1 数学物理中的偏微分方程

1.1 典型方程

理想弦的横振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t, x)$$

其中 $a = \dfrac{T}{\rho}, f(t, x) = \dfrac{g(t, x)}{\rho}$

高维情况：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 u + f(t, x, y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta_3 u + f(t, x, y, z)$$

$f(t, M)$ 为外力。

热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + \frac{1}{c\rho} f(t, x, y, z)$$

$f(t, x, y, z)$ 为内部热源密度，$a = \sqrt{\dfrac{k}{c\rho}}$。

扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta_3 u (a = \sqrt{D})$$

静电场的场势方程

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

边界条件

$$(\alpha \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + \beta u)\Big|_s = \varphi(x, y, z)$$

热传导问题的三类边界条件：

1. 已知 S 上的物体温度

$$u|_S = \mu(t, x, y, z)$$

2. 已知 S 上向外流出的热量的热流密度 $q(t, x, y, z)$，由热传导定律，得

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big|_S = -\frac{q(t, x, y, z)}{k}$$

$\vec{n}$ 是边界面 S 的外法向

3. 物体在介质表面的温度为 $\theta(t, x, y, z)$，可得

$$\left(k \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + hu\right)\Big|_S = h\theta$$

lhy1210302421@mail.ustc.edu.cn

1.2 齐次化原理

1.2.1 波动方程齐次化原理

已知齐次问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = \mathcal{L}w & M \in \mathbb{R}^3, t > \tau \\ w(\tau, M) = 0 \\ w_t(\tau, M) = f(\tau, M) \end{cases}$$

的解为 $w(t, M; \tau)$（τ 为参数）。则：

$$\begin{cases} u_{tt} = \mathcal{L}u + f(t, M) & M \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ w(0, M) = 0 \\ w_t(0, x) = 0 \end{cases}$$

的解为 $u(t, M) = \int_0^t w(t, M; \tau)\, d\tau$

1.2.2 热传导型方程齐次化原理

已知齐次问题：

$$\begin{cases} u_t = \mathcal{L}w & M \in \mathbb{R}^3, t > \tau \\ w(\tau, M) = f(\tau, M) \end{cases}$$

的解为 $w(t, M; \tau)$（τ 为参数）。则：

$$\begin{cases} u_t = \mathcal{L}u + f(t, M) & M \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ w(0, M) = 0 \end{cases}$$

的解为 $u(t, M) = \int_0^t w(t, M; \tau)\, d\tau$

1.3 达朗贝尔公式

一维全空间受迫弦振动方程：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & -\infty < x < +\infty, 0 \le t < +\infty \\ u(0, x) = \varphi(x), u_t(0, x) = \psi(x) & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

解为达朗贝尔公式：

$$u(t, x) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi$$

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t, x) & -\infty < x < +\infty, 0 \le t < +\infty \\ u(0, x) = \varphi(x), u_t(0, x) = \psi(x) & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

$$u(t, x) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau, \xi)\, d\xi d\tau$$

上半无界弦（$x > 0$）：

- $u(t, 0) = 0$：$\varphi(x), \psi(x)$ 延拓成奇函数
- $u_x(t, 0) = 0$：$\varphi(x), \psi(x)$ 延拓成偶函数

2 分离变量法

2.1 弦振动方程

固有值问题 $y'' + \lambda y = 0$
边界条件：

- $y(0) = 0, y(l) = 0$

$$\begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 & n = 1, 2, ... \\ y_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l} \end{cases}$$

- $y'(0) = 0, y'(l) = 0$

$$\begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 & n = 0, 1, 2, ... \\ y_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{l} \end{cases}$$

- $y(0) = 0, y'(l) = 0$

$$\begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2 & n = 0, 1, 2, ... \\ y_n(x) = \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \end{cases}$$

- $y'(0) = 0, y(l) = 0$

$$\begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}\right)^2 & n = 0, 1, 2, ... \\ y_n(x) = \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \end{cases}$$

- $y(\theta) = y(\theta + 2l)$

$$\begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 & n = 0, 1, 2, ... \\ y_n(\theta) = A_n \cos \frac{n\pi\theta}{l} + B_n \sin \frac{n\pi\theta}{l} \end{cases}$$

有界区间上弦振动方程：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & x \in (0, l), t > 0 \\ u(t, 0) = u(t, l) = 0 \\ u(0, x) = \varphi(x), u_t(0, x) = \psi(x) \end{cases}$$

1. 分离变量，忽略初始条件，考虑形如 $u(t, x) = X(x)T(t)$ 的解。
2. 求出 $X(x), \lambda$ 和相应 $T(t)$，得到分离变量解。
3. 叠加：由级数形式叠加原理 $u(t, x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t, x)$ 也满足方程。
4. 由初始条件求出系数。

2.2 热传导方程

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & x \in (0, l), t > 0 \\ u_x(t, 0) = u_x(t, l) = 0 \\ u(0, x) = \varphi(x) \end{cases}$$

2.3 周期边界条件

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0 & \theta \in \mathbb{R} \\ \Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi) & \theta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0 & \theta \in \mathbb{R} \\ \Theta(0) = \Theta(2\pi) \\ \Theta'(0) = \Theta'(2\pi) \end{cases}$$

以上均为周期性边界条件，且相互等价。

2.4 圆盘内边值问题

$$\begin{cases} \Delta u(r,\theta) = 0 & r < R \\ u(R,\theta) = F(x,y) = f(\theta) \end{cases}$$

已知通解：

$$u(r,\theta) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k r^k + B_k r^{-k}\right)\left(C_k \cos k\theta + D_k \sin k\theta\right)$$

有界性边界条件：

$$u(r,\theta) = \frac{C_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_k \cos k\theta + D_k \sin k\theta\right) r^k$$

泊松公式：

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \theta) + r^2}\,d\varphi$$

2.5 Sturm-Liouville 定理

将方程

$$b_0(x)y'' + b_1(x)y' + b_2(x)y + \lambda y = 0, x \in (a,b)$$

转化为标准 Sturm-Liouville 型方程

$$(k(x)y')' - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0, x \in (a,b)$$

其中

$$\begin{cases} \rho(x) = \frac{1}{b_0(x)}\exp(\int \frac{b_1(x)}{b_0(x)}\,dx) \\ k(x) = \rho(x)b_0(x) \\ -q(x) = \rho(x)b_2(x) \end{cases}$$

满足相关条件的方程有如下定理：

定理 1 当 $k(x)$ 在某端点为零，例如 $k(a)=0$ 时，如果 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是方程的两个线性无关解，而且

$$\lim_{x\to a} y_1(x) = \text{有限值}$$

则另一个解 $y_2(x)$ 必在 a 点附近无界。

定理 2 若 $k(x)$，$q(x)$，$\rho(x)$ 满足前述条件，则 Sturm-Liouville 固有值问题的固有值和固有函数有下列重要性质：

1. 可数性：存在可数无穷多个固有值 $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n < ...$，且 $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$；与每一个固有值相应的线性无关的固有函数有且只有一个（此结论对周期性边界条件不成立）

2. 非负性：$\lambda_n \geq 0$；有固有值 $\lambda = 0$ 的充分必要条件是：$q(x) \equiv 0$，且在方程中 a，b 两端都不取第一、三类边界条件，这时，相应的固有函数为常数。

3. 正交性：设 λ_m，λ_n 是任意两个不同的固有值，则相应的固有函数 $y_m(x)$ 和 $y_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上带权 $\rho(x)$ 正交，即有

$$\int_a^b \rho(x) y_m(x) y_n(x)\, dx = 0$$

4. 完备性：固有函数系 $\{y_n(x)\}$ 是完备的。也就是说，对于任意一个有一阶连续导数及分段二阶连续导数的函数 $f(x)$，只要它满足固有值问题中的边界条件，则它可按固有函数系 $y_n(x)$ 展开成绝对且一致收敛的广义傅立叶级数 $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n y_n(x)$，系数公式为：

$$f_k = \frac{1}{\|y_k(x)\|^2} \int_a^b \rho(x) f(x) y_k(x)\, dx$$

这里

$$\|y_k(x)\|^2 = \int_a^b \rho(x) y_k^2(x)\, dx$$

2.6 边界条件齐次的非齐次问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x) & x \in (0,l), t > 0 \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \\ u(0,x) = \varphi(x), u_t(0,x) = \psi(x) \end{cases}$$

叠加原理 $u = u_1 + u_2$

$$\begin{cases} u_{1tt} = a^2 u_{1xx} + f(t,x) & x \in (0,l), t > 0 \\ u_1(t,0) = u_1(t,l) = 0 \\ u_1(0,x) = 0, u_{1t}(0,x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{2tt} = a^2 u_{2xx} & x \in (0,l), t > 0 \\ u_2(t,0) = u_2(t,l) = 0 \\ u_2(0,x) = \varphi(x), u_{2t}(0,x) = \psi(x) \end{cases}$$

求解 u_1
方法 1：齐次化原理
方法 2：固有函数展开法
方法 3：特殊情形 $f=f(x)$ 不依赖于 t

- 找一特殊 $v(x)$ 使得 $v_{xx}(x)+f(x)=0, v(0)=v(l)=0$
- 则：$w=u_1-v$ 满足齐次方程

2.7 边界条件非齐次的问题

方法 1：找出尽量“简单”的函数 $v(t,x)$ 满足边界条件
方法 2：对于特殊的边界条件，可以找出函数 $v(t,x)$ 满足边界条件和泛定方程

2.8 非齐次稳态问题

$$\begin{cases}\Delta u=f(M) & M\in V\\ u|_S=\varphi(M) & S=\partial V\end{cases}$$

由叠加原理 $u=v+w$，找出一 w 满足 $\Delta w=f(M)$，那么 $\Delta v=0, v|_s=\varphi(M)-w(M)$
该方法同样适用于三维情况（3.4）。

3 特殊函数

3.1 ν 阶贝塞尔方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$$

解为：

$$y(x)=AJ_\nu(x)+BN_\nu(x)$$

微分关系和递推公式：

1. $$\frac{d}{dx}(x^\nu J_\nu(x))=x^\nu J_{\nu-1}(x)$$
2. $$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right)=-\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}$$
3. $$J'_\nu(x)=J_{\nu-1}(x)-\frac{\nu}{x}J_\nu(x)$$
4. $$J'_\nu(x)=\frac{\nu}{x}J_\nu(x)-J_{\nu+1}(x)$$
5. $$J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}J_\nu(x)$$
6. $$J_{\nu-1}(x)-J_{\nu+1}(x)=2J'_\nu(x)$$

3.2 波动方程（极坐标）

在二维旋转区域考虑波动方程：

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} \\ \alpha R(a) + \beta R'(a) = 0 \end{cases}$$

方程化为：

$$(rR'(r))' - \frac{n^2}{r}R(r) + \lambda r R(r) = 0$$
$$r^2R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - n^2)R(r) = 0$$

令 $\lambda = \omega^2$，令 $x = \omega r, y(x) = R\left(\frac{x}{\omega}\right)$

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \\ \alpha y(\omega a) + \beta\omega y'(\omega a) = 0 \end{cases}$$

解得

$$R(r) = J_n(\omega r)$$

边界条件：

$$\alpha J_n(\omega a) + \beta\omega J_n^{'}(\omega a) = 0$$

固有值 ω_n 即为使边界条件成立的解。
由边界条件求得：

$$\mathbb{N}_{\nu 1}^2 = \frac{a^2}{2}J_{\nu+1}^2(\omega a)$$
$$\mathbb{N}_{\nu 2}^2 = \frac{a^2\omega^2 - \nu^2}{2\omega^2}J_\nu^2(\omega a)$$
$$\mathbb{N}_{\nu 3}^2 = \frac{a^2\omega^2h^2 - \nu^2h^2 + a^2}{2\omega^2h^2}J_\nu^2(\omega a), h = \frac{\alpha}{\beta}$$

3.3 勒让德函数

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0, x \in (-1, 1)$$
$$((1 - x^2)y')' + \lambda y = 0, x \in (-1, 1)$$

当 $\lambda_n = n(n+1), n = 0, 1, 2, ...$ 时

$$y_n(x) = \frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n}$$

勒让德函数

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n}$$

递推公式

1. $$(n+1)p_{n+1}(x) - x(2n+1)p_n(x) + np_{n-1}(x) = 0$$

2. $$np_n(x) - xp_n'(x) + p_{n-1}'(x) = 0$$

3.

$$np_{n-1}(x) - p_n'(x) + xp_{n-1}'(x) = 0$$

4.

$$p_{n+1}'(x) - p_{n-1}'(x) = (2n+1)p_n(x)$$

$$\|p_n(x)\|^2 = \frac{2}{2n+1}$$

3.4 球坐标下 Laplace 方程求解

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0 & 0 \le r < a, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi < 2\pi \\ u(a,\theta,\varphi) = f(\theta) \end{cases}$$

解为：

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty}[A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}]p_n(\cos\theta)$$

球内问题 $B_n = 0$，球外问题 $A_n = 0$。

4 积分变换方法

4.1 Fourier 变换

性质：

1. 线性性质：$F[C_1 f + C_2 g] = C_1 F[f] + C_2 F[g]$
2. 频移性质：$F[f(x)e^{i\lambda_0 x}] = F(\lambda + \lambda_0)$
3. 位移性质：$F[f(x+a)] = F(\lambda)e^{-i\lambda a}$
4. 相似性质：$F[f(ax)] = \frac{1}{a}F(\frac{\lambda}{a})$
5. 微分性质：$F[f^{(n)}(x)] = (-i\lambda)^n F(\lambda)$
6. 卷积性质：$F[f * g] = F[f]F[g]$

无界区域：

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = \varphi(x) \end{cases}$$

$$F[f] = F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x}\,dx$$

$$F^{-1}[f(\lambda)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)e^{-i\lambda x}\,d\lambda$$

4.2 半直线上的问题：正余弦变换方法

正弦变换

$$\overline{f}_s(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(x)\sin(\lambda x)\,dx$$

余弦变换

$$\overline{f}_c(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(x)\cos(\lambda x)\,dx$$

反演变换

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \overline{f}_s(\lambda)\sin(\lambda x)\,d\lambda$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \overline{f}_c(\lambda)\cos(\lambda x)\,d\lambda$$

5 基本解和解的积分表达式

5.1 δ 函数

$$\delta(x-\xi) = \begin{cases} +\infty & x = \xi \\ 0 & x \neq \xi \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-\xi)\,dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\delta(x-\xi)\,dx = \varphi(\xi)$$

卷积性质：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\delta(x-\xi)\,d\xi = \varphi(x)$$

Fourier 变换：

$$F[\delta(x)] = 1$$

$$\delta(x) = F^{-1}[1] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos\lambda x\,d\lambda$$

5.2 求格林函数

5.2.1 三维情况

$$\begin{cases} \Delta G = -\delta(x-\xi, y-\eta, z-\zeta) \\ G|_{\partial V} = 0 \end{cases}$$

的解为格林函数 $G(M;M_0)$，则泊松方程边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = -f(x,y,z) & M \in V \\ u|_{\partial V} = \varphi(x,y,z) \end{cases}$$

的解为

$$u(M_0) = -\iint_S \varphi(M)\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}(M;M_0)\,dS + \iiint_V f(M)G(M;M_0)\,dM$$

5.2.2 二维情况

$$\begin{cases} \Delta G = -\delta(x-\xi, y-\eta) \\ G|_l = 0 \end{cases}$$

的解为格林函数 $G(M;M_0)$，则泊松方程边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = -f(x,y) \quad M \in D \\ u|_l = \varphi(x,y) \end{cases}$$

的解为

$$u(M_0) = -\int_l \varphi(M)\frac{\partial G}{\partial \vec{n}}(M;M_0)\,dl + \iint_D f(M)G(M;M_0)\,dA$$

5.2.3 球形域

球内 $M_0 = (\xi,\eta,\zeta)$ 处有 ε_0 的电荷，则球外电荷带有

$$-\frac{R}{\rho_0}\varepsilon_0$$

的电量，且

$$\rho_1 = \frac{R^2}{\rho_0}$$

圆内 $M_0 = (\xi,\eta)$ 处有 ε_0 的电荷，则球外电荷带有

$$-\varepsilon_0$$

的电量，且

$$\rho_1 = \frac{R^2}{\rho_0}$$

5.3 拉普拉斯方程基本解

电荷为负时的解：

$$U(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi r}$$

$$U(x,y) = \frac{1}{2\pi}\ln r$$

5.4 热传导型方程

$$\begin{cases} u_t = \mathcal{L}u & M \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u(0, M) = \delta(M) \end{cases}$$

的解为 $U(t, M)$，那么

$$\begin{cases} u_t = \mathcal{L}u + f(t, M) & M \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u(0, M) = \varphi(M) \end{cases}$$

的解

$$u(t, M) = U(t, M) * \varphi(M) + \int_0^t U(t - \tau, M) * f(\tau, M)\, d\tau$$

5.5 波动型方程

$$\begin{cases} u_{tt} = \mathcal{L}u & M \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u(0, M) = 0 \\ u_t(0, M) = \delta(M) \end{cases}$$

的解为 $U(t, M)$，那么

$$\begin{cases} u_{tt} = \mathcal{L}u + f(t, M) & M \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u(0, M) = \varphi(M) \\ u_t(0, M) = \psi(M) \end{cases}$$

的解

$$u(t, M) = \frac{\partial}{\partial t}[U(t, M) * \varphi(M)] + U(t, M) * \psi(M) + \int_0^t U(t - \tau, M) * f(\tau, M)\, d\tau$$

6 记忆公式

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

的解为：

$$y(x) = \left(\int Q(x) e^{\int p(x)\, dx}\, dx + C \right) e^{-\int p(x)\, dx}$$

勒让德多项式：

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

$$\begin{cases} p_0(x) = 1 \\ p_1(x) = x \\ p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ p_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ p_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ p_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \end{cases}$$

欧拉方程：

$$x^2y'' + pxy' + qy = f(x)$$

令 $x = e^t(x > 0)$，化为常系数线性方程

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (p-1)\frac{dy}{dt} + qy = f(e^t)$$