MATEMATIKA DISKRIT

# MATERI PERTEMUAN V ALJABAR BOOLEAN II

Wahyu Nur Cholifah, M.Kom

# MEMBAHAS LANJUTAN TERAPAN ALJABAR BOOLEAN

**Catt:**
**Pada pertemuan 5 hanya membahas :**

1. Komplemen fungsi Boolean
2. Rangkaian logic (gate)
3. Bentuk Kanonik

Point 1-4 sudah dibahas pada pertemuan 4, sedangkan point 8 akan dibahas pada pertemuan selanjutnya

## Terapan aljabar Boolean antara lain :

1. Aljabar Boolean 2 Variable dan 3 Variable
2. Prinsip Dualitas
3. Fungsi Boolean
4. Penjumlahan dan Perkalian 2 Fungsi
5. **Komplemen Fungsi Boolean**
6. **Bentuk Kanonik**
7. **Rangkaian Logik (Gate)**
8. Penyederhanaan Fungsi Boolean

# KOMPLEMEN FUNGSI BOOLEAN

- Fungsi Boolean jika dikomplemenkan akan diperoleh fungsi komplemen

- Fungsi komplemen dari $f$ yaitu $f'$ dapat dicari dengan dua cara :

1. Menggunakan hukum DeMorgan
2. Menggunakan Prinsip Dualitas

# KOMPLEMEN FUNGSI BOOLEAN

## 1. Hukum De Morgan

Hukum De Morgan untuk dua variable/peubah (berlaku untuk **n** variable) ***x1*** dan ***x2*** adalah :

$i \quad (x1 + x2)' = x1'.x2'$
$ii \quad (x1.x2)' = x1' + x2'$

## 2. Prinsip Dualitas

- Tentukan dual dari ekspresi Boolean yang merepresentasikan ***f***
- Komplemenkan setiap literal didalam dual tersebut

# KOMPLEMEN FUNGSI BOOLEAN

**Contoh** : carilah komplemen fungsi Boolean dibawah ini :

1. $f(x, y, z) = x.(y + z)$
2. $h(a, b, c) = a'b + (bc)'$
3. $h(a, b, c) = a'b + ac' + (bc)'$

menggunakan cara **Hukum DeMorgan** dan **Prinsip Dualitas**

# 6 KOMPLEMEN FUNGSI BOOLEAN

## 1. Hukum De Morgan

$$f(x, y, z) = x.(y + z)$$

$$f'(x, y, z) = [x.(y + z)]'$$
$$= x' + (y + z)'$$
$$f'(x, y, z) = x' + (y'.z')$$

Hasil sama

## 2. Prinsip Dualitas

$$f(x, y, z) = x.(y + z)$$

**Dual dari :**
$$f(x, y, z) = x + (y.z)$$

**Komplemenkan tiap literalnya:**
$$f'(x, y, z) = x' + (y'.z')$$

# KOMPLEMEN FUNGSI BOOLEAN

1. **Hukum De Morgan**

$$h(a,b,c) = a'b + (bc)'$$

**Hkm Involusi**
$(a')' = a$

$$h'(a,b,c) = [a'b + (bc)']'$$
$$= (a'b)'.\left((bc)'\right)'$$
$$= ((a')' + b').(bc)$$
$$h'(a,b,c) = (a + b').(bc)$$

Hasil sama

2. **Prinsip Dualitas**

$$h(a,b,c) = a'b + (bc)'$$
$$= a'b + (b' + c')$$

**Dual dari :**
$h(a,b,c) = (a'+b).(b'.c')$

**Komplemenkan tiap literalnya:**
$h'(a,b,c) = (a + b').(bc)$

# KOMPLEMEN FUNGSI BOOLEAN

1. **Hukum De Morgan**

**Hkm Involusi**
$(a')' = a$

$$h(a,b,c) = a'b + ac' + (bc)'$$

$$h'(a,b,c) = [a'b + ac' + (bc)']'$$
$$= (a'b)'.(ac')'.((bc)')'$$
$$= ((a')' + b').(a' + (c')').((bc)')'$$
$$h'(a,b,c) = (a + b').(a' + c).(bc)$$

Hasil sama

2. **Prinsip Dualitas**

$$h(a,b,c) = a'b + ac' + (bc)'$$

$$h(a,b,c) = a'b + ac' + (b' + c')$$

**Dual dari :**
$h(a,b,c) = (a' + b).(a + c').(b'.c')$
**Komplemenkan tiap literalnya:**
$h'(a,b,c) = (a + b').(a' + c).(b.c)$

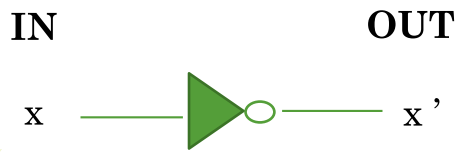
# RANGKAIAN LOGIC (GATE)

**Aljabar Boolean dapat juga di implementasikan ke dalam rangkaian gerbang logika**

**1. Gerbang Inverter (NOT) :**

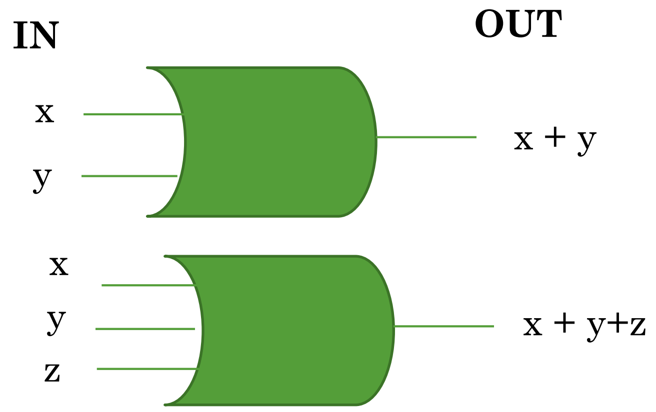
Gerbang logika yang mempunyai satu masukan dan satu keluaran.

**Simbol Gerbang :**




**2. Gerbang OR :** gerbang logika yang mempunyai dua atau lebih masukan dengan satu sinyal keluaran.

**Simbol Gerbang :**

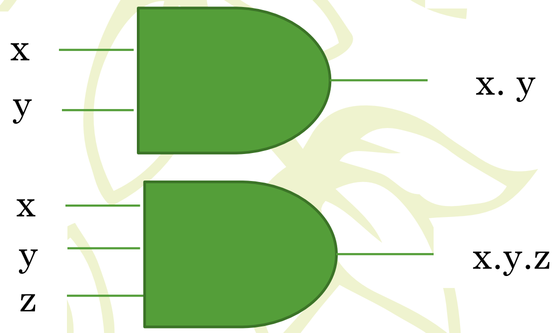


# RANGKAIAN LOGIC (GATE)

**3. Gerbang AND :** gerbang logika yang mempunyai dua atau lebih masukan dengan satu sinyal keluaran.

**Simbol Gerbang :**

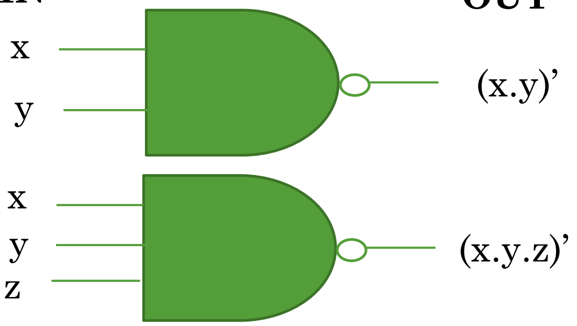
**IN** **OUT**




**4. Gerbang NAND :** gerbang logika yang mempunyai dua atau lebih masukan dengan satu sinyal keluaran.

**Simbol Gerbang :**

**IN** **OUT**

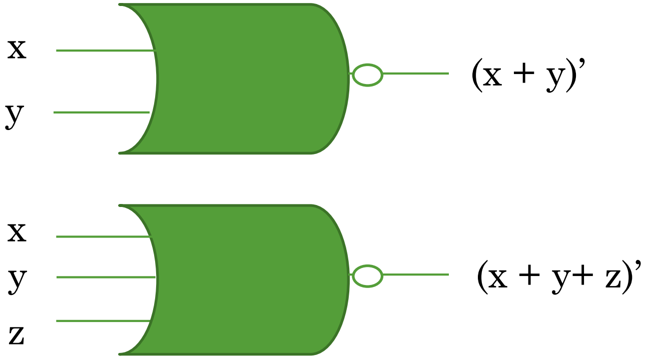



x

**5. Gerbang NOR :** gerbang logika yang mempunyai dua atau lebih masukan dengan satu sinyal keluaran.

**Simbol Gerbang :**

**IN** **OUT**



# RANGKAIAN LOGIC (GATE)

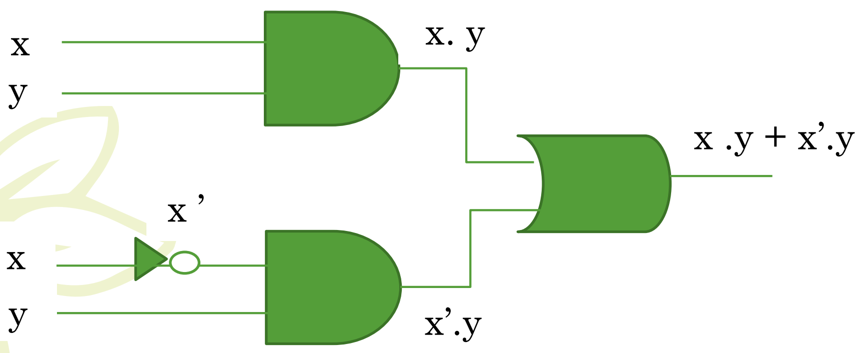
**Contoh 1 :**

**Nyatakan fungsi $f(x, y) = xy + x'y$**

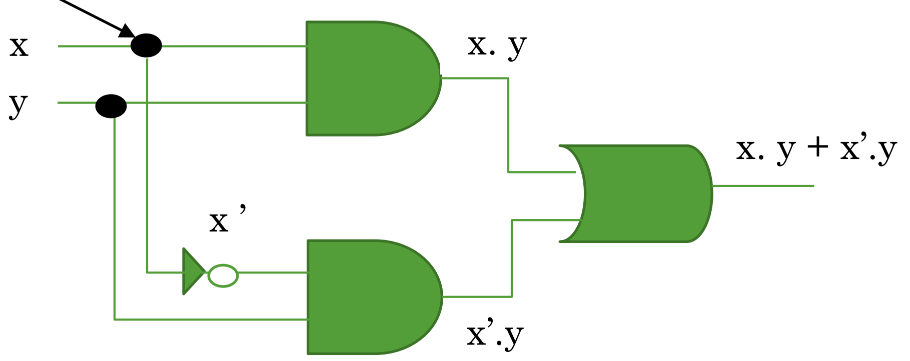
**Dalam rangkaian logika**

Tanda Penghubung

**Cara I**

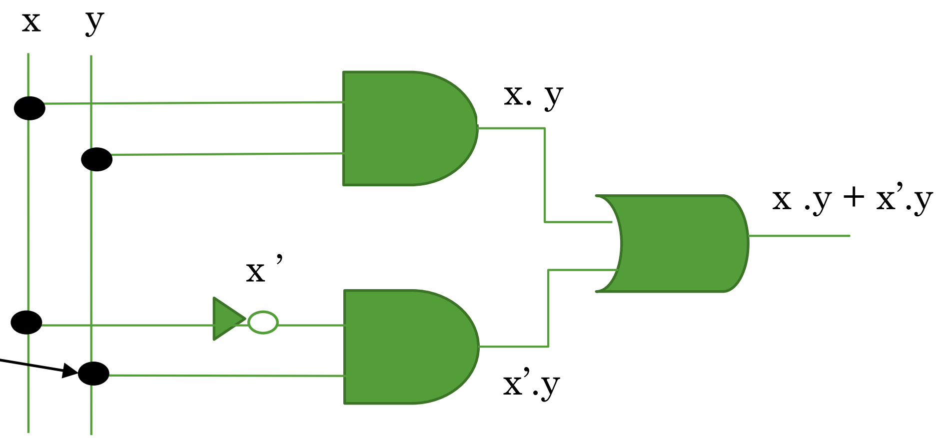



**Cara II**



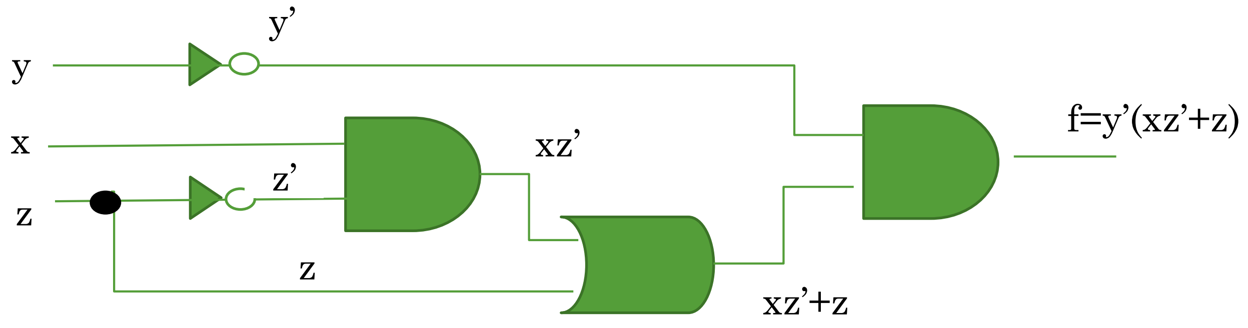

**Cara III**

Tanda Penghubung



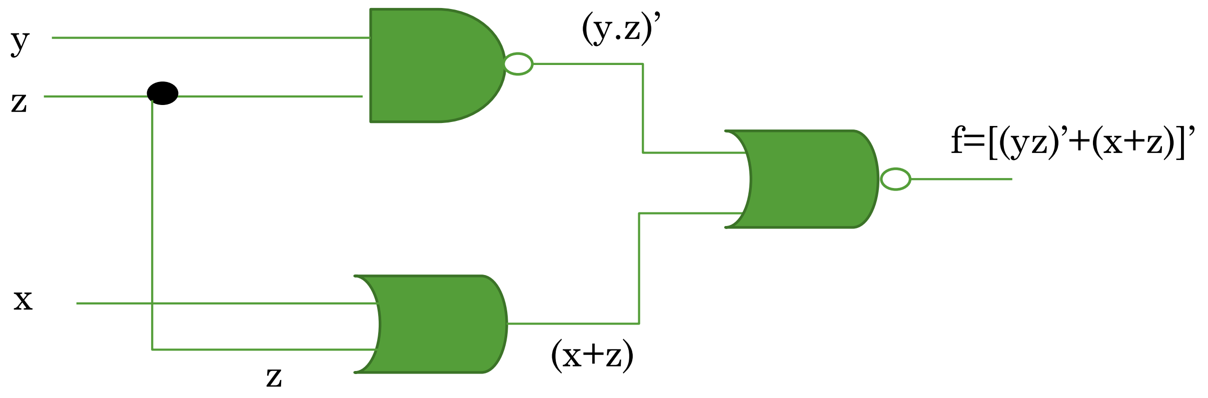
# RANGKAIAN LOGIC (GATE)

**Contoh 2 :**
**Nyatakan fungsi**
$f(x, y, z) = y'(xz' + z)$
**Dalam rangkaian logika**



# RANGKAIAN LOGIC (GATE)

**Contoh 3 :**
**Nyatakan fungsi**
$f(x, y, z) = [(yz)' + (x + z)]'$
**Dalam rangkaian logika**



# BENTUK KANONIK

**Ada 2 bentuk kanonik :**

1. **SOP** (sum of product / penjumlahan dari hasil kali / miniterm)
   Notasi : $\boldsymbol{f(x,y,z) = (x.y.z) + (x.y'.z) + (x'.y'.z') + \cdots}$
   symbol miniterm = $\boldsymbol{\Sigma m}$, $\quad$ *dimana nilai* $\boldsymbol{x' = 0; x = 1}$
2. **POS** (product of sum / perkalian dari hasil jumlah / maxterm)
   Notasi : $\boldsymbol{f(x,y,z) = (x' + y + z').(x + y' + z).(x + y + z)\ldots}$
   symbol maxterm = $\boldsymbol{\pi M}$, $\quad$ *dimana nilai* $\boldsymbol{x' = 1; x = 0}$

# BENTUK KANONIK

| x | y | miniterm | | maxterm | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | suku | lambang | suku | lambang |
| 0 | 0 | x’.y’ | m0 | x+y | M0 |
| 0 | 1 | x’.y | m1 | x+y’ | M1 |
| 1 | 0 | x.y’ | m2 | x’+y | M2 |
| 1 | 1 | x.y | m3 | x’+y’ | M3 |

**Tabel Miniterm & Maxterm**

| x | y | z | miniterm | | maxterm | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | suku | lambang | suku | lambang |
| 0 | 0 | 0 | x’.y’.z’ | m0 | x+y+z | M0 |
| 0 | 0 | 1 | x.’y’.z | m1 | x+y+z’ | M1 |
| 0 | 1 | 0 | x’.y.z’ | m2 | x+y’+z | M2 |
| 0 | 1 | 1 | x’.y.z | m3 | x+y’+z’ | M3 |
| 1 | 0 | 0 | x.y’.z’ | m4 | x’+y+z | M4 |
| 1 | 0 | 1 | x.y’.z | m5 | x’+y+z’ | M5 |
| 1 | 1 | 0 | x.y.z’ | m6 | x’+y’+z | M6 |
| 1 | 1 | 1 | x.y.z | m7 | x’+y’+z’ | M7 |

# BENTUK KANONIK

**Untuk menyatakan fungsi Boolean ke dalam bentuk kanonik dapat dilakukan dengan cara :**

1. Menggunakan Table Kebenaran
2. Melengkapi variable yang belum terdapat dalam sukunya

# BENTUK KANONIK

Point 1

Bentuk Kanonik dapat juga diimplementasikan ke dalam bentuk **Table Kebenaran**

**Untuk menghasilkan**

- **SOP** maka dilihat dari kombinasi variable fungsi yang **bernilai 1**
- **POS** maka dilihat dari kombinasi variable fungsi yang **bernilai 0**

# BENTUK KANONIK

**Contoh :** Nyatakan **Tabel Kebenaran** dibawah ini ke dalam bentuk **SOP dan POS**

1

| $x$ | $y$ | $z$ | $f(x,y,z)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

2

| $x$ | $y$ | $z$ | $f(x,y,z)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

# BENTUK KANONIK

| *x* | *y* | *z* | *f(x,y,z)* |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

1. **SOP**

a. Cek **nilai fungsi =1** yaitu : 001, 100, 111

b. Fungsi Boolean dalam bentuk kanonik

$$f(x,y,z) = x'y'z + xy'z' + xyz$$
$$= 001 + 100 + 111$$
$$= m1 + m4 + m7$$
$$f(x,y,z) = \Sigma m(1,4,7)$$

2. **POS**

a. Cek **nilai fungsi =0** yaitu : 000,010,011,101,110

b. Fungsi Boolean dalam bentuk kanonik

$$f(x,y,z) = (x+y+z).(x+y'+z).(x+y'+z').(x'+y+z').(x'+y'+z)$$
$$= (0+0+0).(0+1+0).(0+1+1).(1+0+1).(1+1+0)$$
$$= M0.M2.M3.M5.M6$$
$$f(x,y,z) = \pi M(0,2,3,5,6)$$

# BENTUK KANONIK

| $x$ | $y$ | $z$ | $f(x,y,z)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

**1. SOP**

a. Cek **nilai fungsi =1** yaitu : 000, 011, 100, 110, 111

b. Fungsi Boolean dalam bentuk kanonik

$$f(x,y,z) = x'y'z' + x'yz + xy'z' + xyz' + xyz$$
$$= 000 + 011 + 100 + 110 + 111$$
$$= m0 + m3 + m4 + m6 + m7$$
$$f(x,y,z) = \Sigma m(0,3,4,6,7)$$

**2. POS**

a. Cek **nilai fungsi =0** yaitu : 001, 010, 101

b. Fungsi Boolean dalam bentuk kanonik

$$f(x,y,z) = (x + y + z').(x + y' + z).(x' + y + z')$$
$$= (0 + 0 + 1).(0 + 1 + 0).(1 + 0 + 1)$$
$$= M1.M2.M5$$
$$f(x,y,z) = \pi M(1,2,5)$$

# BENTUK KANONIK

Bentuk Kanonik diimplementasikan dengan cara **melengkapi variable yang belum terdapat didalam setiap sukunya**.

**Point 2**

**Untuk menghasilkan**

- **SOP dan POS** maka harus melengkapi dahulu variable untuk setiap suku agar jumlahnnya sama

# BENTUK KANONIK

**Contoh** Nyatakan fungsi Boolean

1. $f(x, y, z) = x + y'z$
2. $f(a, b, c) = a'b + ac$

Kedalam bentuk SOP dan POS

# BENTUK KANONIK

1. SOP $\boldsymbol{f(x,y,z) = x + y'z}$

Catt : apabila ada variable yg sama maka ditulis satu saja

***Catt:***
*harus melengkapi variable agar jumlahnya sama*

$$\boldsymbol{x} = x(\underline{y + y'})$$
$$= xy + xy'$$
$$= (xy + xy').(\underline{z + z'})$$
$$\boldsymbol{x} = xyz + xyz' + xy'z + xy'z'$$

$$\boldsymbol{y'z} = y'z(\underline{x + x'})$$
$$\boldsymbol{y'z} = xy'z + x'y'z$$

**Hkm komplemen**
**y+y'=1**
**y.y'=0**

$$\boldsymbol{f(x,y,z)} = x + y'z$$
$$= xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + xy'z + x'y'z$$
$$= xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + x'y'z$$
$$= 111 + 110 + 101 + 100 + 001$$
$$= m7 + m6 + m5 + m4 + m1$$
$$\boldsymbol{f(x,y,z)} = \Sigma m(1,4,5,6,7)$$

# BENTUK KANONIK

POS $f(x,y,z) = x + y'z$

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) &= x + y'z \\
&= (x+y').(x+z) \\
&= (x+y'+\underline{zz'}).(x+z+\underline{yy'}) \\
&= (x+y'+z).(x+y'+z').(x+y+z). \\
&\quad (x+y'+z) \\
&= (x+y'+z).(x+y'+z').(x+y+z) \\
&= (0+1+0)\ .(0+1+1)\ .(0+0+0) \\
&= M2.M3.M0 \\
f(x,y,z) &= \pi M(0,2,3)
\end{aligned}
$$

**Hkm Distributif**
**x+(y.z)=(x+y).(x+z)**
**x.(y+z)=xy+xz**

**Hkm komplemen**
**y+y'=1**
**y.y'=0**

***Catt:***
*harus melengkapi variable agar jumlahnya sama*

$$
\begin{aligned}
x + y' &= x + y' + zz' \\
&= (x+y'+z).(x+y'+z')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x + z &= x + z + yy' \\
&= (x+y+z).(x+y'+z)
\end{aligned}
$$

$$hasil\ sop \rightarrow (x,y,z) = \Sigma m(1,4,5,6,7)$$

# BENTUK KANONIK

**2. SOP $f(a,b,c) = a'b + ac$**

**Catt:**
*harus melengkapi variable agar jumlahnya sama*

$$a'b = a'b(\underline{c + c'})$$
$$= a'bc + a'bc'$$

$$ac = ac(\underline{b + b'})$$
$$= abc + ab'c$$

**Hkm komplemen**
**y+y'=1**
**y.y'=0**

$$f(a,b,c) = a'b + ac$$
$$= a'bc + a'bc' + abc + ab'c$$
$$= 011+010+111+101$$
$$= m3 + m2 + m7 + m5$$
$$f(a,b,c) = \Sigma m(2,3,5,7)$$

# BENTUK KANONIK

POS $f(a,b,c) = a'b + ac$

**Hkm Distributif**
x+(y.z)=(x+y).(x+z)
x.(y+z)=xy+xz

$$
\begin{aligned}
f(a,b,c) &= a'b + ac \\
&= (a' + ac).(b + ac) \\
&= \underline{(a' + a)}.(a + b).(a' + c).(b + c) \\
&= 1.(a + b + \underline{cc'}).(a' + c + \underline{bb'}).(b + c + \underline{aa'}) \\
&= (a + b + c).(a + b + c').(a' + b + c).(a' + b' + c). \\
&\quad (a + b + c).(a' + b + c) \\
&= (a + b + c).(a + b + c').(a' + b + c).(a' + b' + c) \\
&= (0 + 0 + 0).(0 + 0 + 1).(1 + 0 + 0).(1 + 1 + 0) \\
&= M0.M1.M4.M6
\end{aligned}
$$

$f(a,b,c) = \pi M(0,1,4,6)$

$$
\begin{aligned}
a'b + ac &= (a'b + a).(a'b + c) \\
a'b + a &= (a' + a).(a + b) \\
a'b + c &= (a' + c).(b + c)
\end{aligned}
$$

***Catt:***
*harus melengkapi variable agar jumlahnya sama*

$$
\begin{aligned}
a + b + cc' &= (a + b + c).(a + b + c') \\
a' + c + bb' &= (a' + b + c).(a' + b' + c) \\
b + c + aa' &= (a + b + c).(a' + b + c)
\end{aligned}
$$

**Hkm komplemen**
y+y'=1
y.y'=0

***Hasil SOP*** **->** $f(a,b,c) = \Sigma m(2,3,5,7)$

# LATIHAN 4

**Unk Soal no 1-3 :**
**Soal a unk NPM Genap**
**Soal b unk NPM Ganjil**
**Sedang Soal no 4 unk NPM Ganjil & Genap**

1. Carilah **komplen fungsi Boolean** dari persamaan dibawah ini dengan menggunakan **hokum DeMorgan dan Prinsip Dualitas**

a. $f(a, b, c) = a'b + (a + bc)'$

b. $h(x, y, z) = (xy)' + x + (y'z)$

2. Dari persamaan dibawah ini buatlah **gerbang logikanya**

a. $f(x, y, z) = (xy)' + y + z$

b. $g(a, b, c) = (a + b + c').(a + b)'$

3. Nyatakan fungsi Boolean :

a. $f(x, y) = x'$

b. $f(x, y, z) = y' + xy + x'yz'$

**kedalam bentuk kanonik SOP dan POS**

4 Nyatakan **table kebeneran** ini dalam bentuk kanonik SOP dan POS

| x | y | z | f(x,y,z) |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

| x | y | z | f(x,y,z) |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |