Metody numeryczne projekt 3

Aliaksei Yashynski 196691

1. Wstęp

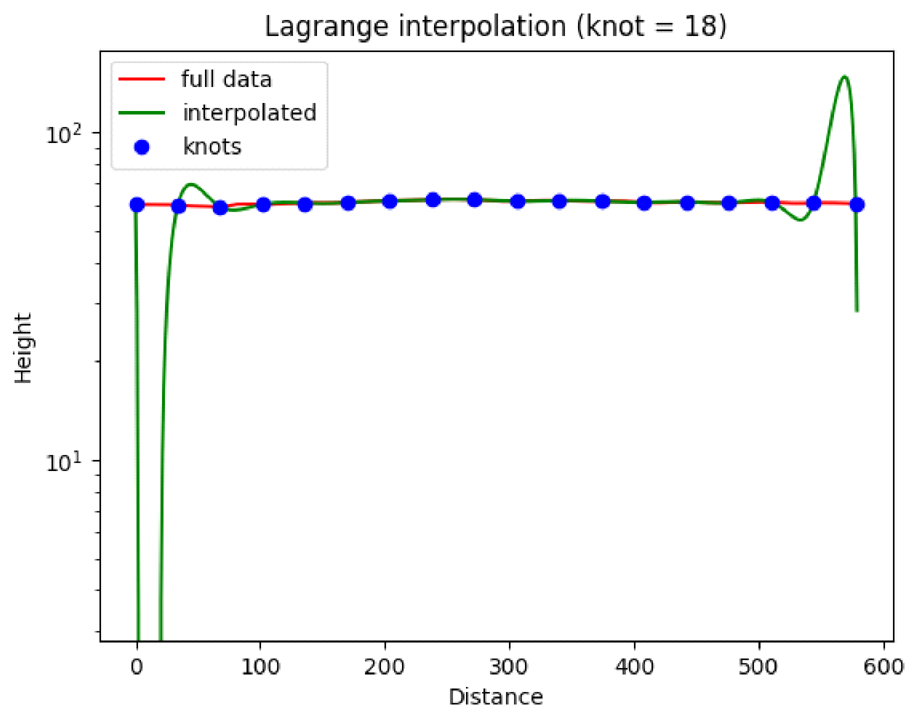
Celem projektu jest aproksymacja profilu wysokościowego interpolacyjnymi metodami: metodą wykorzystującą wielomian interpolacyjny Lagrange'a i metodą wykorzystującą funkcje sklejane trzeciego stopnia.

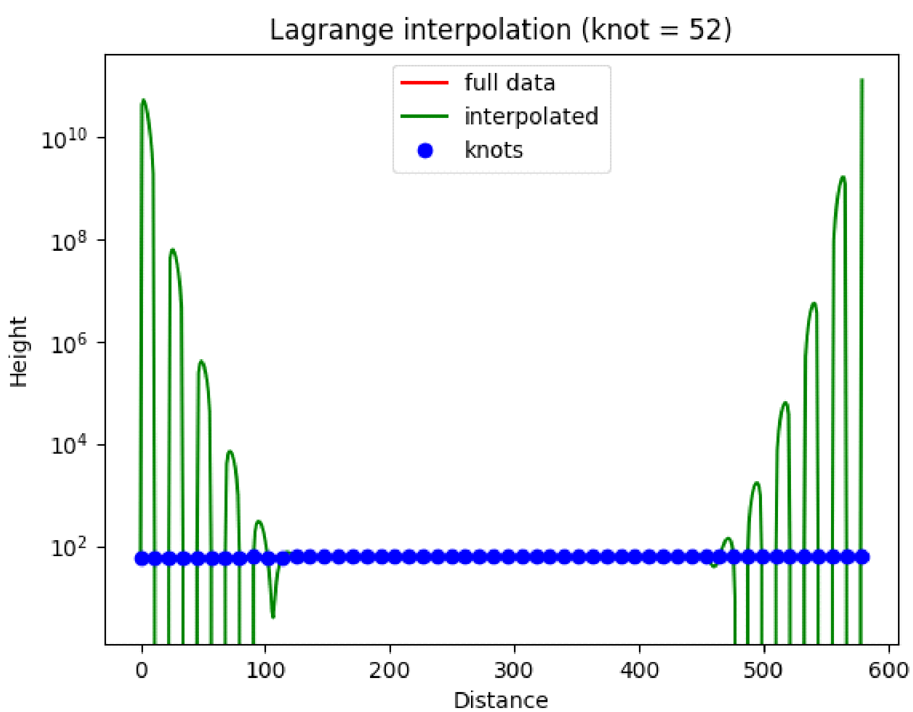
Projekt został zrobiony, wykorzystując język Python do implementacji oraz interpretacji wyników.

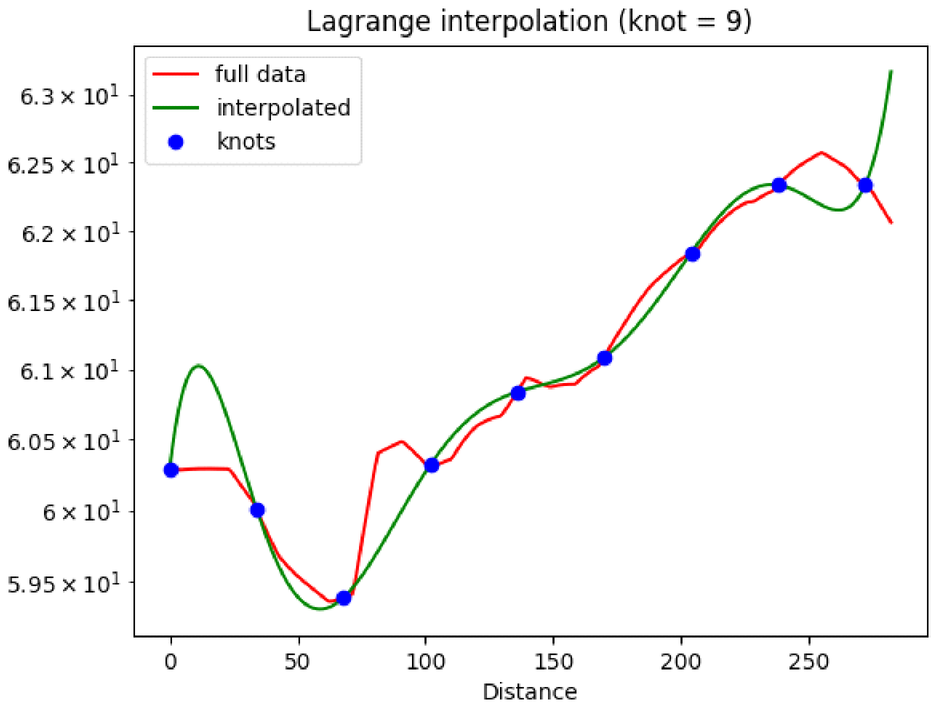
Metoda interpolacji Lagrange'a to technika matematyczna stosowana do wyznaczania wielomianu, który dokładnie przechodzi przez dane punkty (x, y). Jest to jedna z klasycznych metod interpolacji, która pozwala na znalezienie wielomianu interpolacyjnego stopnia n-1 dla n danych punktów. Główna idea tej metody polega na skonstruowaniu wielomianu jako sumy iloczynów wielomianów bazowych Lagrange'a i wartości funkcji w danych punktach.

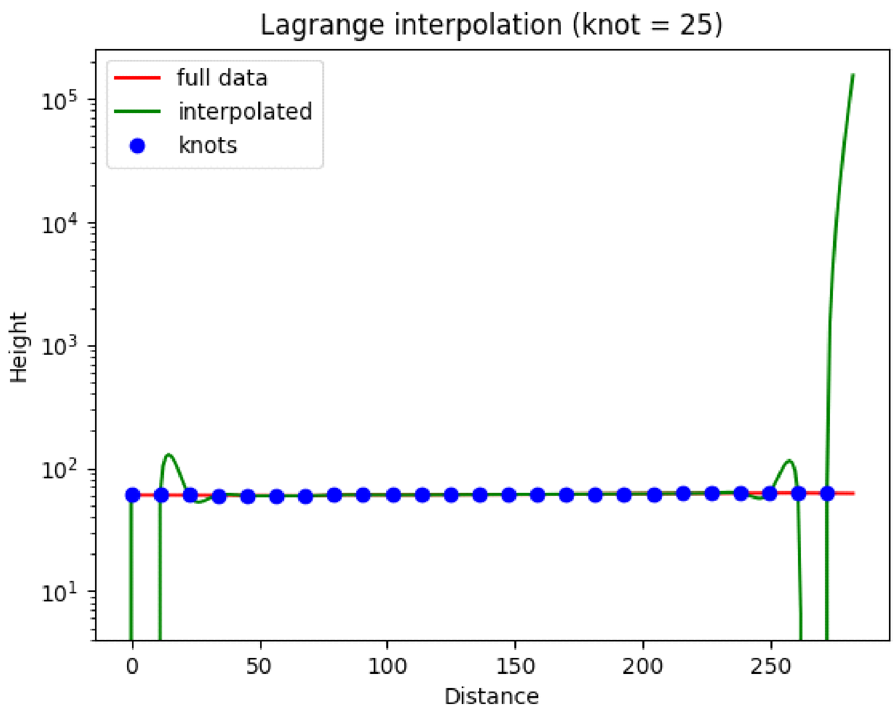
Metoda wykorzystująca funkcje sklejane trzeciego stopnia polega na interpolacji funkcji poprzez połączenie kawałków wielomianów trzeciego stopnia, zwanych spline'ami, w taki sposób, aby utworzyć gładką krzywą przechodzącą przez dane punkty. Celem tej metody jest uzyskanie krzywej interpolacyjnej, która nie tylko przechodzi przez wszystkie dane punkty, ale także ma ciągłość pierwszej i drugiej pochodnej, co zapewnia gładkość i naturalność krzywej.

2. Analiza podstawowa interpolacji wielomianowej pierwszej trasy:


Lagrange interpolation (knot = 18)
full data
interpolated
knots
Height
Distance


Lagrange interpolation (knot = 52)
full data
interpolated
knots
Height
Distance





Na przykładzie tych wykresów można zauważyć wpływ liczby węzłów.

Funkcja jest dobrze interpolowana w środku przedziału, jednak na krawędziach pojawiają się oscylacje. Ten problem pojawia się, kiedy wykorzystuje się wielomiany wysokiego stopnia do interpolacji węzłów w równo-odległych punktach(efekt Rungego).

W metodzie Lagrange'a, im większa liczba węzłów interpolacyjnych, tym większa tendencja do występowania oscylacji. Istnieje kilka powodów, dla których większa liczba węzłów może prowadzić do mniejszych oscylacji:

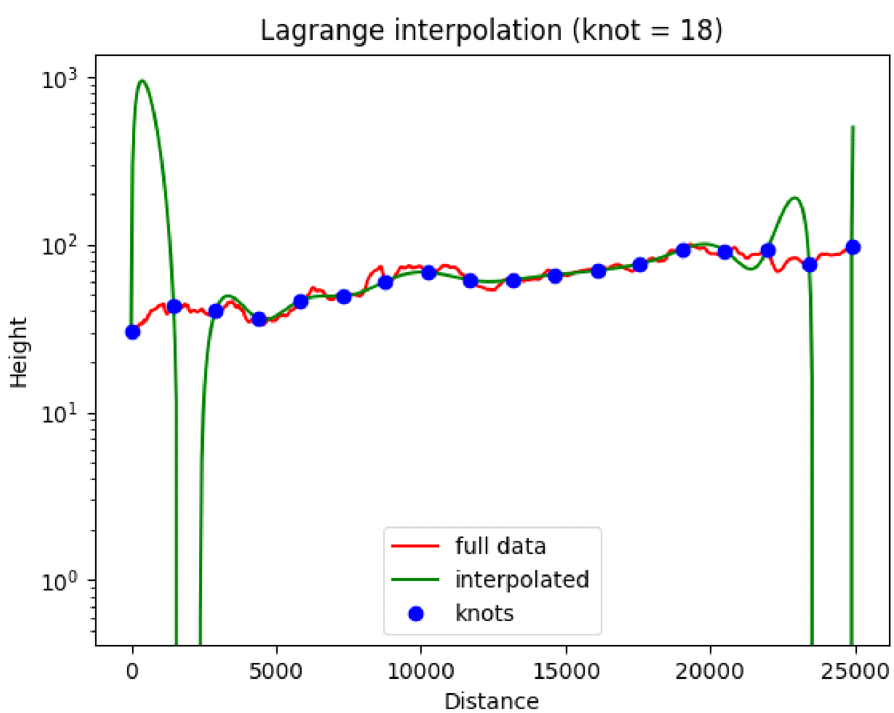
1. Mniejsza liczba węzłów oznacza niższy stopień wielomianu:

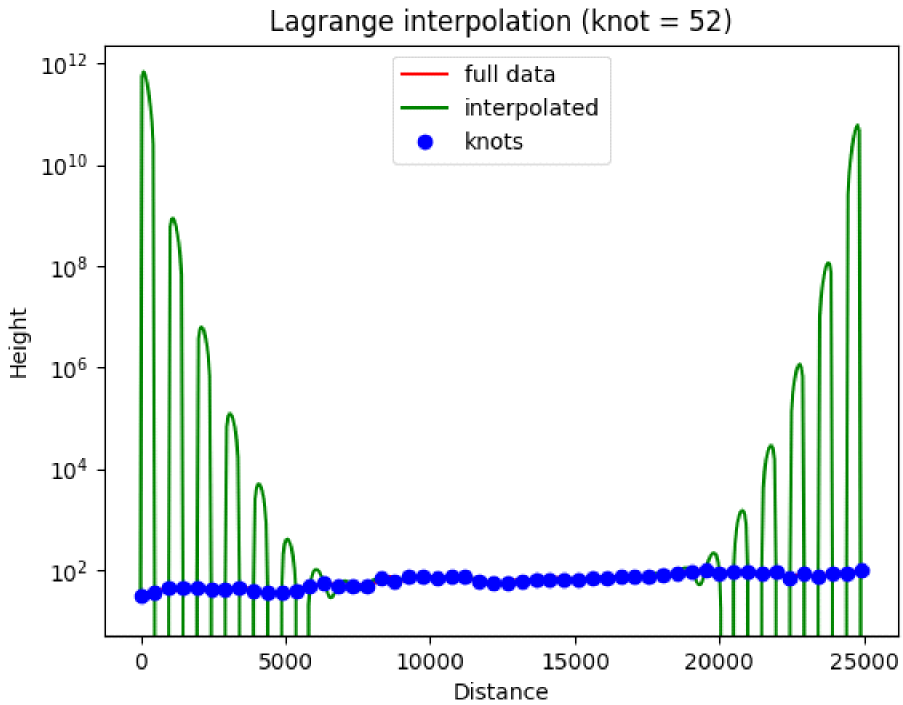
Wielomiany niższego stopnia mają mniejszą tendencję do oscylacji. Przy mniejszej liczbie węzłów interpolacyjnych, wielomian, który je aproksymuje, ma niższy stopień i dlatego jest bardziej stabilny i mniej podatny na ekstremalne wahania.

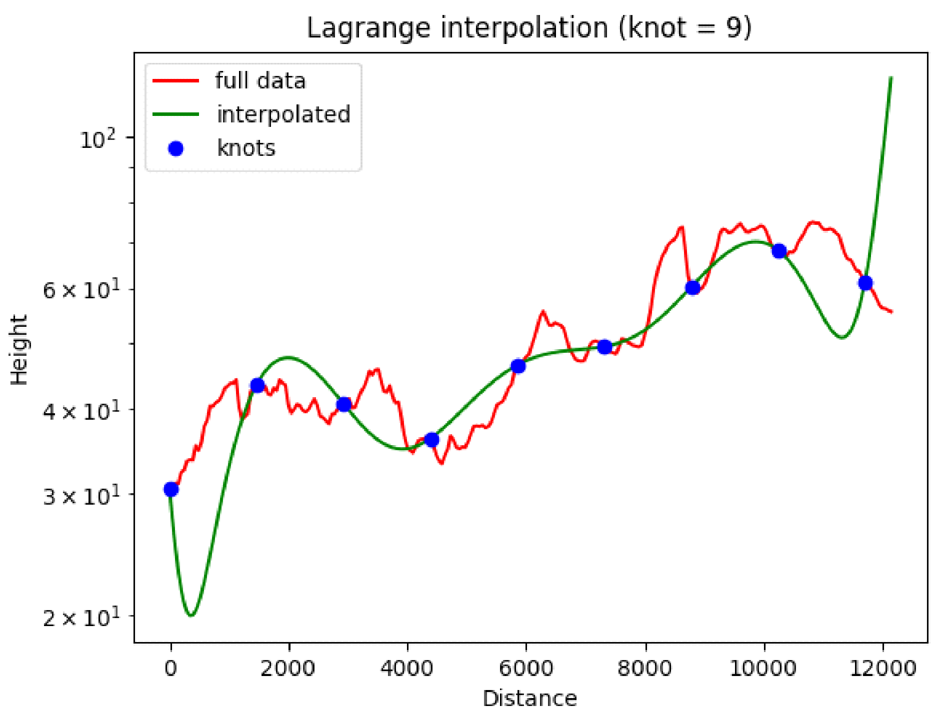
2. Mniej ekstremalne zmiany w danych:

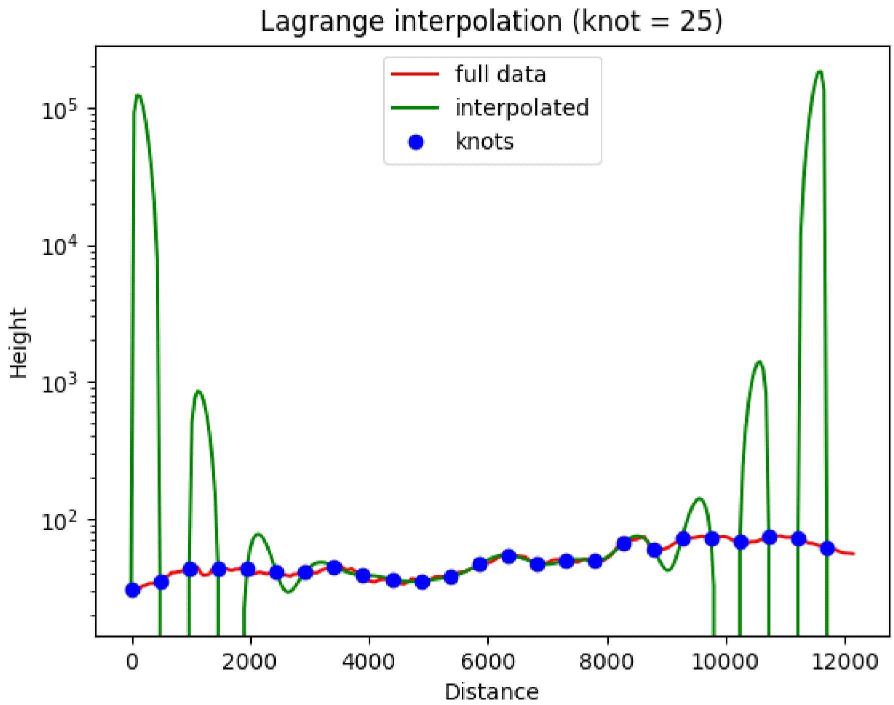
Kiedy liczba węzłów jest mniejsza, wielomian nie musi przechodzić przez tak wiele punktów, co zmniejsza ryzyko ekstremalnych zmian w wartości funkcji między węzłami.

3. Analiza podstawowa interpolacji wielomianowej drugiej trasy:



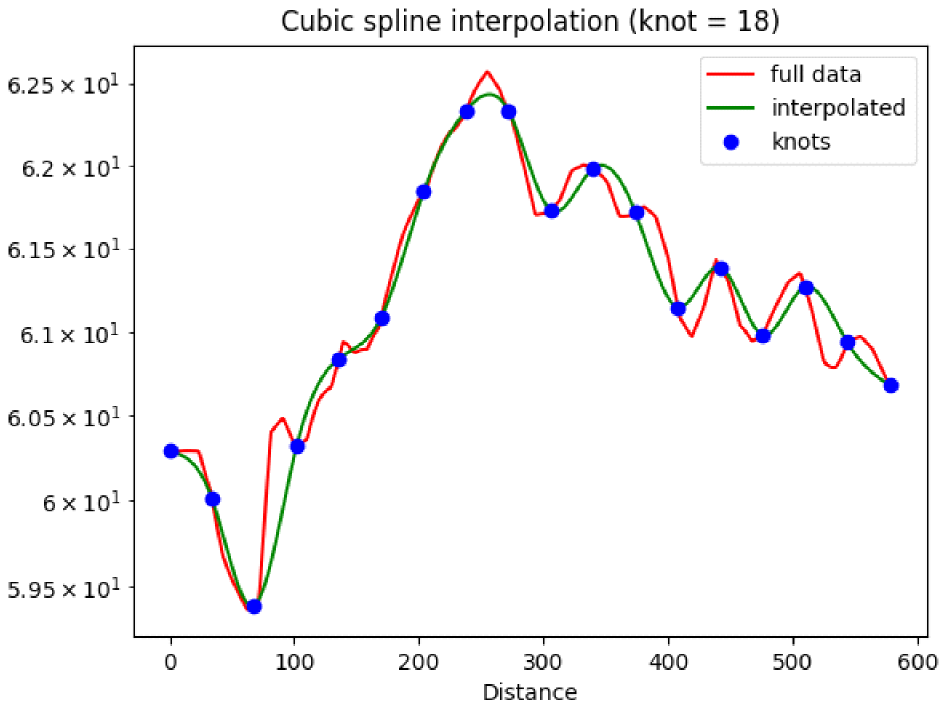

Lagrange interpolation (knot = 52)
full data
interpolated
knots
Height
Distance
10^{12}
10^{10}
10^8
10^6
10^4
10^2
0
5000
10000
15000
20000
25000

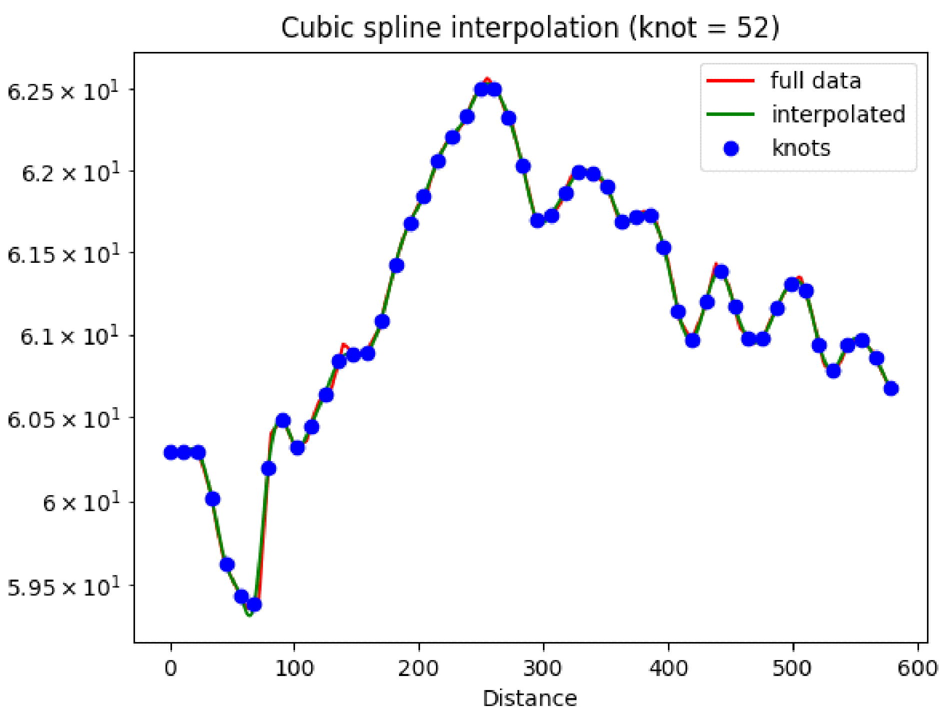

Lagrange interpolation (knot = 9)
full data
interpolated
knots
Height
Distance
10^2
6×10^1
4×10^1
3×10^1
2×10^1
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000

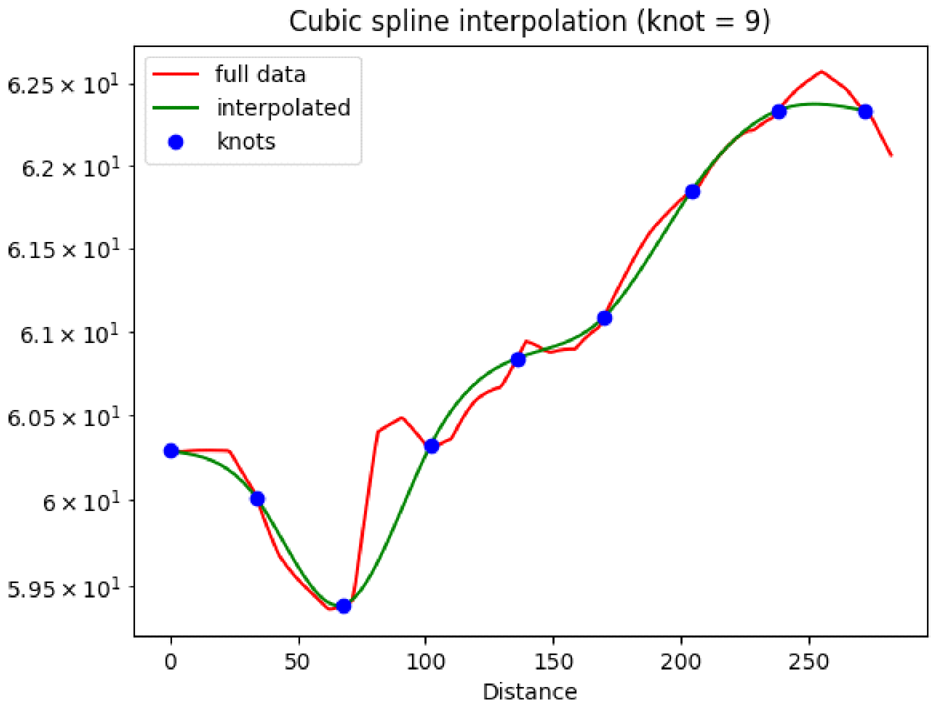


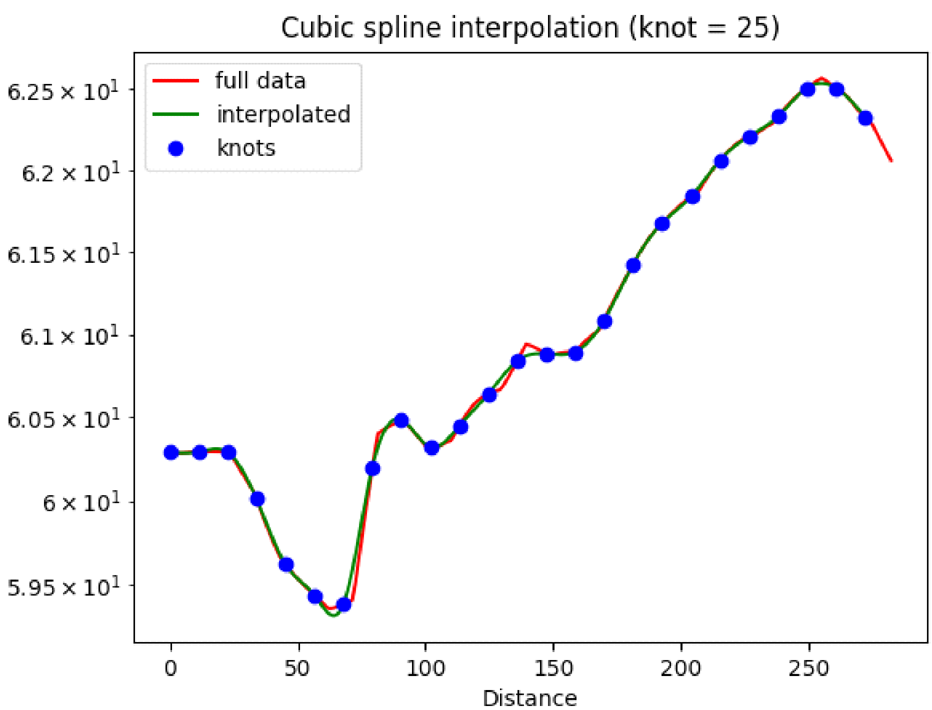
Po wybraniu innej trasy efekt się nie zmienił, a wszystko, co zostało powiedziane w poprzednim akapicie, jest odpowiednie dla tej drogi.

4. Analiza podstawowa interpolacji funkcjami sklejanymi pierwszej trasy:


Cubic spline interpolation (knot = 18)
full data
interpolated
knots
6.25×10^1
6.2×10^1
6.15×10^1
6.1×10^1
6.05×10^1
6×10^1
5.95×10^1
0
100
200
300
400
500
600
Distance


Cubic spline interpolation (knot = 52)
full data
interpolated
knots
6.25×10^1
6.2×10^1
6.15×10^1
6.1×10^1
6.05×10^1
6×10^1
5.95×10^1
0
100
200
300
400
500
600
Distance





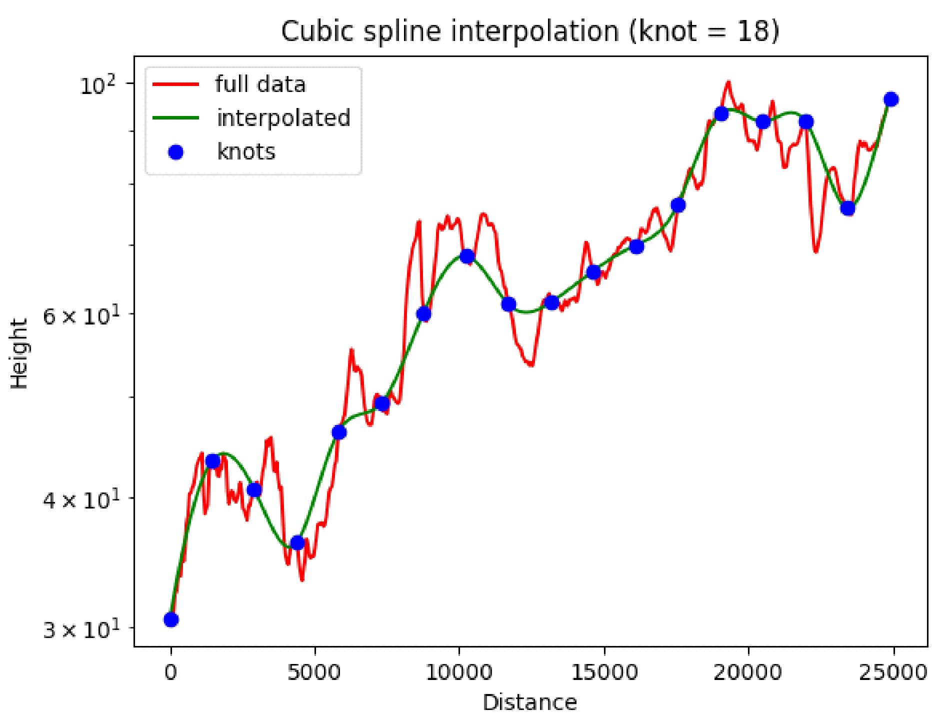
Interpolacja funkcjami sklejanymi (splajnami) trzeciego stopnia ma tendencję do poprawy dokładności wraz ze wzrostem liczby węzłów interpolacyjnych.

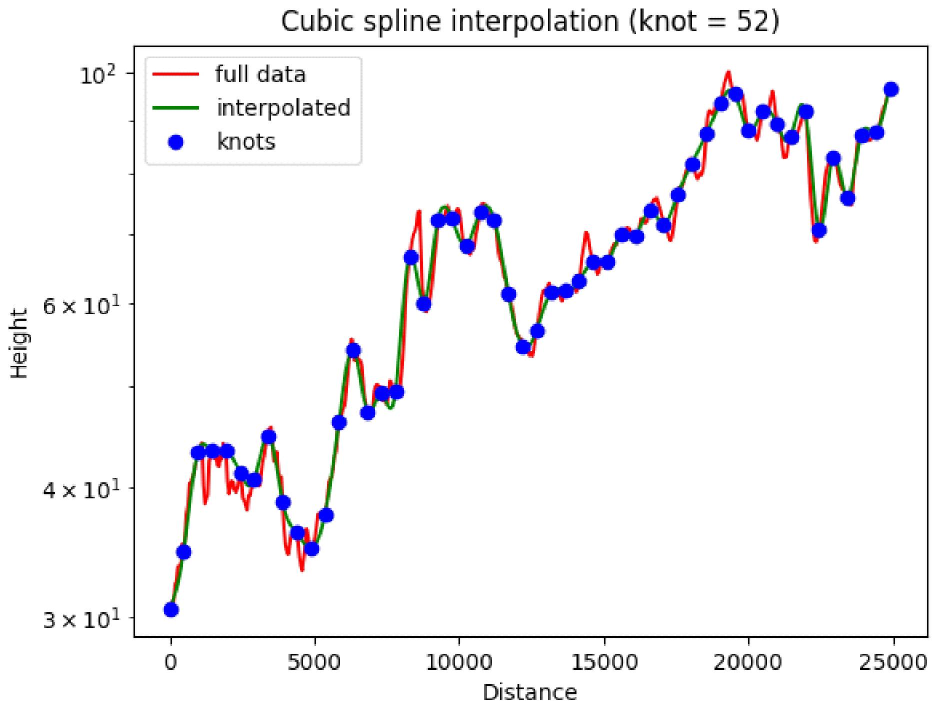
1. Większa liczba węzłów pozwala lepiej odwzorować lokalne zmiany funkcji. Splajny trzeciego stopnia (cubic splines) są bardzo skuteczne w modelowaniu gładkich funkcji, a większa liczba węzłów zwiększa ich elastyczność i zdolność do dokładnego dopasowania funkcji w różnych obszarach.

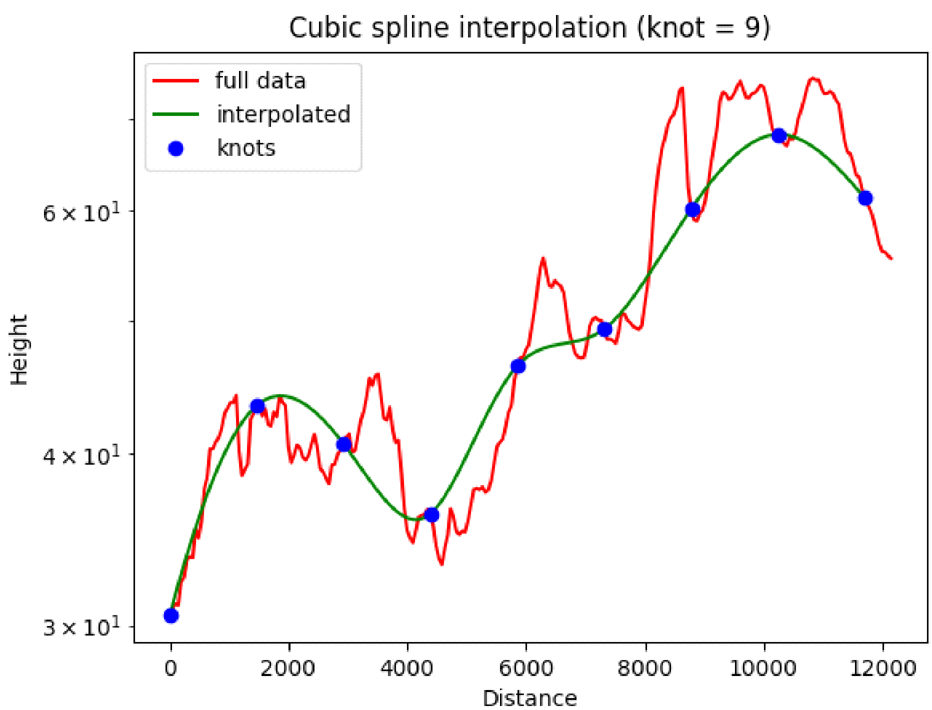
2. Przy większej liczbie węzłów błąd interpolacji jest zazwyczaj mniejszy, ponieważ interpolowana krzywa jest bardziej zgodna z rzeczywistymi wartościami funkcji w większej liczbie punktów.

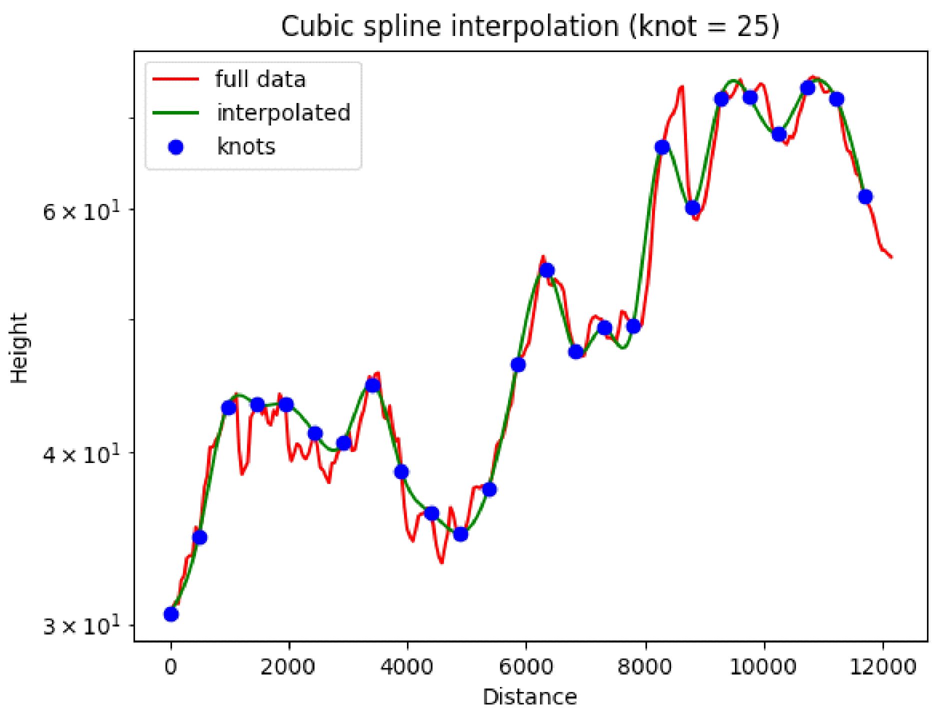
3. Splajny trzeciego stopnia zapewniają ciągłość pierwszej i drugiej pochodnej, co sprawia, że interpolowana krzywa jest gładka. Większa liczba węzłów pozwala na lepsze utrzymanie tej gładkości na całym przedziale interpolacji.

5. Analiza podstawowa interpolacji funkcjami sklejanymi drugiej trasy:



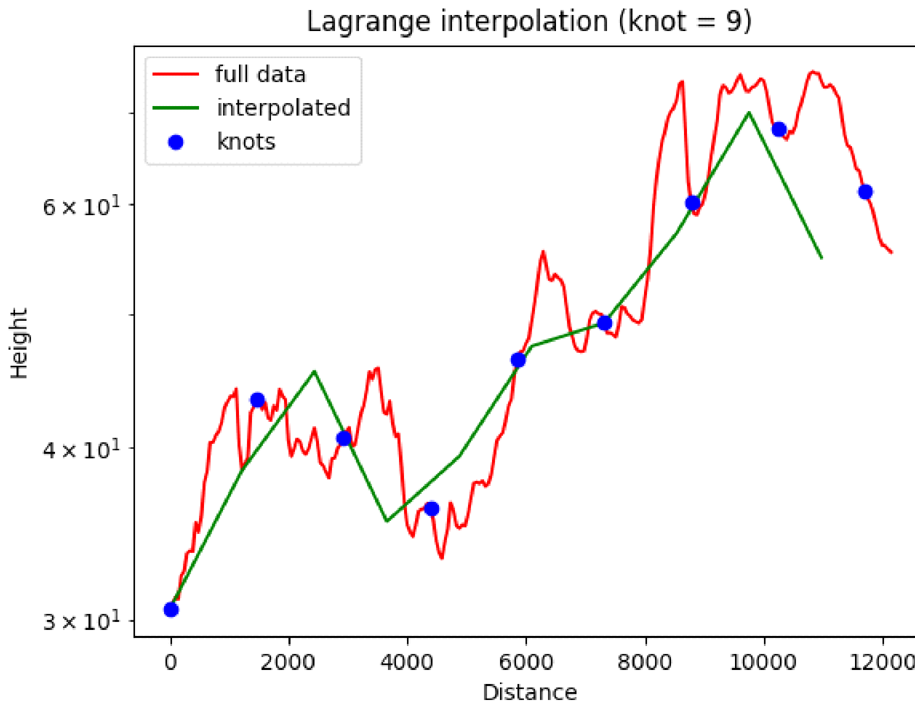

Cubic spline interpolation (knot = 52)
full data
interpolated
knots
Height
Distance
10^2
6×10^1
4×10^1
3×10^1
0
5000
10000
15000
20000
25000

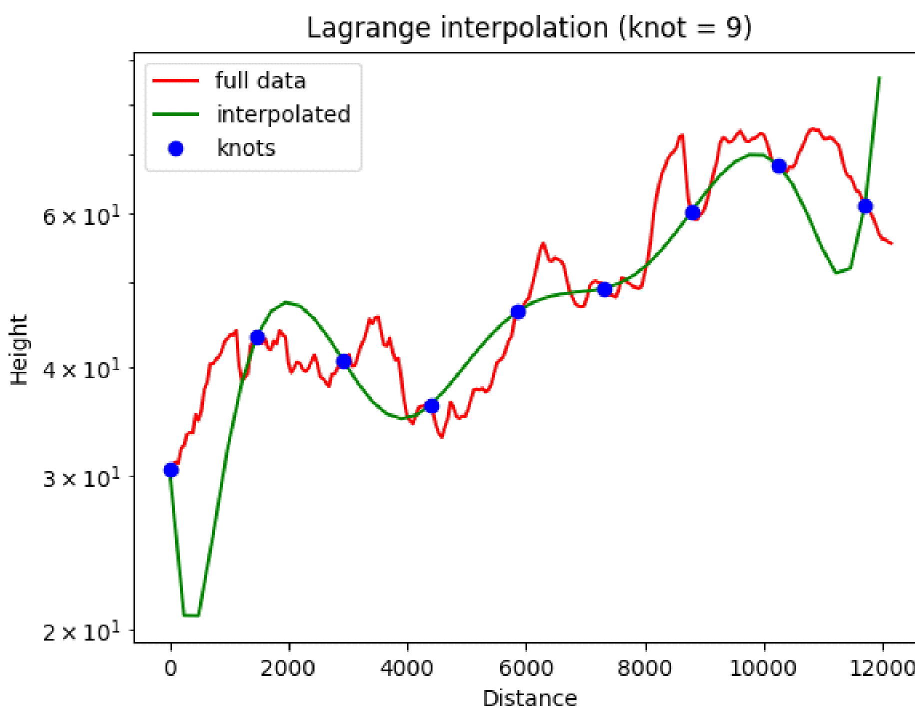

Cubic spline interpolation (knot = 9)
full data
interpolated
knots
Height
Distance
6×10^1
4×10^1
3×10^1
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000

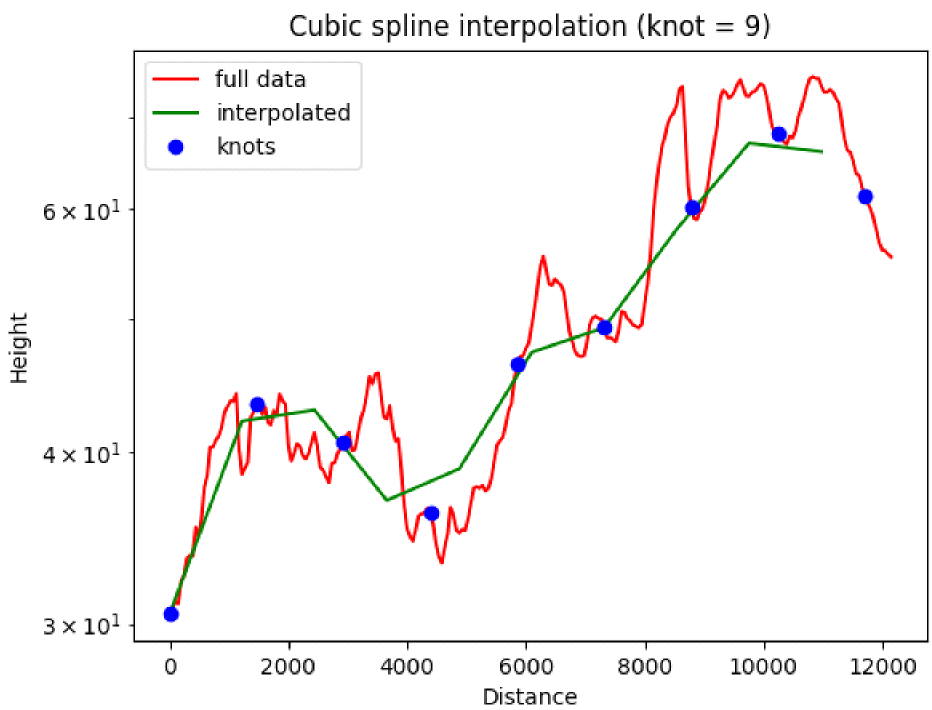


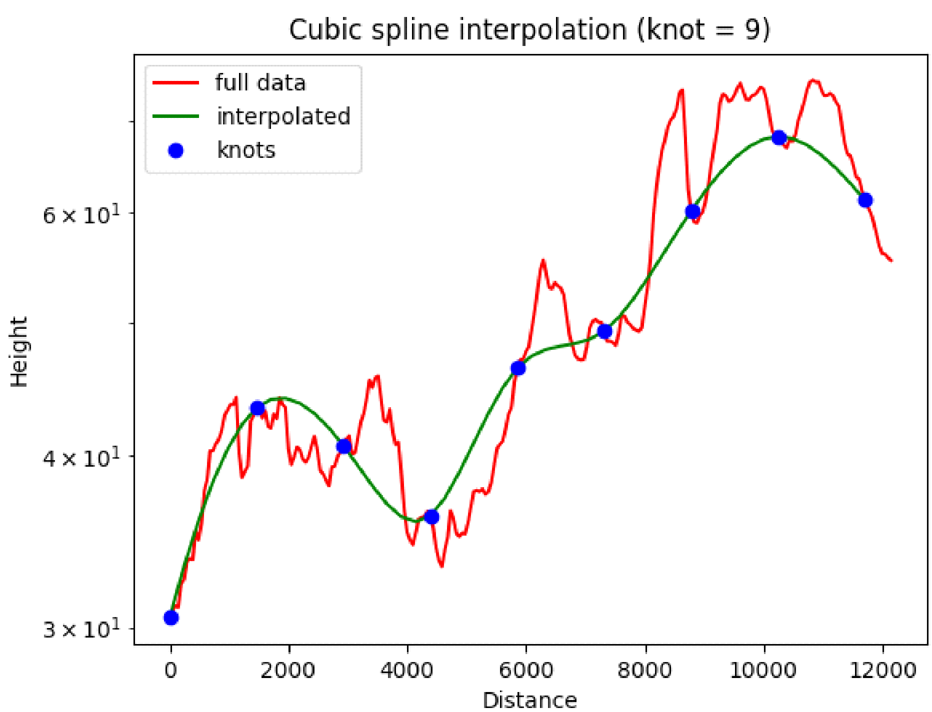
Po wybraniu innej trasy efekt się nie zmienił, a wszystko, co zostało powiedziane w poprzednim akapicie, jest odpowiednie dla tej drogi.

6. Analiza dodatkowa interpolacji:


Lagrange interpolation (knot = 9)
full data
interpolated
knots
Height
6×10^1
4×10^1
3×10^1
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
Distance


Lagrange interpolation (knot = 9)
full data
interpolated
knots
Height
6×10^1
4×10^1
3×10^1
2×10^1
0
2000
4000
6000
8000
10000
12000
Distance





W tym zadaniu zmieniłem wartości x0. Zmiana wartości x0 w metodzie interpolacji prowadzi do zmiany położenia jednego z węzłów interpolacyjnych, co wpływa na kształt całego wielomianu interpolacyjnego. Przy większych wartościach x0 nasze wykresy stają się ostrzejsze. Zmiana x0 jest bardziej wyraźna w przypadku wielomianów wysokiego stopnia, co może prowadzić do efektu Rungego.

7. Podsumowanie

Jeśli porównamy dwie metody, możemy powiedzieć, że metoda interpolacja funkcjami sklejanymi jest dokładniejsza, ponieważ nie jest podatna na efekt Rungego w przeciwieństwie do interpolacji Lagrange'a. Wraz ze wzrostem liczby węzłów w interpolacji Lagrange'a na krawędziach pojawiają się oscylacje, a interpolacja funkcjami sklejanymi (splajnami) trzeciego stopnia ma tendencję do poprawy dokładności wraz ze wzrostem liczby węzłów interpolacyjnych. A przy powiększeniu x0 obie metody zmieniają swój wykres na ostrzejszy.