Transformari GEOMETRICE 2D

Prof. univ. dr. ing. Florica Moldoveanu

Transformari GEOMETRICE(1)

Obiectele 2D/3D sunt reprezentate prin:

- Coordonatele varfurilor, raportate la un sistem de coordonate carteziene 2D sau 3D;
- Atribute topologice (laturi, ciclul de laturi al unei fete, s.a.);
- Atribute de aspect: culoare, tipul de interior pentru suprafete 2D, atribute de material(ex.: reflexia/refractia luminii de catre suprafata), texturi, s.a.

Transformarile geometrice se aplica (coordonatelor) varfurilor obiectului si nu afecteaza atributele sale!

Transformari GEOMETRICE(2)

- Sunt operatii fundamentale in sinteza imaginilor
- Folosite pentru:
  - Redarea desenelor la diferite marimi
  - Compunerea desenelor sau a scenelor 3D
  - Realizarea animatiei
  - Transformarea obiectelor dintr-un spatiu logic, in care sunt definite, in spatiul fizic de afisare
  - Etc.

Transformari GEOMETRICE 2D(1)

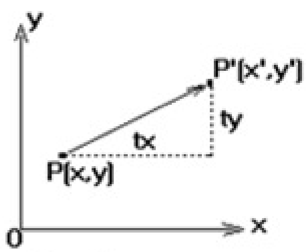
1. TRANSFORMARI GEOMETRICE ELEMENTARE

- Translatia
- Scalarea fata de origine
- Rotatia fata de origine
- Forfecarea fata de origine
- Oglindiri fata de axele principale, fata de origine

Transformari geometrice 2D elementare(1)

- Translatia

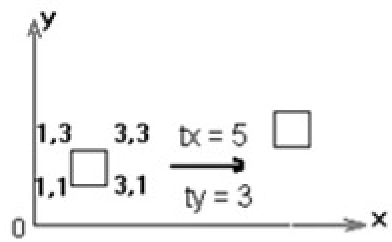
Este definita printr-un vector, T[tx,ty].

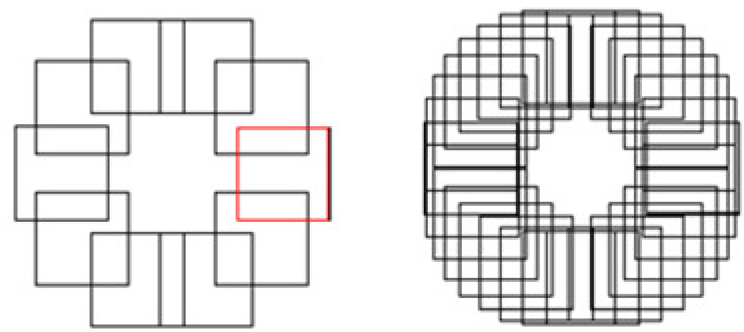


Translatia

$x' = x + tx$

$y' = y + ty$





Translatia patratului pe circumferinta unui cerc

Se doreste o reprezentare matriciala a transformarilor, necesara pentru compunerea lor.

P(x,y) → [x,y] si P(x', y') → [x',y']

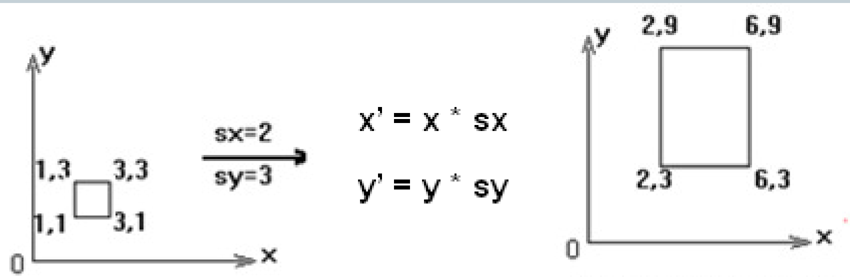
Se doreste: [x', y'] = [x, y] * M → Nu exista o matrice de 2x2 pt exprimarea translatiei in coordonate carteziene

Scalarea fata de origine

Este definita prin 2 numere reale, de regula pozitive:

- sx - scalarea de-a lungul axei OX

- sy - scalarea de-a lungul axei OY



Scalarea fata de origine

forma matriciala

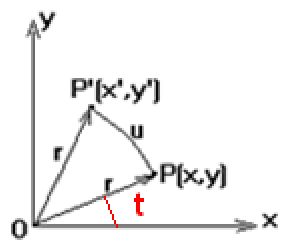
$$[x'\ y'] = [x\ y]\begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$$

Efecte:…..

➢ sx = sy , scalare uniforma

Transformari geometrice 2D elementare(3)

Rotatia fata de origine



Rotatia fata de origine

$$x' = x * \cos(u) - y * \sin(u))$$

$$y' = x * \sin(u) + y * \cos(u))$$

$x = r^*\cos(t)$

$y = r^*\sin(t)$

Relatia dintre coordonatele carteziene si coordonatele polare ale unui punct

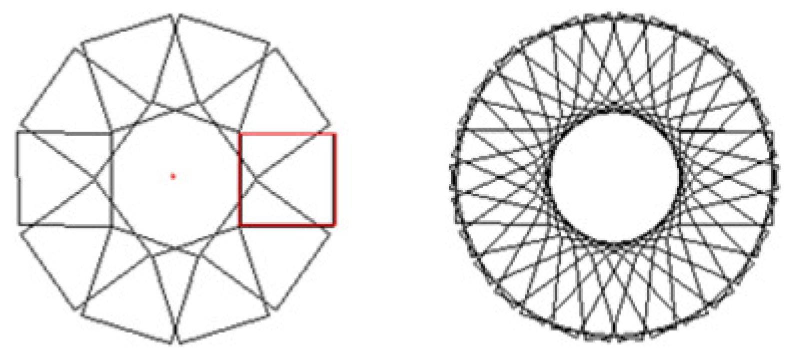
$x' = r^*\cos(t+u) = r^*(\cos(t)^*\cos(u) - \sin(t)^*\sin(u)) = x^*\cos(u) - y^*\sin(u)$

$y' = r^*\sin(t+u) = r^*(\cos(t)^*\sin(u) + \sin(t)^*\cos(u)) = x^*\sin(u) + y^*\cos(u)$

forma matriciala

$$[x'\ y'] = [x\ y]\begin{bmatrix} \cos(u) & \sin(u) \\ -\sin(u) & \cos(u) \end{bmatrix}$$

Rotatia fata de origine



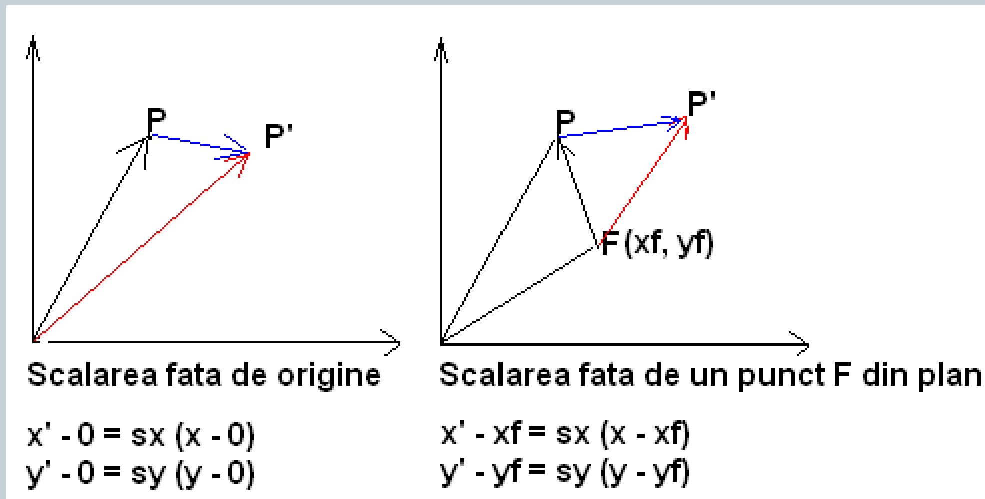
Rotatia unui patrat in jurul unui punct

Transformari geometrice 2D fata de un punct oarecare din plan(1)

Scalarea fata de un punct oarecare din plan

- Punctul fix al transformarii este un punct oarecare F(xf,yf) – coordonatele sale nu se modifica prin aplicarea transformarii.
- Scalarea se aplica vectorului FP:
  x' – xf = sx*(x-xf)
  y' – yf = sy*(y – yf)

Rezulta:
  x' = x*sx + xf –xf*sx
  y' = y*sy + yf –yf*sy



Nu poate fi exprimata printr-o matrice de 2x2!

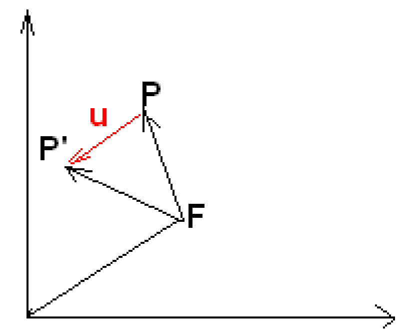
Transformari geometrice 2D fata de un punct oarecare din plan(2)

Rotatia fata de un punct oarecare din plan

- Punctul fix al transformarii este F(xf,yf)
- Rotatia se aplica vectorului FP, in jurul punctului F:

  x' – xf = (x-xf)* cos(u) - (y – yf) * sin(u)

  y' – yf = (x-xf)* sin(u) + (y – yf) * cos(u)



Scalarea fata de un punct F din plan

Rezulta:

x' = x*cos(u) – y*sin(u) + xf – xf*cos(u) + yf*sin(u)

y' = x*sin(u) + y*cos(u) + yf – xf*sin(u) – yf*cos(u)

Nu poate fi exprimata printr-o matrice de 2x2!

Compunerea transformarilor geometrice 2D

De ce este necesara?

- Pentru a aplica o singura transformare care inglobeaza o secventa de transformari elementare, in locul aplicarii in secventa a transformarilor elementare; de ex., se aplica tuturor varfurilor o transformare care inglobeaza scalare, rotatie si translatie in loc sa se aplice fiecarui varf secventa de transformari elementare.
- Matricea unei transformari compuse se obtine prin inmultirea matricilor transformarilor elementare. Exemplu:

RS = R*S = $\begin{bmatrix} \cos(u) & \sin(u) \\ -\sin(u) & \cos(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$

RS # SR

SR = S*R = $\begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(u) & \sin(u) \\ -\sin(u) & \cos(u) \end{bmatrix}$

- **Translatia fata de origine nu poate fi reprezentata printr-o matrice de 2x2!**
- **Aceasta impune reprezentarea transformarilor in coordonate omogene:**

Reprezentarea transformarilor geometrice 2D in coordonate omogene(1)

Coordonate omogene:

Un punct din plan, P(x,y), se reprezinta in coordonate omogene printr-un vector

[xw, yw, w] sau $\begin{bmatrix} xw \\ yw \\ w \end{bmatrix}$ xw = x * w; yw = y * w; w – orice numar real

Exemplu: P(2, 0.5) → [2, 0.5, 1], [4, 1, 2], [20, 5, 10]

Transformarea din coordonate omogene in coordonate carteziene:

[xw yw w] → P(x, y), unde:

- pentru w #0, x = xw/w, y = yw/w
- pentru w =0, P este un punct la infinit

Reprezentarea transformarilor elementare 2D in coordonate omogene(2)

Translația

$$[x'\ y'\ 1] = [x\ y\ 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & 1 \end{bmatrix} \quad \text{sau} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Scalarea față de origine

$$[x'\ y'\ 1] = [x\ y\ 1]\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{sau} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotația fața de origine

$$[x'\ y'\ 1] = [x\ y\ 1]\begin{bmatrix} \cos(u) & \sin(u) & 0 \\ -\sin(u) & \cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{sau} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(u) & -\sin(u) & 0 \\ \sin(u) & \cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformarile inverse ale transformarilor elementare

T(tx, ty): matricea translatiei, in coordonate omogene

S(0, 0, sx, sy): matricea scalarii fata de origine, in coordonate omogene

R(0,0,u): matricea rotatiei fata de origine, in coordonate omogene

$$T(tx, ty)^{-1} = T(-tx, -ty)$$

$$S(0, 0, sx, sy)^{-1} = S(0, 0, 1/sx, 1/sy)$$

$$R(0,0, u)^{-1} = R(0, 0, -u)$$

Transformari geometrice 2D compuse(1)

Exemple de transformari compuse:

- Expresiile matematice ale scalării şi rotaţiei faţă de un punct oarecare din plan se pot obține prin compunerea următoarelor transformări:
  - Translaţia prin care punctul fix al transformării ajunge în origine: T(-xf, -yf);
  - Scalarea / rotaţia faţă de origine: S(0,0,sx,sy)/R(0,0,u);
  - Translaţia inversă celei de la punctul 1: T(xf, yf).

Transformari geometrice 2D compuse(2)

Scalarea față de punctul F (xf, yf)

$$[x'\ y'\ 1] = [x\ y\ 1]\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_f & -y_f & 1 \end{bmatrix}}_{T(-xf,\ -yf)}\underbrace{\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S(0,\ 0,\ sx,\ sy)}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_f & y_f & 1 \end{bmatrix}}_{T(xf,\ yf)}$$

Matricea transformarii compuse:

M = T(-xf, -yf) * S(0, 0, sx, sy) * T(xf, yf)

Aplicarea transformarii compuse:

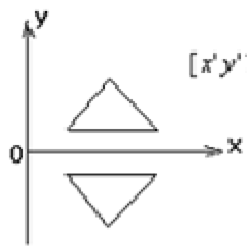
[x' y' 1] = [x y 1] * M

Alte transformari geometrice 2D(1)

Oglindirea

Fata de axa OX

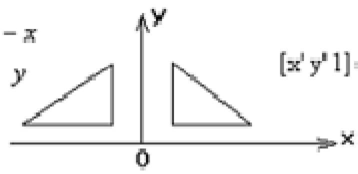
$x' = x$
$y' = -y$



$$[x'\ y'\ 1] = [x\ y\ 1]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \text{ sau } \begin{bmatrix}x'\\ y'\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ 1\end{bmatrix}$$

Fata de axa OY

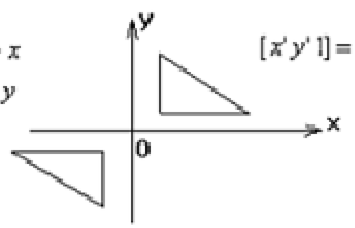
$x' = -x$
$y' = y$



$$[x'\ y'\ 1] = [x\ y\ 1]\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \text{ sau } \begin{bmatrix}x'\\ y'\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ 1\end{bmatrix}$$

Fata de origine

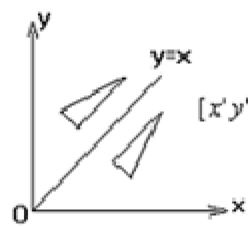
$x' = -x$
$y' = -y$



$$[x'\ y'\ 1] = [x\ y\ 1]\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \text{ sau } \begin{bmatrix}x'\\ y'\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ 1\end{bmatrix}$$

Fata de dreapta x=y

$x' = y$
$y' = x$



$$[x'\ y'\ 1] = [x\ y\ 1]\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \text{ sau } \begin{bmatrix}x'\\ y'\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ 1\end{bmatrix}$$

Alte transformari geometrice 2D(2)

Oglindirea față de o dreaptă oarecare

Se exprima ca transformare compusa prin inmultirea matricilor care exprima urmatoarele transformari:

1. O translație, astfel încât dreapta sa treaca prin origine.
2. O rotație față de origine, a.î. dreapta să se suprapună peste una dintre axele principale.
3. Oglindirea față de axa principală peste care a fost suprapusă dreapta.
4. Rotația inversă celei de la punctul 2.
5. Translația inversă celei de la punctul 1.

În notație matricială:

M = T * R* O* R^{-1} *T^{-1} (folosind vectori linie) **sau M = T^{-1} * R^{-1} *O *R *T** (folosind vectori coloana)

Deduceti T, R, O, atunci cand dreapta este data printr-un punct, (xd, yd) si o directie, D[a, b].

Alte transformari geometrice 2D(4)

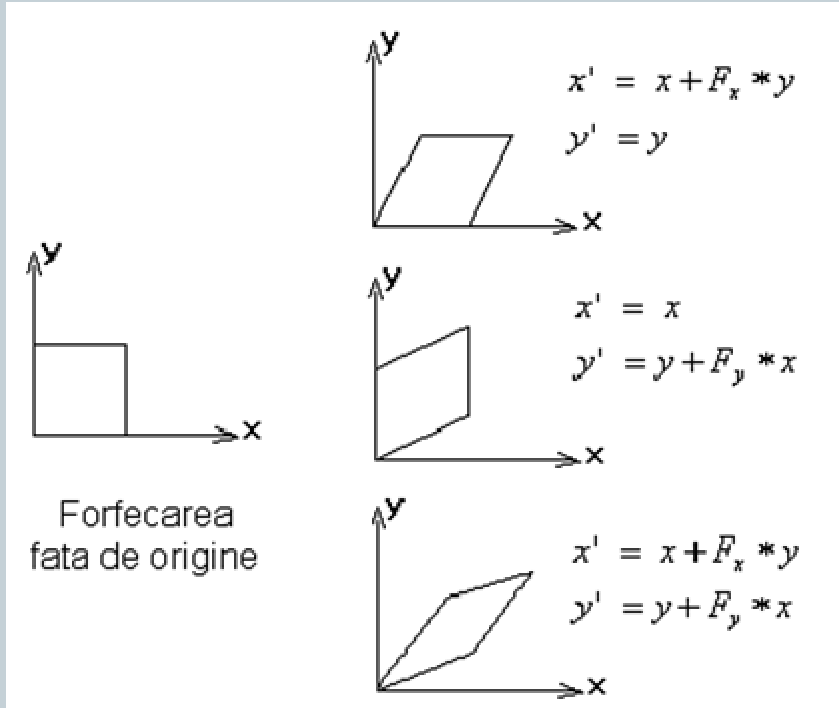
Forfecarea

Este definita prin 2 numere reale:

Fx: factorul de forfecare pe axa OX

Fy: factorul de forfecare pe axa OY

Deduceti formele matriciale ale transformarilor de forfecare:



Forfecarea fata de un punct oarecare din plan, (xf,yf) , exprimata ca transformare compusa:

1. Translatie prin care punctul (xf, yf) ajunge in origine
2. Forfecarea fata de origine
3. Translatia inversa celei de la pasul 1