau(G-e)+\tau(G\cdot e)$$

其中，$G\cdot e$ 是 G 中收缩掉边 e 后得到的图，即：首先删掉边 e，然后将 u 与 v 重合为一个顶点，设为 w，再将 G 中原来与 u 或 v 相邻的顶点都与 w 连一条边。

定理 2.5

$$\tau(K_n) = n^{n-2}$$

定义 2.4 给定连通边权图 $G = (V(G), E(G), \omega)$，其中，$\omega : E(G) \to R^+$ 为**边权函数**，G 的生成树 T 的权定义为 $W(T) = \sum_{e\in E(T)} \omega(e)$，权最小的生成树 G 称为 G 的**最小生成树**。

算法 2.1 *Kruskal* 算法

输入： 加权图 $G = (V(G), E(G), \omega), v = |V(G)|$。

输出： G 的一棵生成树的边子集 $\{e_1, e_2, ..., e_i\}$。

(1) 从 $E(G)$ 中选权最小的边 e_1

(2) 若已经选定边 $e_1, e_2, ..., e_i$，则从 $E(G) - \{e_1, e_2, ..., e_i\}$ 中选出边 e_{i+1}，使得

(i) 边导出子图 $G[\{e_1, e_2, ..., e_i, e_{i+1}\}]$ 不含圈

(ii) 在满足 *(i)* 的前提下，$\omega(e_{i+1})$ 的权最小，即 $\omega(e_{i+1}) = \min_{e\in E(G)-\{e_1,e_2,...,e_i\}} \omega(e)$。

(3) 反复执行第 *(2)* 步，直到选出 e_{v-1} 为止

定理 2.6 由 *Kruskal* 算法得到的生成子图 $T^* = (V(G), \{e_1, e_2, ..., e_{v-1}\})$ 是最小生成树。

算法 2.2 *Prim* 算法

输入： 边权图 $G = (V(G), E(G), \omega), v = |V(G)|$。

输出： G 的一棵生成树的边子集 E'。

(1) 从 $V(G)$ 中任意选取一个顶点 s，令 $V' = \{s\}, E' = \emptyset$

(2) 在 $(V', \overline{V'})$ 中选择一条权最小的边 uv，其中 $u \in V', v \in \overline{V'}$。令 $V' = V' \cup \{v\}, E' = E' \cup \{uv\}$

(3) 反复执行第 *(2)* 步，直到 $|V'| = v$ 或 $|E'| = v - 1$ 为止

定理 2.7 由 *Prim* 算法得到的图 $T^* = (V', E')$ 是最小生成树。

定义 2.5 **有根树**是指定一个顶点作为根，并且每条边的方向都离开根的有向树。设 T 是一棵非平凡的有根树，任给 $v_i, v_j \in V(T)$，若 $(v_i, v_j) \in E(T)$，则称 v_i 为 v_j 的**父亲**，v_j 是 v_i 的**儿子**；同父之子称为**兄弟**；若从 v_i 到 v_j 有有向轨道，则称 v_i 为 v_j 的**祖先**，v_j 是 v_i 的**后代**。

定义 2.6 在有根树中仅有一个顶点的入度为 *0*，其余顶点的入度均为 *1*。有根树 T 中入度为 *0* 的顶点就是**根**，入度为 *1* 出度为 *0* 的顶点称为**树叶**，入度为 *1* 出度不为 *0* 的顶点称为**内点**，内点和根统称为**分支点**。从根到 T 的任一顶点 v 的距离称为 v 的**深度**$L(v)$，深度的最大值称为**树高**$h(T)$。

定义 2.7 设 T 是一棵有根树，若每个顶点的孩子都从左到右规定了次序，则称 T 是**有序树**。

定义 2.8 设 T 是一棵有根树

(1) 若 T 的每个分支点至多有 r 个儿子，则称 T 是r **叉树**

(2) 若 T 的每个分支点都恰好有 r 个儿子，则称 T 是r **叉正则树**

(3) 若 T 是 r 叉正则树且每个树叶的深度都是树高，则称 T 是r **叉完全正则树**

(4) 若 T 是 r 叉树且为有序树，则称 T 是**有序** r **叉树**

(5) 若 T 是 r 叉正则树且为有序树，则称 T 是**有序** r **叉正则树**

(6) 若 T 是 r 叉完全正则树且为有序树，则称 T 是**有序** r **叉完全正则树**

定理 2.8 二叉树有以下性质：

(1) 第 i 层的顶点数最多是 2^i

(2) 深度为 h 的二叉树最多有 $2^{h+1}-1$ 个顶点

(3) 设二叉树出度为 *2* 的顶点数为 n_2，树叶数为 n_0，则有 $n_0 = n_2 + 1$

(4) 包含 n 个顶点的二叉树的高度至少为 $\log(n+1)-1$

定义 2.9 设二叉树 T 有 t 片树叶 $v_1, v_2, ..., v_t$，其权值分别为 $w_1, w_2, ..., w_t$，T 的**加权路径长度（*Weighted Path Length*）** 定义为：$WPL(T) = \sum_{i=1}^{t} w_i L(v_i)$，其中 $L(v_i)$ 为 v_i 的深度。

加权路径长度最短的树称为**最优二叉树**。

算法 2.3 *Huffman* 算法

输入： 给定实数 $w_1 \leqslant w_2 \leqslant ... \leqslant w_t$。

输出： 带有权值 $w_1 \leqslant w_2 \leqslant ... \leqslant w_t$ 的最优二叉树。

(1) 连接以 w_1, w_2 为权的两片树叶，得到带权为 $w_1 + w_2$ 的每个分支点

(2) 在 $w_1 + w_2, w_3, ..., w_t$ 中再取两个最小的权，连接它们对应的顶点又得到新的分支点及所带的权

(3) 重复第 *(2)* 步，直到形成一棵树为止

引理 2.1 给定 $w_1 \leqslant w_2 \leqslant ... \leqslant w_t$，则存在一棵 *Huffman* 树，使得 w_1, w_2 对应的顶点是兄弟，且这两个顶点在二叉树中的深度都等于树高。

定理 2.9 *Huffman* 树是最优二叉树。

定义 2.10 设 $\beta = \alpha_1\alpha_2...\alpha_n$ 是长为 n 的字符串，称子串 $\alpha_1, \alpha_1\alpha_2, ..., \alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-1}$ 分别为 β 的长为 $1, 2, ..., n-1$ 的**前缀**。设 $\boldsymbol{B} = \{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m\}$，若对于任意的 $\beta_i, \beta_j \in \boldsymbol{B}(i \neq j)$，$\beta_i$ 与 β_j 互不为前缀，则称 $\boldsymbol{B}$ 为**前缀码**。若 β_i 中只出现 *0* 与 *1*，则称为**二进制前缀码**。

定义 2.11 决策树又称为**判定树**，是运用于分类的一种树结构。它的每个分支点对应输入数据的一个特征，表示对此特征的一次测试；每条边表示一个测试结果；树叶表示最终的分类结果，代表某个具体的类或者类的分布。

第三章　图的连通性

定义 3.1 给定简单图 $G=(V(G),E(G))$ 的一对不相邻的顶点 $u,v\in V(G),u\neq v$。若 $S\subseteq V(G)-\{u,v\}$ 使得 u 与 v 在 $G-S$ 中不连通，即分属两个不同的连通片，则称 S 是一个$uv-$ **顶割集**，简称为$uv-$ **割集**，也称 S **隔离**了 u 与 v。含顶点最少的 $uv-$ 割集称为**最小** $uv-$ **割集**，其中的顶点数记为 $c(u,v)$，称为 u 与 v 在 G 中的**顶连通度**，记为$uv-$ **连通度**。若 $u=v$ 或者 u 与 v 在 G 中相邻，则 $uv-$ 连通度没有定义。

定义 3.2 给定连通简单图 $G=(V(G),E(G))$，以及 $S\subset V(G)$，若 $G-S$ 中不连通，则称 S 是 G 的**顶割集**，简称**割集**。若一个割集中有 k 个元素，则称之为$k-$ **顶割集**。含顶点数最少的割集称为**最小割集**，其中的顶点数记为 $\kappa(G)$，称为 G 的**顶连通度**，简称为**连通度**。

约定完全图的连通度为 $\kappa(K_n)=n-1$，非连通图的连通度为 $\kappa(\text{非连通图})=0$。对于非负整数 k 来说，若 $\kappa(G)\geqslant k$，则称 G 是$k-$ **连通的**。当然，若 G 是 $k-$ 连通的，则是 $(k-1)-$ 连通的 $(k-1\geqslant 0)$。

对于非连通图 G，我们得到下面的结论：

$$\kappa(G)=\min\{c(u,v)|u,v\in V(G),u\neq v,uv\notin E(G)\}$$

$P(u,v)$ 与 $Q(u,v)$ 没有其它的公共顶点，我们称这样的两条轨道为**无公共内顶的** $uv-$ **轨道**。记两两无公共内顶的 $uv-$ 轨道的最大数量为 $p(u,v)$。

定理 3.1（*Menger* 定理顶点版本）给定简单图 G 中两个不相邻的顶点 u,v，G 中两两无公共内顶的 $uv-$ 轨道的最大数量等于最小 $uv-$ 割集中的顶点数，即：

$$p(u,v)=c(u,v)$$

设 G 是一个简单图，$S\subset V(G)$，G 关于 S 的**收缩图** $G\cdot S$定义为：首先在 G 中删掉两个端点都在 S 中的边；再将 S 中所有的顶点收缩为一个顶点 s；若 $v\in V(G)-S$ 与 S 中某个顶点相邻，则在 $G\cdot S$ 中将 v 与 s 连边。

推论 3.1 给定简单图，有：

$$\min\{p(u,v)|u,v\in V(G),u\neq v,uv\notin E(G)\}=\min\{c(u,v)|u,v\in V(G),u\neq v,uv\notin E(G)\}$$

对于 K_n 来说，

$$\kappa(K_n)=\min\{p(u,v)|u,v\in V(K_n),u\neq v\}$$

定理 3.2（*Whitney*）任给简单图 G，都有：

$$\kappa(G)=\min\{p(u,v)|u,v\in V(G),u\neq v\}$$

引理 3.1 假设简单图 G 是 $k-$ 连通图，在 G 中增加一个新的顶点 y，并且在 G 中任意选取至少 k 个顶点，将 y 与这些选取的顶点各连一条边，得到的图记为 H，则 H 也是 $k-$ 连通图。

推论 3.2 假设简单图 G 是 $k-$ 连通图，X,Y 是图 G 两个顶点子集，$|X| \geqslant k$，$|Y| \geqslant k$ 且 $X \cap Y = \emptyset$，则 G 中存在 k 条无公共顶点的$(X,Y)-$ **轨道**。其中 $(X,Y)-$ 轨道指的是轨道的两个端点分属 X 与 Y，而中间顶点不属于 $X \cup Y$。

给定简单图 G，$x \in V(G)$，$Y \subseteq V(G) - \{x\}$ 且 $Y \geqslant k$，一组 k 条起点为 x、终点为 Y 中 k 个不同的顶点、且除了 x 之外无公共顶点的轨道称为从 x 到 Y 的 $k-$ **扇形**。

推论 3.3 假设简单图 G 是 $k-$ 连通图，$x \in V(G)$，$Y \subseteq V(G) - \{x\}$ 且 $|Y| \geqslant k$，则 G 中存在从 x 到 Y 的 $k-$ 扇形

定理 3.3 (*Dirac*) 设 S 是 $k-$ 连通图 G 中的 k 元顶点子集，$k \geqslant 2$，则 G 中存在一个圈 C，使得 S 中所有的顶点都在 C 上。

定义 3.3 给定简单图 $G = (V(G), E(G))$ 的一对顶点 $u, v, u \neq v$。若边子集 $E' \subseteq E(G)$ 使得 u 与 v 在 $G - E'$ 中不连通，即分属两个不同的连通片，则称 E' 是一个$uv-$ **边割集**。含边数最少的 $uv-$ 边割集称为**最小** $uv-$ **边割集**，其中的边数记为 $c'(u,v)$，称为 u 与 v 在 G 中的**边连通度** ，简称为$uv-$ **边连通度**。

定义 3.4 给定联通简单图 $G = (V(G), E(G))$，以及 $E' \subseteq E(G)$，若 $G - E'$ 不连通，则称 E' 是 G 的**边割集**。若一个边割集中有 k 条边，则称之为$k-$ **边割集**。含边数最少的边割集称为**最小边割集**，其中的边数记为 $\kappa'(G)$，称为 G 的**边连通度**。若图 G 不是连通图，就定义 $\kappa'(G) = 0$。

若 $\kappa'(G) \geqslant k$，则称图 G 是$k-$ **边连通的**。

定理 3.4 (*Menger* 定理边版本) 给定图 G 中两个顶点 u, v，G 中两两无公共边的 $uv-$ 轨道的最大数量等于最小 $uv-$ 边割集中的边数，即：

$$p'(u,v) = c'(u,v)$$

由该定理，我们可以得出

$$\kappa'(G) = \min_{u,v \in V(G), u \neq v} p'(u,v)$$

定理 3.5 假定 G 是简单图，则有：

$$\kappa(G) \leqslant \kappa'(G) \leqslant \delta(G)$$

定义 3.5 给定连通简单图 $G = (V(G), E(G))$，若存在顶点 v，使得 $G - v$ 不连通，即 $\{v\}$ 是割集，则称 v 是 G 的**割顶**。

定理 3.6 设 G 是连通图，$v \in V(G)$，则下述命题等价：

(1) v 是 G 的割顶

(2) 存在与 v 不同的两个顶点 $u, w \in V(G) - \{v\}$，使得 v 在每一条从 u 到 w 的轨道上

(3) 存在 $V(G)-\{v\}$ 的一个划分 $V(G)-\{v\}=U\cup W, U\cap W=\emptyset, U\neq\emptyset, W\neq\emptyset$，使得任给 $u\in U, w\in W$，v 在每一条从 u 到 w 的轨道上

定义 3.6 给定连通简单图 $G=(V(G),E(G))$，若存在边 e，使得 $G-e$ 不连通，也就是 $\{e\}$ 是边割集，则称 e 是 G 的**桥**（或**割边**）。

定理 3.7 设 G 是连通图，$e\in E(G)$，则下述命题等价:

(1) e 是 G 的桥

(2) e 不在 G 的任一圈上

(3) 存在 $u,w\in V(G)$，使得 e 在每一条从 u 到 w 的轨道上

(4) 存在 $V(G)$ 的一个划分 $V(G)=U\cup W, U\cap W=\emptyset, U\neq\emptyset, W\neq\emptyset$，使得任给 $u\in U, w\in W$，e 在每一条从 u 到 w 的轨道上

定义 3.7 没有割顶的简单图 G 称为**块**。若 G 不是块，则 G 的成块的极大子图称为 G 的块。

定理 3.8 设 G 是连通图，$v(G)\geqslant 3$，则下述命题等价:

(1) G 是块

(2) 任给 $u,v\in V(G), u\neq v$，u 与 v 在 G 的同一个圈上。

(3) 任给 $u\in V(G), e\in E(G)$，u 与 e 在 G 的同一个圈上。

(4) 任给 $e_1,e_2\in E(G)$，e_1 与 e_2 在 G 的同一个圈上。

(5) 任给 $u,v\in V(G), u\neq v, e\in E(G)$，存在连接 u 与 v 的轨道 $P(u,v)$，使得 e 在 $P(u,v)$ 上，即 $e\in E(P(u,v))$。

(6) 任给三个不同的顶点 $u,v,w\in V(G)$，存在连接 u 与 v 的轨道 $P(u,v)$，使得 w 在轨道 $P(u,v)$ 上。

(7) 任给三个不同的顶点 $u,v,w\in V(G)$，存在连接 u 与 v 的轨道 $P(u,v)$，使得 w 不在轨道 $P(u,v)$ 上。

n 个顶点且边数为 $\left\lceil\frac{1}{2}nk\right\rceil$ 的 $k-$ 连通图 $H_{n,k}$。

(1) k 是偶数。记 $k=2r$。$H_{n,2r}$ 的构造方法为：两个不同的顶点 i 与 j 相邻当且仅当 $i-r\leqslant j\leqslant i+r$，其中的加法是在 $\mod n$ 的意义下进行的。

(2) k 是奇数，n 是偶数。记 $k=2r+1$。$H_{n,2r+1}$ 的构造方法是：先构造 $H_{n,2r}$，然后在 $H_{n,2r}$ 的基础上，将顶点 i 与顶点 $i+\frac{n}{2}(0\leqslant i\leqslant\frac{n}{2}-1)$ 连边。

(3) k 是奇数，n 是奇数。记 $k=2r+1$。$H_{n,2r+1}$ 的构造方法是：也是先构造 $H_{n,2r}$，然后在 $H_{n,2r}$ 的基础上，将顶点 0 与顶点 $\frac{n-1}{2}$、$\frac{n+1}{2}$ 各连一条边，再将顶点 i 与顶点 $i+\frac{n+1}{2}(1\leqslant i\leqslant\frac{n-3}{2})$ 连边。

定理 3.9 *Harary（1962）* $H_{n,k}$ 是 $k-$ 连通图。

第四章　平面图

定义 4.1 如果一个图可以画在平面上，使得除了端点外，它的任意两条边没有交点，则称这个图为**可嵌入平面的**，简称**平面图**。平面图 G 的这样一种画法（图示）称为 G 的一个**平面嵌入**。

图 G 的一个平面嵌入 G' 本身可看作是与 G 同构的图，因此有时把平面图的平面嵌入称为**平图**。

平面嵌入的概念也可以推广到其它曲面上去。若图 G 能画在曲面 S 上使它的边仅在端点相交，则图 G 称为**可嵌入曲面 S 的**；图 G 的这样一种画法（如果存在）称为 G 的一个 **S 嵌入**。其中与平面嵌入密切相关的是球面嵌入。

定理 4.1 图 G 可嵌入平面，当且仅当 G 可嵌入球面。

每个平图恰有一个无界的面，称为**外部面**。

定理 4.2 设 v 是平面图 G 的顶点，则存在 G 的一个平面嵌入，使得 v 在这个嵌入的外部面上。

定义 4.2 称面 f 与它的边界上的顶点和边是**关联**的。若 e 是平图的割边，则只有一个面和 e 关联；否则有两个面和 e 关联。称一条边**分隔**和它关联的面。面 f 的度数 $deg(f)$ 是和它关联的边数，即 $b(f)$ 中的边数，其中割边被计算两次。

定理 4.3 任给平面图 G

$$\sum_{f\in F(G)} deg(f) = 2|E(G)|$$

定理 4.4 设 G 是连通平图，有 v 个顶点，ε 条边，φ 个面，则

$$v - \varepsilon + \varphi = 2$$

推论 4.1 对于给定的连通平面图，其所有平面嵌入有相同的面数。

推论 4.2 若 G 是 $v \geqslant 3$ 的连通简单平面图，则 $\varepsilon \leqslant 3v - 6$。

推论 4.3 若 G 是连通简单平面图，则 $\delta \leqslant 5$。

推论 4.4 K_5 是非平面图。

推论 4.5 $K_{3,3}$ 是非平面图。

定义 4.3 设 G 是 $v \geqslant 3$ 的平面图，若任给 $u, v \in V(G)$，当 $uv \notin E(G)$ 时，$G + uv$ 都不再是平面图，则称 G 是**极大平面图**。

定理 4.5 $v \geqslant 3$ 的平面图 G 是极大平面图，当且仅当 G 的平面嵌入的每个面都是三角形。

推论 4.6 假定 G 是 $v \geqslant 3$ 的平面图，则 G 是极大平面图，当且仅当 $\varepsilon = 3v - 6$。

定理 4.6 若 G 是 $v \geqslant 4$ 的极大平面图，则 $\delta \geqslant 3$。

给定两个图 G 和 H，如果通过一系列如下的两种变换可以将 G 变成 H，则称 G 与 H **同胚**:

(1) 在 G 的边上插入度数为 2 的顶点，将原来的一条边变成两条边。

(2) 将 G 中度数为 2 的顶点去掉，将该顶点关联的两条边连成一条边。

定理 4.7 图 G 是平面图，当且仅当 G 中不含与 K_5 或 $K_{3,3}$ 同胚的子图。

如果一个图不是平面图，可以把它的边嵌入多个平面，使每个平面上的边不不交叉，即把图 G 的边集划分为 $E(G) = \cup_{i=1}^{n} E_i, E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j$，且每个边导出子图 $G[E_i](i = 1, 2, ..., n)$ 都是平面图。n 的最小值称为图 G 的**厚度**，记为 $\theta(G)$。

定理 4.8 对 $v(\geqslant 3)$ 阶简单图 G 的厚度 $\theta(G)$，有以下估计式:

(1) $\theta(G) \geqslant \left\lceil \frac{\varepsilon}{3v-6} \right\rceil$。

(2) 若连通图 G 中没有 3 阶圈，则 $\theta(G) \geqslant \left\lceil \frac{\varepsilon}{2v-4} \right\rceil$

(3) $\theta(K_v) \geqslant \left\lfloor \frac{v+7}{6} \right\rfloor$

第五章　匹配理论

定义 5.1 设 M 是图 G 的边子集，且 M 的任意两条边在 G 中都不相邻，则称 M 是 G 的一个**匹配**。M 中同一条边的两个端点称为在 M 中**相配**。M 中边的端点称为被 M **许配**。若 G 中所有的端点都被 M 许配，则称 M 是 G 的**完备匹配**。G 中边数最多的匹配称为 G 的**最大匹配**。若 M 是 G 的最大匹配，则称 M 中的边数 $|M|$ 为 G 的**匹配数**，记作 $\alpha(G) = |M|$。

定义 5.2 设 M 是图 G 的匹配，$P = v_0e_1v_1e_2...e_kv_k$ 是 G 中的一条轨道(圈)，若 $e_1, e_2, ..., e_k$ 在 M 与 $E(G) - M$ 中交替出现，则称 P 是 G 中关于 M 的**交错轨道（圈）**。

定义 5.3 设 $P = v_0e_1v_1e_2...e_{2k+1}v_{2k+1}$ 是 G 中关于 M 的交错轨道，若 $e_1, e_3, ..., e_{2k+1} \notin M$，$e_2, ..., e_{2k} \in M$，且 v_0 与 v_{2k+1} 没有被 M 许配，则称 P 是 G 中关于 M 的**可增广轨道**。

引理 5.1 M 是 G 的最大匹配，当且仅当 G 中没有关于 M 的可增广轨道。

定理 5.1 ($Hall$) 设 G 是二分图，其顶点集合划分为 $V(G) = X \cup Y, X \cap Y = \emptyset$，则 G 中存在将 X 中顶点都许配的匹配，当且仅当任给 $S \subseteq X$，都有 $|N(S)| \geqslant |S|$。其中，$N(S)$ 是与 S 中顶点相邻的顶点构成的集合，简称为 S 的**邻顶集合**。

推论 5.1 对于正整数 $k > 0$，k 次正则二分图 G 有完备匹配。

定义 5.4 设 G 是一个图，C 是其顶点集合的子集，即 $C \subseteq V(G)$，若 G 中任意一条边都有一个端点属于 C，则称 C 是 G 的一个**覆盖**。若 C 是 G 的覆盖，但 C 的任何真子集都不是 G 的覆盖，则称 C 是 G 的**极小覆盖**。若 C^* 是 G 的覆盖，且不存在 G 的覆盖 C，使得 $|C| < |C^*|$，则称 C^* 是 G 的**最小覆盖**，且称 $|C^*|$ 是 G 的**覆盖数**，记作 $\beta(G)$。

引理 5.2 假设 C 是图 G 的覆盖，M 是图 G 的匹配，则 $|C| \geqslant |M|$。

引理 5.3 若图 G 存在覆盖 C 和匹配 M，使得 $|C| = |M|$，则 C 是最小覆盖，M 是最大匹配。

定理 5.2 ($König - Egerváry$) 设 G 是二分图，则 G 的匹配数等于其覆盖数，即 $\alpha(G) = \beta(G)$。

定义 5.5 设 G' 是图 G 的连通片，若 $v(G')$ 是奇数，则称 G' 是 G 的**奇片**。否则，称之为 G 的**偶片**。我们用$o(G)$表示 G 中奇片的个数。

定理 5.3 ($Tutte$) G 有完备匹配，当且仅当任给 $S \subseteq V(G)$，都有 $o(G - S) \leqslant |S|$。

定理 5.4 ($Peterson$) 无桥的三次正则图有完备匹配。

假设 G 是一个图，M 是 G 的一个匹配，u 是 G 的一个没有被 M 许配的顶点。对于 G 的子图 T，如果 T 是树，$u \in V(T)$，且满足任给 $v \in V(T)$，T 中从 u 到 v 的轨道（注：树中任意两个顶点间的轨道唯一）是交错轨道，则称 T 是 G 中关于 M 的 $u-$ **交错树**。若除了 u 之外，T 中所有的顶点均被 M 许配，则称 T 为**被 M 许配的** $u-$ **交错树**；否则，除了 u 之外，T 中还有没有被 M 许配的顶点，设为 v，则 T 中从 u 到 v 的轨道就是一个可增广轨道。

算法 5.1 交错树算法

输入： 二分图 $G = (X, E, Y)$，G 的匹配 M，G 中没有被 M 许配的顶点 u，不妨设 $u \in X$。

输出： G 中关于 M 的 $u-$ 交错树 $T_u = (U, E', V)$。

(1) $U = \{u\}, E' = \emptyset, V = \emptyset$；令 $l_{pre}(u) = *$；对 G 中所有的顶点 $v \neq u$，令 $l_{pre}(v) = null$；对 G 中所有的顶点 v（包括 u），令 $l_{visited}(v) = 0$。

(2) 若上一步中没有新的顶点加入 U，算法停止；否则转第（*3*）步。

(3) 若存在 $x \in X, l_{pre}(x) \neq null, l_{visited}(x) = 0$，则对 Y 中所有满足 $xy \in E - M$ 且 $l_{pre}(y) = null$ 的顶点 y，令 $l_{pre}(y) = x$；$E' \leftarrow E' \cup \{xy\}$；$V \leftarrow V \cup \{y\}$；最后令 $l_{visited}(x) = 1$。

(4) 若在第（*3*）步，在 V 中加入一个新的顶点 y（同时也将 $l_{pre}(y)$ 从 $null$ 修改为 x），且 y 没有被 M 许配，则已经找到可增广轨道，算法停止；若在第（*3*）步没有新的顶点加入 V，算法停止；否则转第（*5*）步。

(5) 若存在 $y \in Y, l_{pre}(y) \neq null, l_{visited}(y) = 0$，则对 X 中所有满足 $xy \in M$ 且 $l_{pre}(x) = null$ 的顶点 x，令 $l_{pre}(x) = y$；$E' \leftarrow E' \cup \{xy\}$；$U \leftarrow U \cup \{x\}$；最后令 $l_{visited}(y) = 1$，转第（*2*）步。

交错树算法结束时，若 $u-$ 交错树中仅有一个没有被 M 许配的顶点 u，则没有找到可增广轨道。在这种情况下，由算法可以得到如下的结论：

(1) 由于 $u-$ 交错树中仅有一个没有被 M 许配的顶点 u，其余顶点都是两两相配的，所以 $|U| = |V| + 1$（我们假设 $u \in X$）。

(2) $N_G(U) = V$。否则，在图 G 中存在顶点 y，y 与 U 中某个顶点 x 相邻，即 $xy \in E(G)$，但是 $y \notin V$。由于 $x \in U$，若 xy 不是匹配中的边，即 $xy \notin M$，则 y 会在算法的第（3）步被加入 V；若 xy 是匹配中的边，即 $xy \in M$，则由算法的第（5）步可知，只有在 y 加入 V 之后，x 才可能在第（3）步加入 U。无论 xy 是否匹配中的边，都有矛盾，故 $N_G(U) = V$。

引理 5.4 设 M 是二分图 G 中的一个匹配，u 是 G 中一个未被 M 许配的顶点，按照交错树算法得到一个 $u-$ 交错树 $T_u(U, E', V)$。若 T 中仅有一个顶点 u 未被 M 许配，在 G 中不存在含 T 中任何顶点的可增广轨道。

算法 5.2 匈牙利算法

输入： 二分图 $G = (X, E, Y)$。

输出： G 的最大匹配 M。

(1) 取 G 的一个初始匹配 M，比如说 $M = \emptyset$。$G' \leftarrow G$。

(2) 若 G' 为空，或者 G' 中顶点都被 M 许配，算法停止；否则转第（*3*）步。

(3) 取 G 中没有被 M 许配的顶点 u，搜索 $u-$ 交错树 T_u，若找到可增广轨道，设为 P，令 $M \leftarrow M \ominus E(P)$，转第（*2*）步；否则，令 $G' \leftarrow G' - V(T)$，转第（*2*）步。

定理 5.5 当匈牙利算法结束时，算法得到的 M 是 G 的最大匹配。

假设 M 是图 G 的一个匹配，则 M 的权定义为

$$w(M) = \sum_{x_i y_j \in M} \omega(x_i y_j)$$

我们的目标是在 G 中找到一个权值最大的匹配，称之为**最佳匹配**。

定义 5.6 给定边权二分图 $G = (X, \Delta, Y)$，带有权值 $\omega : \Delta \to R$，定义 $V(G) = X \cup Y$ 上的函数 $l : X \cup Y \to R$。若 l 满足：任给 $x \in X$、$y \in Y$，都有

$$l(x) + l(y) \geqslant \omega(xy)$$

则称 l 为一个**可行顶标**。

定义 5.7 给定边权二分图 $G = (X, \Delta, Y)$, 带有权值 $\omega : \Delta \to R$, 以及可行顶标 $l : X \cup Y \to R$。定义 G 关于 l 的**相等子图** G_l为:

(1) $V(G_l) = V(G)$

(2) $E(G_l) = \{x_i y_j | l(x_i) + l(y_j) = \omega(x_i y_j)\}$

定理 5.6 给定带有边权 $\omega : \Delta \to R$ 的二分图 $G = (X, \Delta, Y)$，以及可行顶标 l。若相等子图 G_l 有完备匹配，设为 M，则 M 是 G 的最佳匹配。

算法 5.3 *Kuhn-Munkreas* 算法

输入： 二分图 $G = (X, \Delta, Y)$，$|X| = |Y|$，边权函数 $\omega : \Delta \to R$。

输出： G 的最佳匹配 M。

(1) 选取 G 的一个可行顶标 l，构造相等子图 G_l。

(2) 用匈牙利算法求 G_l 的最大匹配，设为 M。若 M 是 G_l 的完备匹配，则 M 是 G 的最佳匹配，算法停止；否则，转第（*3*）步。

(3) 设 u 是 G_l 中未被许配的顶点，不妨设 $u \in X$。令

$Z = \{v | v \in V(G_l), 且u, v之间存在交错轨道\}$

$S = X \cap Z$

$T = Y \cap Z$

计算

$\alpha_l = \min_{x_i \in S, y_j \notin T} \{l(x_i) + l(y_j) - \omega((x_i y_j))\}$。按如下公式修改可行顶标

$$\hat{l}(v) = \begin{cases} l(v) - \alpha_l & v \in S \\ l(v) + \alpha_l & v \in T \\ l(v) & 其它 \end{cases}$$

令 $l \leftarrow \hat{l}$，转第（*1*）步。

第六章 Euler 图与 Hamiltion 图

定义 6.1 经过图 G 每条边的行迹称为 ***Euler* 迹**；经过图 G 每条边的闭行迹称为 ***Euler* 回路**。如果图 G 含有 *Euler* 回路，则称 G 为 ***Euler* 图**

定理 6.1 设 G 是连通图，则下面三个命题等价:

(1) G 是 *Euler* 图

(2) G 的每个顶点的度数都是偶数

(3) G 可以表示成无公共边的圈之并

推论 6.1 连通图 G 有 *Euler* 行迹，当且仅当 G 中最多有两个度数为奇数的顶点。

定理 6.2 设 D 是有向图，且略去 D 中边的方向后，对应的无向图连通，则下面三个命题等价:

(1) D 是 *Euler* 图

(2) $\forall v \in V(D), deg^+(v) = deg^-(v)$

(3) D 可以表示成无公共边的有向圈之并

推论 6.2 连通有向图 D 有 *Euler* 有向迹但不是 *Euler* 有向图，当且仅当 D 中恰有两个度数为奇数的顶点，其中一个顶点入度比出度大 *1*，另一个的出度比入度大 *1*，其余顶点的入度均等于出度。

算法 6.1 *Fleury* 算法
输入： 图 $G = (V(G), E(G))$。
输出： 图 G 的一条行迹。

(1) 任取 $v_0 \in V(G)$，令 $P_0 = v_0$

(2) 假设沿 $P_i = v_0e_1v_1e_2...e_iv_i$ 走到顶点 v_i，按下面的方法从 $E(G) - \{e_1, e_2, ..., e_i\}$ 中选 e_{i+1}

(i) e_{i+1} 与 v_i 关联

(ii) 除非无边可选，否则 e_{i+1} 不选 $G_i = G - \{e_1, e_2, ..., e_i\}$ 的桥

若选不到这样的 e_{i+1}，则算法停止。

(3) 设 v_{i+1} 是 e_{i+1} 关联的另一个顶点，令 $P_{i+1} = v_0e_1v_1e_2...e_iv_ie_{i+1}v_{i+1}$，$i \leftarrow i + 1$，转 *(2)*。

定理 6.3 设 G 是无向 *Euler* 图，则 *Fleury* 算法终止时得到的行迹是 *Euler* 回路。

算法 6.2 逐步插入回路算法

输入： *Euler* 图 $G=(V(G),E(G))$。

输出： 图 G 的一条 *Euler* 回路。

(1) $i \leftarrow 0, v^*=v_1, v=v_1, P_0=v_1, G_0=G$

(2) 在 G_i 中取与 v 关联的任意一条边 $e=vv'$，将 e 及 v' 加入 P_i 中得到 $P_{i+1}=P_iev'$

(3) 若 $v'=v^*$，转（*4*），否则 $i \leftarrow i+1, v \leftarrow v'$，转（*2*）

(4) 若 $E(P_{i+1})=E(G)$，停止；否则，令 $G_{i+1}=G-E(P_{i+1})$，在 G_{i+1} 中任取一条与 P_{i+1} 中某顶点 v_k 关联的边 e，先将 P_{i+1} 改写成起点（终点）为 v_k 的简单回路，再置 $v^*=v_k, v=v_k, i \leftarrow i+1$，转（*2*）

算法 6.3 *Edmonds-Johnson* 算法

输入： 加权图 $G=(V(G),E(G),W(G))$。

输出： 图 G 的一条最优投递路线

(1) 若 G 中没有奇度顶点，令 $G^*=G$，转（*2*），否则求出 G 中度数为奇数的顶点集合 $V_o=\{v|v\in V(G), deg(v)\equiv 1(mod 2)\}$，转（*3*）

(2) 求 G^* 中的 *Euler* 回路，停止

(3) 对 V_o 中的每对顶点 u 和 v，用 *Dijkstra* 算法求出其在 G 中的最短路径 $dist_G(u,v)$ 以及最短路径

(4) 以 V_o 为顶点集合构造带权完全图 $K_{|V_o|}$，每条边 uv 的权为 $dist_G(u,v)$

(5) 求带权完全图 $K_{|V_o|}$ 的总权最小的完备匹配 M

(6) 针对第（*5*）步求得的最小完备匹配中的每条边，给出其两个端点，将该两个端点在 G 中的最短路径上每条边重复一遍，得到 *Euler* 图 G^*，转（*2*）

定义 6.2 经过图 G 每个顶点的轨道称为 ***Hamilton* 轨道**；经过图 G 每个顶点的圈称为 ***Hamilton* 圈**。如果图 G 含有 *Hamilton* 圈，则称这个图为 ***Hamilton* 图**。

规定平凡图是 *Hamilton* 图。

定理 6.4 设 G 是 *Hamilton* 图，则对 $V(G)$ 的每个非空真子集 S，均有 $\omega(G-S)\leqslant |S|$，其中 $\omega(\cdot)$ 是连通片个数。

定理 6.5（*Dirac*）设 G 是简单图，且 $v(G)\geqslant 3, \delta(G)\geqslant \frac{v(G)}{2}$，则 G 是 *Hamilton* 图。

引理 6.1 设 $G=(V,E)$ 是简单图，u 和 v 是 G 中两个不相邻的顶点，且

$$deg(u)+deg(v)\geqslant v(G)$$

则 G 是 *Hamilton* 图，当且仅当 $G+uv$ 是 *Hamilton* 图。

G 的**闭包** $c(G)$指的是用下述方法从 G 得到的一个图：反复连接 G 中度数之和不小于 $v(G)$ 的不相邻顶点对，直到没有这样的顶点对为止。

引理 6.2 $c(G)$ 是唯一确定的。

定理 6.6 简单图 G 是 *Hamilton* 图，当且仅当它的闭包 $c(G)$ 是 *Hamilton* 图。

推论 6.3 设 G 是 $v \geqslant 3$ 的简单图，若 $c(G)$ 是完全图，则 G 是 *Hamilton* 图。

定理 6.7 设 $v(G) \geqslant 3$，对 G 的任意一对顶点 u, v，若 $deg(u) + deg(v) \geqslant v(G) - 1$，则 G 有 *Hamilton* 轨道；若 $deg(u) + deg(v) \geqslant v(G)$，则 G 是 *Hamilton* 图。

旅行商问题或货郎担问题。

设 $K_v = (V, E, W)$ 是 v 阶完全带权图，各边的权非负，有的边的权可以是 $+\infty$，求 K_v 中权最小的 Hamilton 图。

算法 6.4 最近邻法

输入： 加权图 $G = (V(G), E(G), W(G))$，顶点 v_1。

输出： 图 G 的一条 *Hamilton* 圈。

(1) 从访问 v_1 开始，形成初始轨道 $P_1 = v_1$

(2) 若已经访问了第 $k(k \leqslant v - 1)$ 个顶点，形成轨道 $P_k = v_1v_2...v_k$，从 $V - \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ 中选取与 v_k 最近的顶点作为下一步访问的顶点 v_{k+1}

(3) 当访问完 G 中所有顶点后，形成轨道 $P_v = v_1v_2...v_v$，再回到起点 v_1 得到圈 $H = v_1v_2...v_vv_1$，此即为 G 中的一条 *Hamilton* 圈，把它作为旅行商问题的近似解

定理 6.8 设 $G = (V, E, W)$ 是 $v(v \geqslant 3)$ 阶完全带权图，各边带的权均为正数，且满足三角不等式，即对于任意的三个顶点 $v_i, v_j, v_k \in V$，边 v_iv_j, v_jv_k, v_iv_k 带的权 w_{ij}, w_{jk}, w_{ik} 满足 $w_{ij} + w_{jk} \geqslant w_{ik}$，则

$$\frac{d}{d_0} \leqslant \frac{1}{2}(\lceil \log_2 n \rceil + 1)$$

算法 6.5 最小生成树法

输入： 加权图 $G = (V(G), E(G), W(G))$。

输出： 图 G 的一条 *Hamilton* 圈。

(1) 求 G 的一棵最小生成树 T

(2) 将 T 中各边都添加一条平行边，平行边的权与其对应边的权相同。设所得图为 G^*，则 G 为 *Euler* 图

(3) 从某顶点 v 出发，求 G^* 中一条 *Euler* 回路 C_v

(4) 在 G 中按下面的方法求从顶点 v 出发的 *Hamilton* 圈。从 v 出发沿 C_v"抄近路"访问 G 的各顶点，即：假定当前访问的顶点为 x，C_v 上 x 的后续两个顶点分别为 y 与 w，若 y 在此前已经被访问，则直接从 x 经过 xw 访问 w，直到访问完所有顶点为止。最后走出 G 的一条 *Hamilton* 圈 H_v，就是 G 的最优解的近似解

定理 6.9 设 $G = (V, E, W)$ 是 $v(v \geqslant 3)$ 阶完全带权图，各边带的权均为正数，且满足三角不等式，d_0 是 G 中最短 *Hamilton* 圈的权，d 是用最小生成树法求得的 *Hamilton* 圈的权，则 $\frac{d}{d_0} < 2$。

算法 6.6 最小权匹配法

输入： 加权图 $G = (V(G), E(G), W(G))$。

输出： 图 G 的一条 *Hamilton* 圈。

(1) 求 G 的一棵最小生成树 T

(2) 设 T 中度数为奇数的顶点集合为 $V_o = \{v_1, v_2, ..., v_{2k}\}$，求 V_o 的导出子图 $G[V_o] = K_{2k}$ 中总权最小的完备匹配 M，将 M 中 k 条边加到 T 上，得到 *Euler* 图 G^*

(3) 在 G^* 中求从某顶点 v 出发的一条 *Euler* 回路 C_v

(4) 在 G 中，从 v 出发，沿 C_v 中的边按“抄近路法”走出 *Hamilton* 圈 H_v。

定理 6.10 设 $G = (V, E, W)$ 是 $v(v \geqslant 3)$ 阶完全带权图，各边带的权均为正数，并且对于任意的 $v_i, v_j, v_k \in V$，边 v_iv_j, v_jv_k, v_iv_k 带的权 w_{ij}, w_{jk}, w_{ik} 满足三角不等式，$w_{ij} + w_{jk} \geqslant w_{ik}$，$d_0$ 是 G 中最短 *Hamilton* 圈的权，而 d 是用最小权匹配法求得的 *Hamilton* 圈 H 的权，则

$$\frac{d}{d_0} < \frac{3}{2}$$

第七章　图的着色

定义 7.1 图 G 的一个$k-$ **顶点着色**是指把 k 种颜色 $1,2,...,k$ 分配给图 G 的顶点，使每个顶点都分配一种颜色；若相邻顶点的颜色不同，则称这种着色是一个**正常** $k-$ **顶点着色**。若图 G 有一个正常 $k-$ 顶点着色时，称 G 是**可** $k-$ **顶点着色的**。图 G 的**顶点色数**指的是使得图 G 可正常顶点着色的最少颜色数 k，简称为**色数**，记为 $\chi(G)$。色数为 k 的图是可 $k-$ 顶点着色，但不是可 $(k-1)-$ 顶点着色的。

用代数的方式，图 G 的一个正常 $k-$ 顶点着色可以表示为顶点集合 $V(G)$ 的一个划分 $\mathcal{C}=(V_1,V_2,...,V_k)$，其中 E_i 表示着 i 色的边子集（可能是空集），满足:

(1) $V(G)=V_1\cup V_2\cup...\cup V_k$

(2) $V_i\cap V_j=\emptyset, 1\leqslant i\neq j\leqslant k$

(3) 任给 $1\leqslant i\leqslant k$，且任给 $u,v\in V_i$，$uv\notin E(G)$
在进行正常 $k-$ 顶点着色时，若要求每种颜色都必须用到，则还需满足下面的第（4）个条件；否则不需要。

(4) 任给 $1\leqslant i\leqslant k, V_i\neq\emptyset$

关于顶点着色，有下面简单的性质:

(1) v 阶图的色数满足 $1\leqslant\chi(G)\leqslant v$；$\chi(G)=1$ 当且仅当 G 是零图（即，没有边的图）；$\chi(G)=v$ 当且仅当 G 是 v 阶完全图。

(2) $\chi(G)=2$ 当且仅当 G 是有边二分图。

(3) $\chi(C_v)=\begin{cases}2 & v\text{是偶数}\\ 3 & v\text{是奇数}\end{cases}$

(4) 若图 H 是 G 的子图，则 $\chi(H)\leqslant\chi(G)$

定理 7.1 对任何图 G，$\chi(G)\leqslant\Delta(G)+1$。

定理 7.2 (*Brooks*) 设 $v(v\geqslant 3)$ 阶连通图 G 不是完全图也不是奇圈，则 $\chi(G)\leqslant\Delta(G)$。

定义 7.2 图 G 的一个$k-$ **边着色**是指把 k 种颜色 $1,2,...,k$ 分配给图 G 的边，使每条边都分配一种颜色；若相邻边异色，则称这种边着色为一个**正常** $k-$ **边着色**。若图 G 有一个正常 $k-$ 边着色时，称 G 是可$k-$ **边着色的**。图 G 的**边色数** 指的是使得图 G 可正常边着色的最少颜色数 k，记为 $\chi'(G)$。

引理 7.1 若连通图 G 不是奇圈，则存在一种 $2-$ 边着色，使得所用的两种颜色在每个度数大于等于 2 的顶点处出现，即每个度数大于等于 2 的顶点所关联的边都用到了这两种颜色。

定义 7.3 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}'$ 是图 G 的两种 $k-$ 边着色，若 $\sum_{v\in V(G)} c(v) < \sum_{v\in V(G)} c'(v)$，则称 $k-$ 边着色 $\mathcal{C}'$ 是对 $\mathcal{C}$ 的一个**改进**，其中 $c(v)$ 与 $c'(v)$ 分别表示用 $\mathcal{C}$、$\mathcal{C}'$ 着色时顶点 v 关联的边中出现的颜色数。不能再改进的 $k-$ 边着色称为**最佳** $k-$ **边着色**。

引理 7.2 设 $\mathcal{C} = (E_1, E_2, ..., E_k)$ 是图 G 的一个最佳 $k-$ 边着色。如果存在一个顶点 v_0 和两种颜色 i 与 j，使得 i 色不在 v_0 关联的边中出现，但 j 色在 v_0 关联的边中至少出现两次，则边导出子图 $G[E_i \cup E_j]$ 中含 v_0 的连通片是一个奇圈。

定理 7.3 若 G 是二分图，则 $\chi'(G) = \Delta(G)$。

定理 7.4 (*Vizing*) 若 G 是简单图，则 $\chi'(G) = \Delta(G)$ 或 $\Delta(G) + 1$。

引理 7.3 设 M 和 N 是图 G 中两个无公共边匹配，且 $|M| > |N|$，则存在 G 中两个无公共边的匹配 M' 和 N'，使得 $|M'| = |M| - 1, |N'| = |N| + 1, M' \cup N' = M \cup N$

定理 7.5 设 G 是二分图，$\varepsilon = |E(G)|, \Delta \leqslant p$，则存在 G 的 p 个不相交匹配 $M_1, M_2, ..., M_p$，使得

$$E(G) = \cup_{i=1}^{p} M_i$$

且对 $1 \leqslant i \leqslant p$，

$$\left\lfloor \frac{\varepsilon}{p} \right\rfloor \leqslant |M_i| \leqslant \left\lceil \frac{\varepsilon}{p} \right\rceil$$

定义 7.4 平面图 G 的一个**正常面着色**是指：对其一个平面嵌入 G' 的每个面（国家）着一种颜色，使得相邻的两个面着不同的颜色。若能用 k 种颜色给 G' 的面正常着色，就称 G 是**可** $k-$ **面着色的**。若 G 是可 $k-$ 面着色的，但不是可 $(k-1)$ 面着色的，则称 G 的**面色数**为 k，记为 $\chi_*(G) = k$。

定义 7.5 设 G 是平面图，G' 是 G 的平面嵌入，构造 G 的**对偶图** G^*如下：

(1) G' 的每个面 f，都有 G^* 的一个顶点 f^* 与之对应

(2) G' 的每条边 e 都有 G^* 的一条边 e^* 与之对应：若 e 在 G' 的两个面 f_i 和 f_j 的公共边界上，则在 G^* 中 e^* 连接这两个面对应的顶点 f_i^* 和 f_j^*；若 e 只在一个面 f_i 的边界上，则在 G^* 中对应的 e^* 是以 f_i^* 为端点的环。

从定义易见下述性质成立：

(1) G^* 是平面图，且是平面嵌入。

(2) 若 e 是 G' 中的环，则它对应的边 e^* 是 G^* 的桥；若 e 是 G' 中的桥，则 e^* 是 G^* 的环。

(3) G^* 是连通的。

(4) 若 G' 的面 f_i 和 f_j 的边界上至少有两条公共边，则关联 f_i^* 和 f_j^* 的边有重边。

(5) 两个图同构，但它们的对偶图不一定同构。

定理 7.6 设 G^* 是连通平面图 G 的对偶图，n^*, m^*, φ^* 和 n, m, φ 分别是 G^* 和 G 的顶点数、边数和面数，则

(1) $n^* = \varphi, m^* = m, \varphi^* = n$

(2) 设 G^* 的顶点 f^* 与 G' 的面 f 对应，则 $deg_{G^*}(f^*) = deg_G(f)$

定理 7.7 设 G 是连通的无环平面图，则 G 是可 $k-$ 面着色的，当且仅当它的对偶图 G^* 是可 $k-$ 顶点着色的。

定理 7.8 任何平面图都是可 $6-$ 顶点着色的。

定理 7.9 任何平面图都是可 $5-$ 顶点着色的。

第八章　有向图

对于一个有向图 D，忽略每条有向边的方向，得到的无向图 G 称为 D 的**底图**；反之，对于任意一个无向图 G，给定每条边指定一个方向，得到的有向图 D 称为 G 的**定向图**。显然，有向图的底图唯一，但无向图的定向图不唯一。

定义 8.1 若 D 中存在有向边 (u,v)，则称 v 是 u 的**外邻顶点**，称 u 是 v 的**内邻顶点**。对于顶点 $u \in V(D)$，分别用 $N_D^+(u)$ 和 $N_D^-(u)$ 表示 D 中 u 的所有外邻顶点和所有内邻顶点构成的集合，简称 u 的内邻集和外邻集，即

$$N_D^+(u) = \{v|e = (u,v) \in E(D)\}, N_D^-(u) = \{v|e = (v,u) \in E(D)\}$$

定义 8.2 设 D 是有向图，若存在从 u 到 v 的有向路径，则称 u **可达**v。若 $\forall u,v \in V(D)$，u 可达 v 而且 v 可达 u 时，即 u 与 v 双向可达，则称 D 是**强连通的**；若 $\forall u,v \in V(D)$，u 可达 v 或 v 可达 u 时，则称 D 是**单向连通的**；若 D 的底图是连通的无向图，则称 D 是**弱连通的**。

与无向图的连通类似，双向可达在有向图 D 的顶点集 $V(D)$ 上也是一个等价关系。根据双向可达关系可以确定 $V(D)$ 的一个划分 $(V_1, V_2, ..., V_\omega)$，由它们导出的有向子图 $D[V_1]$, $D[V_2], ..., D[V_\omega]$，称为 D 的**强连通片**。如果 D 只有一个强连通片，则它是强连通的。

定理 8.1 D 是强连通有向图当且仅当 D 中存在有向生成回路，即存在含有 D 中所有顶点的有向回路。

定理 8.2 连通无向图 G 可以定向成强连通有向图，当且仅当 G 中没有桥。

引理 8.1 若 D 单向连通，则 $\forall S \subseteq V(D), S \neq \emptyset$，都存在顶点 $v \in S$，v 可达 S 中所有的顶点。

定理 8.3 D 是单向连通有向图，当且仅当 D 中存在有向生成路径。

定理 8.4 (*Roy*，*Gallai*) 有向图 D 中含有长度为 $\chi(G) - 1$ 的有向轨道，其中 G 为 D 的底图。

完全图的定向图称为**竞赛图**。

推论 8.1 每个竞赛图都有有向 *Hamilton* 轨道。

总存在一个顶点，从它出发，最多两步即可到达其他任何一个顶点。这样的顶点称为竞赛图中的**王**。

假定从 u 到 v 的有向边 (u,v) 表示 u 胜了 v，此时我们记 u 得了一分，v 得零分。

定理 8.5 竞赛图中得分最多的顶点是王。

定理 8.6 竞赛图 D 中 v 是唯一的王，当且仅当 v 的得分是 $v-1$，其中 $v=|V(D)|$。

定理 8.7 假定 $v \geqslant 3$ 阶竞赛图 D 是强连通的，则任给 $3 \leqslant k \leqslant v$，$D$ 中每个顶点都在某个 k 阶有向圈中。

定理 8.8 设 $P(u_0, v_0)$ 是严格有向图 D 中最长的有向轨道，则其长度 $|E(P(u_0, v_0))| \geqslant \max\{\delta^-, \delta^+\}$。其中，$\delta^-, \delta^+$ 分别为 D 的**最小入度** 与**最小出度**。

推论 8.2 若 $\max\{\delta^-, \delta^+\} > 0$，则严格有向图中有长度大于 $\max\{\delta^-, \delta^+\}$ 的有向圈。

定理 8.9 设 D 是 v 阶严格有向图，若 $\min\{\delta^-, \delta^+\} \geqslant \frac{v}{2} > 1$，则 D 是有向 *Hamilton* 图。

第九章　网络流理论

定义 9.1 一个网络可以定义为一个四元组 $N=(D,s,t,c)$，其中:

(1) D 是一个弱连通的有向图。

(2) $s,t\in V(D)$，分别称为**源**与**汇**。

(3) $c:E(D)\to \boldsymbol{R}$ 为**容量函数**。任给 $e\in E(D), c(e)\geqslant 0$ 为边 e 的**容量**。

定义 9.2 网络 $N=(D,s,t,c)$ 上的流函数为 $f:E(D)\to \boldsymbol{R}$，要求满足:

(1) 任给 $e\in E(D)$，都有 $c(e)\geqslant f(e)\geqslant 0$。

(2) 任给 $v\in V(D)-\{s,t\}$，都有 $\sum_{e\in\alpha(v)} f(e)-\sum_{e\in\beta(v)} f(e)=0$。
其中，$\alpha(v)$是所有以 v 为头的边集，而$\beta(v)$则是所有以 v 为尾的边集。f 的**流量**定义为

$$Val(f)=\sum_{e\in\alpha(t)} f(e)-\sum_{e\in\beta(t)} f(e)=\sum_{e\in\beta(s)} f(e)-\sum_{e\in\alpha(s)} f(e)$$

定义 9.3 给定网络 $N=(D,s,t,c)$，$S\subset V(D)$，满足 $s\in S, t\in \overline{S}=V(D)-S$，则称

$$(S,\overline{S})=\{e=(u,v)|e\in E(D), u\in S, v\in \overline{S}\}$$

为网络 N 的**一个截**，而称

$$C(S,\overline{S})=\sum_{e\in(S,\overline{S})} c(e)$$

为 $(S,\overline{S})$ 的**截量**。截量最小的截称为**最小截**。

定理 9.1 设 f 是网络 $N=(D,s,t,c)$ 的流函数，$(S,\overline{S})$ 是其一个截，则有

$$Val(f)=\sum_{e\in(S,\overline{S})} f(e)-\sum_{e\in(\overline{S},S)} f(e)$$

推论 9.1 设 f 是网络 $N=(D,s,t,c)$ 的流函数，$(S,\overline{S})$ 是其一个截，则有

$$Val(f)\leqslant C(S,\overline{S})$$

推论 9.2 设 f 是网络 $N=(D,s,t,c)$ 的流函数，$(S,\overline{S})$ 是其一个截，若 $Val(f)=C(S,\overline{S})$，则 f 是最大流，$(S,\overline{S})$ 是最小截。

设有向图 D 对应的底图为 G，也就是说，将 D 中所有的边略去，得到的无向图是 G。设 $P(s,u)$ 为 G 中一条以 s 为起点、u 为终点的无向轨道。我们在 G 中规定 $P(s,u)$ 的方向为从 s 到 u。而 $P(s,u)$ 上每条无向边 $\overline{e}$ 都对应于 D 中的一条有向边 e。若 e 的方向与 $P(s,u)$ 的方向相同，则称 e 为 P 的**同向边**；否则称为 P 的**反向边**。

定义 9.4 给定网络 $N=(D,s,t,c)$，N 上的流函数 f，底图 G 中的无向轨道 $P(s,u)$。定义：

(1) 若 e 是 $P(s,u)$ 的正向边，且 $f(e)<c(e)$，则称 e 为**未满载边**

(2) 若 e 是 $P(s,u)$ 的正向边，且 $f(e)=c(e)$，则称 e 为**满载边**

(3) 若 e 是 $P(s,u)$ 的反向边，且 $f(e)=0$，则称 e 为**零载边**

(4) 若 e 是 $P(s,u)$ 的正向边，且 $f(e)>0$，则称 e 为**正载边**

对于无向轨道 $P(s,u)$，我们定义 $P(s,u)$ 上每条边 e 的**可增载量** $l(e)$为：

$$l(e)=\begin{cases} c(e)-f(e) & e\text{是正向边} \\ f(e) & e\text{是反向边} \end{cases}$$

而 $P(s,u)$ 的**可增载量** $l(P)$则定义为：

$$l(P)=\min_{e\in E(P)} l(e)$$

定义 9.5 给定网络 $N=(D,s,t,c)$，N 上的流函数 f，以及 N 中的无向轨道 $P(s,v)$。

(1) 若 $l(P)>0$，则称 $P(s,v)$ 是**未满载轨道**

(2) 若 $l(P)=0$，则称 $P(s,v)$ 是**满载轨道**

(3) 若 $l(P)>0$ 且 $v=t$，则称 $P(s,t)$ 是 N 上关于 f 的**可增载轨道**

引理 9.1 设 f 是网络 $N=(D,s,t,c)$ 的流函数，$P(s,t)$ 是 N 上关于 f 的可增载轨道，定义新的函数 $\overline{f}:E(D)\to \boldsymbol{R}$ 为

$$\overline{f}(e)=\begin{cases} f(e)+l(P) & e\text{是正向边} \\ f(e)-l(P) & e\text{是反向边} \\ f(e) & e\text{其它} \end{cases}$$

则 $\overline{f}$ 是网络 N 的流函数，且 $Val(\overline{f})=Val(f)+l(P)$。

算法 9.1 可增载轨道算法

输入： 网络 $N=(D,s,t,c)$，流函数 f。

输出： 一条可增载轨道，或指出当前流函数是最大流。

(1) $S=s$；令 $prev(s)=*$。

(2) 若 $t\in S$，则已经找到可增载轨道，通过 $prev(t)$ 回溯输出可增载轨道，算法停止；否则，转第（*3*）步。

(3) 若存在 $u\in S, v\in\overline{S}$，使得 $(u,v)\in E(D)$ 且边 (u,v) 未满载，即 $f((u,v))<c((u,v))$（(u,v) 是正向边），则令 $S\leftarrow S\cup\{v\}, prev(v)=u$，转第（*2*）步；否则，转第（*4*）步。

(4) 若存在 $u\in S, v\in\overline{S}$，使得 $(v,u)\in E(D)$ 且边 (v,u) 正载，即 $f((u,v))>0$（(v,u) 是正向边），则令 $S\leftarrow S\cup\{v\}, prev(v)=u$，转第（*2*）步；否则，输出无可增载轨道，算法停止。

引理 9.2 给定网络 $N=(D,s,t,c)$，流函数 f。若 N 中存在关于 f 的可增载轨道，则算法 *9.1* 一定能够找到一条可增载轨道。

算法 9.2 *Ford-Fulkerson* 最大流算法

输入： 网络 $N=(D,s,t,c)$。

输出： 最大流函数 f。

(1) 取初始流函数 f。比如说可以取 $f(c)=0$。

(2) 调用可增载轨道算法。若找到可增载轨道 $P(s,t)$，则构造新的流函数 $\overline{f}$ 如下：

$$\overline{f}(e)=\begin{cases} f(e)+l(P) & e\text{是正向边} \\ f(e)-l(P) & e\text{是反向边} \\ f(e) & e\text{其它} \end{cases}$$

令 $f\leftarrow\overline{f}$，转第（*2*）步。否则，没有找到可增载轨道，输出 f 是最大流。停止。

定理 9.2 给定网络 $N=(D,s,t,c)$，*Ford-Fulkerson* 算法得到的流函数 f 一定是最大流。

推论 9.3（**最大流最小截定理**）在网络中，最大流的流量 = 最小截的截量。

定义 9.6 一个容量有上下界的网络可以定义为一个五元组 $N=(D,s,t,b,c)$，其中：

(1) D 是一个弱连通的有向图。

(2) $s\in V(D)$，$t\in V(D)$，分别称为**源与汇**。

(3) $b,c:E(D)\to R$ 分别为容量上、下界函数。任给 $e\in E(D)$，$c(e)\geqslant b(e)\geqslant 0$ 为边 e 的容量上界与容量下界。

定义 9.7 网络 $N=(D,s,t,b,c)$ 上的流函数定义为 $f:E(D)\to\boldsymbol{R}$，要求满足：

(1) 任给 $e\in E(D)$，都有 $c(e)\geqslant f(e)\geqslant b(e)$

(2) 任给 $v\in V(D)-\{s,t\}$，都有 $\sum_{e\in\alpha(v)}f(e)-\sum_{e\in\beta(v)}f(e)=0$。

其中，$\alpha(v)$是所有以 v 为头的边集，而$\beta(v)$则是所有以 v 为尾的边集。f 的**流量**定义为

$$Val(f)=\sum_{e\in\alpha(t)}f(e)-\sum_{e\in\beta(t)}f(e)=\sum_{e\in\beta(s)}f(e)-\sum_{e\in\alpha(s)}f(e)$$

定义 9.8 给定容量有上下界网络 $N=(D,s,t,b,c)$，定义 N 的伴随网络为一般的网络 $N'=(D',s',t',c')$，其中：

(1) $V(D')=V(D)\cup\{s',t'\}$，其中，$s',t'\notin V(D)$

(2) $E(D')=E(D)\cup\{(s',v),(v,t')|v\in V(D)\}\cup\{(s,t),(t,s)\}$

(3) s' 与 t' 分别为伴随网络 N' 的**源与汇**

(4) 容量函数 c' 定义为:

$$c'(e)=\begin{cases} c(e)-b(e) & e\in E(D)\\ \sum\limits_{e\in\alpha(v)} b(e) & e=(s',v),v\in V(D)\\ \sum\limits_{e\in\beta(v)} b(e) & e=(v,t'),v\in V(D)\\ +\infty & e=(s,t)\text{或}(t,s)\end{cases}$$

定理 9.3 给定网络 $N=(D,s,t,b,c)$，其伴随网络为 $N'=(D',s',t',c')$，则 N 中存在可行流，当且仅当 N' 中最大流使得任给 $v\in V(D)$，边 (s',v) 都满载，即若 N' 的最大流为 f'，有 $f'((s',v))=c'((s',v))$。

算法 9.3 容量有上下界网路的最大流算法

输入: 容量有上下界网路 $N=(D,s,t,b,c)$。

输出: 最大流函数 f，或断定 N 没有可行流。

(1) 构造 N 的伴随网络 $N'=(D',s',t',c')$。

(2) 用 *2F* 算法求出 N' 的最大流函数 f'。

(3) 若 f' 满足，任给 $v\in V(D)$，f' 使得边 (s',v) 满载，即 $f'((s',v))=c'((s',v))$，则转第（*4*）步；否则，输出结论“N 没有可行流”，算法停止。

(4) 根据 f'，构造 N 的一个可行流 f: 任给 $e\in E(D)$，

$$f(e)=f'(e)+b(e)$$

(5) 以 f 作为初始流函数，用 *2F* 算法求出 N 的最大流，算法停止。

定义 9.9 一个有供需约束的网络可以定义为一个六元组 $N=(D,X,Y,\sigma,\rho,c)$，其中:

(1) D 是一个弱连通的有向图。

(2) $X=\{x_1,x_2,...,x_m\}\subseteq V(D)$ 是源集合，每个 $x_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 表示一个产地。

(3) $y=y_1,y_2,...,y_n\in V(D)$ 是汇集合，每个 $y_j(1\leqslant j\leqslant n)$ 表示一个消费市场。

(4) $\sigma:X\to \boldsymbol{R},\sigma(x_i)$ 表示产地 x_i 的产量，$1\leqslant i\leqslant m$。

(5) $\rho:Y\to \boldsymbol{R},\rho(y_j)$ 表示消费市场 y_j 的需求量，$1\leqslant j\leqslant n$。

(6) $c:E(D)\to \boldsymbol{R}$ 为容量函数。任给 $e\in E(D),c(e)$ 为边 e 的容量。

定义 9.10 给定有供需约束的网络 $N=(D,X,Y,\sigma,\rho,c)$，N 上的流函数 $f:E(D)\to\boldsymbol{R}$，要求满足:

(1) 任给 $e\in E(D)$，都有 $0\leqslant f(e)\leqslant c(e)$

(2) 任给 $v\in V(D)-X\cup Y$，都有 $\sum_{e\in\alpha(v)}f(e)-\sum_{e\in\beta(v)}f(e)=0$

(3) 任给 $1\leqslant i\leqslant m$，都有 $\sum_{e\in\beta(x_i)}f(e)-\sum_{e\in\alpha(x_i)}f(e)\leqslant\sigma(x_i)$，表示从顶点 x_i 出实际运出量不能超过其产量。

(4) 任给 $1 \leqslant j \leqslant n$，都有 $\sum_{e\in\alpha(y_j)} f(e) - \sum_{e\in\beta(y_j)} f(e) \geqslant \rho(y_j)$，表示实际运入顶点 y_j 的总量大于等于其消费需求。

定理 9.4 给定有供需约束的网络 $N = (D, X, Y, \sigma, \rho, c)$。$N$ 有可行流的充要条件是：任给 $S \subseteq V(D)$，都满足

$$C((S, \overline{S})) \geqslant \rho(Y \cap \overline{S}) - \sigma(X \cap \overline{S})$$

其中，$C((S,\overline{S})) = \sum_{e\in(S,\overline{S})} c(e)$ 为截 $(S,\overline{S})$ 的截量，$\rho(Y\cap\overline{S}) = \sum_{y_j\in Y\cap\overline{S}} \rho(y_j)$，$\sigma(X\cap\overline{S}) = \sum_{x_i\in X\cap\overline{S}} \sigma(x_i)$。

定义 9.11 给定有供需约束的网络 $N = (D, X, Y, \sigma, \rho, c)$，定义 N 的附加网络 $N' = (D', x_0, y_0, c')$ 为：

(1) $V(D') = V(D) \cup \{x_0, y_0\}$，其中 $x_0, y_0 \notin V(D)$。

(2) $E(D') = E(D) \cup \{(x_0, x_i)|i = 1, ..., m\} \cup \{(y_j, y_0)|j = 1, ..., n\}$。

(3) x_0 与 y_0 分别为 N' 的源与汇。

(4) 容量函数 c' 定义为：

$$c'(e) = \begin{cases} c(e) & e \in E(D) \\ \sigma(x_i) & e = (x_0, x_i) \\ \rho(y_j) & e = (y_j, y_0) \end{cases}$$

引理 9.3 有供需约束的网络 $N = (D, X, Y, \sigma, \rho, c)$ 存在可行流，当且仅当其附加网络 $N' = (D', x_0, y_0, c')$ 的最大流 f' 满足：任给 $i \leqslant j \leqslant n$，$f'((y_j, y_0)) = c'((y_j, y_0))$。

算法 9.4 有供需约束网路的可行流算法

输入： 有供需约束网路 $N = (D, X, Y, \sigma, \rho, c)$。

输出： N 的可行流函数 f，或断定 N 没有可行流。

(1) 构造 N 的附加网络 $N' = (D', x_0, y_0, c')$。

(2) 用 *2F* 算法求出 N' 的最大流函数 f'。

(3) 若 f' 满足：任给 $1 \leqslant j \leqslant n$，$f'$ 使得边 (y_j, y_0) 满载，即 $f'((y_j, y_0)) = c'((y_j, y_0))$，则转第（*4*）步；否则，输出结论"$N$ 没有可行流"，算法停止。

(4) 将 f' 限制到网络 N 上。即任给 $e \in E(D) \in E(D')$，令 $f(e) = f'(e)$。f 就是 N 的可行流。算法停止。

第十章　图矩阵与图空间

定义 10.1 给定数域 F，非空集合 V，V 中元素通常称为向量。

(1) 在 V 中定义了一种二元运算，称为向量加法，记作"+"，即对 V 中任意两个向量 α 与 β，都按某一法则对应于 V 内唯一确定的一个向量 $\alpha+\beta$，称为 α 与 β 的和。

(2) 在 F 与 V 的元素间定义了一种运算，称为数量乘法（简称数乘），即对 V 中任意元素 α 和 F 中任意元素 k，都按某一法则对应 V 内唯一确定的元素 $k\alpha$，称为 k 与 α 的积。

若上面定义的两种运算满足下面的八个性质，则称 V 是 F 上的一个**线性空间**:

略。

定义 10.2 设 V 是数域 F 上的线性空间，

(1) 对于一组向量 $v_1, v_2, ..., v_n \in V$，如果存在一组不全为零的系数 $k_1, k_2, ..., k_n \in F$，使得 $kv_1 + kv_2 + ... + k_nv_n = 0$，那么称该组向量 $v_1, v_2, ..., v_n$ **线性相关**。反之，称这组向量**线性无关**。更一般的，如果有无穷多个向量，而且其中任意有限多个向量都是线性无关的，我们称这无穷多个向量为线性无关。

(2) 如果存在一组向量 $v_1, v_2, ..., v_n \in V$，$v_1, v_2, ..., v_n$ 线性无关，而且 V 中任意一个向量都可以表示成 $v_1, v_2, ..., v_n$ 的线性组合。我们称 $v_1, v_2, ..., v_n$ 为向量空间 V 的一组**基**，称 V 的**维数**为 n。

定义 10.3 设 V 是数域 F 上的线性空间，$V' \subseteq V$ 且 $V' \neq \emptyset$。若 V' 也是 F 上的线性空间，则称 V' 是 V 的**线性子空间**。

定理 10.1 设 V 是数域 F 上的线性空间，$V' \subset V$ 且 $V' \neq \emptyset$。若 V' 中任意两个向量的线性组合仍属于 V'，即任给 $\alpha, \beta \in V'$，任给 $k, l \in F$，都有 $k\alpha + l\beta \in V'$，则 V' 是 V 的线性子空间。

边空间

给定图 $G = (V, E)$，设 $E = \{e_1, e_2, ..., e_\varepsilon\}$，我们将 E 的自己与 ε 维度 $0-1$ 向量之间建立一一对应关系：设 $E' \subset E$，其对应的向量为 $(i_1, i_2, ..., i_\varepsilon)$，其中

$$i_j = \begin{cases} 1 & e_j \in E' \\ 0 & e_j \notin E' \end{cases}$$

定义 10.4 给定图 $G=(V,E)$，设 $E=\{e_1,e_2,...,e_\varepsilon\}$，我们将 G 所有的边子集对应的向量作为元素，构成下面的向量集合

$$\mathcal{E}=\{E'\text{对应的向量}|E'\subseteq E\}$$

在 $\mathcal{E}(G)$ 中向量间定义加法如下：

$$(i_1,i_2,...,i_\varepsilon)+(j_1,j_2,...,j_\varepsilon)=(i_1+j_1,i_2+j_2,...,i_\varepsilon+j_\varepsilon)$$

其中，每个分量的加法为 F_2 中的加法。在 $\mathcal{E}(G)$ 中向量与 F_2 中元素定义数乘如下：

$$1\times(i_1,i_2,...,i_\varepsilon)=(i_1,i_2,...,i_\varepsilon)$$

$$0\times(i_1,i_2,...,i_\varepsilon)=(0,0,...,0)$$

则很容易验证，$\mathcal{E}(G)$ 在上面定义的运算下满足线性空间的所有要求，$\mathcal{E}(G)$ 是 F_2 上的线性空间，简称为 G 的**边空间**。

圈空间

定义 10.5 给定图 $G=(V,E)$，G 中一些无公共边的圈之并对应于 G 的一个边集合，这样的边集合在 $\mathcal{E}(G)$ 中对应的边向量称为**圈向量**，所有的圈向量和零向量构成集合 $\mathcal{C}(G)$。下面的定理 *10.2* 说明 $\mathcal{C}(G)$ 是 $\mathcal{E}(G)$ 的线性子空间，称为**圈空间**。

定理 10.2 $\mathcal{C}(G)$ 是 $\mathcal{E}(G)$ 的线性子空间。

定义 10.6 给定连通图 G，取 G 的一棵生成树 T。由定理 *2.1* 知，任取一条边 $e\in E(G)-E(T)$，则 $T+e$ 上有唯一一个圈。设 $e_1,e_2,...,e_{\varepsilon-v+1}$ 为 G 中所有不在 T 上的边。分别记 $T+e_1,T+e_2,...,T+e_{\varepsilon-v+1}$ 上所含的圈为 $C_1,C_2,...,C_{\varepsilon-v+1}$。我们称 $C_1,C_2,...,C_{\varepsilon-v+1}$ 为 G 的一组**基本圈组**。

定理 10.3 给定连通图 G 的一棵生成树 T，其对应的基本圈组 $C_1,C_2,...,C_{\varepsilon-v+1}$ 为 $\mathcal{C}(G)$ 的一组基，$\mathcal{C}(G)$ 的维数为 $\varepsilon-v+1$。

断集空间

定义 10.7 给定图 $G=(V(G),E(G))$，取 $V'\subset V$，使得 $V'\neq\emptyset$ 且 $\overline{V'}=V-V'\neq\emptyset$，用 $(V',\overline{V'})$ 表示 $E(G)$ 中一个端点在 V' 中，另一个端点在 $\overline{V'}$ 中的边子集。我们称 $(V',\overline{V'})$ 为 G 的一个**断集**。断集在 $\mathcal{E}(G)$ 中对应的向量称为**断集向量**。我们将图 G 所有的断集向量与零向量组成的集合记为 $\mathcal{S}(G)$。下面的定理 *10.4* 说明 $\mathcal{S}(G)$ 是 $\mathcal{E}(G)$ 的线性子空间，我们称之为**断集空间**。

定理 10.4 $\mathcal{S}(G)$ 是 $\mathcal{E}(G)$ 的线性子空间。

定义 10.8 若 $E'\in E(G)$ 满足 $G-E'$ 不连通，且任给 E' 的真子集 E''，$G-E''$ 都连通，则称 E' 为图 G 的**割集**。

定义 10.9 给定连通图 G 的生成树 T，则 G 的任一割集必含树 T 上的一条边。设 $e_1,e_2,...,e_{v-1}$ 为树 T 上所有的边，记 G 中含边 $e_1,e_2,...,e_{v-1}$ 的割集分别为 $S_1,S_2,...,S_{v-1}$。下面的定理 *10.5* 说明 $S_1,S_2,...,S_{v-1}$ 是断集空间 $\mathcal{S}(G)$ 的一组基，我们称之为**基本割集组**。

定理 10.5 给定连通图 G 的一颗生成树 T，其对应的基本割集组 $S_1, S_2, ..., S_{v-1}$ 为 $\mathcal{S}(G)$ 的一组基，$\mathcal{S}(G)$ 的维数为 $v-1$。

定理 10.6 任给连通图 G 的圈向量 $C \in \mathcal{C}(G)$ 和断集向量 $S \in \mathcal{S}(G)$，C 与 S 的内积 $(C, S) = 0$。其中的运算是在 F_2 中进行的。

我们将所有的基本圈向量作为行向量，可以构成一个矩阵，称为**基本圈矩阵**。

类似，我们将所有的基本割集向量作为行向量，可以得到如下的**基本割集矩阵**。

给定连通图 G 的生成树 T，我们总是可以按照如上的方式，将基本圈矩阵与基本割集矩阵表示成

$$C_f(G) = (I_{\varepsilon-v+1} : C_{12}), S_f(G) = (S_{11} : I_{v-1})$$

推论 10.1 给定连通图 G 的生成树 T，G 关于 T 的基本圈矩阵与基本割集矩阵分别为

$$C_f(G) = (I_{\varepsilon-v+1} : C_{12}), S_f(G) = (S_{11} : I_{v-1})$$

其中，C_{12} 的列对应树 T 的边，$S_f(G)$ 的列对应余树的边，则有

$$S_{11} = C_{12}^T$$

定义 10.10 给定无向图 $G = (V, E)$，设 $V = \{v_1, v_2, ..., v_v\}$，定义 G 的邻接矩阵为

$$A(G) = (a_{ij})_{v \times v}$$

其中 a_{ij} 为图 G 中顶点 v_i 与 v_j 之间的边数。

定理 10.7 设 $G = (V, E)$ 是无向图，$V = \{v_1, v_2, ..., v_v\}$，其邻接矩阵为 $A(G) = (a_{ij})_{v \times v}$。记 $A^n(G) = (a_{ij}^n)_{v \times v}$，则 a_{ij}^n 为图 G 中从 v_i 到 v_j 长为 n 的路径数。

定义 10.11 给定有向图 $D = (V, E)$，设 $V = \{v_1, v_2, ..., v_v\}$，定义 D 的邻接矩阵为

$$A(D) = (a_{ij})_{v \times v}$$

其中 a_{ij} 为图 D 中以 v_i 为尾、以 v_j 为头的边数。

定理 10.8 设 $D = (V, E)$ 是有向图，$V = \{v_1, v_2, ..., v_v\}$，其邻接矩阵为 $A(D) = (a_{ij})_{v \times v}$。记 $A^n(D) = (a_{ij}^n)_{v \times v}$，则 a_{ij}^n 为图 D 中从 v_i 到 v_j 长为 n 的有向路径数。

算法 10.1 略

引理 10.1 略

定理 10.9 略

定义 10.12 给定简单无向图 $G = (V, E)$，设 $V = \{v_1, v_2, ..., v_v\}$，$E = \{e_1, e_2, ..., e_\varepsilon\}$，定义 G 的**关联矩阵**为 $B(G) = (b_{ij})_{v \times \varepsilon}$，其中 $v = |V(G)|$，$\varepsilon = |E(G)|$，b_{ij} 定义为

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i\text{与}e_j\text{关联} \\ 0 & v_i\text{与}e_j\text{不关联} \end{cases}$$

我们称删去 $B(G)$ 中任意一行后得到的矩阵为 G 的**基本关联矩阵**，记作 $B_f(G)$。

定理 10.10 设 G 是连通图，则有

$$r(B(G)) = r(B_f(G)) = v - 1$$

其中，$r(B(G))$ 与 $r_f(B(G))$ 分别为 $B(G)$ 与 $B_f(G)$ 的秩，$v = |V(G)|$ 为图 G 的阶。

推论 10.2 设 G 是简单图，则有

$$r(B(G)) = r(B_f(G)) = v(G) - \omega$$

其中，ω 为图 G 的连通片个数。

定理 10.11 设 G 是连通图，$e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_{v(G)-1}} \in E(G)$，则 $G[\{e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_{v(G)-1}}\}]$ 是 G 的生成树，等价于 $B_f(G)$ 中由第 $i_1, i_2, ..., i_{v(G)-1}$ 列构成的子矩阵为满秩矩阵。

定义 10.13 给定有向图 $D = (V, E)$，设顶点集合为 $V = \{v_1, v_2, ..., v_v\}$，有向边集合为 $E = \{e_1, e_2, ..., e_\varepsilon\}$，定义 G 的关联矩阵为 $B(D) = (b_{ij})_{v\times\varepsilon}$，其中 $v = |V(D)|$，$\varepsilon = |E(D)|$，b_{ij} 定义为

$$b_{ij} = \begin{cases} -1 & v_i\text{是}e_j\text{的头} \\ 1 & v_i\text{是}e_j\text{的尾} \\ 0 & v_i\text{与}e_j\text{不关联} \end{cases}$$

定理 10.12 设 D 是连通有向图，则有

$$r(B(D)) = r(B_f(D)) = v(D) - 1$$

其中，$r(B(D))$ 与 $r_f(B(D))$ 分别为 $B(D)$ 与 $B_f(D)$ 的秩，$v(D) = |V(D)|$ 为图 D 的阶。

推论 10.3 设 D 是简单图，则有

$$r(B(D)) = r(B_f(D)) = v(D) - \omega$$

其中，ω 为有向图 D 的底图 G 的连通片数。

引理 10.2 设 $B(D)$ 是有向图 D 的关联矩阵，B' 是 $B(D)$ 的任意一个子方阵，则有

$$det(B') = 0, -1\text{或}1$$

定理 10.13 (*Binet-Cauchy*) 设 A、B 分别为一个 $m\times n$ 阶与 $n\times m$ 阶矩阵，其中 $m \leqslant n$，则 A 与 B 的积的行列式值满足下列公式

$$det(A\times B) = \sum_{1\leqslant k_1<k_2<...<k_m\leqslant n} det(A(12...m; k_1k_2...k_m)) \times det(B(k_1k_2...k_m; 12...m))$$

其中，$det(A(12...m; k_1k_2...k_m))$ 为矩阵 A 的第 $k_1, k_2, ..., k_m$ 列构成的行列式，而 $det($ $B(k_1k_2...k_m; 12...m))$ 则为矩阵 B 的第 $k_1, k_2, ..., k_m$ 行构成的行列式。

定理 10.14 设 D 是弱连通有向图，G 是 D 的底图，$e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_{v(G)-1}} \in E(D)$，在略去边 $e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_{v(G)-1}}$ 的方向后，在底图中 $G[\{e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_{v(G)-1}}\}]$ 是 G 的生成树，等价于 $B_f(D)$ 中由第 $i_1, i_2, ..., i_{v(G)-1}$ 列构成的子矩阵为满秩矩阵。

定理 10.15 设 G 是无环连通无向图，将 G 的每条边任意定向，得到一个有向图 D，则有 G 的生成树个数为

$$\tau(G) = det(B_f(D) \times B_f^T(D))$$

索引

Z