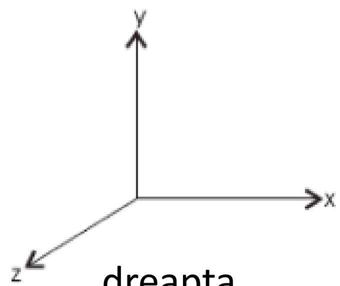
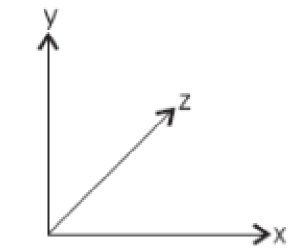
Transformari geometrice 3D

Prof. univ. dr. ing. Florica Moldoveanu

Transformari geometrice 3D



dreapta



stanga

Sisteme de coordonate carteziene 3D

i, j, k: versorii directiilor axelor sistemului de coordonate

dreapta: $k = (i \times j)/|i \times j|$

stanga: $k = (j \times i)/|j \times i|$

Sistemul de coordonate in care este descrisa scena intr-o aplicatie: sistem de coordonate carteziene 3D dreapta.

Transformarile geometrice 3D elementare(1)

[x' y' z' 1] = [x y z 1]*M   Transformare geometrica 3D in coordonate omogene

Matricile de transformare folosind vectori linie pentru reprezentarea punctelor din spatiu

Translatia

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ tx & ty & tz & 1 \end{bmatrix}$$

T[tx, ty, tz] – vectorul de translatie

x' = x + tx

y' = y +ty

z' = z +tz

Scalarea fata de origine

$$[S] = \begin{bmatrix} sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sx, sy, sz: factorii de scalare – numere reale

x' = x * sx

y' = y* sy

z' = z * sz

Rotatiile in jurul axelor principale

$$[R_z] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R_y] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

x' = x*cos(α) - y*sin(α)

y' = x*sin(α) + y*cos(α)

z' = z

Deducerea matricilor de rotatie in jurul axelor principale→ curs

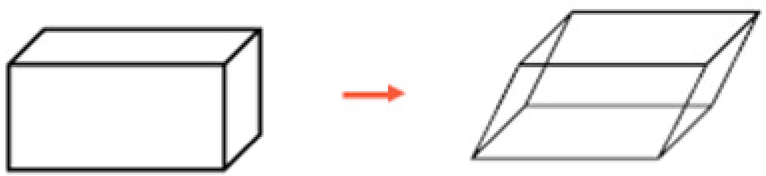
Transformarile geometrice 3D elementare (2)

Oglindirea fata de un plan al sistemului de coordonate

$$[O_z] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Forfecarea fata de origine

- **De-a lungul axei OZ: modifica x si y proportional cu z**
  - x' = x + Fx*z
  - y' = y + Fy*z
  - z' = z



- **Analog pentru forfecarea de-a lungul axei OX si a axei OY**

- **Cazul general (forfecarea pe toate cele 3 axe)**

  x' = x + y* d + z*g

  y' = x*b + y + z*i

  z' = x*c + y*f + z

$$[x' \ \ y' \ \ z' \ \ 1] = [x \ \ y \ \ z \ \ 1] * \begin{vmatrix} 1 & b & c & 0 \\ d & 1 & f & 0 \\ g & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Transformari geometrice 3D compuse

Exemple:

1. Scalarea fata de un punct oarecare, F(xf, yf, zf).

2. **Rotatia in jurul unei axe paralele cu o axa a sistemului de coordonate**:

   1. Translatia obiectului astfel incat axa de rotatie sa se suprapuna peste o axa a sistemului de coordonate.
   2. Rotatia obiectului in jurul axei sistemului de coordonate.
   3. Translatia inversa celei din pasul 1.

   Rezulta:

   [x' y' z' 1] = [x y z 1] * M sau

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x'} \\ \mathbf{y'} \\ \mathbf{z'} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = MC * \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

   M = T(-xd, -yd, -zd) * R(u) * T(xd, yd, zd)

   u : unghiul de rotatie

   xd, yd, zd : un punct de pe axa de rotatie

$$\mathbf{MC = T(xd, yd, zd) * R(u) * T(\text{-}xd, \text{-}yd, \text{-}zd)}$$

Transformari geometrice 3D compuse - exemplu

Rotatia cu un unghi u in jurul unei drepte oarecare

Se considera dreapta data printr-un punct (xd, yd, zd) si directia sa, D[a, b, c].

1. Translatie care face ca dreapta sa treaca prin origine: T(-xd, -yd, -zd)
2. Alinierea dreptei cu una dintre axele principale, de ex. cu axa OZ:

   2.1. Rotatie in jurul axei OX, cu un unghi ux, prin care dreapta ajunge in planul XOZ: Rox(ux)

   2.2. Rotatie in jurul axei OY, cu un unghi uy, prin care dreapta se suprapune pe axa OZ: Roy(uy)
3. Rotatia cu unghiul dat, u, in jurul axei pe care s-a aliniat dreapta: rotatie in jurul axei OZ : Roz(u)
4. Transformarea inversa celei din pasul 2:

   4.1. Rotatie in jurul axei OY, cu unghiul –uy: Roy(-uy)

   4.2. Rotatie in jurul axei OX, cu unghiul –ux: Rox(-ux)
5. Transformarea inversa celei de la pasul 1: T(xd, yd, zd)

Exercitiu: Sa se deduca: cos(ux), sin(ux), cos(uy), sin(uy).