

Zadanie numeryczne NUM5 - porównanie metod iteracyjnych: Jacobiego i Gaussa-Seidela

Aleksander Pugowski

16-11-2022

1 Wprowadzenie

Zadanie polega na rozwiązaniu równania z macierzą wstęgową przy pomocy dwóch metod iteracyjnych: Jacobiego i Gaussa-Seidela i porównaniu sposobu ich działania, tj. sposobu w jaki zbliżają się do końcowego rezultatu. Jak wspomniano, metody należą do klasy metod iteracyjnych, więc można wygodnie badać ich dokładność po danej liczbie iteracji. Algorytm zaimplementowano samodzielnie w języku Python, w środowisku Jupyter Notebook, a wyniki sprawdzono za pomocą biblioteki numerycznej NumPy.

2 Wyniki

Dla zadanej macierzy o wymiarach 100 na 100, wynikiem będzie wektor o 100 współrzędnych. Jego dwie pierwsze i dwie ostatnie współrzędne przedstawiono poniżej, dokładny wynik znajduje się w programie.

$$y = \begin{bmatrix} 0.17126009 \\ 0.37523974 \\ \vdots \\ 16.95603806 \\ 26.47924371 \end{bmatrix}$$

Poniżej znajdują się wykresy przedstawiające różnicę w otrzymanej wartości, a wartości dokładnej w funkcji liczby wykonanych iteracji, dla metody Gaussa-Seidela i Jacobiego. Dyskusja wyników znajduje się w następnej sekcji.

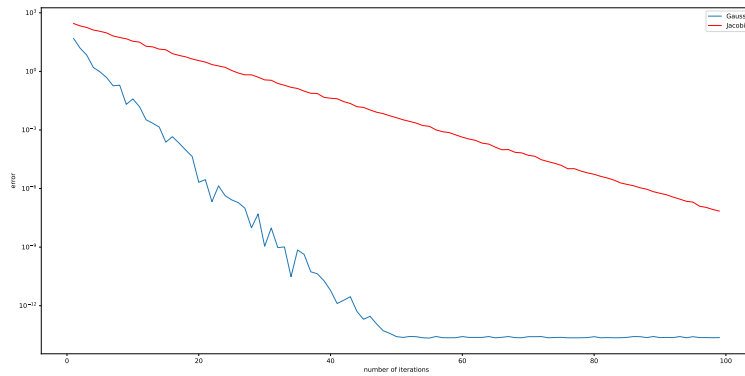


Figure 1: Starting points chosen at random, each between 1 and 100

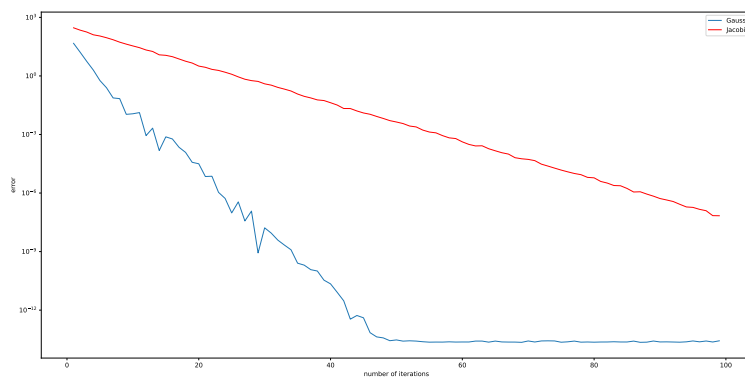


Figure 2: Starting points chosen at random, each between 1 and 100

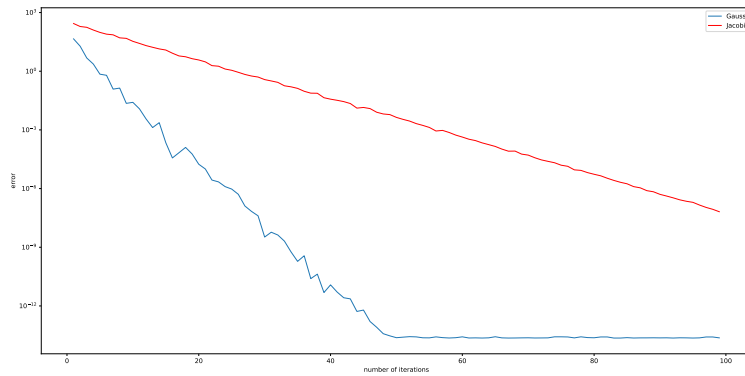


Figure 3: Starting points chosen at random, each between 1 and 100

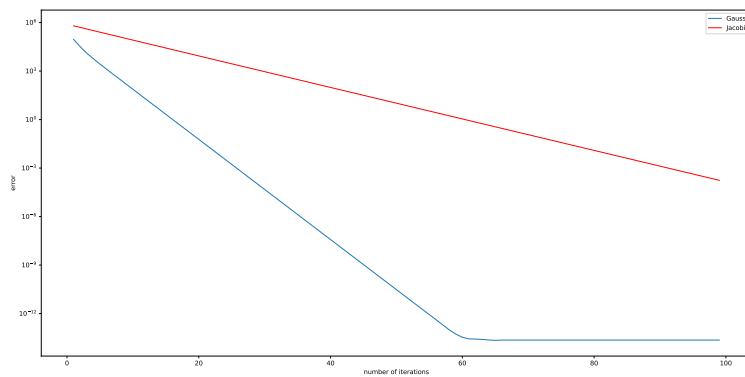


Figure 4: Starting points ALL CHOSEN TO BE EXACTLY 100000

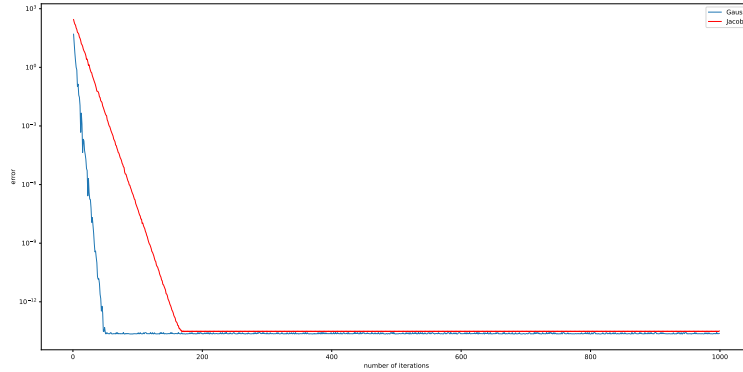


Figure 5: Starting points chosen at random, up to 1000 iterations

3 Wyniki

Zaprezentowane wykresy jasno wskazują, że metoda Gaussa-Seidela jest znacznie szybsza niż metoda Jacobiego, to znaczy pozwala szybciej osiągnąć stosunkowo bliski do dokładnego wynik.

Drugą istotną obserwacją jest fakt, że wybór punktów startowych nie ma większego znaczenia dla wydajności metody, tak długo, jak liczby nie zostaną wybrane celowo 'źle'. Dla pierwszych trzech wykresów, punkty startowe to losowe liczby z zakresu 1 do 100, natomiast na ostatnim wykresie widać, co dzieje się gdy liczby specjalnie zostaną spreparowane tak, aby algorytmy potrzebowały więcej iteracji (wszystkie punkty startowe wybrane jako 10^5). Dobór punktów startowych nie ma więc większego znaczenia, tak długo, jak nie robimy tego celowo źle - nasz algorytm będzie wtedy potrzebował więcej iteracji żeby osiągnąć precyzyjny wynik.

Trzecia obserwacja dotyczy ostatniego wykresu - dokonano tutaj aż 1000 iteracji algorytmu, aby na pewno osiągnąć minimalny błąd dla obu algorytmów. Jak widać, algorytm Jacobiego osiąga tak samo dobry wynik około 2,5 raza wolniej niż algorytm Gaussa-Seidela.