UNIVERSITY OF COLOMBO, SRI LANKA

FACULTY OF SCIENCE

FIRST YEAR EXAMINATION IN SCIENCE -SEMESTER I - 2003/2004

AM 1001 - DIFFERENTIAL EQUATIONS I

(Two Hours)

Answer All questions

No. of Question : 04
No. of Pages : 02

---

1. Write down what is/are the condition/s to be satisfied by $P(x)$ and $Q(x)$ in order to exists a unique solution of the equation

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad (1)$$

in an interval I. Describe briefly how do you find the solution of the equation (1). Find all solutions of the differential equation

$$x\frac{dy}{dx} + (1-x)y = e^{2x} \qquad (2)$$

on the interval $(0, +\infty)$. Show that as $x \to 0$ there is only one solution of the equation (2) approaching a finite limit. Compute this solution and its limit.

2. If $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ is homogeneous and $Px + Qy \neq 0$ then show that

$$\frac{P}{Px+Qy}dx + \frac{Q}{Px+Qy}dy = 0$$

is exact. Hence solve the equation

$$\left(x^2y - 2xy^2\right)dx - \left(x^3 - 3x^2y\right)dy = 0.$$

3. The buying behavior of the public towards a particular product is modelled by

$$\frac{dB}{dt} = b\left(M - \beta B\right) \qquad (3)$$

$$\frac{dM}{dt} = a\left(B - \alpha M\right) + cA \qquad (4)$$

where $B = B(t)$ is the level of buying, $M = M(t)$ is a measure of the motivation or attitude towards the product and $A = A(t)$ is the advertising policy. The parameters a,b,c, α , β are all assumed to be positive. Deduce that

$$\frac{d^2 B}{dt^2} + (b\beta + a\alpha)\frac{dB}{dt} + ab(\alpha\beta - 1)B = bcA$$

Does the buying level tend to a limiting value for constant advertising? Justify your answer.

When $a = \beta = 2$ *and* $a = b = c = 1$ and

$$A(t) = \begin{cases} 100 & units\ \ for\ \ 0 < t < 10 \\ 0 & units\ \ for\ t > 10 \end{cases}$$

determine the complete forecast for the buying behavior, It is given that at $t = 0, B = M = 0.$

4. The current $I\ (t)$ at time t flowing in an electric circuit obeys the differential equation

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R\frac{dI(t)}{dt} + I(t) = \sin\omega t$$

where R and ω are positive constants.

Show that the solution can be expressed in the form

$$I\ (t) = F(t) + A\sin\left(\omega t + \alpha\right)$$

and the $F(t) \to 0$ as $t \to \infty$. where A and α are constants depending on R and ω, with $A > 0$.

If there is a value ω which maximizes the constant A then $\frac{\omega}{2\pi}$ is called a *resonance frequency of the circuit.* Find all resonance frequencies when $R = 1$.

@@@@@

කොළඹ විශ්වවිද්‍යාලය - ශ්‍රී ලංකාව

විද්‍යා පීඨය

විද්‍යාවේදී ප්‍රථම වසර පරීක්ෂණය – සමාසිකය I – 2003

AM 1001 – අවකල සමීකරණ I

පැය දෙකයි (02)

මුළු ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාව – 04
මුළු පිටු ගණන – 03

සියළුම ප්‍රශ්න වලට පිළිතුරු සපයන්න.

---

01. $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ – (1) සමීකරණයට I ප්‍රාන්තරයක් තුළදී අනන්‍ය විසඳුමක් පැවතීම සඳහා P(x) සහ Q(x) මගින් තෘප්ත කළ යුතු අවශ්‍යතාව ලියා දක්වන්න.

ඉහත සමීකරණයෙහි විසඳුම ලබාගන්නා අයුරු සැකෙවින් විස්තර කරන්න.

$x \frac{dy}{dx} + (1-x)\, y = e^{2x}$ – (2) සමීකරණයෙහි $(0, +\infty)$ ප්‍රාන්තරය තුළ සියලුම විසඳුම් සොයන්න.

$x \to 0$ විට (2) සමීකරණයෙහි එක් විසඳුමක් පමණක් පරිමිත වන බව පෙන්වා එය නිර්ණය කරන්න.

02. $P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$ සමීකරණය සමජාතීය නම් සහ $Px + Qy \neq 0$ නම්

$\frac{P}{Px+Qy}\, dx + \frac{Q}{Px+Qy}\, dy = 0$ සපිරි වන බව පෙන්වන්න. ඒ නයින්

$(x^2y - 2xy^2)dx - (x^3 - 3x^2y)\, dy = 0$ සමීකරණය විසඳන්න.

03· කිසියම් භාණ්ඩයක් මහජනතාව විසින් මිලදී ගැනීමේ ප්‍රවනතාවය පහත සඳහන් සමීකරණ මගින් ආකෘතිකරණය කල හැකිය·

$$\frac{dB}{dt} = b(M - \beta B)$$

$$\frac{dM}{dt} = a(B - \alpha M) + cA$$

මෙහි $B = B(t)$ යනු මිලදී ගැනීමේ ප්‍රමාණයයි· $M = M(t)$ යනු භාණ්ඩය පිළිබඳ ආකල්පය හෝ නම්‍යතාවය පිළිබඳ මිනුමක් සහ $A = A(t)$ යනු භාණ්ඩය පිළිබඳ වෙළඳ දැන්වීම් ප්‍රමාණය සඳහා මිනුමකි· a, b, c, α, β යනු සියල්ලම ධන වූ පරාමිතීන් වේ·

$$\frac{d^2B}{dt^2} + (b\beta + a\alpha)\frac{dB}{dt} + ab(\alpha\beta - 1)B = bcA$$ සමීකරණය ලබා ගන්න·

වෙළඳ දැන්වීම් ප්‍රමාණය නියතයක් නම් භාණ්ඩය මිලදී ගැනීමේ ප්‍රමාණය නියත සීමාකාරී අගයක් කරා ළඟා වේද ? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න· පිළිතුර පහදන්න·

$\alpha = \beta = 2$ සහ $a = b = c = 1$ සහ

$$A(t) = \begin{cases} \text{ඒකක } 100, & 0 < t < 10, \text{ සඳහා} \\ \text{ඒකක } 0, & t > 10 \text{ සඳහා} \end{cases}$$

විට භාණ්ඩයේ මිලදී ගැනීමේ ප්‍රවනතාවය පූර්වෝකථනය කරන්න· $t = 0$ විට $B = M = 0$ බව දී ඇත·

04· විද්‍යුත් පරිපථයක් තුළින් ගමන් කරන I (t) ධාරාවක්

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R\frac{dI(t)}{dt} + I(t) = \sin \omega t$$ යන සමීකරණය අනුකූල වේ· මෙහි R සහ ω යනු ධන නියතයන් වේ·

එහි විසඳුම $I(t) = F(t) + A\sin(\omega t+\alpha)$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කළ හැකි බව සහ $t\to\infty$ විට $F(t)\to 0$ බව පෙන්වන්න· මෙහි A සහ α යනු R සහ ω මත රඳා පවතින නියතයන් වන අතර $A > 0$ වේ· A හි අගය උපරිම වන ω හි අගයක් පවතීනම් එවිට $\frac{\omega}{2\pi}$ යන්න එම පරිපථයේ අනුනාද සංඛ්‍යාතය නම් වේ· $R = 1$ විට සියලු අනුනාද සංඛ්‍යාත සොයන්න·

oooooooooooooo