Производная и градиентный спуск

Функции. Производная. Экстремумы функции. Выпуклость функции. Правила дифференцирования. Правила дифференцирования сложной функции. Chain-rule. Функция нескольких аргументов. Градиент. Градиентный спуск как метод оптимизации.

Юстина Иванова
Специалист по Анализу Данных

Инженер-программист МГТУ им. Баумана

Master of Science in Artificial Intelligence
University of Southampton

Специалист по компьютерному зрению
в компании Dataplex.

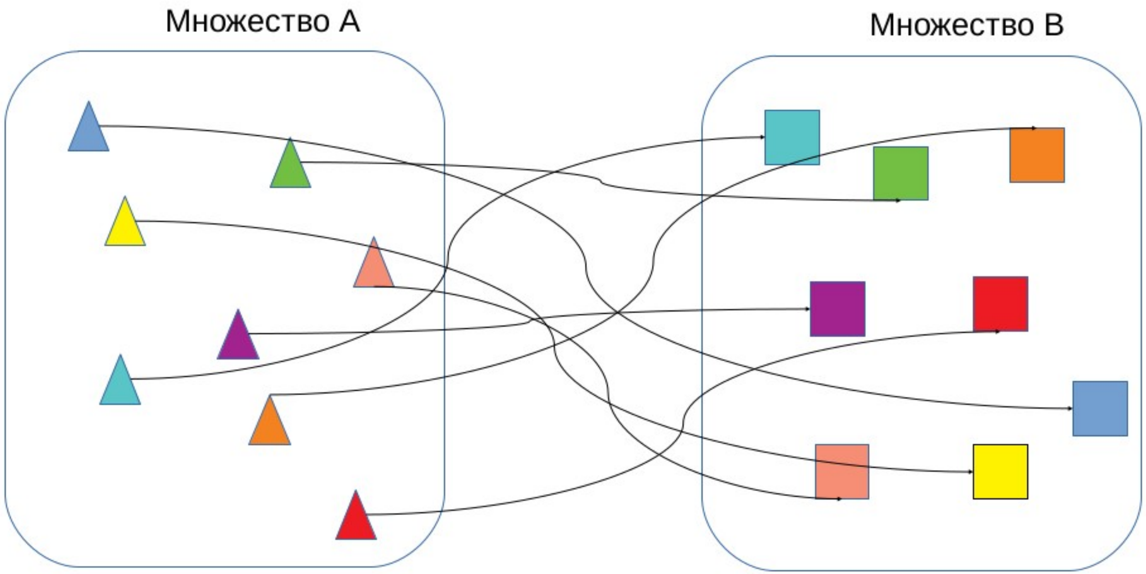
Специалист по анализу данных
в компании ОЦРВ.

Юстина Иванова
студент-аспирант
University of Bolzano

НЕТОЛОГИЯ

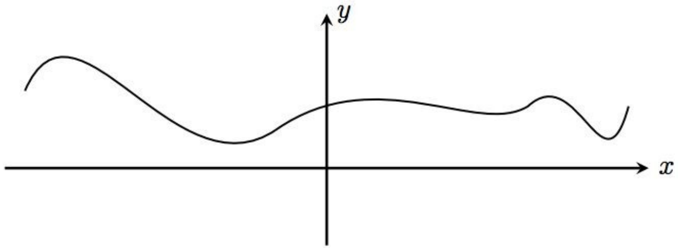
Функции

Функция - это некоторое соответствие x -> f(x), причём для каждого x определено единственное значение f(x).



https://github.com/rtriangle/Netology-statistics

Функции и их свойства



D(f) - область определения функции
E(f) - область значений функции

Будем работать только с функциями, у которых
D(f) и E(f) - подмножество действительных чисел R.

Функции и их свойства

Каковы область определения и область значений следующих функций?

1) $$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

2) $$f(x) = 2^x$$

Функции и их свойства

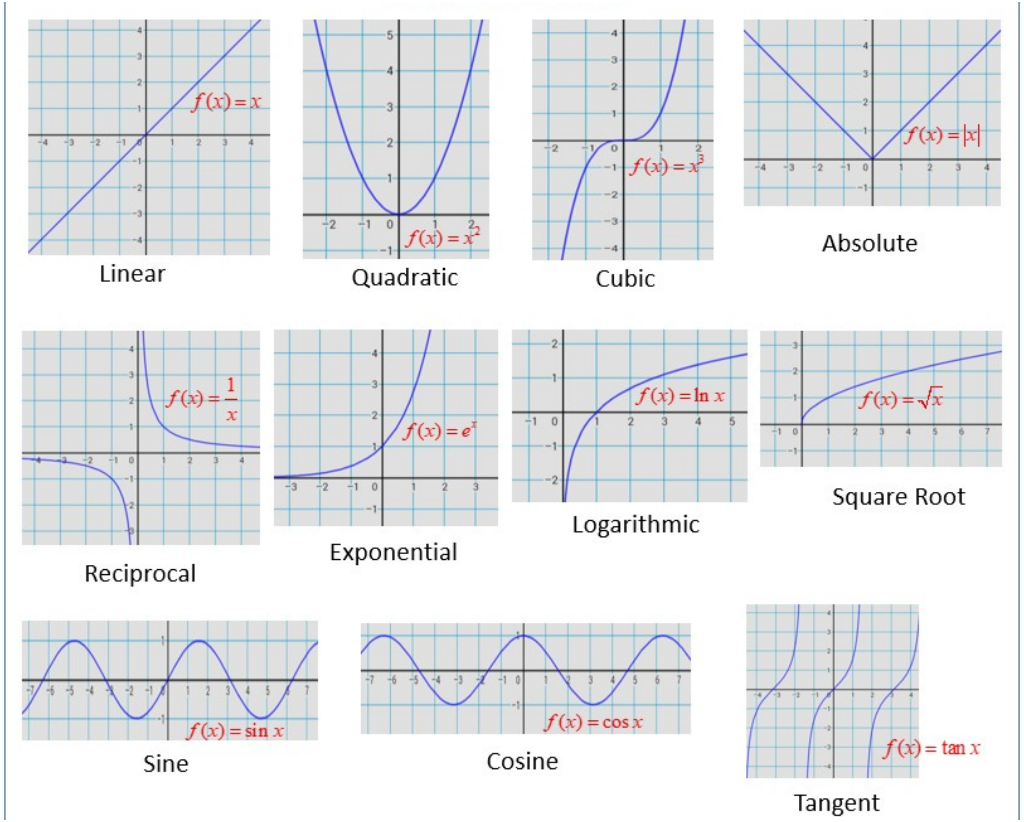
Каковы область определения и область значений следующих функций?

1) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

2) $f(x) = 2^x$

1) D(f) = R \ {1}, E(f) = R \ {0}
2) D(f) = R, E(f) = (0, +inf)

Функции



https://www.onlinemathlearning.com/parent-functions.html

Способы представления функций

1 **Табличный вид**

x	y
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

2 **Графический вид**

3 **Ввиде формулы**

y=x*x

4 **Программно**

```
def func(x):
 y = x*x
 return y
```

Графический способ представления функции

$$y = 1 - 2^{\frac{1}{4}x^5 - x^4 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1}$$

Допустим, есть некая функция. Мы можем проанализировать поведение функции графически и математически.

НЕТОЛОГИЯ

Программный способ представления функции

$$y = 1 - 2^{\frac{1}{4}x^5 - x^4 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1}$$

```
def function(x):
    stepen = 1/4 * x ** 5 - x ** 4 + 1/4 * x ** 3 + 3/2 * x ** 2 + 1
    y = 1 - x**stepen
    return y
```

НЕТОЛОГИЯ

Задание

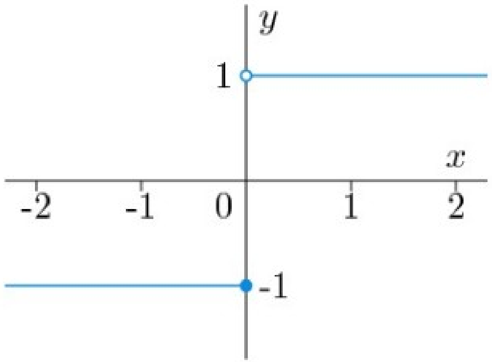
Для каждой функции найти пару.

1 $f(x) = x^2$

2

x	0	1	4	9
$f(x)$	0	1	2	3

3



4

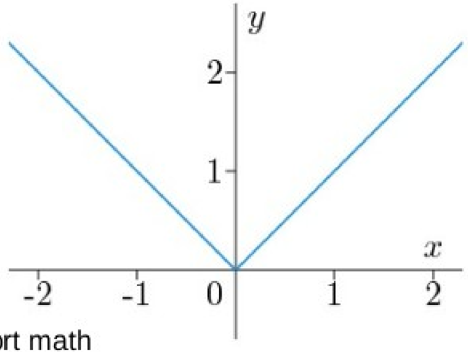
```
def func(x):
    return abs(x)
```

5 $$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{for } x \le 0 \\ 1 & \text{for } x > 0 \end{cases}$$

6

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	1	4	9

7



8

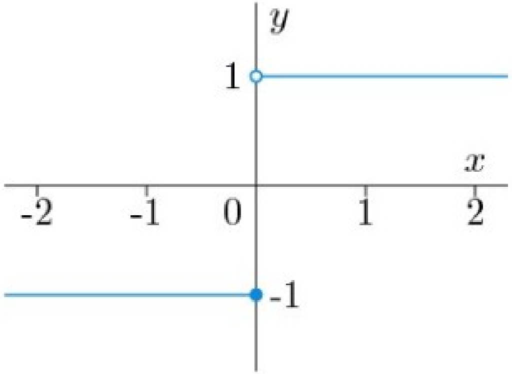
```
import math

def func(x):
    return math.sqrt(x)
```

Ответ

Для каждой функции найти пару.

$$f(x) = x^2$$

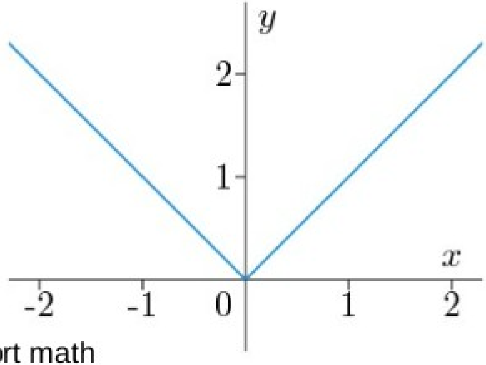
x	0	1	4	9
$f(x)$	0	1	2	3




```
def func(x):
    return abs(x)
```

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{for } x \le 0 \\ 1 & \text{for } x > 0 \end{cases}$$

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	1	4	9




```
import math

def func(x):
    return math.sqrt(x)
```

Полиномиальная функция

Целая рациональная функция (также полиномиальная функция) — числовая функция одного действительного переменного вида:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

На практике любую функцию можно представить в виде суммы нескольких полиномов.

Полиномиальная функция:

состоит из:

- Чисел
- Умножения
- Сложения
- Переменной x

Степень полиномиальной функции

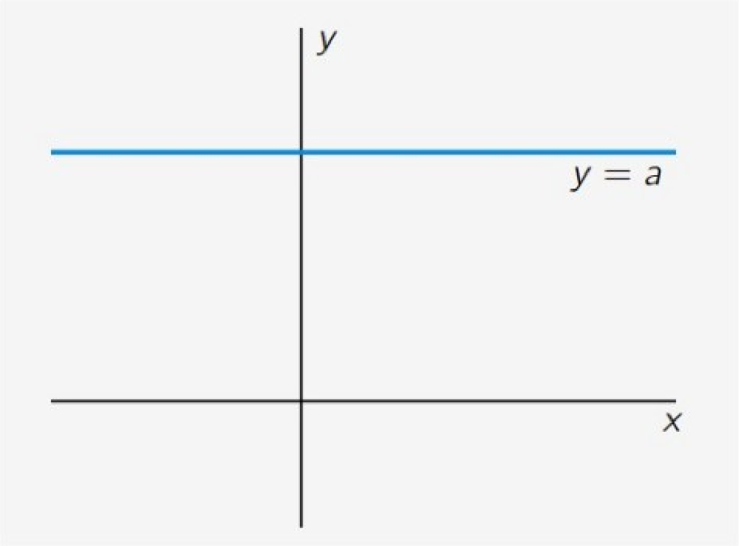
Одним из основных показателей полиномиальной функции является её **степень**. Степень полиномиальной функции - натуральное число n - наибольший показатель степени переменной x.

$$f(x) = 2x^6 + 3x^5 - \frac{3}{2}x - 3$$

Степень полинома = 6.

Степень определяет поведение функции при x стремящемся к бесконечности.

Степень = 0: функция-константа



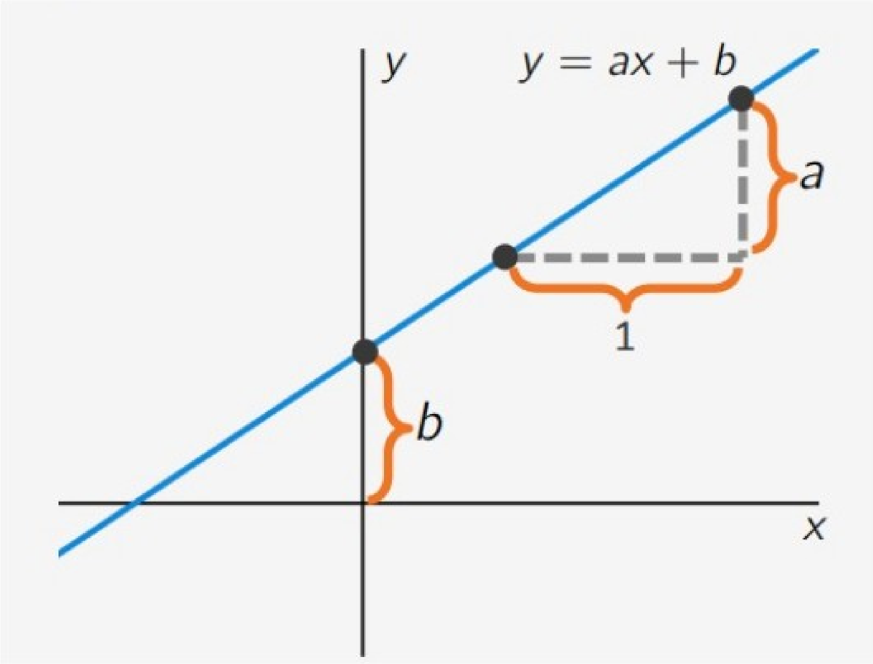
Стандартная формула:

- f(x) = a

График:

- Горизонтальная линия

Степень = 1: функция линейна



Стандартная формула:

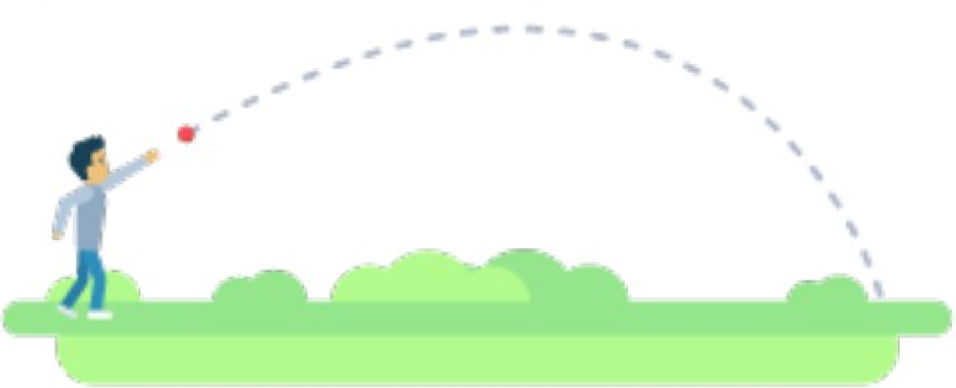
- $f(x) = ax + b$

График:

- Прямая линия
- a — коэффициент пропорциональности
- b — смещение вдоль оси OY

Степень = 2: квадратичная функция

Пример: движение тела, подброшенное вверх.*



Формула изменения высоты во времени:

$$h(t) = -4,9t^2 + 6,1t + 1,4$$

Формула изменения траектории от положения x: $h(x) = 3,3 - 0,4x^2$

*https://images.app.goo.gl/h9hsAeWjxgHaHTvs8

Стандартная формула:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

График:

- парабола
- a — старший коэффициент
- b — младший коэффициент
- c — свободный коэффициент

Степень = 2: пример

Golden Gate в Сан-Фрасиско.*

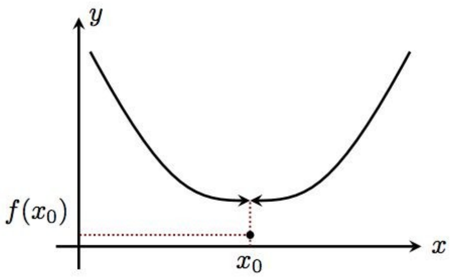
$$h(x) \approx 0,00037x^2 - 0,475x + 230$$

Высота над уровнем моря
X — в метрах от левого столба

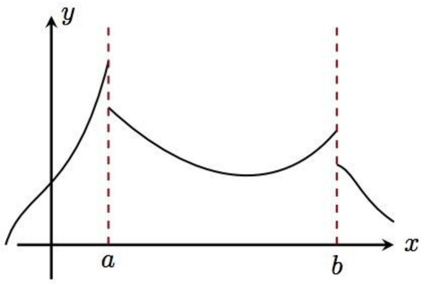
*https://courses.edx.org/courses/course-v1:DelftX+Calc001x+2T2019/courseware/748b996c006843d58b704b9f4755e60f/4017a56421d845d0a31d0b0375f95039/?child=first

Функции и их свойства

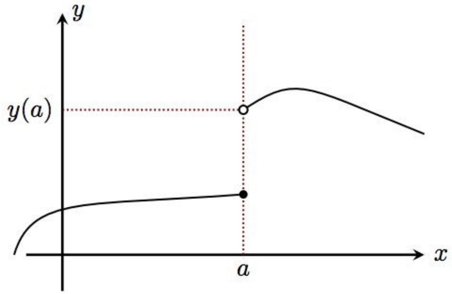
Представление о функции, её свойствах и поведении можно получить, построив ее график. Функции бывают непрерывными и разрывными.



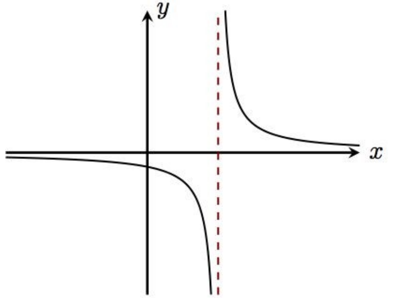
Функция с устранимым разрывом



Функция с разрывами в точках a и b



Функция с разрывом типа скачок

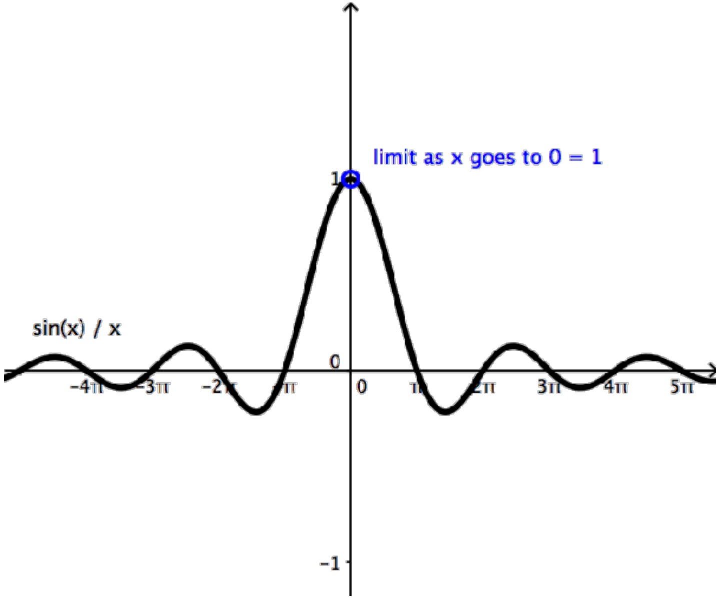


Функция с бесконечным разрывом

Предел функции

Предел (предельное значение функции) в заданной точке – такая величина, к которой стремится значение рассматриваемой функции при стремлении её аргумента к данной точке.

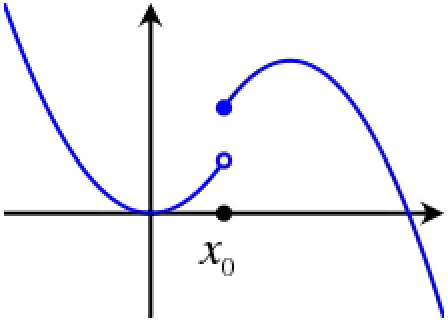
$$f(x) = \frac{sin(x)}{x}$$



Хотя функция не определена при x=0, при стремлении x→0 её значение становится сколь угодно близко к 1

https://www.quora.com/What-is-the-graph-of-sinx-x

Предел функции



Предел при x→-x0 не равен пределу при x→+x0, следовательно, предела при x→x0 нет

https://en.wikipedia.org/wiki/Limit_of_a_function

Примеры пределов функций

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Функция не определена в x=0, но её значение может быть вычислено в точках сколь угодно близких к ней

x	0.1	0.01	0.001	0.0001	...
$f(x)$	2.593..	2.704..	2.716..	2.718..	...

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Не у всех функций есть конечный предел

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

Функция неограниченно растёт при приближении к x = 0

x	0.1	0.01	0.001	0.0001	...
$1/x$	10	100	1000	10000	...

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty.$$

Предел функции

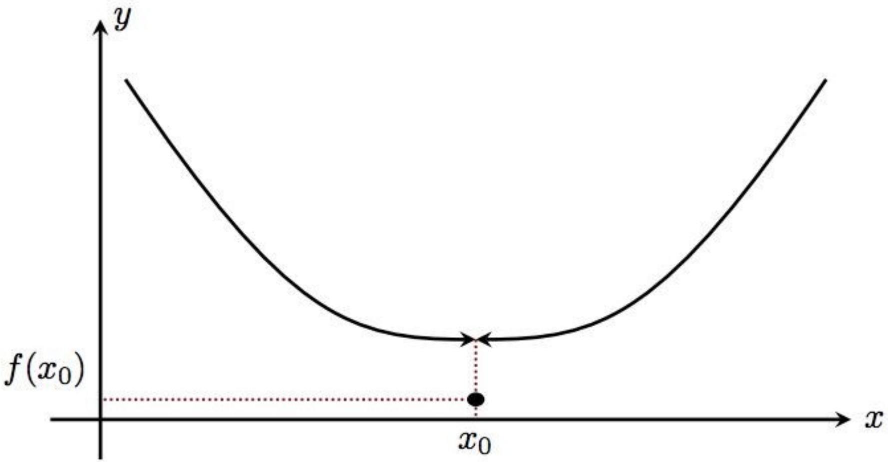
Понятие предела тесно связано с **понятием непрерывности** функции в точке.

Функция **непрерывна** в точке a, если:

!

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x) = f(a).$$

С помощью **понятия предела** определяется другое полезное понятие — **понятие производной**.



Производная функции

Производная - мгновенная скорость роста функции в заданной точке.

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=k.$$

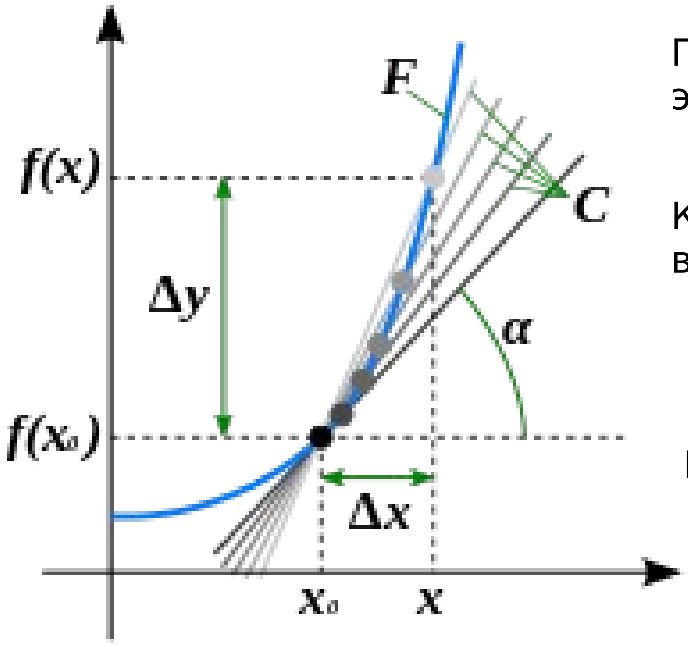
Давайте посмотрим на линейную функцию y=kx+b

Как понять скорость роста для произвольной функции? **Предел!**

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Производная – предел отношения приращения функции к приращению её аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если такой предел существует.

Геометрический смысл производной



Производная функции в точке x -
это угловой коэффициент касательной в данной точке

Касательная представляет собой уравнение
вида kx+b=0

$$f'(x) = tg(\alpha) = k$$

Коэффициент k = tg

https://examer.ru/ege_po_matematike/teoriya/issledovanie_funkcii

Примеры производных

$$(c)' = 0,\ (x)' = 1$$

$$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1},\ x > 0,\ \alpha \in R$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2},\ x \neq 0$$

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a,\ a > 0,\ a \neq 1$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x},\ x > 0$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},\ x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x},\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$$

$$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},\ x \neq \pi n,\ n \in Z$$

$$(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x$$

$$(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x$$

$$(\mathrm{th}\, x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$$

$$(\mathrm{cth}\, x)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\mathrm{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ x > 0$$

$$\left(e^x\right)' = e^x$$

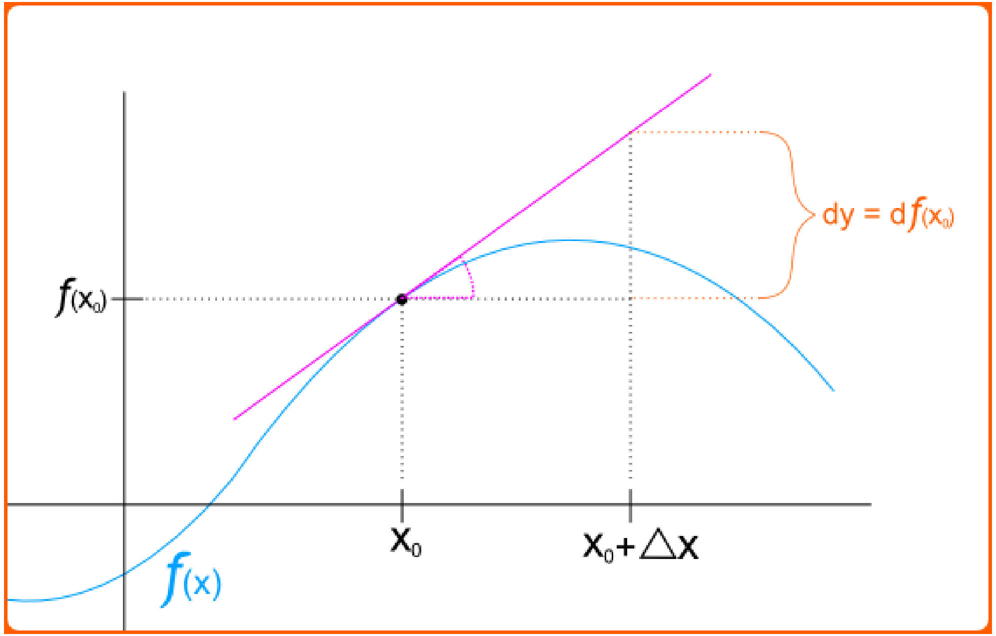
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\left(|x|\right)' = \mathrm{sign}\, x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases} \quad x \neq 0$$

https://images.app.goo.gl/PeoFofJejMfp2Qiq

Дифференциал функции

Дифференциал - линейная часть приращения функции



https://en.wikipedia.org/wiki/Differential_of_a_function

Сложная функция

Функция h сложная, составленная из функций g и f, если $h(x) = g(f(x))$

$f(x)$ – внутренняя
$g(x)$ - внешняя

Производная сложной функции

$$h'(x) = g'(f) \cdot f'(x)$$

Алгоритм вычисления:

1) определить внутреннюю f(x) и внешнюю функции g(x)
2) найти производную внутренней функции f’(x)
3) найти производную внешней функции g’(x)
4) перемножить производную внутренней и внешней функции

Производная сложной функции (пример)

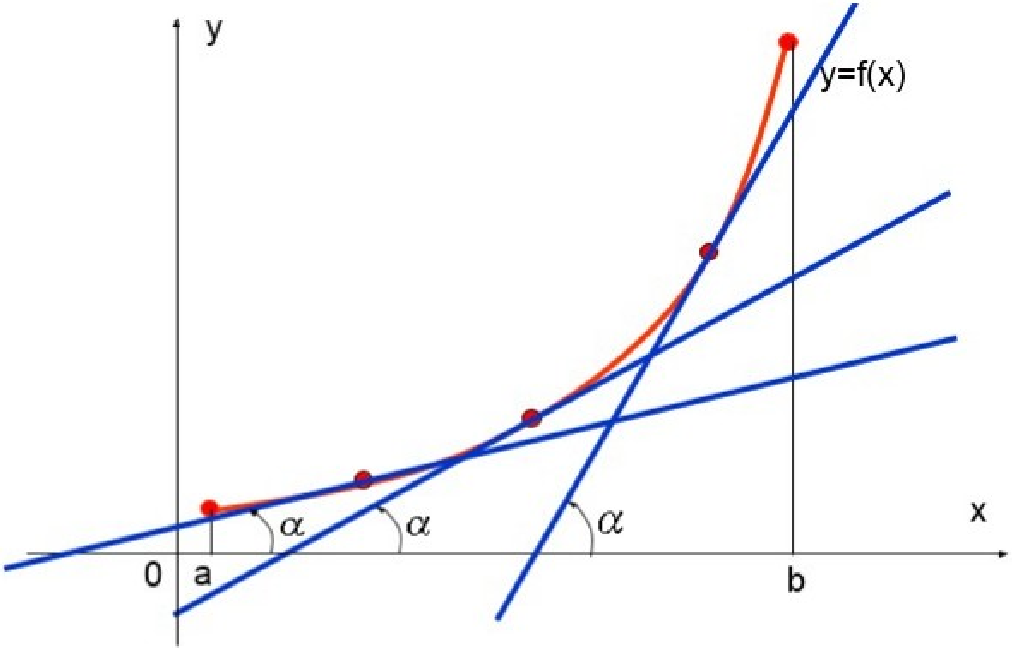
$$f(x) = \sin(\ln(x)+5x)$$

$$f'(x) = \cos(\ln(x)+5x) * (\ln(x)+5x)'$$

$$f'(x) = \cos(\ln(x)+5x) * (1/x + 5)$$

Исследование функции с помощью производной

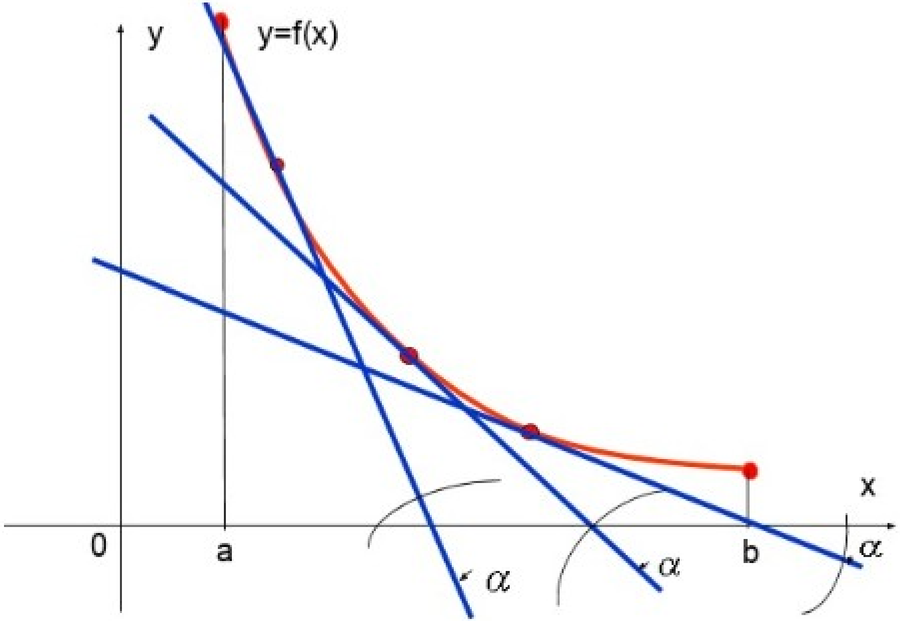
Если f’(x) > 0
в данной точке,
то функция возрастает
на интервале [x; x+dx]



https://dist-tutor.info/course/view.php?id=463&item=4628

Исследование функции с помощью производной

Если f’(x) < 0
в данной точке,
то функция возрастает
на интервале [x; x+dx]

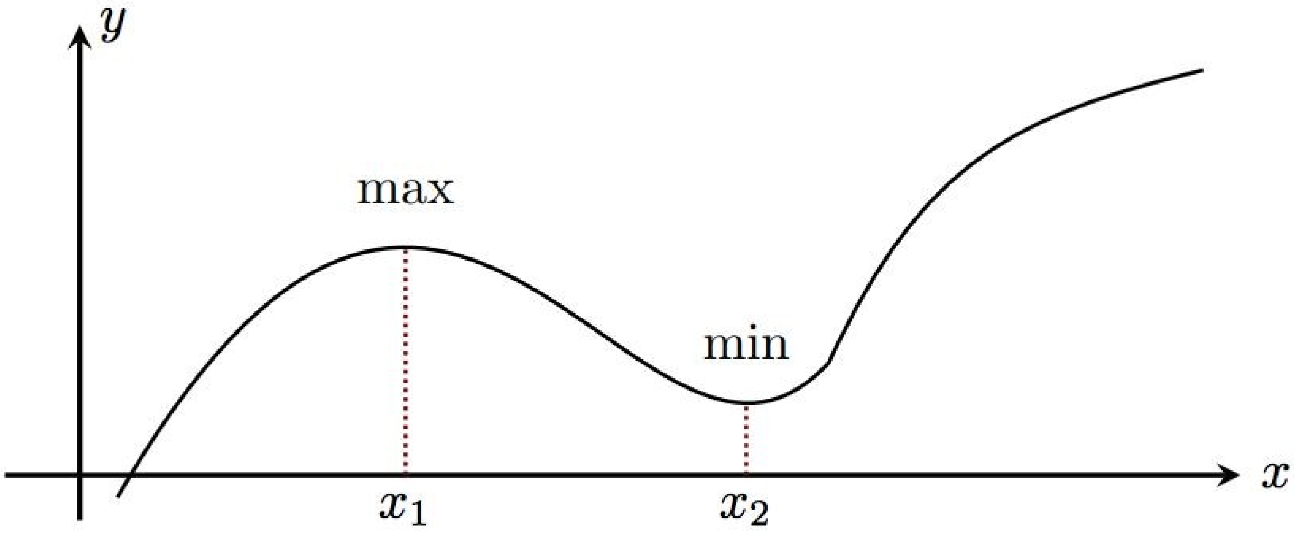


https://dist-tutor.info/course/view.php?id=463&item=4628

Экстремум функции

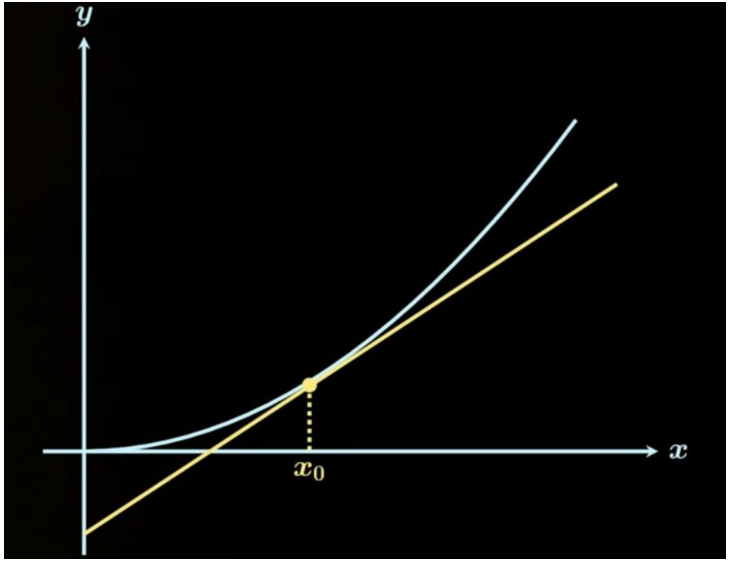
!

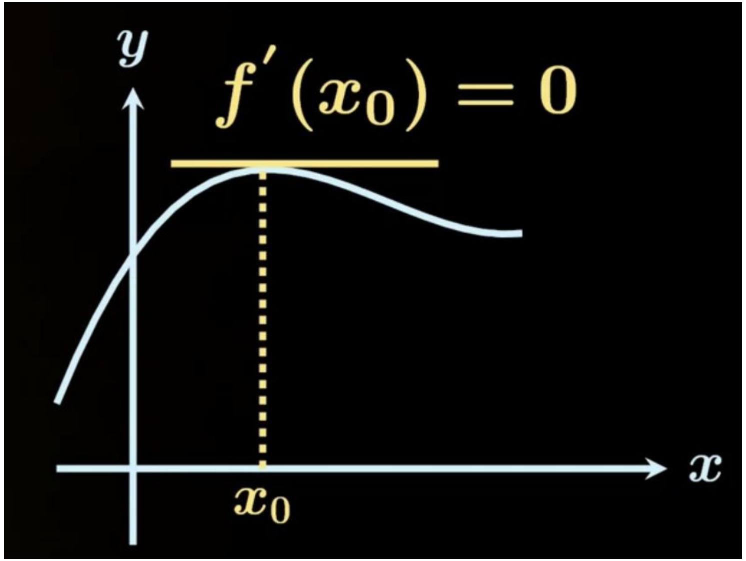
Точка x0 - называется **локальным минимумом** функции f(x), если существует такая окрестность U(x0), для которой f(x) > f(x0), x из U(x0). Аналогично для максимума.
В случае глобального минимума U(x0) = D(f).



https://github.com/rtriangle/Netology-statistics

Экстремум функции и производная



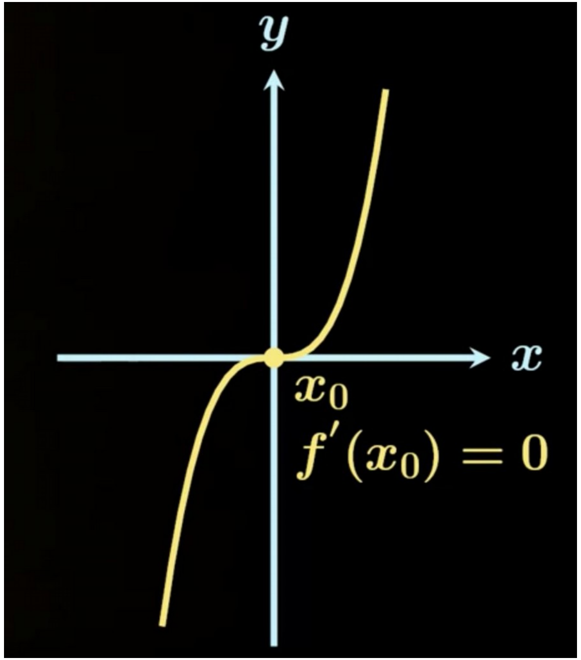


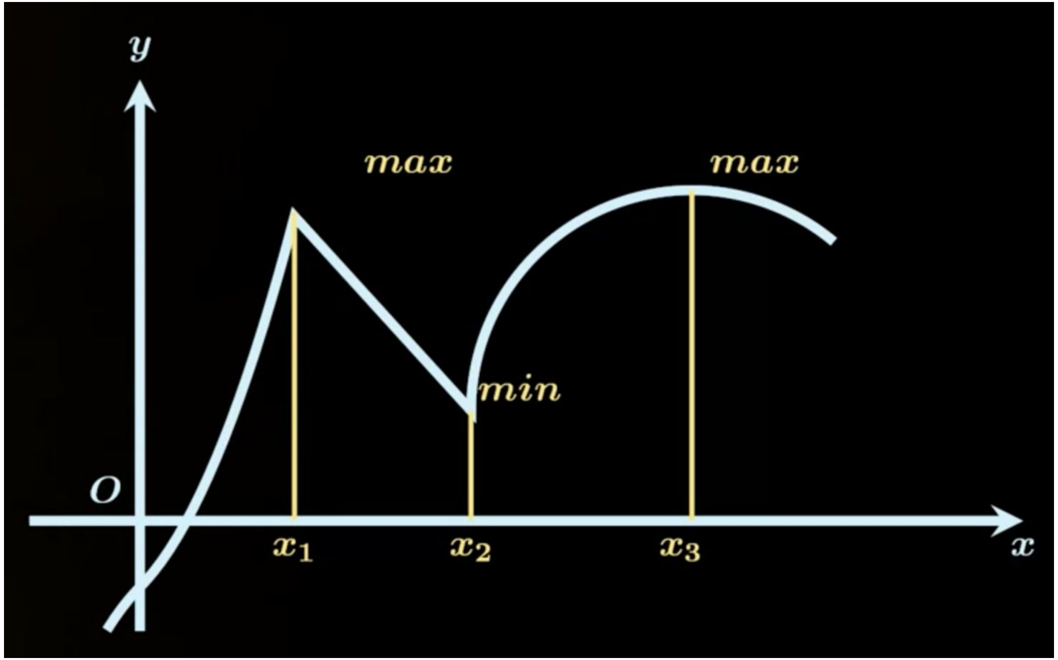
В точках локальных экстремумов производная (если она определена (!), пример дальше) обязана равняться нулю.
Это **необходимое** условие.

https://github.com/rtriangle/Netology-statistics

www.coursera.org/learn/mathematics-and-python

Экстремум функции и производная



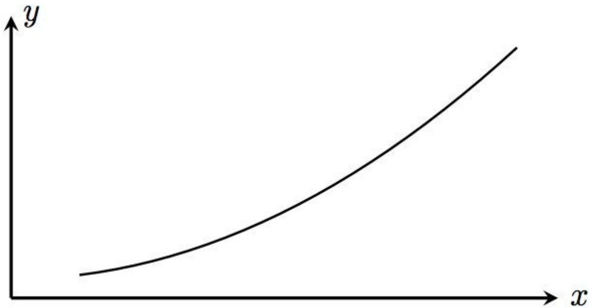


Однако равенство нулю производной **не является достаточным** условием локального экстремума. Также производная может быть вовсе не определена в точках локальных экстремумов.

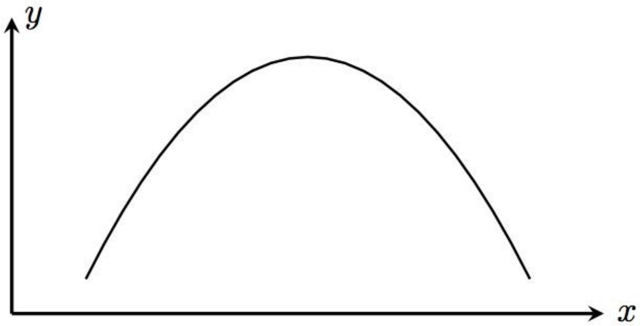
Выпуклость функции и вторая производная

Давайте спустимся на уровень ниже: какому свойству функции соответствует монотонная производная?

1. $f''(x) \geq 0$ — функция $f(x)$ выпукла,
2. $f''(x) > 0$ — функция $f(x)$ строго выпукла,
3. $f''(x) \leq 0$ — функция $f(x)$ вогнута,
4. $f''(x) < 0$ — функция $f(x)$ строго вогнута.



Выпуклая



Вогнутая

Выпуклость функции и вторая производная

Помните **необходимое** условие локального экстремума?

! Наложив некоторые условия на вторую производную, можно сделать их **достаточными**!

Достаточное условие экстремума Пусть выполнено необходимое условие экстремума, то есть в некоторой точке x_0 значение $f'(x_0) = 0$. Если в таком случае

1. $f''(x) > 0$ — функция будет строго выпукла и реализуется строгий минимум.
2. $f''(x) < 0$ — функция будет строго вогнута и реализуется строгий максимум.

Функция нескольких переменных

Пусть теперь x - не число из R, а вектор (x1, ..., xn), где каждое xi из R, а весь x из R^n.

D(f) - область определения функции (ничего не изменилось!)
E(f) - область значений функции (ничего не изменилось!)

Снова будем работать только с функциями, у которых D(f) и E(f) - подмножество R^n.

Частная производная

Частная производная — это одно из обобщений понятия производной на случай функции нескольких переменных.

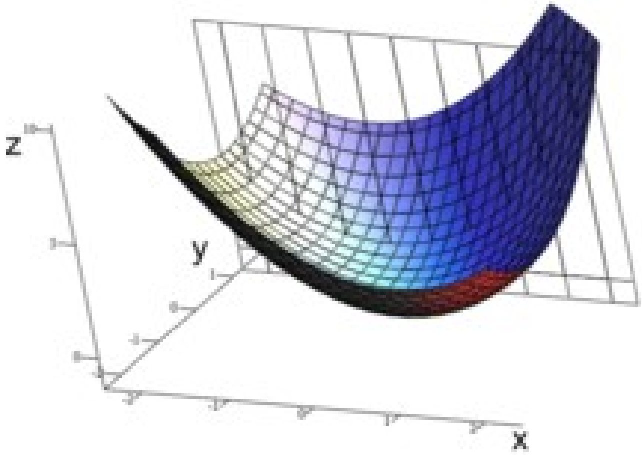
Частная производная функции f(x, y) по x определяется как производная по x, взятая в смысле функции одной переменной, при условии **постоянства** оставшейся переменной y.

$$f'_x(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}, \qquad f'_y(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}.$$

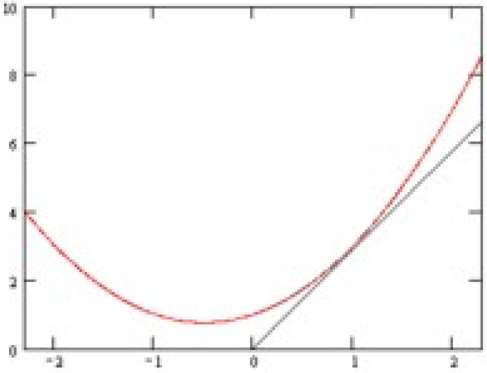
https://github.com/rtriangle/Netology-statistics

https://www.coursera.org/learn/mathematics-and-python

Частная производная



$$z = x^2 + xy + y^2$$



Сечение графика плоскостью y=1

Частная производная в точке (1, 1, 3) при постоянном y соответствует углу наклона касательной прямой, параллельной плоскости xz

https://ru.wikipedia.org/wiki/Частная_производная

Касательная плоскость

Пусть дана некоторая функция двух переменных f : R^2 → R. Она, вообще говоря, определяет некоторую поверхность z = f(x, y) в трехмерном пространстве.

Если в некоторой точке (x0, y0) функция дифференцируема как функция многих переменных, то в этой точке можно рассмотреть **касательную плоскость** к данной поверхности.

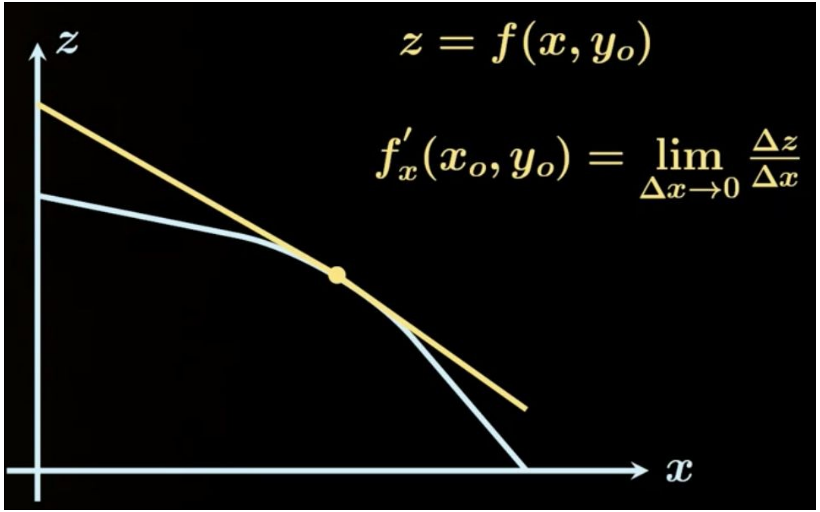
$$\frac{\partial F}{\partial x(M)} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial x(M)} \cdot (y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial x(M)} \cdot (z - z_0) = 0$$

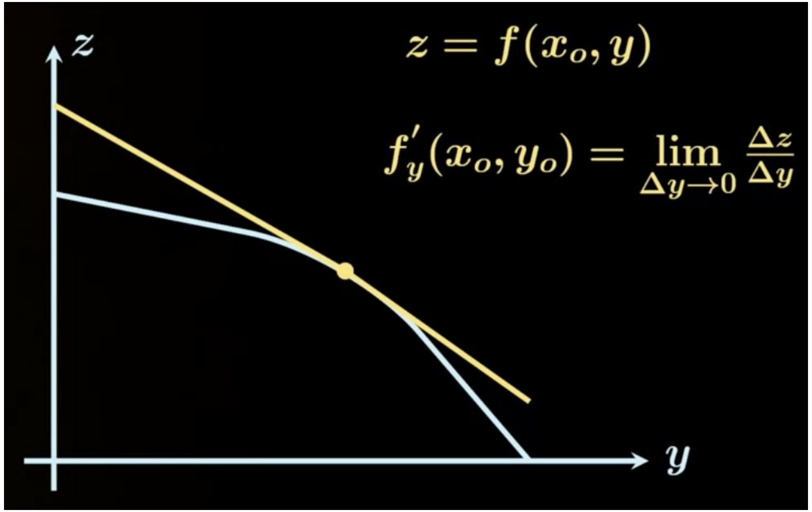
https://www.s0alex.ru/abc10d31.html https://github.com/rtriangle/Netology-statistics

Касательная плоскость

Таким образом, график функции $f(x, y)$ в окрестности точки можно приблизить касательной плоскостью:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$





https://github.com/rtriangle/Netology-statistics

https://www.coursera.org/learn/mathematics-and-python

Градиент и линии уровня функции

Если f(x1, . . . , xn) — функция n переменных x1, ..., xn, то n-мерный вектор из частных производных:

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

!

называется **градиентом функции**.

!

Линией уровня функции называется множество точек, в которых функция принимает одно и то же фиксированное значение. Оказывается, что **градиент перпендикулярен линии уровня**.

Градиент в задачах оптимизации

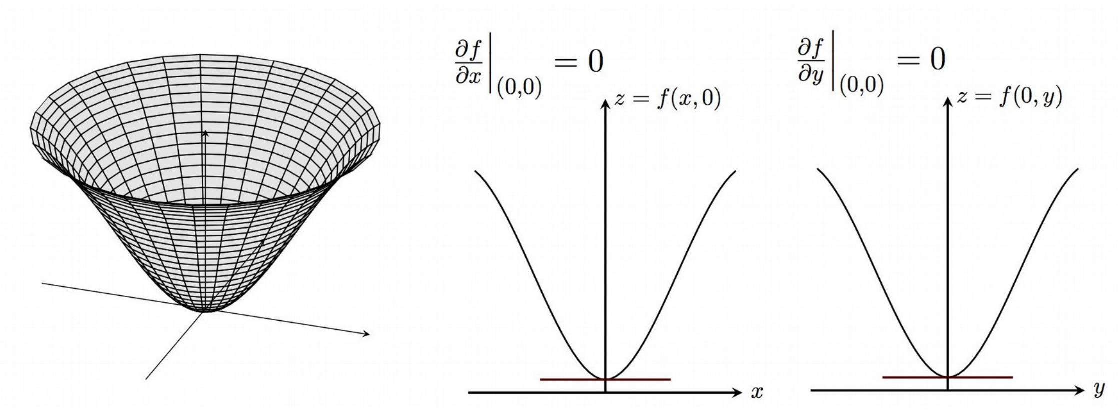
Задачей оптимизации называется задача по нахождению экстремума функции, например минимума:

$$f(x_1, ..., x_n) \to \min$$

Такая задача часто встречается в приложениях, например при выборе оптимальных параметров рекламной компании, а также в задачах классификации.

Градиент в задачах оптимизации

Но не всегда задачу можно решать аналитически. В таком случае используется численная оптимизация. Наиболее простым в реализации из всех методов численной оптимизации является метод градиентного спуска.



Функция двух переменных достигает минимума в начале координат

https://github.com/rtriangle/Netology-statistics

https://www.coursera.org/learn/mathematics-and-python

Градиентный спуск

Это итерационный метод. Решение задачи начинается с выбора начального приближения $\vec{x}^{[0]}$

После вычисляется приблизительное значение $\vec{x}^1$

Затем $\vec{x}^2$

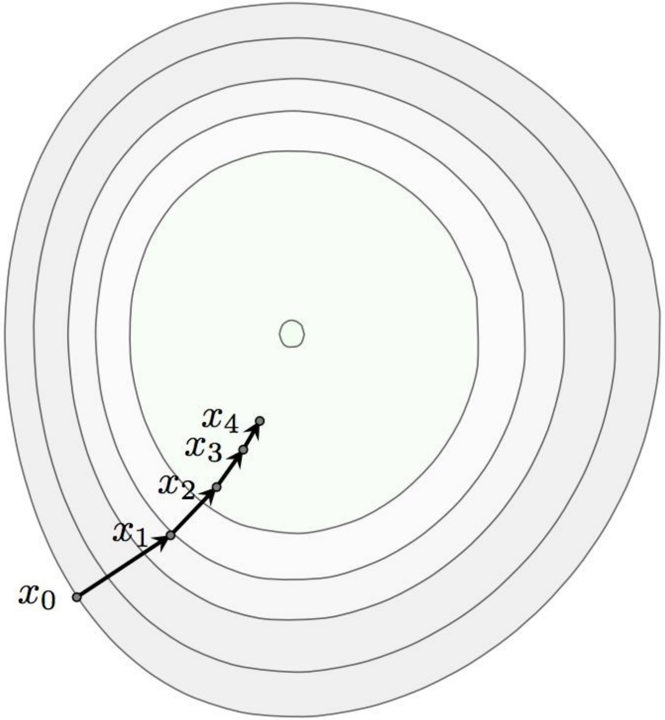
и так далее…

!

$$\vec{x}^{[j+1]} = \vec{x}^{[j]} - \gamma^{[j]} \nabla F(\vec{x}^{[j]}), \qquad \text{где } \gamma^{[j]} \text{ — шаг градиентного спуска.}$$

Идея: идти в направлении наискорейшего спуска, а это направление задаётся антиградиентом $-\nabla F$.

Градиентный спуск



Аналогия: домик в низине

Если заблудились, то верным решением будет двигаться в направлении наискорейшего спуска

https://github.com/rtriangle/Netology-statistics

https://www.coursera.org/learn/mathematics-and-python

Спасибо за внимание!

НЕТОЛОГИЯ