Proiectii

Prof. univ. dr. ing. Florica Moldoveanu

Proiectii

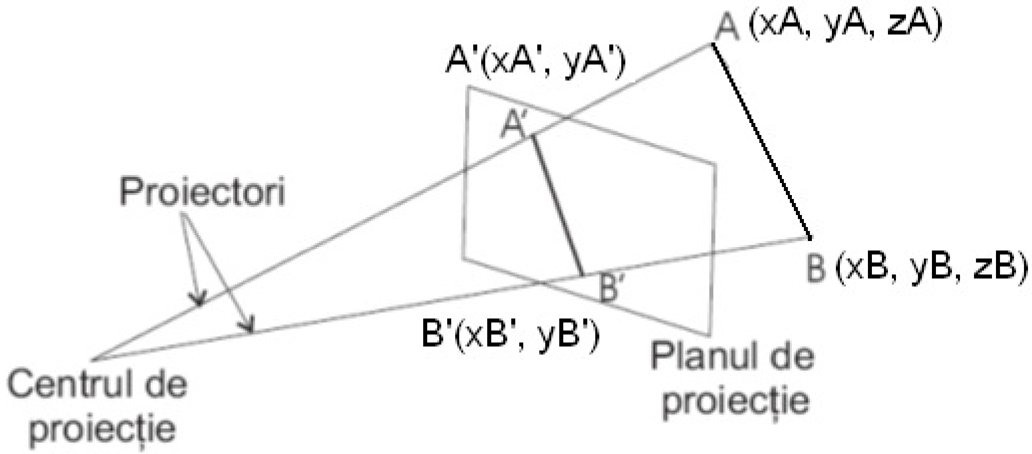
❖ Transformari dintr-un spatiu n-dimensional intr-un spatiu k-dimensional, k<n.

Proiectii $R^3 \rightarrow R^2$

- ➢Transformari din spatiul tri-dimensional intr-un spatiu bi-dimensional
- ➢Se aplica varfurilor obiectului
- ➢Nu modifica legaturile dintre varfuri

Proiectii $\mathcal{R}^3 \rightarrow \mathcal{R}^2$

- Proiectia unui varf 3D intr-un plan 2D este punctul de intersectie dintre plan si proiectorul care pleaca din ***centrul de proiectie*** si trece prin varf



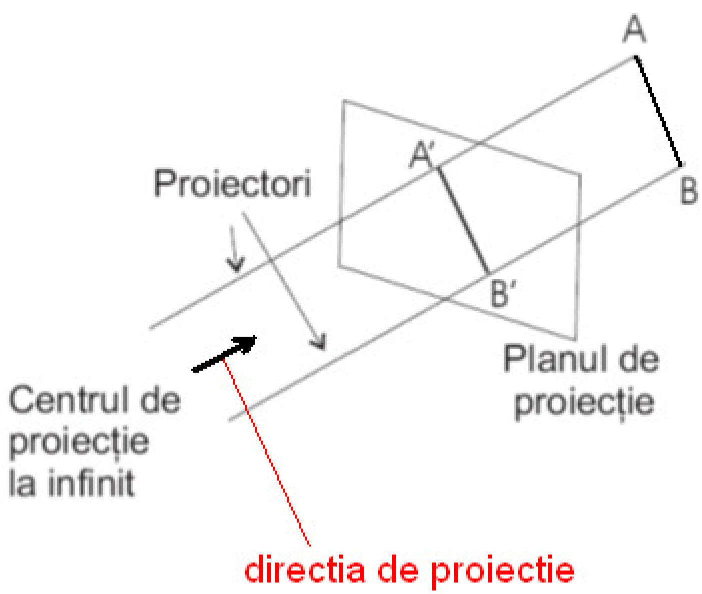
Segmentul A'-B' este proiectia segmentului A-B in planul de proiectie.

Exista 2 clase de proiectii:

- Proiectii perspectiva: centrul de proiectie este situat la distanta finita fata de planul de proiectie (ca in figura de mai sus); proiectorii sunt drepte convergente in CP.

Proiectii $\mathcal{R}^3 \rightarrow \mathcal{R}^2$

- Proiectii paralele - centrul de proiectie este la infinit; proiectorii sunt linii paralele care trec prin varfurile obiectului proiectat si au directia specificata (vectorul ***directie de proiectie***)



Proiectii perspectiva(1)

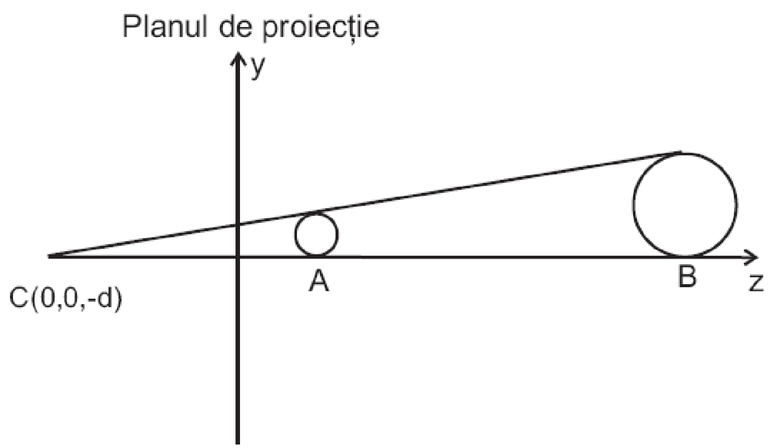
- Produc imagini asemanatoare celor obtinute cu aparatele de fotografiat.

Caracteristici:

1. Efectul de micsorare.

Dimensiunea obiectului in proiectia 2D este invers proportionala cu distanta de la centrul de proiectie la obiect.

Exemplu:



Proiectia sferelor A si B este un cerc in planul de proiectie.

rB = 2* rA

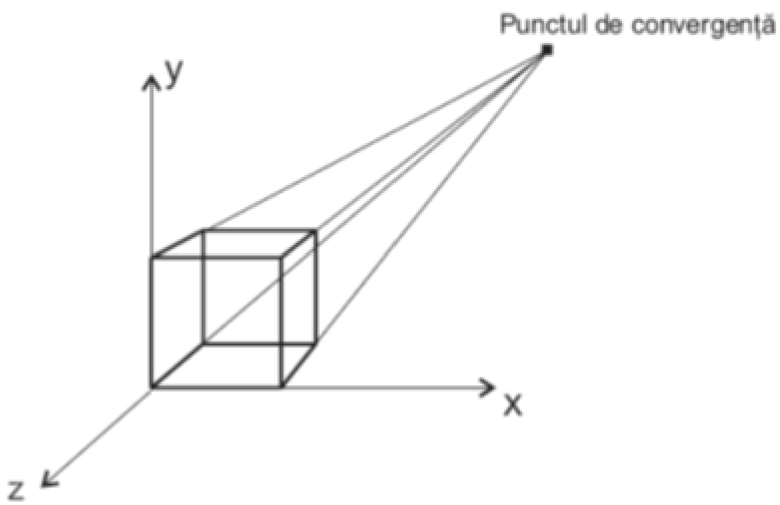
Dist(B-C) = 2* Dist(A-C)

Proiectii perspectiva(2)

2. **Modifica unghiurile dintre dreptele care nu sunt paralele cu planul de proiectie**

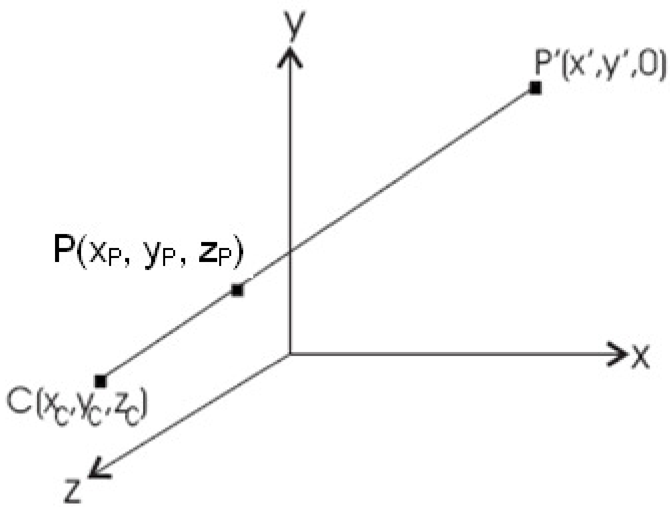
Proiectiile liniilor paralele care nu sunt paralele cu planul de proiectie converg catre un punct din plan, numit punct de convergenta

- Punctul catre care converg liniile paralele cu una dintre axele principale: ***punct de convergenta principal***



Pot fi efectuate proiectii cu unul, doua sau trei *puncte de convergenta principale.*

Proiectia perspectiva in planul XOY cu un centru de proiectie oarecare(1)



C – centrul de proiectie
P – punctul proiectat
P' – proiectia lui P in XOY

Ecuatiile parametrice ale proiectorului care trece prin P:

x = xc + (xp – xc)*t
y = yc + (yp – yc)*t   0<= t <= 1, pentru punctele aflate pe segmentul C-P
z = zc + (zp –zc) *t

0 = zc + (zp –zc) *t' → t' = – zc / (zp – zc) → **x' = (xc * zp – zc*xp)/(zp – zc)**

y' = (yc*zp – zc*yp)/(zp – zc)

Proiectia perspectiva in planul XOY cu un centru de proiectie oarecare(2)

Forma matriciala

[x' y' z' 1] = [xp yp zp 1] * Pperspectiva

$$P_{perspectiva} = \begin{bmatrix} \frac{-z_c}{zp - z_c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-z_c}{zp - z_c} & 0 & 0 \\ \frac{x_c}{zp - z_c} & \frac{y_c}{zp - z_c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

– matricea proiectiei depinde de coordonata z a punctului proiectat →

– se doreste o matrice de proiectie independenta de punctul proiectat pentru a se putea folosi pentru toate varfurile unui obiect

[x'w y'w z'w w] = [xp yp zp 1] * Pperspectiva

w= zp – zc

$$P_{perspectiva} = \begin{bmatrix} -zc & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -zc & 0 & 0 \\ xc & yc & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -zc \end{bmatrix}$$

Coordonatele carteziene ale punctului proiectat:

x' = x'w / w y' = y'w / w : *impartirea perspectiva*

[x'w y'w z'w w] = [xp yp zp 1] * Pperspectiva

w = -(zp – zc) / zc

$$P_{perspectiva} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{x_c}{z_c} & -\frac{y_c}{z_c} & 0 & -\frac{1}{z_c} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Proiectia perspectiva in planul XOY cu un centru de proiectie oarecare(3)

Pentru conservarea informatiei de adancime (necesara pentru eliminarea din imagine a partilor nevizibile ale scenei 3D) se foloseste matricea :

$$P_{perspectiva} = \begin{bmatrix} -zc & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -zc & 0 & 0 \\ xc & yc & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -zc \end{bmatrix}$$

z’ = zp /(zp – zc)

Proiectia perspectiva standard:

Xc =0, Yc=0, Zc = -d

$$P_{perspectiva} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{d} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

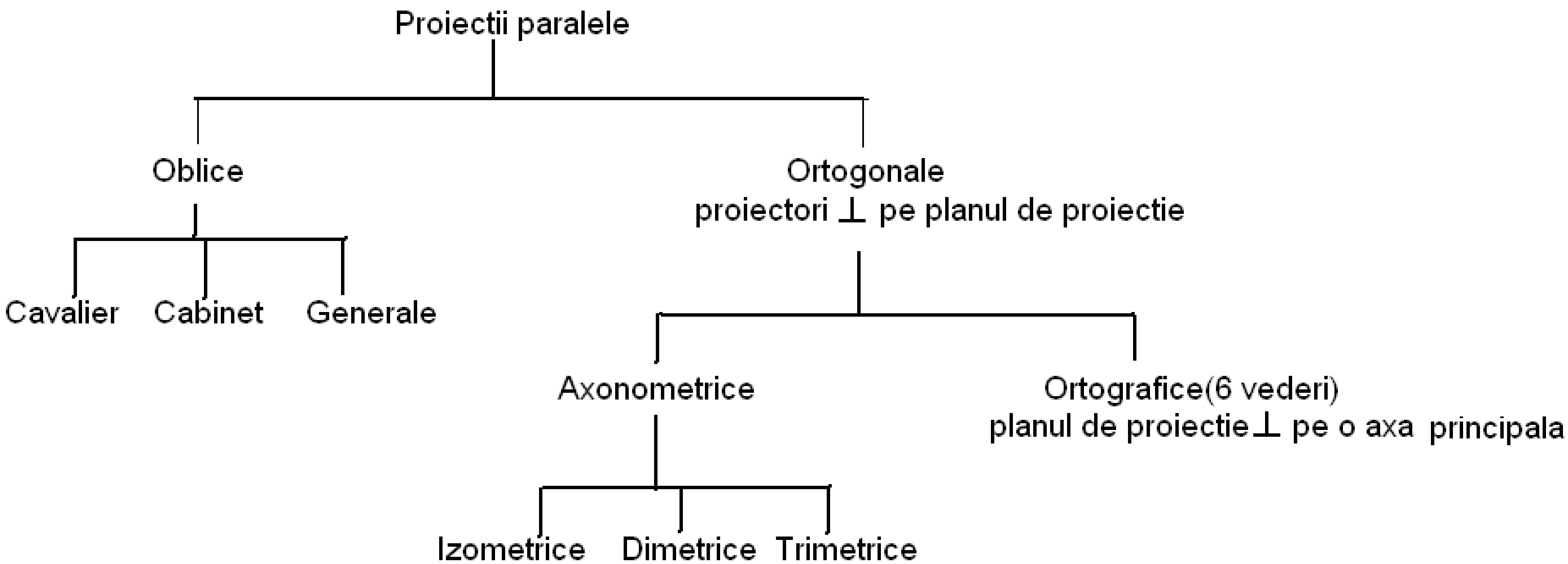
Proiectii paralele(1)

Caracteristici

- **Proiectorii sunt drepte paralele de directie data: directia de proiectie**
- **Sunt transformari afine (conserva paralelismul liniilor)**
- **Unghiurile se conserva doar pentru feţele obiectului paralele cu planul de proiectie.**

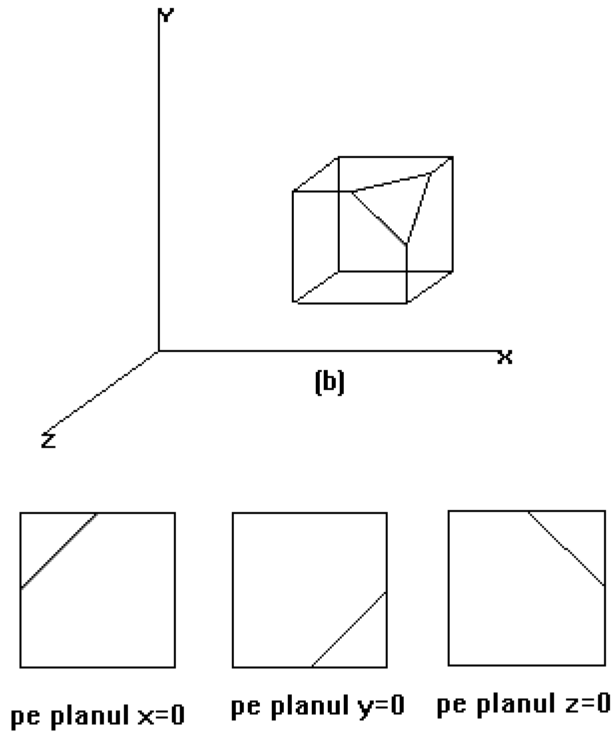
- Clasificare dupa unghiul dintre proiectori si planul de proiectie:
  - *Proiectii* ***ortogonale****:* proiectorii sunt perpendiculari pe planul de proiectie.
    - Ortografice: planul de proiectie este II cu un plan principal
    - Axonometrice: planul de proiectie este oarecare
  - *Proiectii* ***oblice****:* proiectorii nu sunt perpendiculari pe planul de proiectie – cazuri particulare:
    - proiectii Cavalier (unghiul dintre proiectori si plan = 45 grade)
    - proiectii Cabinet (unghiul dintre proiectori si plan = 63.43 grade)

Proiectii paralele(2) - clasificare



Proiectii paralele(3)

1. Proiectii ortogonale - ortografice



Proiectii ortografice ale unui cub cu un colt taiat

Ortografice (Vederi): proiectii in planele sistemului de coordonate (planul de proiectie perpendicular pe o axa principala)

– in YOZ: *vederea din stanga, vederea din dreapta,*

-in XOZ : *vederea de sus, vederea de jos,*

- in XOY : *vederea din fata, vederea din spate.*

- Conserva lungimile laturilor si unghiurile dintre laturi
- Utile in desenul tehnic

Proiectii paralele(4)

2. Proiectii ortogonale - axonometrice

- Planul de proiectie nu este perpendicular pe nici una din axele sistemului de coordonate.
- Redau mai multe feţe ale obiectului proiectat (ca si cele perspectiva): alegand planul de proiectie se poate controla scalarea laturilor.
- In functie de unghiurile pe care planul de proiectie le face cu axele sistemului de coordonate:
  - **proiectii *izometrice***, planul face unghiuri egale cu toate cele trei axe → laturile sunt scalate cu factori de scalare egali pe cele 3 axe.
  - **proiectii *dimetrice***, planul face unghiuri egale cu doua dintre axe → laturile sunt scalate cu factori de scalare egali pe 2 axe.
  - **proiectii *trimetrice***, unghiurile dintre cele trei axe si plan sunt diferite → factorii de scalare ai laturilor pe cele 3 axe sunt diferiti.

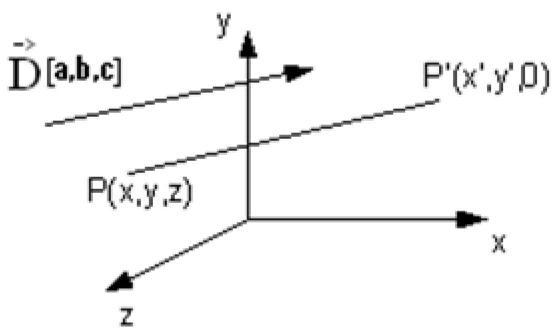
Proiectii paralele(5)

3. Proiectii oblice

- Planul de proiectie este perpendicular pe o axa principala.
- Directia de proiectie nu este perpendiculara pe planul de proiectie.
- Fețele II cu planul de proiectie se proiecteaza fara alterarea unghiurilor si a marimii laturilor
- Alegand directia de proiectie se obtin cazurile particulare:
  - **Proiectii Cavalier** (unghiul proiectorilor cu planul de proiectie = 45 grade)
    - Lungimea proiectiei unei laturi perpendiculare pe plan este egala cu lungimea laturii 3D (conserva lungimea laturilor perpendiculare pe planul de proiectie)
  - **Proiectii Cabinet** (unghiul proiectorilor cu planul de proiectie = 63.43 grade)
    - Lungimea proiectiei unei laturi perpendiculare pe plan este egala cu jumatate din lungimea laturii 3D

Proiectii paralele in planul XOY(6)

Fie P un punct din spatiu, de coordonate (x, y, z), care se proiecteaza in punctul P'(x', y') din planul de proiectie, directia proiectorilor fiind D[a b c].



Din conditia D II PP', rezulta:

PP' = s*D
x' - x = s*a
y' - y = s*b
0 - z = s*c   ---> s = - z/ c

x' = x - (a / c) * z
y' = y - (b / c) * z

Proiectii paralele in planul XOY(7)

Exprimarea matriciala a proiectiilor paralele este:

[x' y' z' 1] = [x y z 1] x $P_{paralela}$ **unde**

$$P_{paralela} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a}{c} & -\frac{b}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cazuri particulare

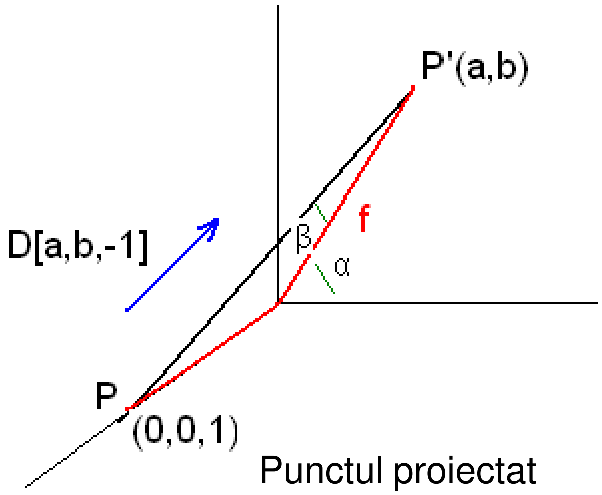
1. Proiectia ortografica in XOY:

a= 0, b = 0 →

$$P_{O\text{-}XOY} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Proiectii paralele in planul XOY(8)

2. Proiectii oblice:



$$c = -1 \rightarrow \qquad P_{OBL} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{OBL} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ f^*\cos(\alpha) & f^*\sin(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

OP de lungime 1 se proiecteaza in OP' de lungime f: → f este factorul de scalare al laturilor perpendiculare pe XOY (OP este perpendicular pe XOY).

$tg(\beta) = 1/f$

$f = 0 \rightarrow \beta = 90^0$: proiectie ortografica

$f = 1 \rightarrow \beta = 45^0$: proiectie Cavalier

$f = 0.5 \rightarrow \beta = 63.43^0$: proiectie Cabinet

α este un parametru liber

in mod uzual, $\alpha = 30^0$ sau 45^0

Proiectii paralele in planul XOY(9)

3. Proiectii axonometrice(1)

2 posibilitati de exprimare matematica:

- Proiectie ortogonala intr-un plan oarecare – obiect fix in spatiu, alegere plan astfel incat sa obtinem cele 3 cazuri (izometrice, dimetrice, generale):

  [xp yp zp 1] = [x y z 1]* Pax(N,R0)

- Transformare geometrica (TA) urmata de proiectie ortografica in XOY (Po-xoy)– cu efect echivalent – plan de proiectie fix (XOY), pozitionare obiect in spatiu:

  [xp yp zp 1] = [x y z 1]* TA * Po-xoy = [x y z 1]* PA

  TA consta din rotatii in jurul axelor OX si OY. Particularizand unghiurile de rotatie obtinem cazurile de proiectii axonometrice: izometrice, dimetrice, generale.

Proiectii paralele in planul XOY(10)

Proiectii axonometrice(2)

Exemplu:

TA = Ry(uy) * Rx(ux)

$$PA = TA*Po\text{-}xoy = \begin{bmatrix} \cos(uy) & \sin(ux)*\sin(uy) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(ux) & 0 & 0 \\ \sin(uy) & -\cos(uy)*\sin(ux) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se aplica transformarea PA versorilor axelor principale:

$$U * PA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} * PA = \begin{bmatrix} Xux & Yux & 0 & 1 \\ Xuy & Yuy & 0 & 1 \\ Xuz & Yuz & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Factorii de scalare a laturilor pe cele 3 axe sunt:

$$sx = (Xux^2 + Yux^2)^{0.5}$$
$$sy = (Xuy^2 + Yuy^2)^{0.5}$$
$$sz = (Xuz^2 + Yuz^2)^{0.5}$$

Proiectii paralele in planul XOY(11)

Proiectii axonometrice(3)

1. *Proiectii izometrice:*

- Se impune conditia: sx = sy = sz
- Rezulta: ux = +/- 35.26 grade ; uy = +/- 45 grade

2. *Proiectii dimetrice:* doi dintre factorii de scalare sunt egali

- Daca se impune conditia: sx = sy, rezulta:

$$ux = \arcsin(\pm sz / \sqrt{2}), \quad uy = \arcsin(\pm sz / \sqrt{(2 - sz^2)})$$

- sz poate fi ales intre 0 si 1;
- pentru fiecare valoare a lui sz exista 4 proiectii dimetrice; de exemplu:
- pentru sz = 0.5 : ux = +/- 20.705 grade, uy = 22.208 grade