Języki programowania (Informatyka) – Haskell

Pula zadań projektowych 2023/34

T. Goluch

Zadania łatwiejsze (4 pkt.)

1) Dla danej liczby naturalnej n podaj taką liczbę $x \leq n$, która da się rozłożyć na największą liczbę różnych trójek a, b, c. Takich, że $a + b + c = x$ i z boków o długości a, b, c można zbudować trójkąt prostokątny. W przypadku kilku wartości maksymalnych x należy zwrócić wszystkie. Przykładowo dla n=100 liczby 60, 84 oraz 90 mają po 2 rozkłady. Wówczas wynikiem powinno być: [60, 84, 90].

2) dla danego zbioru w postaci listy L obliczyć jego zbiór potęgowy.

3) Dla danej liczby naturalnej n wyświetl pierwszą liczbę trójkątną (suma kolejnych liczb naturalnych, kolejne to: 0, 1, 3, 6, 10, 15,…) która posiada więcej niż n dzielników. Np. siódma liczba trójkątna $28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$ posiada 6 dzielników: 1, 2, 4, 7, 14, 28.

4) Dla danej liczby n należy znaleźć liczbę jej dzielników, mniejszych od n. Uwaga: złożoność programu powinna wynosić $O(p + k)$, gdzie p – największy dzielnik n mniejszy od sqrt(n), k – liczba dzielników n.

5) Podwójny pandigital rozmiaru n to liczba w której skład wchodzą cyfry od 0 do n dokładnie 2 razy (zero nie może być na najstarszej pozycji). Przykładowo 5046170132637542 jest podwójnym pandigitalem rozmiaru 7. Dla podanych liczb heksadecymalnych $0 \leq n \leq F$ podać największy podwójny pandigital rozmiaru n. Rozwiązanie nie może być oparte o zwykłe zakodowanie wszystkich 17 możliwych n.

6) Dla podanej liczby n podaj, jeśli to możliwe, trójkę pitagorejską a, b, c taką, że $a + b + c = n$. Dla n = 12 jest nią odpowiednio: (3, 4, 5) ponieważ $3^2 + 4^2 = 5^2$. Dodatkowo należy narzucić ograniczenie, aby generować tylko pierwotne trójki pitagorejskie. Przykładowo (6, 8, 10) nie jest pierwotną trójką pitagorejską bo wszystkie jej wartości mają wspólny dzielnik równy 2. Jeśli to niemożliwe podaj trójkę pitagorejską dla największego możliwego m gdzie $m < n$.

7) Dla podanej liczby n podaj, jeśli to możliwe, czwórkę pitagorejską a, b, c, d taką, że $a + b + c + d=n$. Dla n = 8 jest nią odpowiednio: 1, 2, 2, 3 ponieważ $1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$. Dodatkowo należy narzucić ograniczenie, aby generować tylko pierwotne czwórki pitagorejskie. Przykładowo (2, 4, 4, 6) nie jest pierwotną czwórką pitagorejską bo wszystkie jej wartości mają wspólny dzielnik równy 2. Jeśli to niemożliwe podaj czwórkę pitagorejską dla największego możliwego m gdzie $m < n$.

8) Dla danej liczby naturalnej n podaj najmniejszą liczbę naturalną x posiadającą $m \geq n$ dzielników (łącznie z 1 i x). Przykładowo dla n = 16, x będzie równe 120 ponieważ jest pierwszą liczbą posiadającą m = 16 dzielników.

9) Dla trójkąta podanego przy pomocy trzech różnych punktów a, b, c na płaszczyźnie kartezjańskiej, dla której $-1000 \leq x, y \leq 1000$. Podać odpowiedź czy zawiera środek układu współrzędnych (x,y)=(0,0). Przykładowo trójkąt: a=(-100,100), b=(-100, -100), c=(100, 100) zawiera a trójkąt a=(-100,100), b=(-100, -99), c=(100, 100) nie zawiera punktu (0,0).

10) Dla danej liczby naturalnej n podaj od dla jakiej liczby naturalnej $m \leq n$ zaczyna się najdłuższy ciąg Collatza.

11) Dla danych liczb naturalnych n i m podać n-tą liczbę z porządku leksykograficznego liczb od 01…m do m(m-1)…0 (liczbą jest dowolną permutacją cyfr od 0 do m). Przykładowo dla n = 2 i m = 3 wynikiem jest 0132. Dla 9 < m < 16 należy używać liczb heksagonalnych. Przykładowo dla n = 2 i m = 10 wynikiem jest 012345678A9.

12) Dla danej liczby naturalnej n istnieje ciąg ułamków od 1/2, 1/3, …, 1/n. Wskaż którego okres w reprezentacji dziesiętnej jest najdłuższy. Dla n = 10, wynikiem jest 1/7= 0.(142857). Jeśli rozwiązań jest więcej niż jedno należy wskazać wszystkie.

13) Dla danej liczby naturalnej n istnieje ciąg ułamków od 1/2, 1/3, …, 1/n. Wskaż którego okres w reprezentacji binarnej jest najdłuższy. Dla n = 10, wynikiem jest 1/9= 0.(000111). Jeśli rozwiązań jest więcej niż jedno należy wskazać wszystkie.

14) Dla danej liczby naturalnej n istnieje ciąg ułamków od 1/2, 1/3, …, 1/n. Wskaż którego okres w podanej dowolnej reprezentacji jest najdłuższy. Jeśli rozwiązań jest więcej niż jedno należy wskazać wszystkie.

15) Dla danej liczby naturalnej n≤ 30000 podaj największą liczbę naturalną ≤ n, która nie może zostać zapisana przy pomocy sumy dwóch liczb obfitych[1].Najmniejsza liczba obfita to 12 zatem 24 jest najmniejszą liczbą która może być zapisana za pomocą dwóch liczb obfitych. Zatem dla n = 24 poprawna odpowiedź będzie 23. Dla n = 1000 będzie to 997, a dla n = 10000, 9733. Ile będzie dla n = 30000?

16) Dla danej liczby naturalnej n ≤ 10000 podaj listę liczb naturalnych z przedziału domkniętego [1, n] które mogą być zapisane przy pomocy sumy dwóch liczb obfitych[2]. Lista musi zawierać unikalne wartości posortowane w kolejności rosnącej.

17) Dla danych liczb całkowitych: n, m, p podać n-tą liczbę z ciągu rosnącego liczb od 0 do x gdzie x to maksymalna liczba zawierająca, każdą cyfrę od 0 do m, p razy. Każda liczba z ciągu zawiera cyfry od 0 do m maksymalnie p razy. Przykładowo dla m = 4 i p = 2, x będzie równe 4433221100. Przykładowo dla n = 14, m = 2 i p = 2 wynikiem będzie 112.
(1) 0
(2) 1
(3) 2
(4) 10
(5) 11
(6) 12
(7) 20
(8) 21
(9) 22
(10) 100
(11) 101
(12) 102
(13) 110
(14) 112

18) Dla danej liczby naturalnej n≤ 999 podaj liczbę znaków w jej reprezentacji słownej. Dla n = 345 wynikiem jest 23, z tylu znaków składa się napis „trzysta czterdzieści pięć".

19) Dla danej liczby naturalnej n podaj liczbę pierwszą ≤ n, która równa jest sumie składającej się z największej liczby różnych liczb pierwszych. Dla n = 81, wynikiem jest 79. Można ją zapisać przy pomocy sumy 7 liczb pierwszych: 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 23.

20) Dla danej liczby naturalnej n podaj wszystkie liczby pierwsze ≤ n dla których każda rotacja ich cyfr nadal jest liczbą pierwszą[3]. Taką liczbą jest 197 i jej dwie możliwe rotacje: 971 i 719.

21) Dla danej liczby naturalnej n ≤ 5 podaj sumę liczb które mogą zostać zapisane jako suma n-tych potęg swoich cyfr. Dla n = 4 wynikiem jest 19316 = 1634 + 8208 + 9474 = $1^4 + 6^4 + 3^4 + 4^4 + 8^4 + 2^4 + 0^4 + 8^4 + 9^4 + 4^4 + 7^4 + 4^4$.

22) Dla danej liczby naturalnej n znaleźć największy palindrom który można uzyskać z mnożenia liczb n-cyfrowych. Dla n=2 największym palindromem jest 9009 = 91 × 99.

23) Dla danej liczby naturalnej n podaj sumę wszystkich liczb ≤ n, które jednocześnie są palindromami w reprezentacji dziesiętnej i binarnej. Taką liczbą jest $585_{10} = 1001001001_2$. Przykładowo dla n=10

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Abundant_number
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Abundant_number
[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Circular_prime

wynikiem będzie 25=1+3+5+7+9, a ich reprezentacje binarne to odpowiednio: 1, 11, 101, 111, 1001. W celu optymalizacji obliczeniowej należy generować jedynie palindromy tego rodzaju, których jest mniej. W celu optymalizacji pamięciowej można przechowywać tylko połowę palindromu, +1 liczbę w przypadku palindromów o nieparzystej długości.

24) Dla danej liczby naturalnej n podaj największą, jeśli istnieje, parę liczb zaprzyjaźnionych a i b takich, że $a \leq n$, $b \leq n$.

25) Podwójny pandigital to liczba w której skład wchodzą cyfry od 0 do 9 dokładnie 2 razy (zero nie może być na najstarszej pozycji). Przykładowo 59046817091326387542 jest podwójnym pandigitalem. Dla danej liczby n zwrócić informację ile istnieje podwójnych pandigitali podzielnych przez n.

26) Niech d(n) oznacza liczbę dzielników n. M(n, k) będzie maksymalną wartością d(j) for $n \leq j \leq n+k-1$. Napisz funkcję obliczającą S(u, k) będące sumą M(n, k) for $1 \leq n \leq u-k+1$. Przykładowo S(1000, 10) = 17176, S(10000, 100) = 420524, S(100000, 1000) = 8968220. Jakie będą wyniki dla S(1000000, 10000) i S(100000000, 100000)?

27) Palindrom 595 możemy zapisać jako sumę kwadratów kolejnych liczb naturalnych: $6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2$. Dla danego n wydrukować wszystkie palindromy mniejsze od n, które możemy zapisać jako sumę kwadratów kolejnych liczb naturalnych.

28) Liczba Lychrel'a to taka liczba dla której nie da się wygenerować palindromu w dowolnie długiej sekwencji ściśle określonych przekształceń. Przekształcenia te polegają na kolejnym sumowaniu liczby z jej kontrliczbą[4] i jeśli wynik nie jest palindromem to powtarzanie tych operacji dla kolejno tak pozyskanych sum. Przykładowo 59 nie jest liczbą Lychrel'a bo ciąg przekształceń: 59 → 59+95=154 → 154+451=605 → 605+506=1111 jest kontrprzykładem. Napisz funkcję przyjmującą dwa parametry n i x, gdzie n – liczba przekształceń, a x to –kandydat na liczbę Lychrel'a. Funkcja powinna zwracać palindrom powstały z n lub mniej przekształceń liczby x dowodzący, że liczba ta nie jest liczbą Lychrel'a. W przeciwnym przypadku funkcja zwraca informację, że nie udało się znaleźć kontrprzykładu.

29) Kod Prüfer'a[5] pozwala przekształcić dowolne drzewo na unikalną sekwencję liczb. Zaimplementować funkcję kodującą drzewo podane w postaci ciągu krawędzi (lista par liczb) kodem Prüfera (lista liczb):

- prufer_code [(1, 2)]
  > []
- prufer_code [(1, 2), (1, 3)]
  > [1]
- prufer_code [(1, 2), (2, 3)]
  > [2]
- prufer_code [(1, 3), (2, 3)]
  > [3]
- prufer_code [(1, 4), (2, 4), (3, 4)]
  > [4, 4]

30) Kod Prüfer'a[6] pozwala przekształcić dowolne drzewo na unikalną sekwencję liczb. Zaimplementować funkcję dekodującą kod Prüfer'a (lista liczb) na drzewo binarne podane w postaci ciągu krawędzi (lista par liczb):

- prufer_decode([])

> [(1, 2)]

- prufer_decode([1])

> [(1, 2), (1, 3)]

- prufer_decode([2])

> [(1, 2), (2, 3)]

- prufer_decode([3])

---

[4] Kontrliczba to liczba powstała przez odwrócenie kolejności cyfr. Dla 3476576 kontrliczbą będzie 6756743. Dla liczb kończących jednym bądź większą liczbą zer kontrliczba będzie ich pozbawiona na początku. Kontrliczbą 138000 będzie 831.

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Pr%C3%BCfer_sequence

[6] https://en.wikipedia.org/wiki/Pr%C3%BCfer_sequence

> [(1, 3), (2, 3)]
• prufer_decode([4, 4])
> [(1, 4), (2, 4), (3, 4)]

31) Dla danej liczby naturalnej n podaj najmniejszą liczbę naturalną $m \geq n$ z której można utworzyć zbiór A składający się z dwóch rodzajów elementów x i y o mocy $|A| = |x|+|y|=m$ gdzie $|x| \geq |y|$. Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch elementów x ze zbioru A powinno być równe ½. Przykładowo dla n=20, m=21, |x| = 15 a |y| = 6, prawdopodobieństwo wylosowania dwóch elementów x = P(xx) = (15/21)*(14/20) = 1/2.

32) Dla podanego zbioru A liczb naturalnych zwrócić informację czy zawiera on dwa równoliczne rozłączne podzbiory B i C dla których sumy ich elementów są identyczne. Przykładowo zbiór A_1 ={81, 88, 75, 42, 87, 84, 86, 65} zawiera takie zbiory B_1 = {65, 87, 88} i C_1 = {75, 81, 84} ponieważ 65 + 87 + 88 = 75 + 81 + 84, podczas gdy zbiór C_2 = {157, 150, 164, 119, 79, 159, 161, 139, 158} już nie posiada takich podzbiorów.

33) Dla danej liczby naturalnej n podaj liczbę naturalną m dla której liczba możliwych rozwiązań równania 1/a + 1/b = 1/m (gdzie a i b są liczbami naturalnymi) jest większa albo równa n. Przykładowo dla n = 3 będzie to m = 4 ponieważ istnieją dokładnie trzy rozwiązania tego równania: $a_1 = 5$ i $b_1 = 20$, $a_2 = 6$ i $b_2 = 12$, $a_3 = 8$ i $b_3 = 8$ czyli: 1/5+1/20 = 1/4, 1/6+1/18 = 1/4 i 1/8+1/8 = 1/4.

34) Dla podanej liczby wymiernej $0 \leq p \leq 0.99$ podaj najmniejszą liczbę n taką że p jest mniejsze niż odsetek wszystkich liczb „niemonotonicznych” w zbiorze liczb całkowitych od 0 do n. Zakładamy, że liczba jest „monotoniczna” kiedy jej kolejne cyfry nie rosną albo nie maleją w innym przypadku liczba jest „niemonotoniczna”. Przykładowo liczby 222, 1334578 i 9962 są „monotoniczne” a 253, 2286 i 888878 są „niemonotoniczne”. Łatwo zauważyć, że dla $m \leq 100$, p = 0.

35) Dla danej liczby naturalnej n podaj n-tą liczbę naturalną $a \geq 10$ której suma cyfr podniesiona do pewnej potęgi x gdzie x jest liczbą naturalną równa jest jej samej. Przykładowo dla n = 2, a = 512 ponieważ $(5+1+2)^3 = 512$ i jest to druga taka liczba rozpoczynając ich szukanie od najmniejszej składającej się z dwóch cyfr czyli 10. Dla n = 10, a = 614656.

36) Podać n-tą pozycję z porządku leksykograficznego liczb od 0 do x gdzie x to maksymalna liczba zawierająca, każdą cyfrę od 0 do m, p razy. Przykładowo dla m = 4 i p = 2, x będzie równe 4433221100 (pozycją jest dowolny ciąg cyfr od 0 do m, gdzie każda z cyfr może, ale nie musi wystąpić p razy. Dozwolone są zatem ciągi rozpoczynające się od 1 do p zer). Przykładowo dla n = 3, m = 2 i p = 2 wynikiem będzie 001.

Uwagi:

a. wszystkie funkcje powinny posiadać odpowiedni nagłówek z typem funkcji,
b. w programach nie można korzystać z funkcji z Data.List, Data.Array lub podobnych modułów.

Zasady zaliczenia zadania domowego:

- Studenci dzielą się na grupy 3 osobowe.
- Każda grupa dostaje trzy losowo przydzielone zadania (każde za 5 pkt).
- W skrajnych przypadkach – kiedy liczba osób w grupie nie jest wielokrotnością trójki – dla grup 2 osobowych losowane są dwa a dla 4 osobowych cztery zadania.
- Sumarycznie grupa zawsze może uzyskać 15 p. p.
- Numery wylosowanych zadań dostępne są na arkuszu ocen umieszczonym na stronie przedmiotu na platformie eNauczanie.
- Na stronie przedmiotu należy umieścić w terminie rozwiązania zadań.
- Oddawanie zadań domowych z Haskella odbywa się na drugich zajęciach. Dla pierwszej podgrupy jest to kolejny tydzień a dla drugiej podgrupy po dwóch tygodniach po zajęciach wprowadzających. Te okresy mogą się ponieważ nie uwzględniają dni w których nie ma zajęć (tzn. świąt, godzin rektorskich itp…).

Zadanie zaawansowane:

W miejsce zadania domowego można zaimplementować program grający w wybraną grę planszową z wykorzystaniem Haskell/Haste. Dobrym przykładem może być aplikacja Davida

Peter’a grająca w grę Yinsh której kod został udostępniony. W przypadku prostszej gry, np. NIM kółko i krzyżyk, program powinien ją rozwiązywać, tzn. grać w nią optymalnie. Zrealizowanie z powodzeniem ambitnego projektu pozwala na otrzymanie dodatkowych 3 pkt. czyli łącznie18 pkt. z programowania funkcyjnego.