Zadanie numeryczne NUM1 - wyliczanie dyskretnej pochodnej

Aleksander Pugowski

18-10-2022

1 Wprowadzenie

Zadanie polega na wyliczaniu dyskretnej pochodnej zgodnie ze wzorami:

$$a)\ Df(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$b)\ Df(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

oraz zbadaniu zachowania błędu takiej pochodnej w porównaniu z wartością (możliwie) rzeczywistą dla różnych współczynników h.

Oczywiście, zgodnie z intuicją h powinno być możliwie małe, jak jednak się okazuje, zbyt małe h prowadzi do dużego błędu, co zostanie przedyskutowane w wynikach.

Funkcja dla której przeprowadzone zostały obliczenia to sin(0.2). Na końcu zbadano też zachowanie dla eksponenty.

Obliczenia zostały przeprowadzone przy użyciu języka Python, w środowisku Jupyter Notebook, przy użyciu bibliotek NumPy oraz Matplotlib.

Jako h, generowano 10 000 punktów, równomiernie rozłożonych z przedziału 10^{-15} do 10^{0} dla pierwszego wykresu funkcji, potem przedziały były zmniejszane, celem wytyczenia (z grubsza) optymalnego h.

2 Wyniki

Poniżej podano wykresy dla różnych kombinacji (funkcja a/b + double/float) wraz z zoomem (mniejszy zakres generowanych punktów) na potencjalnie optymalne h.

Dyskusja na temat wyników, ich analiza i interpretacja znajduje się poniżej.

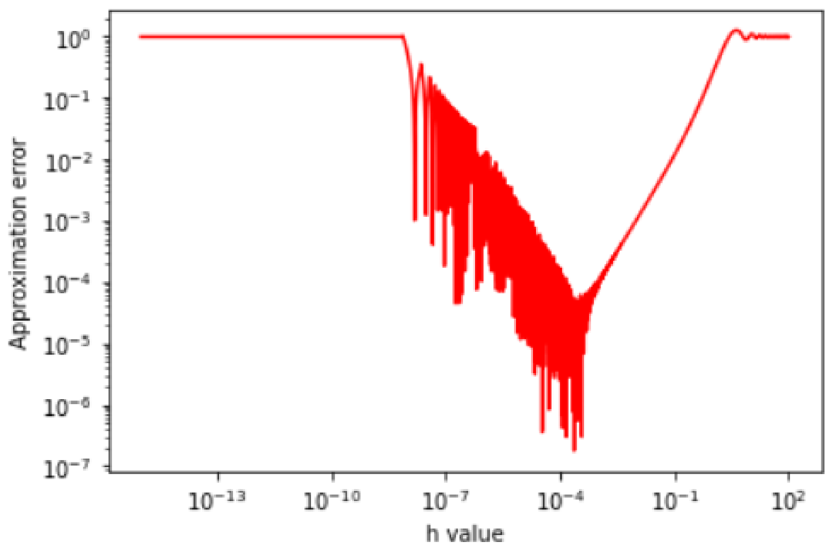

Figure 1: Function a) with float precision

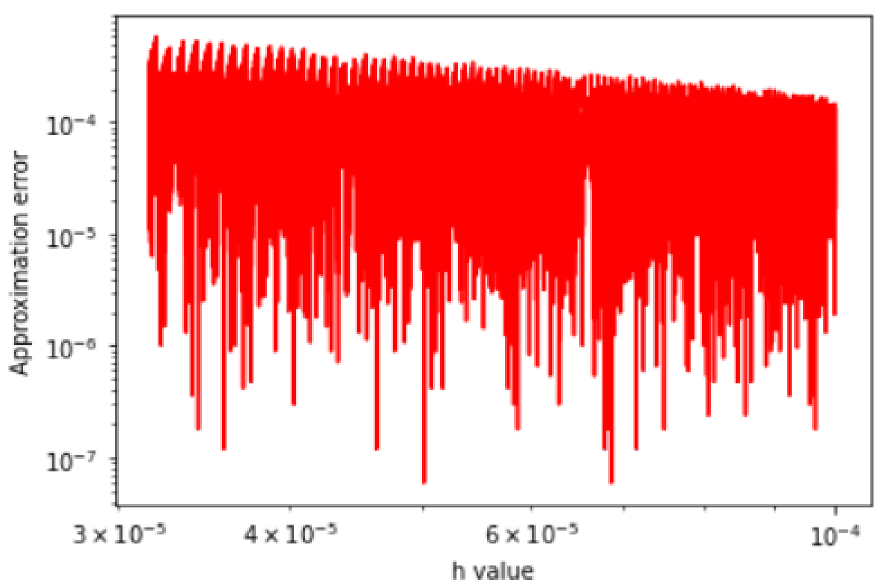

Figure 2: Zoom on a potential optimal h

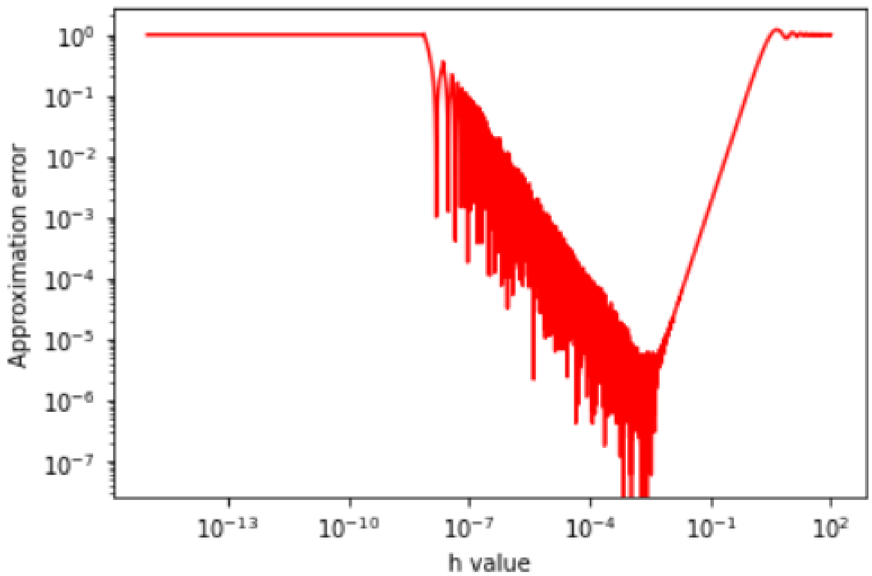

Figure 3: Function b) with float precision

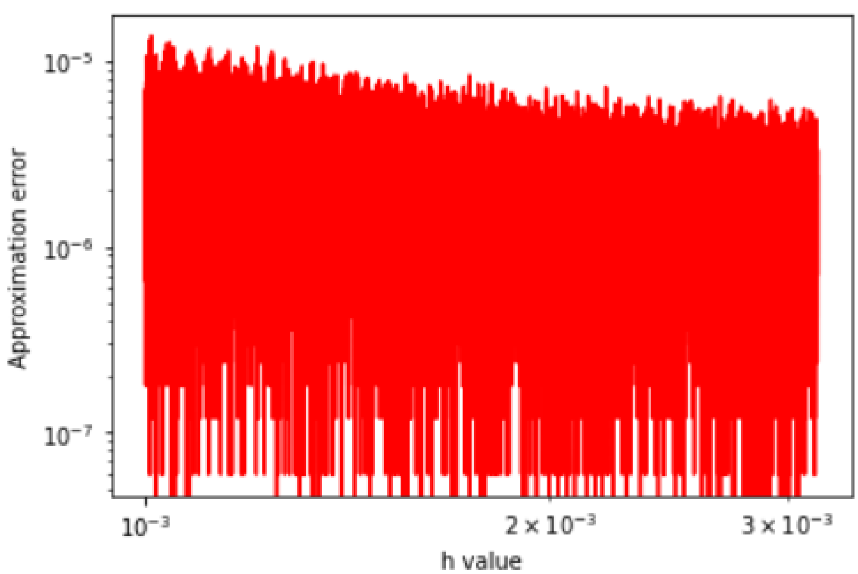

Figure 4: Zoom on a potential optimal h

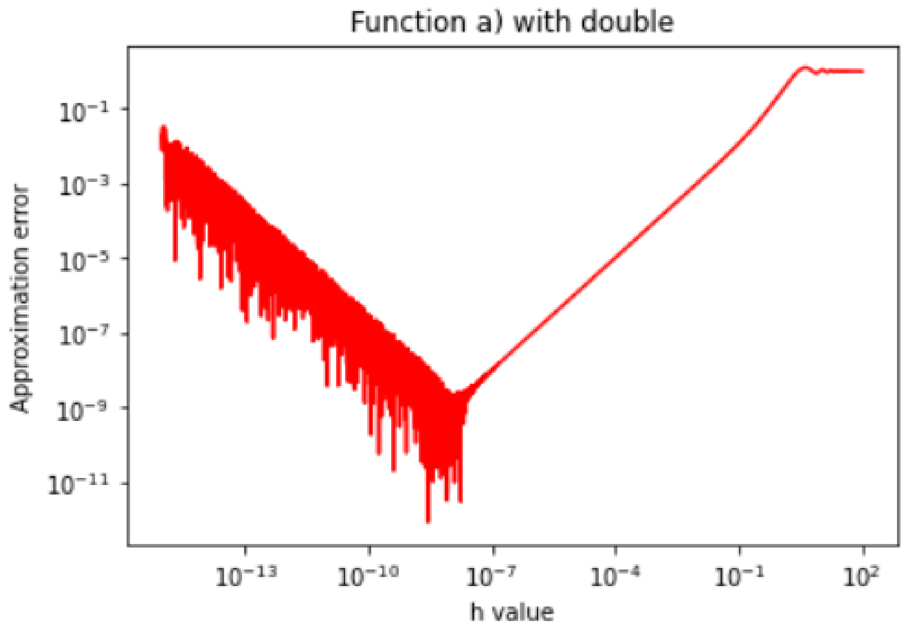

Figure 5: Function a) with double precision

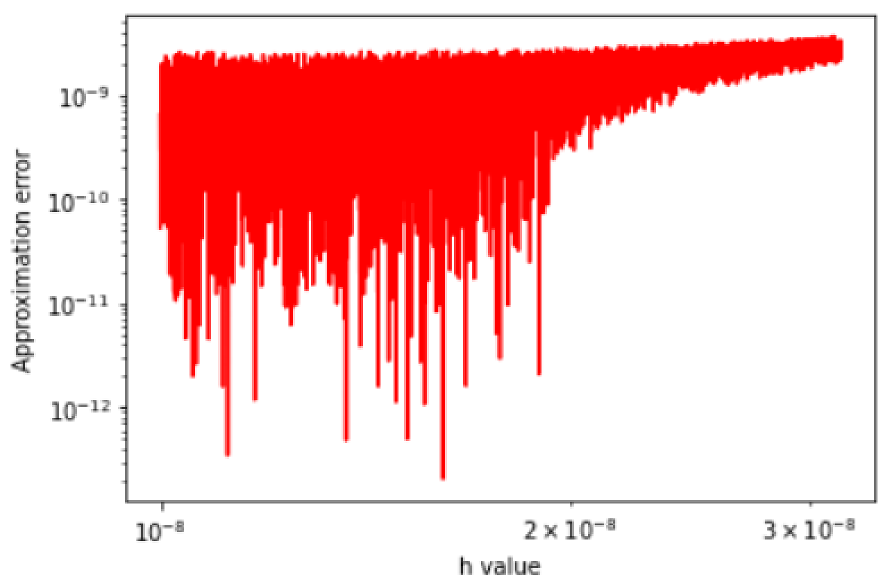

Figure 6: Zoom on a potential optimal h

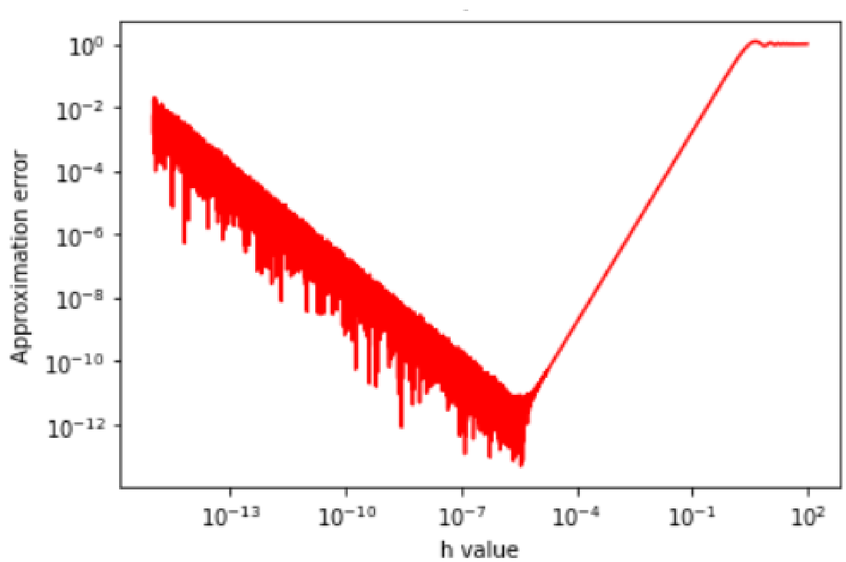

Figure 7: Function b) with double precision

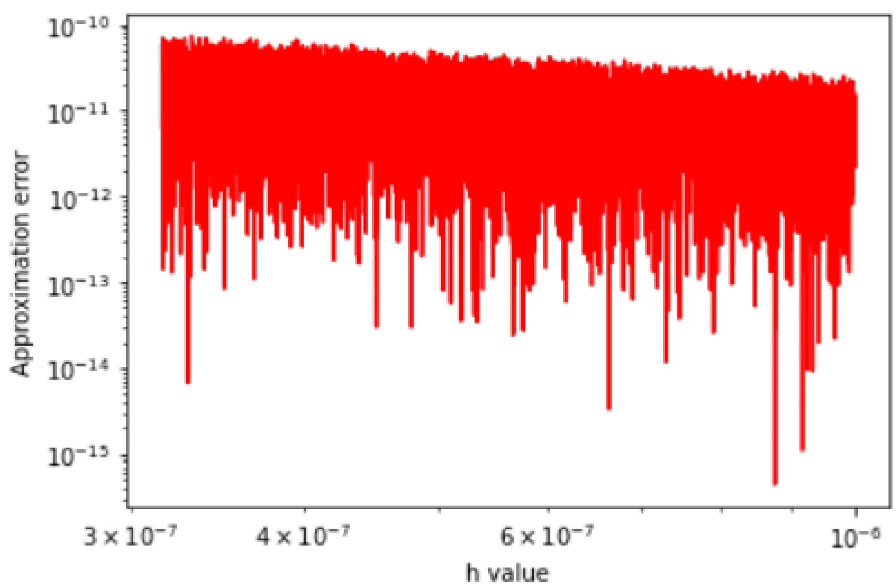

Figure 8: Zoom on a potential optimal h

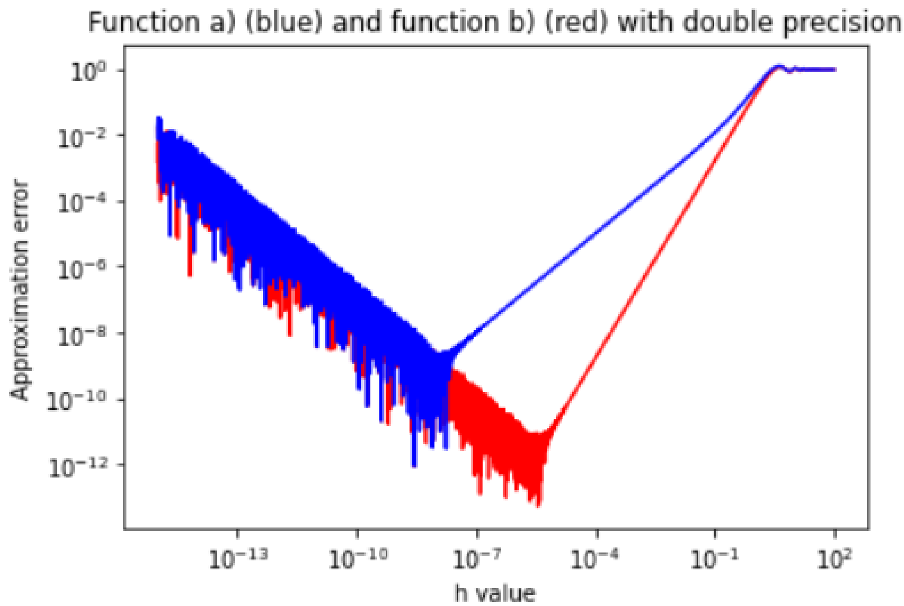

Figure 9: Comparison of function a) and function b), both with double precision

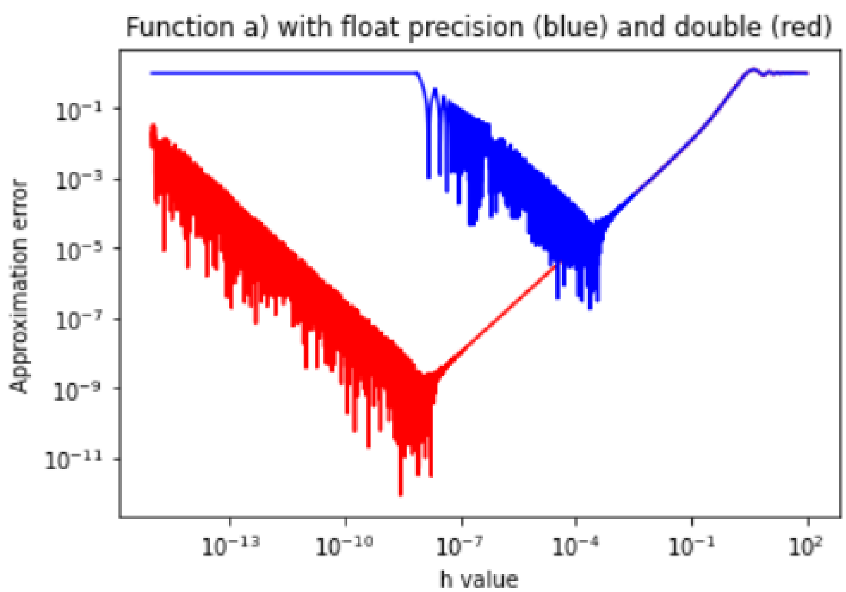

Figure 10: Comparison of function a) with both precision types

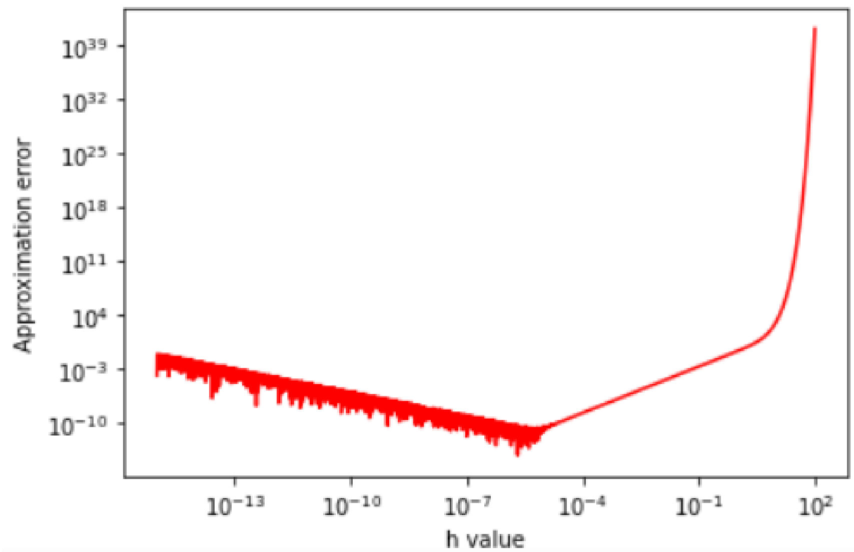

Figure 11: Exponential function with arg=0.2 and double precision

3 Dyskusja

Początkowo, błąd maleje tym bardziej, im mniejsze h wybierzemy, co zgadza się z naszą intuicją (przy pochodnej $h- > 0$). Jednakże, od pewnego h, można zaobserwować odstępstwo od tego zachowania, co matematycznie tłumaczy oszacowanie funkcji błędu z góry(względem h, dla funkcji a)): $E(h) = \frac{1}{2}|f''(x)|h - \frac{2\epsilon|f(x)|}{h}$.
Jak widać, w funkcji błędu jeden składnik jest mnożony przez h, a drugi dzielony, stąd trzeba dobrać optymalne h, aby mnożenie możliwie nam ten błąd zmniejszało, a dzielenie zanadto go nie zwiększało. Sugeruje to istnienie pewnego optymalnego h, który balansuje oba te efekty - i faktycznie, na wykresach wyraźnie widać że takie h istnieje i można je z dobrym przybliżeniem oszacować.

Drugą obserwacją są nierówności na wykresie, tj. nie mamy tutaj (przynajmniej od pewnego momentu: dla float 10^{-4}, double 10^{-7}) doczynienia z jednolitą linią, a gwałtownymi skokami w górę/dół dla niewielkich zmian h (chociaż generalna tendencja faktycznie jest albo wzrostowa, albo spadkowa). Mówiąc inaczej, dla małych h, metoda wyznaczania pochodnej wydaje się być numerycznie źle uwarunkowana, ponieważ stosunkowo małe zmiany w wartości h, powodują stosunkowo duże zmiany błędu.

Trzecią obserwacją, jest przesunięcie wykresu w lewo, gdy zmienimy precyzję z jaką prowadzimy obliczenia (tj. z float na double), co spowodowane jest nakładaniem się błędów zaokrągleń. Warto zwrócić uwagę na to jak znacząco różne wyniki dostajemy (Figure 10) dla funkcji a) przy zastosowaniu różnej precyzji. Różnica błędu sięga sześciu rzędów wielkości, co może być kluczowe w niektórych obliczeniach

Lepsze wyniki oferuje przybliżenie funkcji ilorazem b), co widać na wykresie Figure 9 - dla funkcji b), optymalne h osiągamy nie tylko wcześniej, ale gwarantuje ono również lepsze przybliżenie (mniejszy błąd).