

MAC0239: Exercício-Programa 2

Lógica de Primeira Ordem

Marcelo Finger

16 de outubro de 2017

Aviso Importante

Este exercício deve ser criado e processado por \LaTeX e entregue no formato PDF via paca.

Não precisa entregar “os fontes”, ou seja, o arquivo `.tex`.

Para facilitar a vida de você, estou fornecendo os fontes deste enunciado, assim vocês já tem um arquivo `.tex` para começar a raquear (*to hack*).

1 Introdução

O objetivo deste EP é desenvolver uma série de fórmulas de lógica de primeira ordem a partir das quais um resultado de (falta de) expressividade da lógica de primeira ordem. Ou seja, este EP será um “estudo dirigido” para provar o seguinte resultado sobre a Lógica de Primeira Ordem (LPO).

Teorema 1.1 (Resultado Principal do EP2) *Não existe na Lógica de Primeira Ordem uma fórmula que seja verdadeira em todos os modelos com domínio finito e par, e apenas nestes.* ■

2 Questões

Apresentar num documento escrito e processado em \LaTeX , a resposta para as seguintes questões.

Questão 2.1 (Aquecimento) Apresentar uma fórmula da LPO que seja verdadeira em todos os modelos $\mathcal{M} = \langle \mathcal{A}, \cdot^{\mathcal{M}} \rangle$ em que o domínio \mathcal{A} é infinito e não é verdadeira em modelos com domínio finito..

Dica: use uma assinatura com apenas uma constante, um símbolo funcional unário e apenas o predicado da igualdade.

Nota: eu chamei isso de aquecimento pois não tem nada a ver com o Teorema 1.1. Ou tem?

Questão 2.2 Apresentar uma fórmula que:

- (a) Seja verdadeira se e somente se (sse) o modelo tiver dois elementos
- (b) Seja verdadeira sse o modelo tiver 4 elementos

Questão 2.3 Apresentar uma fórmula que seja verdadeira sse, dado $n \in \mathbb{N}^+$, o modelo tiver $2n$ elementos.

Dica: usar os conectivos generalizados:

$$\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \qquad \bigvee_{i=1}^n \varphi_i = \varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n$$

Questão 2.4 Dado $n \in \mathbb{N}^+$, apresentar uma fórmula que seja verdadeira em algum modelo com um número par de elementos até $2n$.

Dica: a mesma da Questão 2.3.

Questão 2.5 (Finalmente) Provar o Teorema 1.1.

Dica: Usar um argumento de compacidade, como o feito em sala de aula, e usar as fórmulas apresentadas na Questão 2.4.