以下是 2 題證明題，每題 25 分。證明必須精簡、清楚、完整。

1. Prove that a finite integral domain $(D, +, \cdot)$ is a field.

2. Prove by a combinatorial method (not by mathematical induction) the principle of inclusion and exclusion, i.e.,

$$
\begin{aligned}
N(\bar{c}_1\,\bar{c}_2 \cdots \bar{c}_t) = \quad & N - [N(c_1)+N(c_2)+\cdots+N(c_t)] \\
& + [N(c_1c_2)+N(c_1c_3)+\cdots+N(c_1c_t)+N(c_2c_3)+\cdots+N(c_{t-1}c_t)] \\
& - [N(c_1c_2c_3)+N(c_1c_2c_4)+\cdots+N(c_1c_2c_t) \\
& \quad +N(c_1c_3c_4)+\cdots+N(c_1c_3c_t)+\cdots+N(c_{t-2}c_{t-1}c_t)] \\
& + \cdots \\
& + (-1)^t N(c_1\,c_2 \cdots c_t),
\end{aligned}
$$

where $c_1, c_2, \ldots, c_t$ are conditions, each satisfied by some of the elements in S, $N=|S|$, $N(\bar{c}_1\,\bar{c}_2 \cdots \bar{c}_t)$ is the number of elements in S that satisfy none of $c_1, c_2, \ldots, c_t$, and $N(c_{i_1}\,c_{i_2} \cdots c_{i_k})$ is the number of the elements in S that satisfy all of $c_{i_1}, c_{i_2} \cdots, c_{i_k}$.

以下是 25 題單選題，答對每題 2 分，答錯不倒扣。

3. 下列有幾個是三度空間的子空間 (subspaces)？ (a) 原點 (b) x 軸 (c) 由 (1,1,1) 到 (-1,-1,-1) 的線段 (d) y=3, z=3 的直線 (e) yz 平面 (f) z=3 的平面 (g) 半徑等於 1 的球面 (h) 半徑等於 1 的球體 (i) 整個三度空間

   ① 3 個　② 4 個　③ 5 個　④ 6 個　⑤ 以上皆非

4. 矩陣 $\begin{bmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix}$ 的幾何意義爲何？

   ① 行移　② 旋轉　③ 縮放　④鏡射　⑤ 以上皆非

5. 矩陣 $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{bmatrix}$ 的幾何意義爲何？

   ① 行移　② 旋轉　③ 縮放　④鏡射　⑤ 以上皆非

請根據下面敘述回答題目 6 至 13。有一個由三度空間到四度空間的線性變換 (linear transformation)，分別把 $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ 映射到 $\begin{bmatrix}0\\1\\1\\2\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1\\1\\2\\2\end{bmatrix}$。令 A 是代表此一線性變換的矩陣。

6. 下列何者是矩陣 A？

① $\begin{bmatrix}0&1&1&2\\1&2&3&4\\1&1&2&2\end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix}1&1&2&2\\1&2&3&4\\0&1&1&2\end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&3&2\\2&4&2\end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&1\\2&3&1\\2&4&2\end{bmatrix}$ ⑤ 以上皆非

7. 矩陣 A 是不是線性相依 (linear dependent)？

① 是 ② 不是 ③ 再加條件就會'是' ④再加條件就會'不是' ⑤ 以上皆非

8. $[1\ \ 1\ \ 1]^T$ 會被映射到哪裡？

① $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix}3\\4\\5\\6\end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix}4\\5\\6\\7\end{bmatrix}$ ⑤ 以上皆非

9. 矩陣 A 的秩 (rank) 是多少？

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 以上皆非

10. 至少被某三度空間的點映射到的所有四度空間的點，組成的圖形是什麼？

① 點 ② 線 ③ 面 ④ 三維的超平面 (hyper plane) ⑤ 以上皆非

11. 會映射到四度空間原點的所有三度空間的點，組成的圖形是什麼？

① 點 ② 線 ③ 面 ④ 三維的超平面 ⑤ 以上皆非

12. 線性系統 (linear system) $Ax=\begin{bmatrix}2\\4\\6\\8\end{bmatrix}$ 的解是：

① 無解 ② 有唯一解 ③ 有無限多解 ④ 條件不足無法判斷 ⑤ 以上皆非

13. 線性系統 $Ax=\begin{bmatrix}3\\4\\5\\6\end{bmatrix}$ 的解是：

① 無解 ② 有唯一解 ③ 有無限多解 ④ 條件不足無法判斷 ⑤ 以上皆非

令 $B=A^TA$，其中 A 是上一題組的矩陣。請回答題目 14 至 15。

14. 請問矩陣 B 是不是對稱矩陣？

① 是 ② 不是 ③ 再加條件就會'是' ④再加條件就會'不是' ⑤ 以上皆非

15. 下列敘述何者正確？

① 不存在 x，使得 $x^TBx\le 0$ ② 不存在 x，使得 $x^TBx\ge 0$ ③ 存在 x，使得 $x^TBx<0$
④ 存在 x，使得 $x^TBx>0$ ⑤ 以上皆非

請先求出 $C=\begin{bmatrix}2&0&1&0\\0&3&0&1\\3&0&4&0\\0&2&0&4\end{bmatrix}$ 的特徵值 (eigen values) 以及特徵向量 (eigen vectors)，再回答題目 16 至 18。

16. 矩陣 C 共有幾個數值相異的特徵值？
 ① 1 個 ② 2 個 ③ 3 個 ④ 4 個 ⑤ 以上皆非

17. 矩陣 C 絕對值最小的特徵值是多少？
 ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 以上皆非

18. 矩陣 C 相對於絕對值最大的特徵值之特徵向量在四度空間中形成的圖形是什麼？
 ① 點 ② 線 ③ 面 ④ 三維的超平面 ⑤ 以上皆非

請先求出 $D=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&1\end{bmatrix}\times C\times\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&1\end{bmatrix}^{-1}$ 的特徵值，其中 C 是上一題組的矩陣，再回答題目 19 至 22。

19. 矩陣 D 共有幾個數值相異的特徵值？
 ① 1 個 ② 2 個 ③ 3 個 ④ 4 個 ⑤ 以上皆非

20. 矩陣 D 絕對值第二小的特徵值是多少？
 ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 以上皆非

21. 矩陣 D 是不是可對角化 (diagonalizable)？
 ① 是 ② 不是 ③ 再加條件就會‘是’ ④再加條件就會‘不是’ ⑤ 以上皆非

22. 矩陣 D^{-1} 是不是可對角化？
 ① 是 ② 不是 ③ 再加條件就會‘是’ ④再加條件就會‘不是’ ⑤ 以上皆非

請先把 $E=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&3&2&0\\0&1&3&2\\0&0&1&2\end{bmatrix}$ 分解成 L 乘以 U，其中 L 是下三角形 (lower triangular) 矩陣，而 U 是單位上三角形 (unit upper triangular) 矩陣，再回答題目 23 至 27。

23. 下列何者是矩陣 L？
 ① $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix}2&0&0&0\\1&2&0&0\\0&1&2&0\\0&0&1&2\end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix}3&0&0&0\\1&3&0&0\\0&1&3&0\\0&0&1&3\end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix}4&0&0&0\\1&4&0&0\\0&1&4&0\\0&0&1&4\end{bmatrix}$ ⑤ 以上皆非

24. 下列何者是矩陣 U？
 ① $\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix}1&3&0&0\\0&1&3&0\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix}1&4&0&0\\0&1&4&0\\0&0&1&4\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ ⑤ 以上皆非

25. 矩陣 L 的行列式 (determinant) 是多少？
 ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 以上皆非

26. 矩陣 U 的行列式是多少？
 ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 以上皆非

27. 矩陣 E 的行列式是多少？
 ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 以上皆非