ANÁLISIS MATEMÁTICO II

GUÍA DE PROBLEMAS PROPUESTOS PARA EL ALUMNO DE LAS CARRERAS DE INGENIERÍA ELECTROMECÁNICA, INGENIERÍA QUÍMICA E INGENIERÍA EN SISTEMAS DE INFORMACIÓN

PARTE Nº 1

Espacios euclídeos de n dimensiones. Entornos. Clasificación de puntos. Conjuntos abiertos, cerrados, acotados, conexos. Funciones de dos variables. Punciones de variables. Dominio, representación gráfica. Curvas y superficies de nivel.

**nº1**. Representar los conjuntos de puntos definidos a continuación

$A=\{(x,y)/\ x-y \geq 0\}$

$B=\{(x,y)/\ x^2+y^2 \leq 9\}$

$C=\{(x,y)/\ y \geq 2x-3\}$

$D=\{(x,y)/\ y \geq x^2+2x-1\}$

$E=\{(x,y)/\ x=1/n;\ n\in\mathbb{N}\}$

$F=\{(x,y)/\ x.y \leq 1\}$

$G=\{(x,y)/\ r^2< x^2+y^2 \leq R^2\}$ $r<R$ y ambos reales

$H=\{(x,y)/\ |x|<1 \wedge |y|< 2\}$

$I = \{(x,y) / d(P,A) = d(P,B) \}$ con $P(x,y)$ ; $A(x_a , y_a )$ ; $B(x_b, y_b )$
d = distancia

$J=\{(x,y,z)/\ x^2+y^2+z^2\leq 4\}$

**nº2**. Determinar los conjuntos de definición de las funciones que se indican a continuación. Decir si se trata de conjuntos abiertos, cerrados, conexos y/o acotados. Indicar en cada caso cual es el conjunto frontera y si pertenece o no al conjunto definido.

$$z = +\sqrt{(1- x^2- y^2)}$$

$$z = \text{arc sen } (x+y)$$

$$z = \frac{1}{\text{sen}\,(x - y)}$$

$$z = \sqrt{x.y}$$

$$z = \sqrt{|x| + |y| - 2}$$

$$z = \sqrt{\ln(y^2 - 2x)}$$

$$z = y/\cos x$$

$$z = \frac{\text{arc sen}\,(y - x^2)}{\sqrt{2 - |x|}}$$

$$z = \frac{\ln(x + y).\ln(4 - x - y)}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$$

**nº3**. Construir las gráficas de las siguientes funciones. Emplear para ello las trazas, curvas de nivel o intersecciones con los planos paralelos a los coordenados.

a) $f:R^2 \rightarrow R$; $x=3$
a) $f:R^2 \rightarrow R$; $y=2$
b) $f:R^2 \rightarrow R$; $3x+4z=12$
c) $f:R^2 \rightarrow R$; $(y-2)^2+z^2=4$
d) $f:R^2 \rightarrow R$; $(y-1)^2+z^2=x$
e) $f:R^2 \rightarrow R$; $x^2/9 + y^2/4 + z^2/16 =1$
f) $f:R^2 \rightarrow R$; $x^2/9 + y^2/4 - z^2/16 =1$
g) $f:R^2 \rightarrow R$; $y=z$
h) $f:R^2 \rightarrow R$; $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)=4$

**nº4**. Sea $T(x,y)=x^2+4y^2$, la expresión que vincula cada punto de una placa con su temperatura; encontrar las isotermas (líneas que unen puntos de igual temperatura) para 0º, 10º y 15ºC. Hallar también la temperatura del punto (1,1).

Adicional:

1)Probar que si $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2 \geq 0$ entonces $4x^2+6\,x\,y+4y^2<0$
(notar que esto genera una contradicción y lo solicitado es falso)

2)Para que valores de $\alpha$, es siempre $x^2+\alpha xy+y^2>0$, siempre que x e y no sean nulos ambos?

PARTE Nº 2

Límite doble. Límite iterado, Relación entre el límite doble e iterado. Funciones continuas. Propiedades.

**nº5**. Calcular los límites dobles de las expresiones

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{5x^3 - 3y^2}{2x^2 + y^3} \qquad \lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{y.\text{sen}(x-2)}{x^2 - 4}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(3+y^2).\text{sen}\,x}{x} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3.\text{sen}(x.y)}{x}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{xy - x^2 + 3}{x^2 + y^3} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} y.\text{sen}\frac{\pi}{x}$$

$$\lim_{(x,y)\to(-1,2)} F(x,y);\ \text{siendo}\quad F(x,y)\begin{cases} x^3 + 2y^2 - 1 & \text{si}\,(x,y) \neq (-1,2) \\ 7 & \text{si}\,(x,y) = (-1,2) \end{cases}$$

**nº6**. Calcular los límites iterados. Decir si existe límite doble.

$$F(x,y) = \frac{3x^2 + y^2}{x^2 + y^2} \text{ en } P(0,0) \qquad F(x,y) = (x+y).\left(\text{sen}\frac{\pi}{x} + \text{sen}\frac{\pi}{y}\right) \text{ en } P(0,0)$$

F(x,y)= y.sen (π/x) en P(0,0)

$$F(x,y) = \frac{2x + 3y}{x - y} \text{ en } P(1,2)$$

**nº7**. Calcular los límites iterados y el límite direccional sobre la curva dada, en el punto P(0,0). Decir si existe el límite doble en dicho punto.

a) $F(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2.y^2 + (x-y)^2}$;

y=x

b) $F(x,y) = \dfrac{x.y}{x^2 + y^2}$ ; y=x²

c) $F(x,y) = \dfrac{x.y - 1}{x^3 - y^3}$ ; y=m

**nº8**. Verificar la continuidad de las siguientes funciones.

$$F(x,y)=\begin{cases} x^2+2y^2 & \text{si } (x,y)\neq(1,2) \\ 0 & \text{si}(x,y)=(1,2) \end{cases}\ ; \qquad P(1,2)$$

a) $F(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & \text{si}(x,y)=(0,0) \end{cases}\ ; \qquad P(0,0)$

b) $F(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2x^2+2y^2}{e^{x.y}.(x^2+y^2)} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 2 & \text{si}(x,y)=(0,0) \end{cases}\ ; \qquad P(0,0)$

c) $F(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3.\operatorname{sen} y - y^2.\operatorname{sen} x}{x.y} & \text{si } x.y\neq 0 \\ 0 & \text{si } x.y=0 \end{cases}\ ; \ P(0,0)$

d) $F(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ ; P(0,0)

e) $F(x,y)=\dfrac{x^2-y^2-1}{x^2-4y}$ ; P(2,1)

g) Estime la posibilidad de la existencia del limite en el origen de

$$\boldsymbol{f(x,y)=\frac{x^3-y^3}{x-y}}$$

$$\boldsymbol{g(x,y)=\frac{x^5-y^5}{x-y}}$$

Redefina las funciones para que sean continuas en todo punto del plano real

**nº9**. Si f(2,3)=4; se puede concluir algo acerca de $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} f(x,y)=4$? Proponga ideas.

**nº10**. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas(F). si son falsas, explicar porqué.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x,0)=0$

b) G y H son funciones continuas de x e y $\Rightarrow f(x,y)=G(x)+H(y)$ es continua

PARTE Nº 3

| |
|---|
| Derivadas parciales de una función de dos variables. Interpretación geométrica. Derivadas parciales de n variables. Derivadas parciales sucesivas. Teorema de Shwartz. Funciones compuestas de varias variables: definición y derivación. Funciones implícitas de una y dos variables: definición, existencia y derivación. Desarrollo de Taylor y Maclaurin para funciones de dos o más variables. Extremos relativos para funciones de dos variables independientes: condiciones necesarias y suficientes. Extremos relativos de funciones con variables ligadas. Derivadas direccionales. |

| |
|---|
| Funciones diferenciables de dos variables. Diferenciales parciales. Significado geométrico. Funciones diferenciales de n variables. Relación entre la derivabilidad, diferenciabilidad y continuidad. Diferenciales sucesivas. |

**nº11**. Analizar el comportamiento de f(x,y) en P(0,0), analizando limites y estudiando su existencia, continuidad, derivadas parciales, diferencial

$$f(x,y) \begin{cases} \dfrac{2\,x\,y}{2x^2 + 3\,y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

**nº12**. Determinar si f(x,y) es diferenciable.

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-3x.y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si}(x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f(x,y)=x^2+y^2$

**nº13**. Hallar las derivadas parciales primeras de las siguientes funciones.

a) $z=\text{arc tg}(x/y)$

b) $z=\text{sen}(y.\ln x)$

c) $z=x.y/(x^2+y^2)$

d) $z=v.\text{ arc sen}(x/y)$

e) $e=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$

f) $z=x^y$

g) $z=\log_x y$

h) $z=(\text{tg } y)^{1/x}$

i) $w = x^{y^z}$

**nº14**. Hallar las derivadas parciales segundas de las siguientes funciones.

a) $F(x,y)=x^y$ b) $F(x,y,z)= z^3+3^{xy}$ c) $F(x,y)=x.\cos y+y.\cos x$

**nº15**. Dadas las siguientes funciones, verificar las igualdades correspondientes.

a)

$$z = \frac{x^3 + 8xy^2 - y^3}{x^3 + y^3};\; x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

b)
$u=x^2y+y^2z+z^2x$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=(x+y+z)^2$$

c)
$z=\ln(e^x+e^y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$$

**nº16**. Determinar las derivadas parciales de 1º y 2º orden. Verificar el teorema de Schuartz.

a) $z=x^3y-3x+2y$
b) $z=x.e^{xy}$
c) $z=x.\cos y+2x$
d) $z=\text{arc tg}(x/y)$
e) $z=u.\cos (xy)$

**nº17**. Una función $z=f(x,y)$, cuyas derivadas parciales de 2º orden existen y son continuas, y además verifican la ecuación de Laplace [$f'xx+f'yy=0$], se dice que es armónica. Demostrar que las siguientes funciones son armónicas en una región del plano.

a) $z=e^x.\cos y$ b) $z=-2x(y-1)$ c) $z=2x-x^3+3xy^2$

**nº18**. Hallar el diferencial total de las siguientes funciones.

$z=(x^2+y^2)^{1/2}$

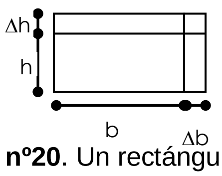
$z=y^2e^x+x^2e^y$

$u=\text{sen}(xy/z)$

d) Utilizar el Cálculo para estimar el porcentaje en que cambia el volumen de un cilindro si el radio aumenta en 1% y la altura disminuye en 1.5%.

e) El Volumen de una célula en forma de elipsoide, está dado por la fórmula: $V(a;b)=\frac{4}{3}\pi.a^2.b$ ; estimar el cambio porcentual en $V(a;b)$ producido si $a$ crece en 5% y $b$ decrece en 3%.

**nº19**. El área del rectángulo de la figura es **A=b.h** . Hallar **dA** y determinar en el gráfico el área correspondiente a la diferencia entre $\Delta$ **A** (incremento total) y **dA** (diferencial total).




**nº20**. Un rectángulo cuyas medidas son h=10cm y b=40cm; el error en la medición de cuál de los dos lados influye más en el valor del área? (considerar se produce un error a la vez).

**nº21**. Una pila de bloques mide 60x50x4 unidades métricas, dicha medición fue hecha con una cinta que comete un error del 1% de la longitud de la medida. Si son 12 bloques por unidad métrica cúbica, y 1000 bloques cuestan A, se desea calcular el error aproximado en el costo, que involucra la medida.

**nº22**. Las dimensiones interiores de una caja de metal sin tapa son 6x4x2 pies, siendo el espesor de 0,1 pie. Calcular el volumen de material usado (determinar por incremento total y por diferencial total, comparar valores).

**nº23**. Los lados de un terreno triangular miden 100m y 125m con un error posible de 0,2m; el ángulo comprendido es de 60º con un error posible de 1º. ¿Cuál es el error aproximado con que está determinada la superficie del terreno?

**nº24**. La constante C de la ley de Boyle "P.V=C", se calcula midiendo la presión y el volumen. Si la presión es de 5000 libras por $pie^2$, y el volumen es de 15 $pie^3$, pudiendo cometerse un error del 1% en la presión y del 2% en la medida del volumen, ¿cuál es el error aproximado cometido en al determinación de "C"?

**nº25**. La longitud x de un lado del triángulo aumenta a razón de 3 cm/s. La longitud y del otro lado disminuye a razón de 2 cm/s y el ángulo $\phi$ comprendido entre ellos aumenta a razón de 0,05 rad/s. ¿A qué velocidad cambia el área del triángulo?, cuando (x;y) miden 40 y 50 cm y $\phi$=30º

**nº26**. Desarrollar en serie de Taylor hasta el 3º término más el término complementario, las siguientes funciones, en los puntos indicados.

a) $z=x^3+3xy^3$ ; P(-1,1)
b) $z=x^y$ ; P(1,2)
c) $z=e^{xy}$ ; P(1,1)
d) $z=\text{sen}(x+y)$ ; $P(\pi,\pi/2)$

**nº27**. Desarrollar en serie de Mac Laurin las siguientes funciones.

a) $z=e^{xy}$

b) $z=\text{sen}(x+y)$

**nº28**. Determinar las derivadas parciales indicadas de las siguientes funciones compuestas.

a) $z=\text{sen}(y/x)$; siendo $x=e^{v/u}$ ; $y=2^{u/v}$; hallar $z_u$

b) $z=\text{sen}[\ln(u/v)]$; siendo $u=1/t$; $v=3t+1$; hallar $z_t$

c) $x=\ln(u^2+y^2)^{1/2}$; siendo $u=\text{arc tg}(v/z)$ ; $y=v^z$; hallar $x_z$ ; $x_v$

d) $u=e^{xy+2z}$; siendo $x=3t^v$; $y=v/t$; $z=v^2-t$; hallar $u_t$ ; $u_v$

**nº29**. Determinar $T'\rho$ y $T'\varphi$, para $T=x^3-xy+y^3$; siendo: $x=\rho.\cos\varphi$; $y=\rho.\text{sen}\,\varphi$

**nº30**. Dada $U=z.\text{sen}(y/x)$, determinar U'r; y U's; siendo:

$$\begin{cases} x=3r^2+2s \\ y=4r-2s^3 \\ z=2r^2-3s^2 \end{cases}$$

**nº31**. Sea y=F(x), dada como: $x^2y^3+2x^2y+3x^4-y=1$; cuando x=1, y=-1, calcular y'; en el punto x=1.

**nº32**. Para la función definida implícitamente: e-x.cos y+sen y=e, calcular y' en x=1; $y=\pi$.

**nº33**. Siendo $U=x^3y$, determinar dU/dt, dado que x=x(t) e y=y(t), siendo:

$$\begin{cases} x^5+y-t=0 \\ x^2+y^3-t=0 \end{cases}$$

**nº34**. Determinar las derivadas parciales de u y de v, respecto de x e y, siendo u=u(x,y); y v=v(x,y), dadas por el siguiente sistema.

$$\begin{cases} u^2-v=3x+y \\ u-2v^2=x+2y \end{cases}$$

**nº35**. Encontrar dy/dx; y dz/dx; dadas y=y(x); y z=z(x), como:

$$\begin{cases} z=4x^2-3y^2 \\ z^2+y^2+x^2=24 \end{cases}$$

**nº36**. Encontrar v'x;v'y; u'x; u'y; siendo u=u(x,y) y v=v(x,y), expresadas como:

$$\begin{cases} x+y+u+v=1 \\ x^2+y^2+u^2+v^2=b^2 \end{cases}$$

**nº37**. Identificar los extremos y puntos de silla de las siguientes funciones.

a) $z=x.y$
b) $z=x^2.y^2$
c) $z=x^3-3xy^2$
d) $z=x^2+(y-1)^2$
e) $z=x^2-(y-1)^2$
f) $z=1+x^2-y^2$
g) $z=(x-y+1)^2$
h) $z=x^2-xy+y^2-2x+y$
i) $z=x^3+y^3-3x-12y+20$

j) Hallar los extremos, y describir su naturaleza, de la función: $z=\left(x^2+2y^2\right)e^{1-x^2-y^2}$

k) Hallar los extremos, y describir su naturaleza, de la función: $z=(x-4)\ln(xy)$

l) Hallar los extremos, y describir su naturaleza, de la función $z=xye^{-\left(\frac{16x^2+9y^2}{288}\right)}$

m) Hallar los extremos, y describir su naturaleza, de la función: $z=x\ln\left(\frac{y^2}{x}\right)+3x-xy^2$

**nº38**. Encontrar el punto P(x,y,z) que pertenece al plano 3x+4y+z=26; y que se halla más próximo al origen de coordenadas. Aplicar método del Hessiano y multiplicador de Lagrange.

**nº39**.
a-Se desea construir una caja de cartón de $320m^3$, sin tapa, utilizando la menor cantidad de material posible. Determinar el largo, ancho y alto de dicha caja; por el método del Hessiano y utilizando multiplicador de Lagrange.

b-Considere la función $z = 8 / (x^2 + y^2 + 4)$ ¿Es posible construir un cilindro debajo de la superficie definida por la función indicada de volumen máximo?

c-Igual que el caso b pero que sea un paralelepipedo de base cuadrada?

**nº40**. Cuál es el máximo volumen de un paralelepípedo que se puede construir de modo que: (largo+ancho+alto)=x+y+z=a ; siendo a= constante.

**nº41**. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas(F). Justificar la respuesta.

a) Si f tiene máximo relativo en $(x_0,y_0,z_0)$, entonces $f'x(x_0,y_0)=f'y(x_0,y_0)=0$.
b) Si f es continua para todo x e y del dominio, y tiene dos mínimos relativos, entonces tiene al menos un máximo.

**nº42**. Demostrar que una caja de volumen dado y de superficie mínima es un cubo.

**nº43**. Hallar la derivada de $F(x,y)=x^2y+sen(xy)$; en el punto $P(1,\pi/2)$; en la dirección $\varphi$=45º (respecto del eje x).

**nº44**. Hallar la derivada de $F(x,y)=x^3y+e^{xy}$; en el punto P(1,1); en la dirección $\varphi$=30º (respecto del eje x).

**nº45**. Dada la función $F(x,y)=(x^2-y^2)/(x^2+y^2)$; hallar la derivada direccional en el punto P(2,2); en la dirección dada por la recta que pasa por P y por el punto Q(3,4).

**nº46**. Para $F(x,y)=x^2-5xy$; hallar su derivada direccional en el punto P(2,5); siendo la dirección la del vector **v**=3**i**-3**j**.

Problemas tomados del libro Cálculo 2 Rabuffetti

Problema:
- Dividir el número 600 en tres partes de modo que la suma de los porductos binarios de esas partes sea máxima

$$x + y + z = 600$$

$$f(x, y, z) = xy + xz + yz$$

Es necesario encontrar si la función tiene algún máximo bajo la condición inicial

$$z = 600 - x - y$$

$$f(x, y, 600 - x - y) = g(x, y) = xy + x(600 - x - y) + y(600 - x - y)$$

Notar que la f originalmente dada no tiene restricciones en su dominio y de todas las ternas ordenadas que podríamos considerar, solamente tomamos aquellas que pertenecen a un plano

$$g_x(x, y) = y + (600 - x - y) - x - y = 600 - 2x - y = 0$$
$$g_y(x, y) = x - x + (600 - x - y) - y = 600 - x - 2y = 0$$

$$2x + y = 600$$
$$x + 2y = 600$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 600 & 1 \\ 600 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{1200 - 600}{4 - 1} = \frac{600}{3} = 200$$

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 600 \\ 1 & 600 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{1200 - 600}{4 - 1} = \frac{600}{3} = 200$$

Este es el único punto critico

$$H(x, y) = g_{xx}g_{yy} - (g_{xy})^2 = (-2)(-2) - (-1)^2 = 4 - 1 = 3$$
$$H(x_1, y_1) = 3 > 0$$
$g_{xx}(x_1, y_1) = -2 < 0 \rightarrow (x_1, y_1) = (200{,}200)$ corresponde a un máximo local

La terna de valores que sumada da 600 es (200,200,200) y esta hace máximo la suma de productos binarios de ellos, siendo 200.200+200.200+200.200= 120.000

Problema:

Máximo y mínimo absoluto de $f(x, y) = x^2 - y^2$ sobre $A = \{(x, y)/x^2 + y^2 \leq 9\}$

Notar que la función tiene un punto critico en (0,0) que corresponde a una ensilladura, además la función allí es cero, y tiene un crecimiento positivo siempre que y=0, y tiene un decrecimiento siempre que x=0

Es de esperar algún absoluto en el borde del conjunto restrictivo

Allí es $f\left(x, [9 - x^2]^{\frac{1}{2}}\right) = x^2 - 9 - x^2 = 9 - 2x^2$ pero esto es válido siempre que $|x| \leq 3$ esto pasa por un máximo si x=0, lo que nos lleva a dos posibles valores de y, y =3, y=-3

Un análisis similar corresponde a considerar todo con la variable y, llevando a dos soluciones x=3; x=-3
Por lo tanto hay cuatro opciones, dos de máximo y dos de minimo

Criterio similar si consideramos la forma con coordenadas polares de x y de y

Problema

Se pide el valor mínimo de $x^2+4xy+5y^2-4x-6y+7$
Planteo esperable

$$2x+4y-4=0$$
$$4x+10y-6=0$$
$$x=\frac{\begin{vmatrix}4 & 4\\ 6 & 10\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 4\\ 4 & 10\end{vmatrix}}=\frac{40-24}{4}=4$$
$$y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 4\\ 4 & 6\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 4\\ 4 & 10\end{vmatrix}}=\frac{12-16}{4}=-1$$

$H(x,y)=2\,.10-16=4>0$ deriv parc seg =2 hay minimo en (4,-1)

El valor mínimo es 2.

De otra forma interesante

$$x^2+4xy+5y^2-4x-6y+7$$

Interesante es tomar el polinomio en x

$x^2+4xy+5y^2-4x-6y+7=\ x^2+\ 2\,x\,\frac{(4\,y-4)}{2}+\ (5\,y^2-6y+7)+\ (2y-2)^2-(2y-2)^2=(x+[2y-2]\,)^2+(5\,y^2-6y+7)-(2y-2)^2=(x+[2y-2]\,)^2+\ (5\,y^2-6y+7)-\ 4\,y^2-4+8y=(x+[2y-2]\,)^2+\ y^2+2y+1+2=(x+[2y-2]\,)^2+(y+1)^2+2$

Con lo cual obtenemos factores o sumandos siempre positivos y para que su suma sea mínima es necesario que los términos cuadráticos sean cero y con ello obtenemos el mínimo de 2, justo para
y=-1 y x=4
Tal como lo predice el método anterior.

Derivadas MATHCAD

Para evaluar derivadas de funciones de dos variables, primero debemos definir nuestra función.
Por ejemplo, $f(x,y):=x\cdot\cos(y)+y\cdot\cos(x)$
Para evaluar la primera derivada respecto de x, utilizamos la función "Derivative" de la barra de herramientas llamada Calculus: $\frac{d}{d\blacksquare}\blacksquare$

Luego, insertamos el nombre de la función y la variable respecto de la cual queremos derivar:

$\frac{d}{dx}f(x,y)$ Para obtener el valor, presionamos Control+. luego de completar la expresión:

$\frac{d}{dx}f(x,y)\rightarrow\cos(y)-y\cdot\sin(x)$ Obtenemos así nuestra primera derivada.

Si queremos hallar la segunda derivada, utilizamos la función "Nth Derivative" de la barra Calculus. Repetimos lo mismos pasos que en el caso anterior:

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x,y)\rightarrow(-y)\cdot\cos(x)$$

Si ahora queremos hallar las derivadas cruzadas de la función, tendremos que realizar lo siguiente.
Al momento de evaluar la primera derivada, designamos un nombre a esa nueva función. Lo que nos quedaría:

$$f1(x,y):=\frac{d}{dx}f(x,y)\rightarrow\cos(y)-y\cdot\sin(x)$$

Ahora, al evaluar las derivadas cruzadas, utilizaremos la función "f1" en lugar de "f", para el caso que queramos evaluar la derivada de f(x,y) primero respecto de x y luego respecto de y:

$$\frac{d}{dy}f1(x,y) \rightarrow (-\sin(y)) - \sin(x)$$

Si queremos comprobar que las derivadas cruzadas sean iguales, nada más tenemos que definir las funciones necesarias, en nuestro caso sería:

$$f2(x,y) := \frac{d}{dy}f(x,y) \rightarrow (-x)\cdot\sin(y) + \cos(x)$$

$$\frac{d}{dx}f2(x,y) \rightarrow (-\sin(y)) - \sin(x)$$

Si queremos hallar la derivada tercera, realizamos lo mismo que para el caso de la derivada segunda:

$$\frac{d^3}{dx^3}f(x,y) \rightarrow y\cdot\sin(x)$$

Si queremos evaluar derivadas cruzamos, nada más nombramos las funciones necesarias. Por ejemplo:

$$f11(x,y) := \frac{d}{dy}f1(x,y)$$

Luego: $\frac{d}{dx}f11(x,y) \rightarrow -\cos(x)$ es la derivada tercera de f(x,y) respecto de x, de y, y de x nuevamente.

Ejemplo:

$$j(x,y) := e^{x\cdot y}\cdot\sin(y)$$

$$j1(x,y) := \frac{d}{dx}j(x,y) \rightarrow y\cdot e^{x\cdot y}\cdot\sin(y)$$

$$\frac{d}{dx}j2(x,y) \rightarrow e^{x\cdot y}\cdot\sin(y) + x\cdot y\cdot e^{x\cdot y}\cdot\sin(y) + y\cdot e^{x\cdot y}\cdot\cos(y)$$

$$j2(x,y) := \frac{d}{dy}j(x,y) \rightarrow x\cdot e^{x\cdot y}\cdot\sin(y) + e^{x\cdot y}\cdot\cos(y)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}j(x,y) \rightarrow y^2\cdot e^{x\cdot y}\cdot\sin(y)$$

$$\frac{d^2}{dy^2}j(x,y) \rightarrow x^2\cdot e^{x\cdot y}\cdot\sin(y) + 2\cdot x\cdot e^{x\cdot y}\cdot\cos(y) - e^{x\cdot y}\cdot\sin(y)$$

$$\frac{d}{dy}j1(x,y) \rightarrow e^{x\cdot y}\cdot\sin(y) + y\cdot x\cdot e^{x\cdot y}\cdot\sin(y) + y\cdot e^{x\cdot y}\cdot\cos(y)$$

PARTE Nº 4

Curvas en el espacio. Longitud de arco de curva. Funciones vectoriales de una variable: límites de continuidad y derivación. Vector tangente Unitario. Representaciones paramétricas equivalentes. Longitud de arco. Vector normal unitario. Vector binormal. Rectas tangentes normal y binormal. Ecuación de un plano.

Campos escalares y vectoriales. Derivada de un campo escalar respecto a una dirección. Gradiente. Operador Nabla. Relación entre la derivada direccional y el gradiente. Interpretación geométrica del gradiente. Vector normal unitario y plano tangente a una superficie. Divergencia. Interpretación física de la divergencia. Rotacional. Interpretación física del rotacional. Propiedades.

**nº47**. Dada $\mathbf{f}(u,v)=e^{uv}.\mathbf{i}+(u-v).\mathbf{j}+u.\text{sen}(v).\mathbf{k}$; determinar $\mathbf{f}'u$;$\mathbf{f}'v$; $\mathbf{f}'u \times \mathbf{f}'v$

**nº48**. Encontrar la expresión de la recta que pasa por $A(a_1,a_2,a_3)$ y es paralela al vector $\mathbf{B}=b_1.\mathbf{i}+b_2.\mathbf{j}+b_3.\mathbf{k}$.

**nº49**. Trazar la curva dada vectorialmente por $\mathbf{f}(t)$. Encontrar la dirección de la curva en P(0,a,0); y encontrar su longitud si $0\leq t\leq 2\pi$. Siendo $\mathbf{f}(t)=a\cos(t).\mathbf{i}+a\,\text{sen}(t).\mathbf{j}$.

**nº50**. Tazar la curva representada por: $\mathbf{r}(t)=a\cos t.\mathbf{i}+a\,\text{sen}\,t.\mathbf{j}+bt.\mathbf{k}$; siendo $b>0\leq t\leq\infty$.

**nº51**. Hallar la longitud de la curva dada por: $\mathbf{r}(t)=t.\mathbf{i}+\text{sen}(2\pi t).\mathbf{j}+\cos(2\pi t).\mathbf{k}$; siendo $0\leq t\leq 1$.

**nº52.** Se tiene que construir una chapa para techo usando una máquina que dobla una hoja plana de aluminio convirtiéndola en una que tiene la forma ondulada
Se necesita una hoja de 60 pulgadas de ancho, y cada onda tiene una altura de una pulgada desde la línea central y un periodo de 6 pulgadas.
El problema consiste en encontrar la longitud del ancho inicial de la chapa, para lograr, luego de pasar por la máquina, lo deseado

**nº53**. Una partícula en movimiento, cuya trayectoria está dada por: $x=e^{-t}$; $y=2\cos(3t)$; $z=2\text{sen}(3t)$. Encontrar las componentes de la velocidad y la aceleración para t=1seg; según la dirección $\mathbf{d}=\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$.

**nº54**. Dada $\phi(x,y,z)=3x^2y-y^3z^3$; encontrar $\nabla\phi$ en el punto P(1,-2,-3).

**nº55**. Hallar la derivada direccional de $\phi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ en el punto P(1,1,0); según la dirección de la recta que une P con Q(2,1,1). Hallar también el valor de la máxima deriva direccional en el punto P.

**nº56**. Para la placa del ejercicio nº4, donde la función T(x,y) vincula cada punto de la placa con su temperatura, hallar los puntos donde se verifican las máximas y mínimas temperaturas.

**nº57**. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas(F). Justificar la respuesta.

a) Si $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ ; entonces $D_uf_{(0,0)}=0$, para todo **u**, donde **u** es un versor.
b) Dada f=f(x,y), si $D_uf$ existe, entonces $D_uf= -D_{-u}f$, donde **u** y **–u** son versores.
c) $\nabla(c.f)=\nabla c+\nabla f$
d) $\nabla(c.f)=\nabla c.\nabla f$
e) $\nabla(f.g)=\nabla f+\nabla g$
f) $\nabla(f.g)=\nabla f.\ \nabla g$
g) $\nabla(f.g)=g.\nabla f+f.\nabla g$
h) $\nabla f=\text{grad } f=f'x+f'y+f'z$
i) $\nabla f=\text{grad } f=f'x\ \mathbf{i}+f'y\ \mathbf{j}+f'z\ \mathbf{k}$

**nº58**. Para la función temperatura **T(x,y)** del ejercicio **nº 4** y sus isotermas correspondientes, determinar la variación de **T** en la dirección de los vectores **u1**=2**i**-3**j** y **u2**=**i**+**j**, cuál es el valor de la máxima variación que puede sufrir y en qué dirección lo hace. Cuál es la relación entre las derivadas direccionales y el concepto de gradiente.

**nº59**. Dibujar la curva espacial dada por **r**(t), trazar **r**($t_0$) y **r'**($t_0$), siendo t0=3/2.p; y **r**(t)=2cos(t).**i**+2sen(t).**j**+t.**k** . Cómo es **r'** respecto de **r**.

**nº60**. Demostrar que para un objeto en movimiento uniforme (|**V**|=cte), sus vectores velocidad **V** y aceleración **a** son ortogonales

PARTE Nº 5

| |
|---|
| Integral doble de una función continua. Dominio sobre un rectángulo. Integral doble sobre un dominio cerrado. Aplicaciones. Integral triple. Cálculo de integral triple. Aplicaciones. Nociones sobre la integridad de superficie. Integrales que dependen de un parámetro. Continuidad. Derivación bajo el signo integral: regla de Leibnitz. Integrales sucesivas. Integrales curvilíneas. Integrales curvilíneas parciales. Definición y Cálculo. Integral curvilínea total. Condición para que la integral no dependa del camino de integración. Integral sobre una curva simple cerrada: Teorema de Green. Aplicaciones |

**nº61**. Resolver las siguientes integrales paramétricas

$$\int_0^2 3xy\,dx = \varphi(y)$$

$$\int_0^{\pi/2} 3xy.\text{sen}\, z\, dz = \psi(x,y)$$

$$\int_1^2 (x^2y + 2x)dy = \chi(x)$$

$$\int_x^{x^2+2} 2xy\,dy = \psi(x)$$

**nº62**. Resolver aplicando la Regla de Leinbniz las siguientes integrales.

a) $\left[\int_b^a x.\cos(\alpha x)dx\right]$

b) $\left[\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^n dx\right]; n \in N$

c) $\psi(a) = \int_1^2 (x^2 ax + 3)dx \Rightarrow \psi'_\alpha = ?$

**nº63**. Calcular integrando primero respecto de x; y luego respecto de y.

$$\iint_R (\sqrt{x} + y - 3x^2y)\,dx\,dy;\ R = \{(x,y)/0 \le x \le 1; 1 \le y \le 3\}$$

Calcular las siguientes integrales.

a) $\int_0^2 \int_0^1 (x^2 + 2y)\,dy\,dx$

b) $\int_{-3}^5 \int_{-2}^4 (xy - y^2x^2)\,dy\,dx$

**nº64**. Resolver $\iint_R F(x,y)dx\,dy$; para los siguientes pasos.

a) $F(x,y)=x^2-3y+5$ ; $R=\{1\le x \le 4 ; -3\le y \le 2\}$
b) $F(x,y)=y^2/(1+x^2)$ ; $R=\{-1\le x \le 1 ; 0\le y \le 2\}$
c) $F(x,y)=y+3$ ; $R=\{0\le x \le 1 ; x^2 \le y \le x+2\}$
d) $F(x,y)=x^2+8xy-1$ ; $R=\{1\le y \le 2 ; y \le x \le 3\}$
e) $F(x,y)=e^{x^2}$ ; $R=\{0\le x \le 3 ; 0\le y \le x/3\}$

**nº65**. Resolver la siguiente integral doble, hacerlo también invirtiendo el orden de integración. Graficar el recinto.

$$\int_1^{\ln 5} \int_0^{\ln y} e^{x+y}\,dx\,dy$$

**nº66**.

Resolver las integrales, graficar el recinto de integración.

$$a) \iint_R (x^2 + y^2)\,dx\,dy \;; R = \{0 \le x \le 1 \wedge -1 \le y \le 0\}$$

$$b) \iint_R (16 - x^2)\,dx\,dy \;; R = \{0 \le x \le 4 \wedge 0 \le y \le x$$

**nº67**. Resolver las siguientes integrales dobles.

$$a) \int_3^4 \int_1^2 \frac{dy\,dx}{(x+y)^2}$$

$$b) \int_1^2 \int_x^{\sqrt{x}} xy\,dy\,dx$$

**nº68**. Calcular el área de las siguientes regiones mediante integrales dobles.

a) $R=\{(x,y)/0\le y \le 4-4x/3 \wedge 0\le x \le 3\}$
b) $R=\{(x,y)/x^2\le y \le 1 \wedge -1\le x \le 1\}$
c) $R=\{(x,y)/4-4x\le y^2 \le 4-x\}$
d) $R=\{3y^2=25x \;;\; 5x^2=9y\}$
e) $R=\{y=4x-x^2 \;;\; y=x\}$
f) $R=\{y^2=4x \;;\; 9x^2=y\}$
g) $R=\{-y^2+6y=x \;;\; x=y\}$
h) $R=\{x^2+y^2=10 \;;\; y^2=9x\}$
i) $R=\{y=x^2-2x-2 \;;\; y=1\}$

**nº69**. Determinar el volumen
a) $D=\{(x,y,z)/ 0\le y \le 6 \wedge 0\le z \le 4-x^2\}$
b) $S=\{x^2+y^2=16 \;;\; x^2+z^2=16$ ; primer octante$\}$

**nº70**. Sea R una región del plano **xy** cuya área es B. Si f(x,y)=k para todo punto de R, cuál es el valor de $\iint_R f(x,y)\,dA$.

**nº71**. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas(F). Justificar la respuesta.

a) Si $\iint_R f(r,\theta)\,dA > 0 \Rightarrow f(r,\theta) > 0 \;; \forall (r,\theta)$

b) $\int_a^b\int_c^d f(x).g(y)dy.dx = \left[\int_a^b f(x).dx\right].\left[\int_c^d g(y).dy\right]$

**nº72**. Calcular el volumen que determinan los siguientes conjuntos de puntos

a) $A=\{(x,y,z)/ 4x^2+y^2+1\le z \le 10\}$
b) $B=\{(x,y,z)/ 0\le y \le 6 \wedge 0\le z \le 4-x^2\}$
c) $C=\{(x,y,z)/ x^2+y^2\le 16 \wedge x^2+z^2\le 16\}$
d) $D=\{(x,y,z)/ 0\le y \le 16-x^2-z^2\}$
e) $4z=10-4x^2-y^2$ ; primer octante
f) $z=x^2+y^2$ ; $0\le y \le 1 \wedge 0\le x \le 1$

**nº73**. Determinar el centro de gravedad de una lámina rectangular definida por:

$D=\{(x,y)/ 0\le x \le 2 \wedge 0\le y \le 3\}$

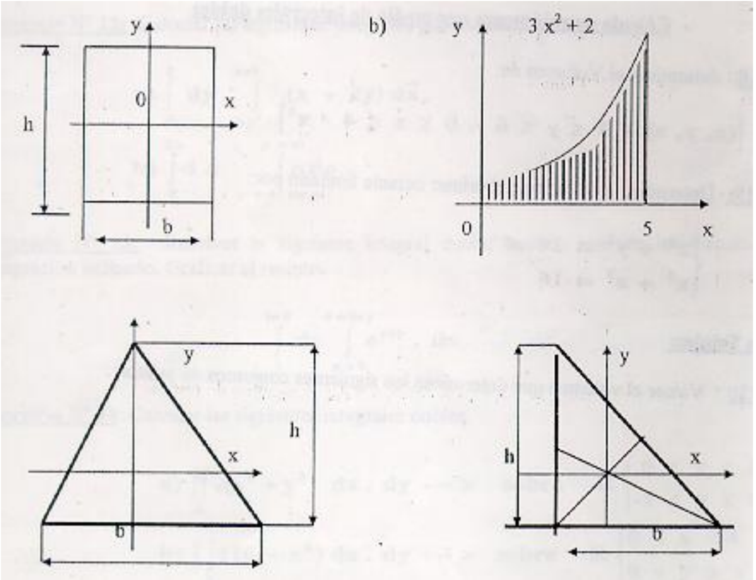
**nº74**. Determinar el centro de gravedad de:

$D=\{(x,y)/ 0\le x \le 1 \wedge 0\le y \le x^{1/2}\}$

**nº75**. Determinar el centro de masa de:

D={(x,y)/ $0\leq x\leq 2 \wedge 0\leq y\leq 3$} ; siendo la densidad $\rho(x,y)=x.y$

**nº76**. Determinar los momentos de inercia axiales (Ix, Iy), polares ($I_0$) y centrífugos (Ixy) de las siguientes figuras.




**nº77**. Hallar los momentos de inercia de:

D={(x,y)/ $0\leq x\leq 1 \wedge 0\leq y\leq x$} ; siendo $\rho=x+y$
**nº78**. Hallar el momento de inercia respecto del eje z.

S={(x,y,z)/ $0\leq y$ ; $0\leq x \wedge 0\leq z\leq 1-x-y$} ; siendo la densidad constante

**nº79**. Hallar la masa de una placa homogénea donde densidad=cte

D={(x,y)/ $y^2\leq x\leq y+2$}

**nº80**. Determinar el momento estático del sólido homogéneo definido por:

S={(x,y,z)/ $0\leq z\leq 4-x^2-4y^2$ ; $x+y\leq 1$ ; $0\leq x$ ; $0\leq y$}

**nº81**. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de la mitad superior de una esfera de radio R y centro en el origen de coordenadas, la densidad $\rho$ es constante.

**nº82**.a- Se desea medir el volumen de combustible remanente en un tanque cilíndrico enterrado horizontalmente, de radio 2m y longitud 10m midiendo con una varilla metálica recta, calibrada para tal fin, la zona que quedó humedecida por el combustible. Proponer una escala para tal regla.

b- si $\int_0^a f(x)dx = I$ y $J=\int_0^a f(x)[\int_0^x f(y)(\int_0^y f(z)dz)dy]dx$

indicar si $J=I^3$ ; $J=\frac{1}{3}I^3$ ; $J=\frac{1}{6}I^3$ ; $J=I$ ; $J=3I$

**nº83**. Calcular el área de la superficie en el espacio **S**, dada por z=f(x,y) sobre la región **R** del plano **xy**.

a) $z=2x+2y$ ; R triángulo definido por los vértices (0,0)(2,0)(0,2)
b) $z=9-x^2$ ; R cuadrado definido por los vértices (0,0)(3,0)(0,3)(3,3)

**nº84**. Dada $z=F(x,y)=x^2y-3x$; y siendo C un arco de parábola determinado por $y=x^2+2$; entre P(1,3) y Q(4,18); determinar: $\int_C F(x,y)dx$

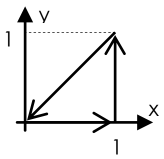
**nº85**. Calcular $\int_C F(x,y)dy$; siendo $F(x,y)=x-y^2$; $C=\{y=5x+2 \ ; \ 0\leq x\leq 3\}$. Tomando a *y* como parámetro; luego tomando a *x* como parámetro.

**nº86**. Dadas las funciones $P(x,y)=x^2-y$; $Q(x,y)=y^2+x$; y la curva $C=\{y=x^2+1; \ 0\leq x\leq 1\}$; obtener $\int_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy$

**nº87**. Calcular $\int_C (x^2y-3x)dx+(xy-2)dy$; siendo C un arco de sinusoide entre (0,0) y $(\pi/2,1)$

**nº88**. Calcular $\int_C (xydx-3y^2dy)$; siendo $C=\{(x,y)/x^2+y^2=4\}$

**nº89**. Resolver $\int_C y^2dx+xydy$; estando la curva C definida por la siguiente figura:




**nº90**. Siendo la curva C la frontera del conjunto definido por: $D=\{(x,y)/ \ 0\leq x\leq 1 \ ; \ x^2\leq y\leq x\}$ ; calcular

$$\int_C \left(\frac{x^2y^2}{2}dx+x^3dy\right)$$

**nº91**. Calcular el trabajo realizado al mover una partícula en un campo de fuerzas a lo largo de la curva definida por: $C=\{x=3(1-\text{sen } t); \ y=3(1-\cos t); \ 0\leq t\leq 2\pi\}$. Estando el campo de fuerzas actuantes definido por la función vectorial: $\mathbf{F}=(6-y)\mathbf{i}-(3-y)\mathbf{j}$

**nº92**. Si la curva C está definida por $C=\{y=x; \ x=3; \ y=0\}$; calcular $\int_C (x^2ydx-xydy)$

**nº93**. Calcular $\int_C [(2x+y)dx+(x-y)dy]$; estando la curva C asociada a $\mathbf{F}(t)=(t-1)\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}$ ; para $0\leq t\leq 2$.

**nº94**. Calcular $\int_C \left[\frac{x+y}{x^2+y^2}dx-\frac{x-y}{x^2-y^2}dy\right]$ ; siendo C la circunferencia $x^2+y^2=4$.

**nº95**. Evaluar la integral curvilínea ; a lo largo de una circunferencia con centro en el origen.

$$\int \frac{x}{x^2+y^2}dx-\frac{y}{x^2+y^2}dy$$

**nº96**. Verificar el teorema de Green.

a) $\int_C (x^3+2y^2)dx+(y^2+x^2y)dy$ ; $C=\{y^2=x \ ; \ y^2=x^3 \ ; \ 0\leq y\leq 1\}$.

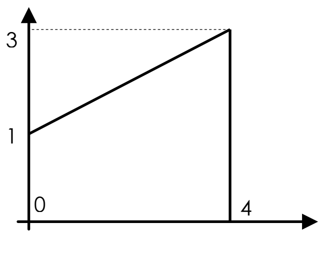
b) $\int_C (xy^2-x)dx+(x^2-y^3x)dy$ ; siendo C la frontera del conjunto $D=\{(x,y)/x^2\leq y\leq 2+x\}$

c) $\iint_D (2y-3xy^2)dx\,dy$ ; $D=\{(x,y)/y^2\leq x\leq y \ ; \ 0\leq y\leq 1\}$

**nº97**. Calcular el área de los siguientes conjuntos de puntos mediante la aplicación de integrales curvilíneas.

a) $D=\{(x,y)/x^3\leq y^2\leq x \ ; \ 0\leq y\}$
b) $D=\{(x,y)/(2x^2-8x+10)\leq y\leq (-x^2+4x+1)\}$

**nº98**. Calcular el área de la siguiente figura.



**nº99**. Calcular las siguientes integrales curvilíneas sobre tres trayectorias diferentes ($C_1$, $C_2$, $C_3$). Determinar como son las funciones respecto a las distintas trayectorias.

a) $\int_C[(x^2+y)dx+(2x-y^2)dy]$ ; $C_1=\{y=x^2 ; 0\leq x \leq 1\}$ ; $C_2=\{y^2=x ; 0\leq x \leq 1\}$ ; $C_3=\{y=x ; 0\leq x \leq 1\}$
b) $\int_C[2xy^3dx+(3x^2y^2-2)dy]$ ; $C_1=\{y=x ; 0\leq x \leq 1\}$ ; $C_2=\{y=x^{3/2} ; 0\leq x \leq 1\}$ ; $C_3=\{y=x^2 ; 0\leq x \leq 1\}$

PARTE Nº 6

Conceptos generales. Orden de una ecuación diferencial. Solución general y particular. Condiciones iniciales. Ecuación con variables separables. Funciones homogéneas. Ecuaciones lineales. Ecuación de Bernoulli. Ecuación diferencial exacta. Factores integrantes. Ecuaciones diferenciales totales. Trayectorias ortogonales. Aplicaciones. Sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Ecuaciones homogéneas de segundo orden. Soluciones particulares linealmente independientes. Solución general. Constantes arbitrarias. Ecuación característica de la ecuación diferencial, distintos casos. Ecuación completa: solución particular y general. Método de Lagrange y Coeficientes Indeterminados.

**nº100**. Resolver siguientes ecuaciones diferenciales con variables separables.

a) $y'/y-1/(x+2)=0$
b) $4y\,dx-x(y-3)dy=0$ ; pasa por (2,1)
c) $y'+2xy=0$
d) $2x.y'=y$
e) $(1+x^3)dy-x^2y\,dx=0$
f) $y.y'=(1-2x)/y$
g) $x.y'+y=y^2$
h) $xy.y'=1-x^2$

**nº101**. Hallar la ecuación de la curva tal que la pendiente de la recta tangente en cada punto es proporcional a la abcisa de dicho punto, y que pasa por el punto P(1,1)

**nº102**. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas.

a) $dy/dx=(x^2+y^2)/xy$
b) $x^2\,dy-(y^2+2xy)dx=0$ ; particularizar para x=1 e y=4
c) $2xy\,dy-(x^2+y^2)dx=0$
b) $y'=(x^3+y^3)/(3xy^2)$
e) $x^2.y'=y^2-2x^2$
f) $(3y^2+3xy+x^2)dx=(x^2+2xy)dy$
g) $y'=(y^2-2xy-x^2)/(y^2+2xy-x^2)$ ; particularizar para x=1 e y=-1
h) $x\,dy-y\,dx=(x^2-y^2)^{½}dx$ ; para el punto x=1 e y=0

**nº103**. Resolver las ecuaciones diferenciales lineales de 1º orden.

a) $y'+2y=x$
b) $2y\,\text{sen}\,x\,dx=\cos x\,dy – 2\,dx$ ; para x=0 e y=3

**nº104**. Resolver las ecuaciones diferencial total exacta.

a) $(x^2-2y)dx+(y-2x)dy=0$
b) $(4x+1)dx-2y\,dy=0$
c) $(y-2x)dx+x\,dy=0$
d) $(-e^y\,\text{sen}\,x+3x^2)dx+(e^y\cos x-2y)dy=0$
e) $2xy^3\,dx+(3x^2y^2+2y)dy=0$ ; para el punto (1,2)

**nº105**. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $y'+\text{sen}\,x(y-1)=0$
b) $x.y'-e^{2x}+y=xy$
c) $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$
d) $x(y'-y)=(1+x^2)e^x$
e) $y'+y=\cos x$
f) $y'+(1-2x)y/x^2=1$

**nº106**. Resolver las siguientes ecuaciones a coeficientes constantes de orden superior.

| | | |
|---|---|---|
| 1) $y''+y'=0$ | 2) $y''+2y'-3y=0$ | 3) $(D^2+D-2)y=0$ |
| 4) $(D^3+2D^2-3D)y=0$ | 5) $y''+y=0$ | 6) $y''-2y'+2y=0$ |
| 7) $(D^2-4)y=e^x$ | 8) $y''-y=0$ | 9) $y''-2y'+y=2e^{2x}$ |
| 10) $(D^2+4)y=\cos x$ | 11) $y''+4y'+3y=1+5\cos x$ | 12) $(D^2-D)y=x^2$ |
| 13) $(D^2+1)y=\text{sen } x$ | 14) $(D^2+2D)y=3xe^x$ | 15) $d^2y/dx^2+9y=4x.\text{sen } x$ |
| 16) $y''-y'=2e^{2x}.\text{sen } x$ | 17) $y''+y'-2y=e^x+e^{2x}$ | 18) $y''-y=x^2+\cos(2x)$ |
| 19)$(D^2-4D-5)y=e^{2x}+4\text{sen } x$ | 20)$(D^2+1)y=e^{2x}+x^2$ | 21) $(D^2+2D)y=e^x+\cos(x)+x$ |

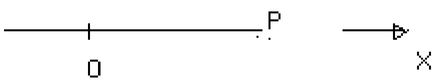
**nº107**. Marcar con verdadero (V) o falso (F) las siguientes respuestas.

| | | |
|---|---|---|
| a) $y''+2y'-3y=0$ ; $r1=-3$, $r2=1$ | a) $y=e^{-3x}$ | ☐ |
| | b) $y=C1.e^{-3x}$ | ☐ |
| | c) $y=e^{-3x}+e^x$ | ☐ |
| | d) $y=e^{-3x}(C1.\cos x+C2.\text{sen } x)$ | ☐ |
| b) $y''-2y'+2y=0$ ; $r=2\pm i$ | a) $y=e^x(\cos 2x+\text{sen}2x)$ | ☐ |
| | b) $y=e^{2x}(\cos x+\text{sen}x)$ | ☐ |
| | c) $y=e^{2x}(C1.\cos x+C2.\text{sen}x)$ | ☐ |
| c) $y''-2y'+y=2e^{2x}$ ; $r=1$ | a) $y=C1.e^x+C2.xe^x+2e^{2x}$ | ☐ |
| | b) $y=C1.e^x+C2.e^x+2e^{2x}$ | ☐ |
| | c) $y=C1.e^x+C2.xe^x+2xe^{2x}$ | ☐ |
| | d) $y=C1.e^x+C2.e^x+2x.e^{2x}$ | ☐ |
| d) $y''+y=\cos x$ ; $r=\pm i$ | a) $y=C1\cos x+C2\text{sen}x+\cos x$ | ☐ |
| | b) $y=C1\cos x+C2\text{sen}x+x.\cos x$ | ☐ |
| e) $y''-4y=e^x$ ; $r=\pm 2$ | a) $y=C1.e^{2x}+C2.e^{-2x}+a.e^x$ | ☐ |
| | b) $y= C1.e^{2x}+C2.e^{-2x}+x.a.e^x$ | ☐ |
| | c) $y=e^{2x}+C2.e^{-2x}+a.e^x$ | ☐ |

**nº108**

las constantes que se determinan en la solucion de una E. D., quedan definidas por las condiciones de valor inicial y de frontera

Una partícula P se mueve a lo largo del eje x de modo que su aceleración en cualquier tiempo $t > 0$ esta dado por $a = 16 - 24\,t$




Encuentre la posición de la partícula, medida desde el origen en cualquier tiempo $t >$ siendo su posición en $t=0$, $x = 2$ y su velocidad $v = -5$

Encuentre la posición de la partícula medida desde el origen en cualquier tiempo $t > 0$ sabiendo que inicialmente la partícula esta ubicada en $x = 2$ y que cuando $t = 1$ esta ubicada en $x = 7$

**nº109**

Hallar la curva sobre el plano (x,y,O) de modo tal que su pendiente en cualquier punto (x,y) sea igual a 2x

Encontrar la ecuación de la curva que pasa por el punto (2,5)

**nº110**

Muestre que cada ecuación diferencial de la primer columna tiene como solución la columna segunda, y obtenga las soluciones particulares que satisfagan las condiciones de la tercer columna

| | | |
|---|---|---|
| $y'' + y \tan x = 0$ | $y = A \cos X$ | $y(\pi)=4$ |

$y'' - y = 4x$ $\quad$ $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} - 4x$ $\quad$ $y(0) = 2$ ; $y'(0) = 0$

$x (y')^2 + 2 y y' + x y y'' = 0$ $\quad$ $x y^2 = A x + B$ $\quad$ $y(3) = 1$ ; $y(3) = 2$

**nº111**
Resuelva $\quad$ $x y' - 3 y = 0$

Compare la solución encontrada con la función

$$y(x) = \begin{cases} 4x^3 & \forall\ x > 0 \\ 0 & \forall\ x < 0 \end{cases}$$

Esta función es solución de la E.D.?

**nº112**
Introducción teórica:
Teorema de existencia y unicidad
Dada una e. d. de primer orden $\quad$ $y' = f(x,y)$

si f(x,y) es real, finita, siempre valorada y continua en todos los puntos de una región r del plano xy y además se cumple :

$\dfrac{\partial f(x;y)}{\partial x}$ real, finita, siempre valorada y continua en r

Entonces existe una y solo una solución $y = g(x)$ en r, tal que $y = y_0$ en $x = x_0$

Analice la condición establecida en el anterior teorema y de una explicación sobre la solución propuesta en el problema nº 111

**nº113**
Dada la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$y' + P(x)\, y = Q(x)$$

Donde P(x) Y Q(x) son continuas en el intervalo [a,b]
Aplique los conceptos del teorema anterior para decidir si existe una única solución tal que $y = y_0$ para $x = x_0$ con $x_0$ dentro del intervalo [a,b]

**nº114**
Utilice el concepto de una diferencial exacta, para lograr una solución general de la ecuación diferencial del problema anterior

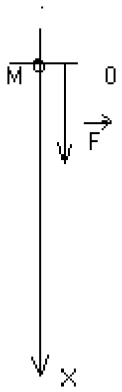
**nº115**
Resuelva

1) $x y' - y = 2 x^2 y$ $\quad$ 2) $I' + 5 I = 10$ CON $I(0) = 0$

3) $2 y \cos x \, dx + 3 \operatorname{SEN} x \, dy = 0$
CON $y(\pi/2) = 2$

**nº116**

Una masa de 2 kg cae verticalmente hacia abajo, bajo la influencia de la gravedad, partiendo del reposo. Asumiendo despreciable la resistencia del aire, establecer la ecuación diferencial y las condiciones asociadas que describen el problema, obteniendo la función que define su velocidad y su posición desde el punto de arranque.-

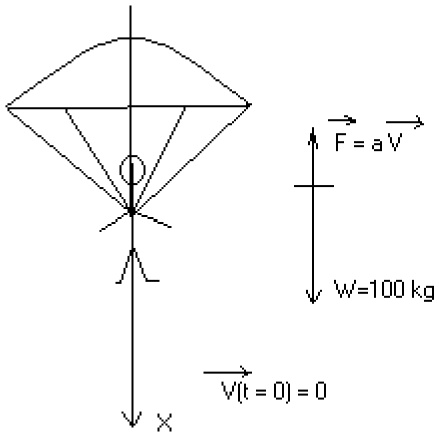



**nº117**

Una masa de 2 kg se lanza hacia arriba con una velocidad de 40 m/s, sobre las pautas establecidas en el problema anterior, indicar cual es su velocidad a los 2 s.
Cual es la máxima altura que alcanza
Cuanto tarda en regresar

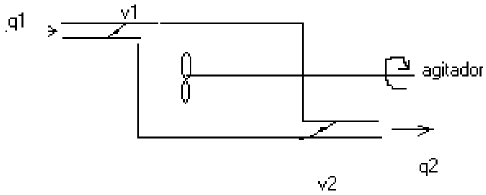
**nº118**

Un paracaidista cuyo peso combinado es de 100 kg, cae desde el reposo.
El paracaídas ya esta abierto cuando el salto se produce, y tiene una fuerza actuando sobre él, debido a la resistencia del aire, proporcional en cualquier instante a su velocidad.
El paracaidista cae verticalmente
Describir el movimiento resultante, velocidad, posición.-




**nº119**

Un tanque tiene 500 litros de una solución al 10% en volumen de alcohol, como indica el grafico:
En determinado instante se abren las válvulas v1 y v2 , de modo que por v1 ingresa una solución al 50% en

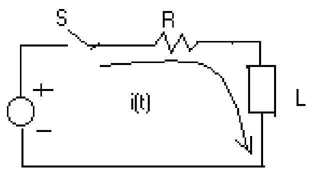



volumen a un caudal de 4 litros/minuto, mientras que por v2 sale la solución a un caudal de 5 litros minuto
El contenido del tanque esta siendo homogeneizado continuamente mediante un adecuado sistema de agitación.
¿Cuántos litros de alcohol hay dentro del tanque al cabo de 10 minutos?

**nº120**
La fuerza de resistencia del agua que actúa sobre un bote es proporcional a su velocidad instantánea y es tal que a 20 pies/seg la resistencia es de 40 lb
El bote y su conductor pesan 480 lb y el motor puede ejercer una fuerza estable de 50 lb
Encontrar la máxima velocidad a la cual puede viajar el bote, suponiendo que parte del reposo

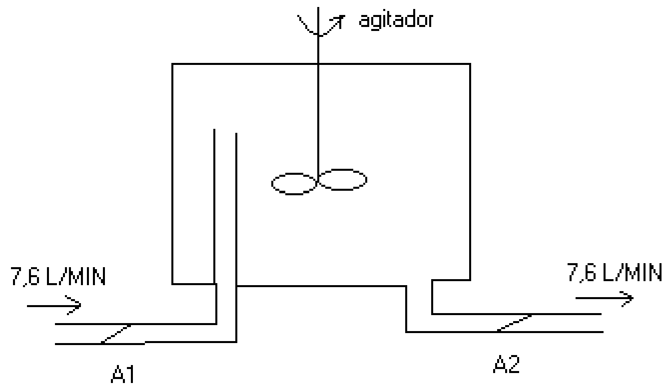
**nº121**
A- Un generador con una fem de 100 v se conecta en serie a una resistencia de 10 ohm y un inductor de 2 hy.
La conexión se hace en tiempo t = 0 seg, establecer la corriente al tiempo t
B- Igual al caso anterior pero el generador produce una fem igual a :

$$v(t) = 20 \cos 5t$$




**nº122**
Un tanque de 38 litros contiene 2,3 kg de sal disuelta.
A través de las válvulas a1 y a2 en determinado instante se hace entrar y salir solución salina al mismo caudal de 7,6 litros / minutos

La solución entrante es de 0,36 kg de sal por litro




¿Cuál es la cantidad de sal que hay en el tanque en cualquier instante?

**nº123**

1) $y' = (x - 3y) / (2y - 5x)$

2) $Y' = (X + 1) / (2 - Y)$ PARA LA CONDICION $X = -3$ ; $Y = 4$

3) $X Y' - Y = 2X Y$

4) $Y' = -X/Y$ PARA $X=1;Y=2$

5) $I' + 5I = 10$ CON $I(0)= 0$

6) $Y' = (X-Y) / (X + Y)$

7) $Y' = (Y\ e^{(Y/X)} + Y) / X$

8) $(2X + 1/X)\, dX - Y' = 0$

9) $(2XY + 3X^2)\, dX + X^2\, dY = 0$

10) $(2Y + 3X)\, dX + X\, dY = 0$

11) $Y' = (XY^2 - 1) / (1 - X^2 Y)$ PARA $(X,Y) = (0,1)$

12) $Y' = (3X + XY^2) / (Y + X^2 Y)$ $Y(1) = 3$

13) $dI/dt + 10\,I / (2t + 5) = 10$ $I(0) = 0$

14) $dI/dt + 2I = 10\ e^{-2t}$

15) $y'' + 4y' - 5y = 0$

16) $2y''' - 5y'' + 2y' = 0$

17) $y'' = 4y$

18) $y'' - y = 0$ PARA $y(0) = 2$ ; $y'(0) = -3$

19) $y'' - 3y' + 2y = 0$ $y(0) = -1$ ; $y'(0) = 0$

20) $y'' - 6y' + 9y = 0$

21) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

22) $y'' + y = 0$

23) $y'' + 2y' + 5y = 0$

24) $y'' + 4y' + 9y = x^2 + 3x$

25) $y'' + 4y = 4e^{2x}$

26) $y'' + 4y' + 4y = 6 \operatorname{sen}(3x)$

27) $y'' + y = f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases}$$

$y(0) = y'(0) = 0$

$y(x)$, $y'(x)$ son continuas en $x = \pi$

28) $d^2s/dt^2 + ds/dt = t + e^{-t}$

con $ds/dt = s = 0$, en $t = 0$

**nº124**
Una partícula se mueve sobre el eje x de manera que su velocidad es proporcional al producto de su posición instantánea x y el tiempo t.
Si la partícula está en x = 54 cuando t = 0, y x = 36 cuando t = 1.
¿Dónde estará cuando t = 2?

**nº125**
Calcular la corriente eléctrica en un circuito resistivo - inductivo, cuando se aplica una bateria en el instante t=0

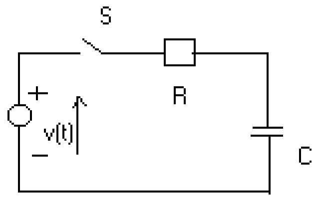
V= 100 volt
R= 10 $\Omega$
L= 2 Hy

**nº126**
Calcular la corriente eléctrica en un circuito resistivo - capacitivo, cuando se aplica una bateria en el instante t=0

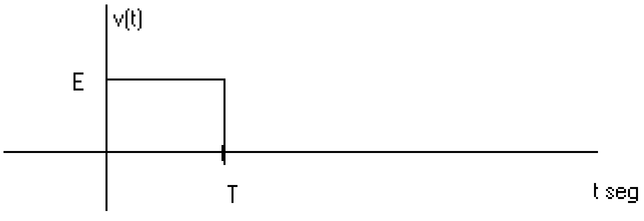
V= 100 volt ; R= 20 $\Omega$ ; C = 0,01 F

**nº127**
Una masa m pende de un hilo inextensible, de largo l y masa despreciable.
el sistema esta libre de moverse en un plano vertical, encontrar el periodo de la vibración

**nº128**
Obtener la corriente eléctrica a partir de que se cierra el contacto del circuito que figura a continuación:




Tensión de la fuente de alimentación

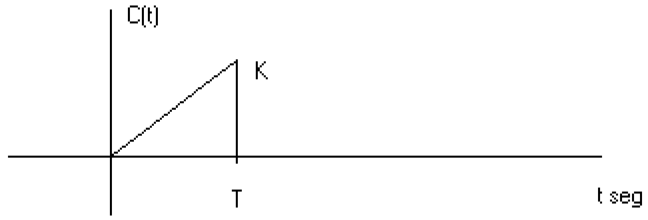



**nº129**
Estudios biológicos demuestran que un órgano de volumen v ($cm^3$) una determinada droga puede ingresar transportada por un solvente, a una tasa

a ($Cm^3$ / seg )

y salir a b ($Cm^3$ / seg )

Si la concentración de ingreso se ajusta a la siguiente relación




Asumiendo que en t = 0 la concentración es nula, ¿Cuál es la concentración de la droga dentro del órgano en cualquier instante?

**nº130**
El incremento de masa corporal es proporcional a las calorías diarias que se toman, y al consumo de tales que se hacen

Si el consumo es aproximadamente igual a 40 $\frac{cal / dia}{kg}$ por cada kg de masa corporal de acuerdo a una actividad normal, entonces para que pierda masa corporal, debe consumir menos energía, manteniendo su nivel de actividad constante.

Sobre estas condiciones proponga un modelo de variación de masa corporal en función de las calorías que toma una persona de 80 kg y que comienza una dieta de 2500 diarias
y calcule cuanto tiempo tardara en perder 5 kg

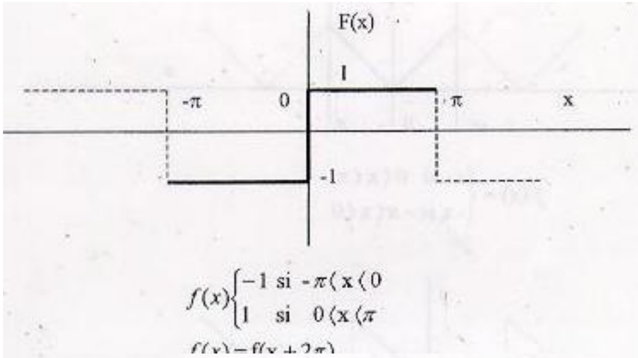
¿Si se mantuviesen estas condiciones de dieta, y actividad, cual seria el peso limite de esa persona?

PARTE Nº 7

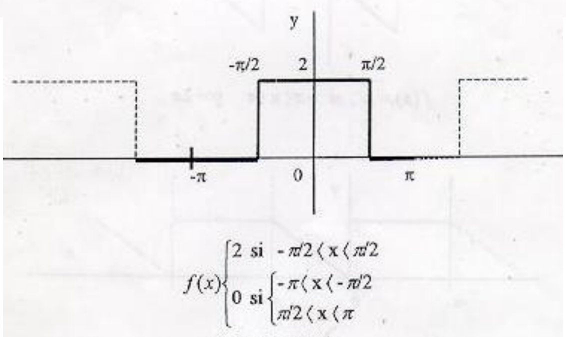
| |
|---|
| Series de Fourier. Determinación de los coeficientes para una función del período 2 $\pi$ . Generalización para un período distinto. Desarrollo de Fourier para funciones pares e impares. Convergencia para la serie de Fourier. |

**nº131**. Desarrollar en series de Fourier las siguientes funciones periódicas de periodo $2\pi$.

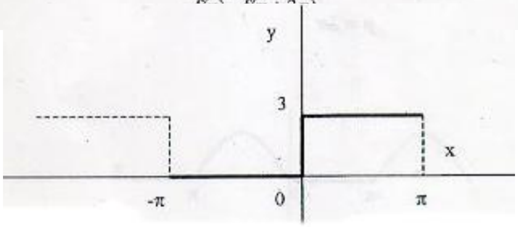
1)




2)



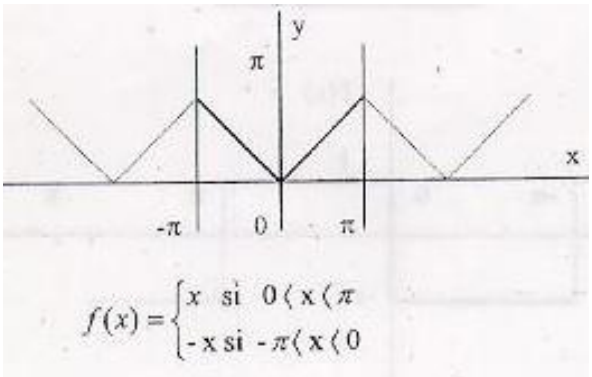

3)



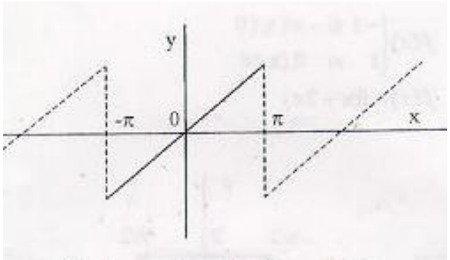

$$f(x)\begin{cases} 0 \text{ si } -\pi < x < 0 \\ 3 \text{ si } 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$p = 2\pi$$

4)

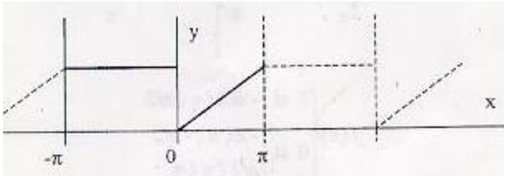


5)




$f(x) = x$ , si $-\pi < x < \pi \quad p = 2\pi$

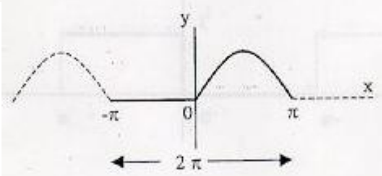
6)




$$f(x)\begin{cases} x & \text{si} \quad 0 < x < \pi \\ \pi & \text{si} \quad -\pi < x < 0 \end{cases}$$

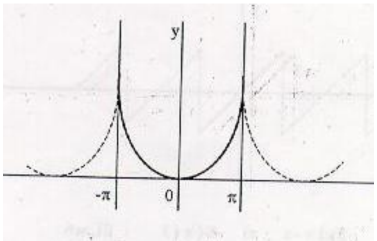
$p = 2\pi$

7)



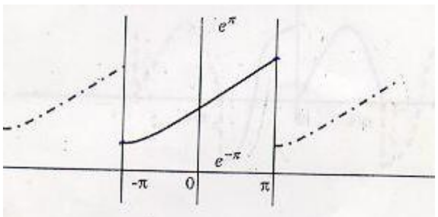

$$f(x)\begin{cases} 0 & \text{si} \quad -\pi < x < 0 \\ \text{sen } x & \text{si} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

8)



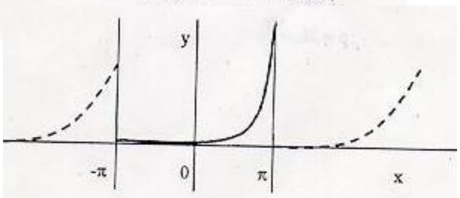

$f(x) = x^2 \qquad -\pi < x < \pi \qquad p = 2\pi$

9)




$f(x) = e^x \qquad -\pi < x < \pi$

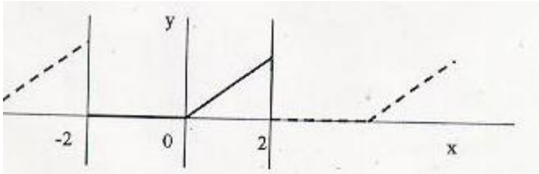
10)




$$f(x)\begin{cases} 0 & \text{si} \quad -\pi < x < 0 \\ x^2 & \text{si} \quad 0 < x < \pi \end{cases} \quad p = 2\pi$$

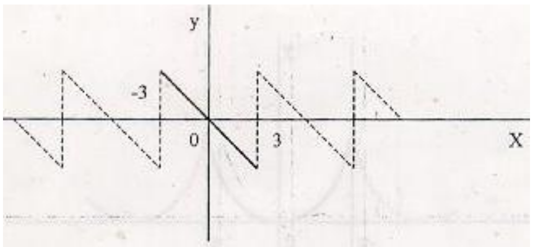
**nº132**. Desarrollar en series de Fourier las siguientes funciones periódicas de periodo 2L≠2π.

1)



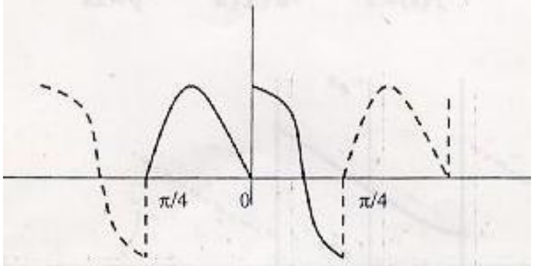

$$f(x)\begin{cases} 0 & \text{si} \quad -2 \langle x \langle 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \langle x \langle 2 \end{cases} \qquad p = 2L = 4$$

2)




$$f(x) = -x \quad \text{si} \quad -3 \langle x \langle 3 \qquad 2L = 6$$

3)




$$f(x)\begin{cases} -\text{sen } 4x & -\frac{\pi}{4} \langle x \langle 0 \\ \cos 4x & 0 \langle x \langle \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$p = 2L = \frac{\pi}{2}$$

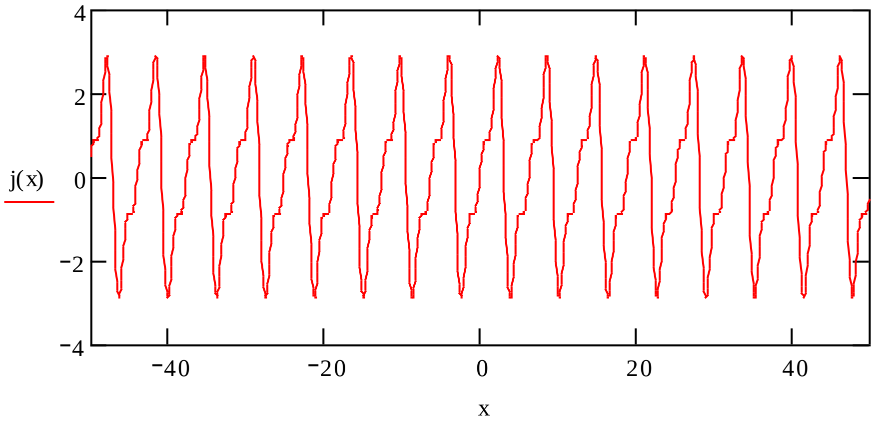
$f(x) := x$

$$a0(x) := \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \to 0$$

$$a(x,k) := \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} (f(x)\cos(k\cdot x))\,dx \to 0$$

$$b(x,k) := \left[\frac{1}{\pi}\cdot\left[\int_{-\pi}^{\pi} (f(x)\sin(k\cdot x))\,dx\right]\right] \to \frac{-2}{\pi}\cdot\frac{(-\sin(\pi\cdot k)) + \pi\cdot k\cdot\cos(\pi\cdot k)}{k^2}$$

$$j(x) := \frac{a0(x)}{2} + \sum_{k=1}^{3} (a(x,k)\cdot\cos(k\cdot x) + b(x,k)\cdot\sin(k\cdot x)) \to 2\cdot\sin(x) - \sin(2\cdot x) + \frac{2}{3}\cdot\sin(3\cdot x)$$




PARTE Nº 8

Ecuaciones Diferenciales con Derivadas Parciales.
Noción de algunos tipos de ecuaciones diferenciales de segundo orden de coeficientes constantes. Conceptos básicos. Resolución de casos sencillos de ecuaciones de Laplace. Problemas de contorno. Aplicaciones. Ecuaciones del calor y de las ondas.

**nº133** Resolver los siguientes problemas de ecuaciones en derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad u(0,y) = 4e^{-2y} + 3e^{-6y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad u(0,y) = 2e^{-y} + 3e^{-2y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + u = \frac{\partial u}{\partial y} \qquad u(x,0) = 4e^{-3x}$$

$$4\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial x} = 3y \qquad y(x,0) = 4e^{-x} - e^{-5x}$$