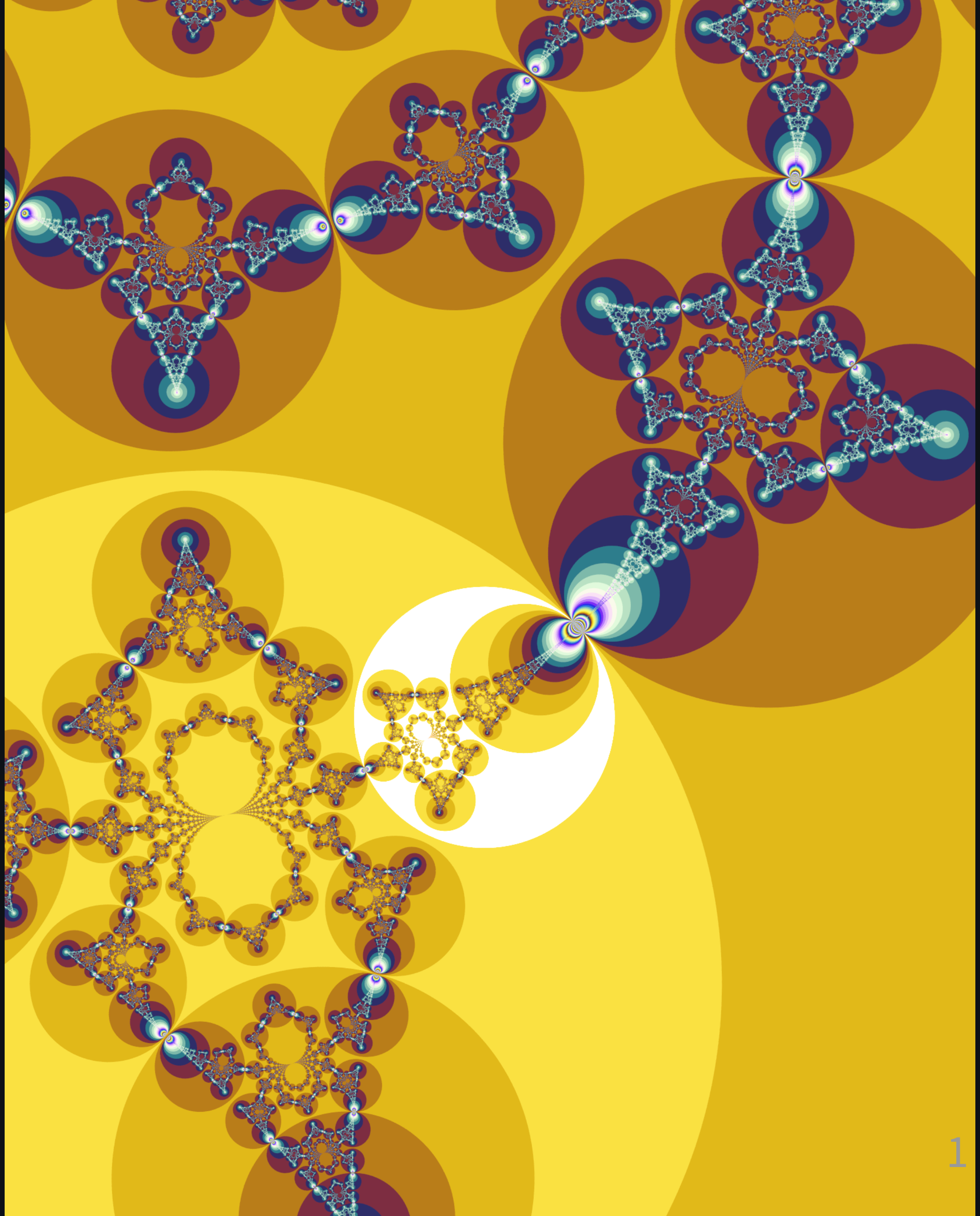
鏡映の織りなす世界

FMS特別講義2025

- 中村建斗
- 2025/11/13
- E-mail: soma_arc@pulvis.js
- Web: https://pulvis.jp



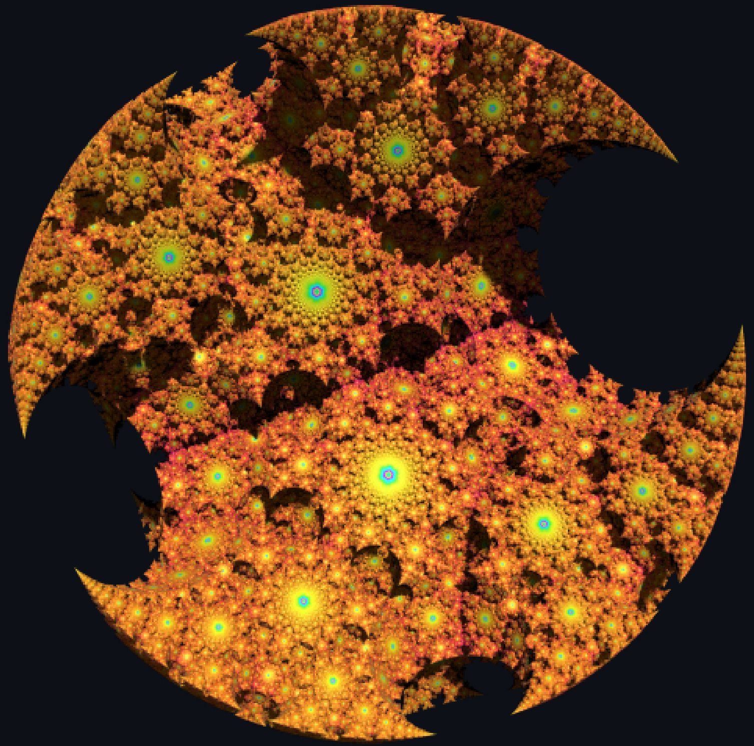
自己紹介

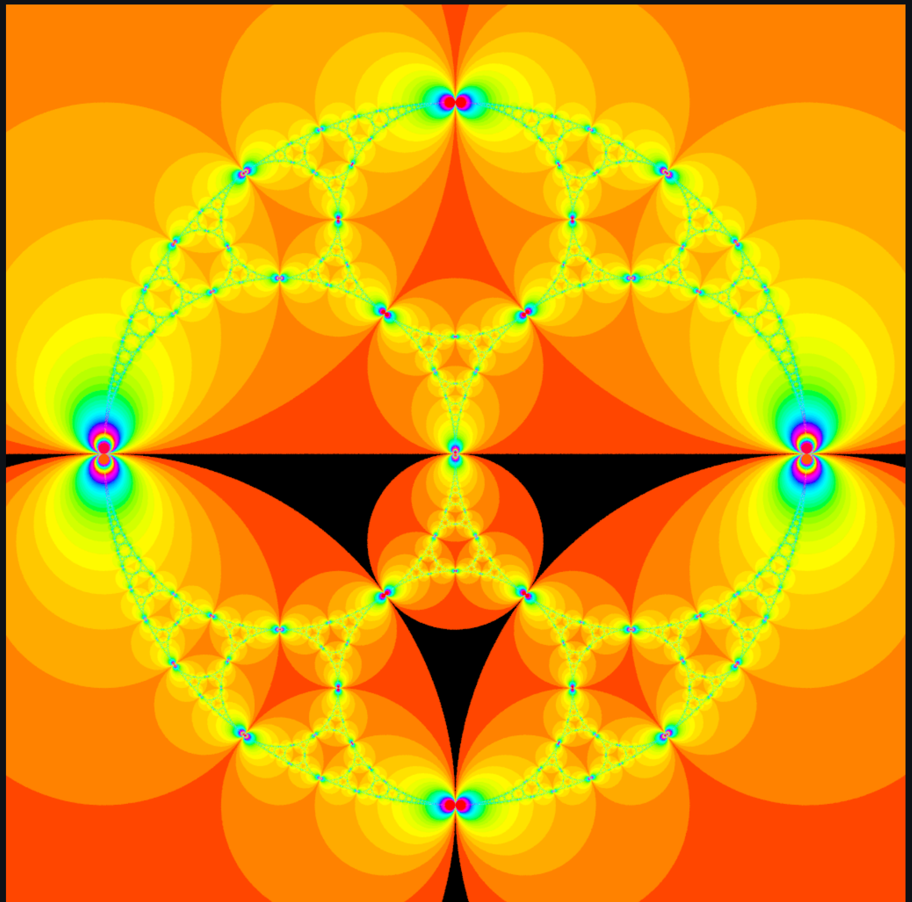
中村建斗

- 博士（理学）
- FMS１期生（２０１３年４月入学）
- 学部２年〜博士後期（２０２２年３月）まで阿原研究室に所属
- 現在はソフトウェアエンジニア
  - ペイントソフトの研究開発（3DCG機能）
  - ウェブアプリケーションの開発

取り組んでいる研究・開発活動分野

フラクタル・幾何学図形の可視化とその高速化

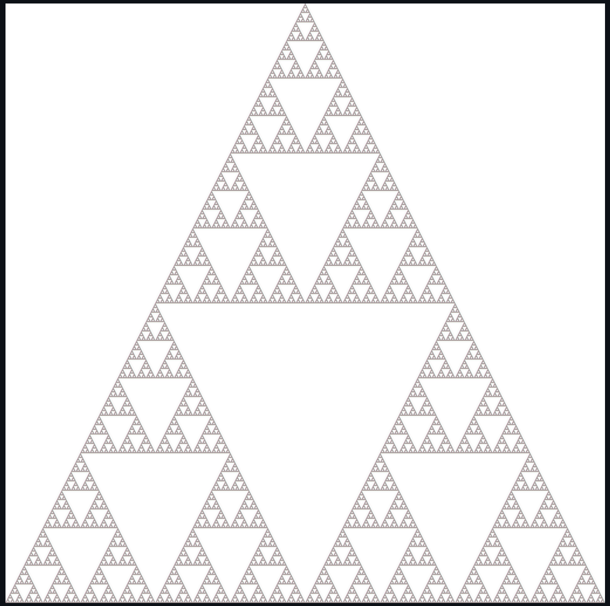




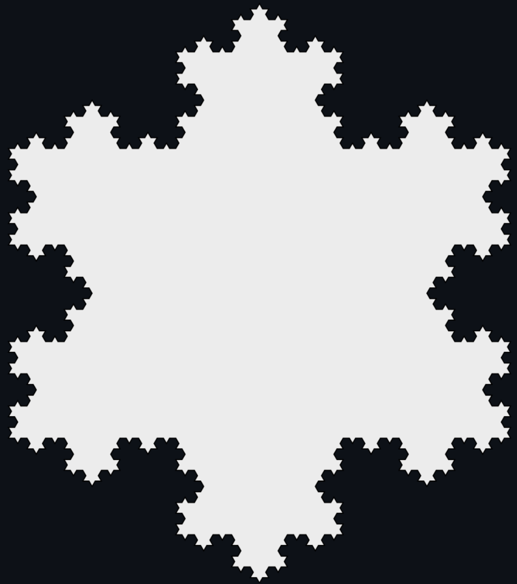
フラクタル図形とは

自己相似構造をもつ図形のこと

図形のある部分を拡大していくと無限にその構造が現れる



シェルピンスキーのギャスケット



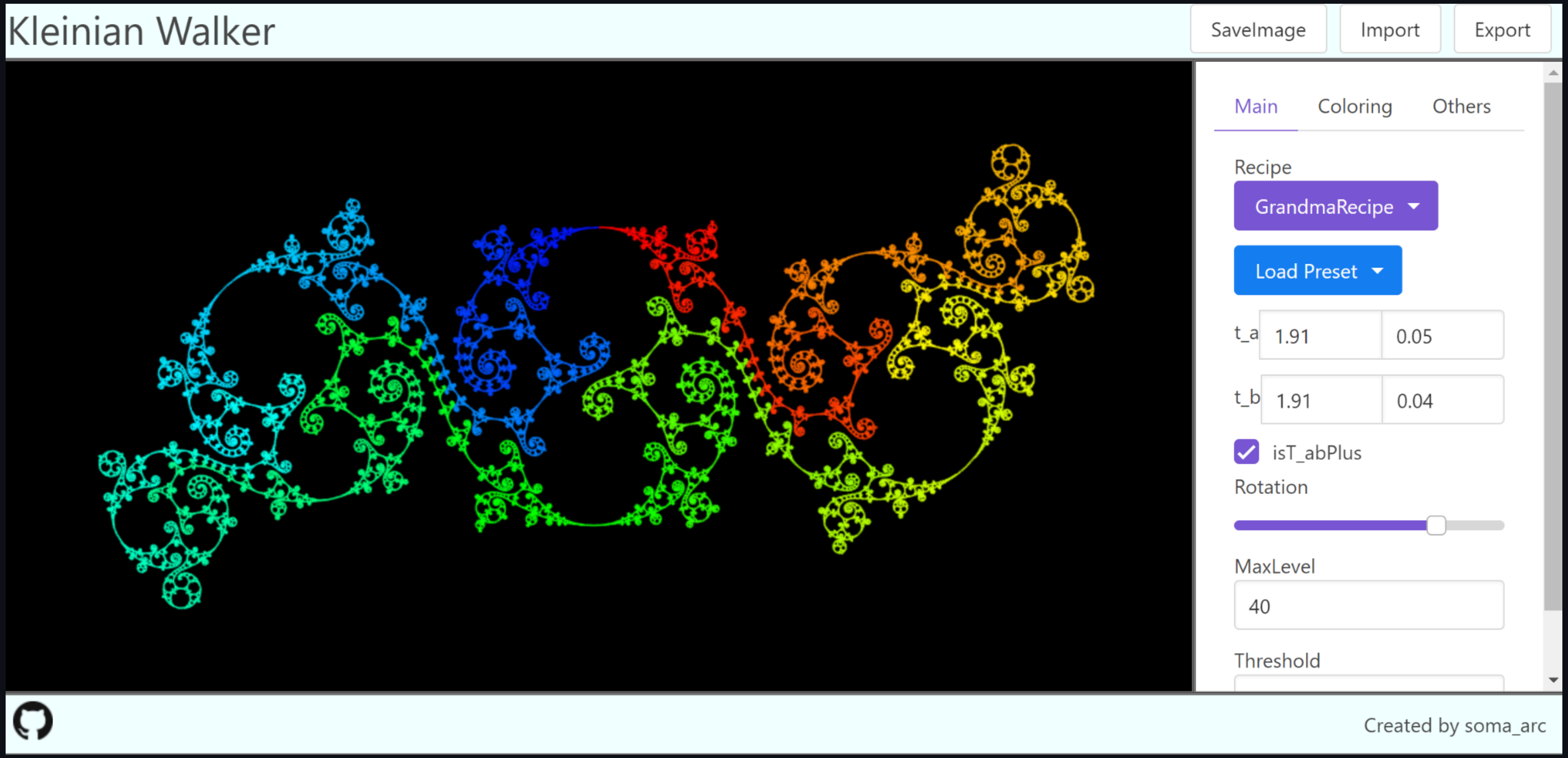
コッホ曲線

自然界のフラクタル

ロマネスコブロッコリー 出典

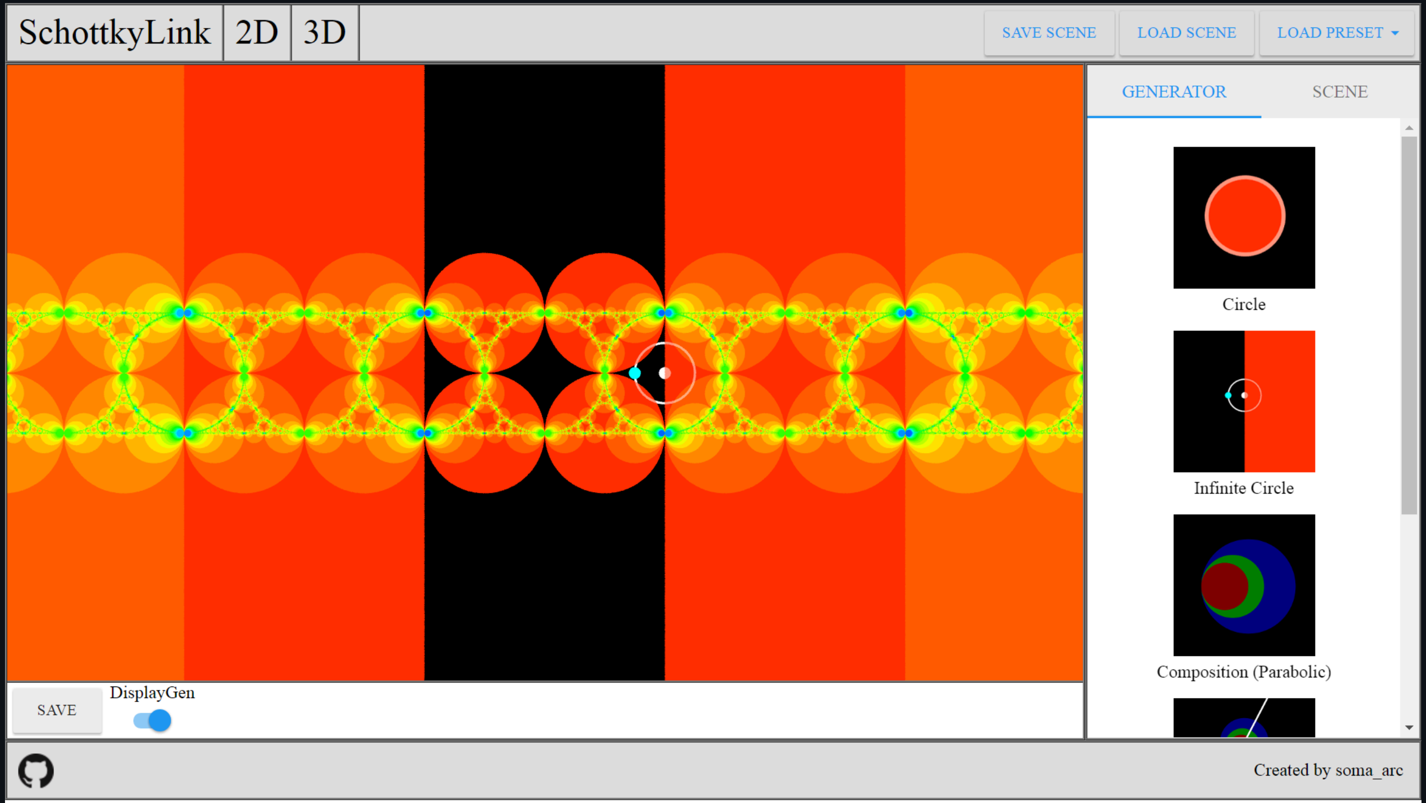
シダ 出典

フラクタル描画ソフトウェアの開発



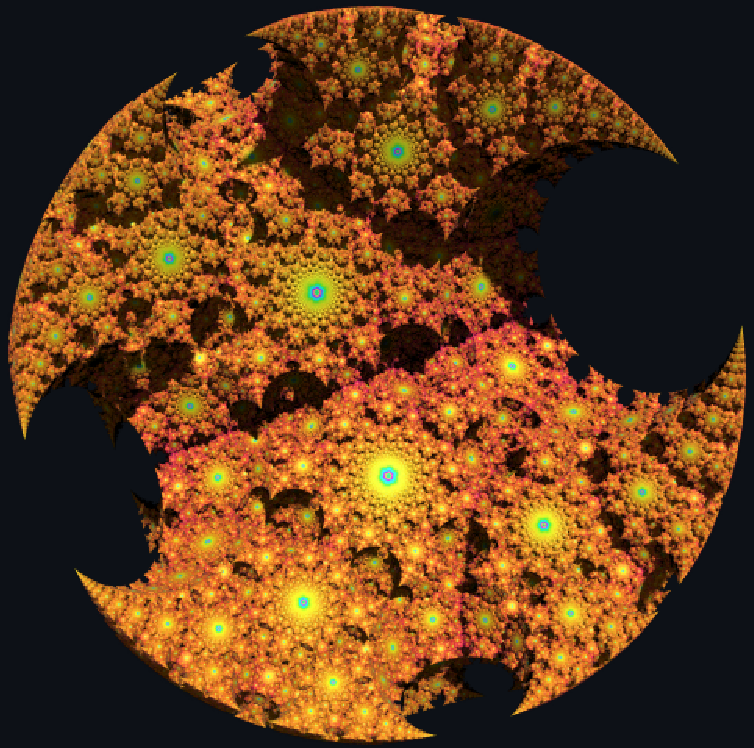
Kleinian Walker: クライン群の極限集合を描画するソフトウェア

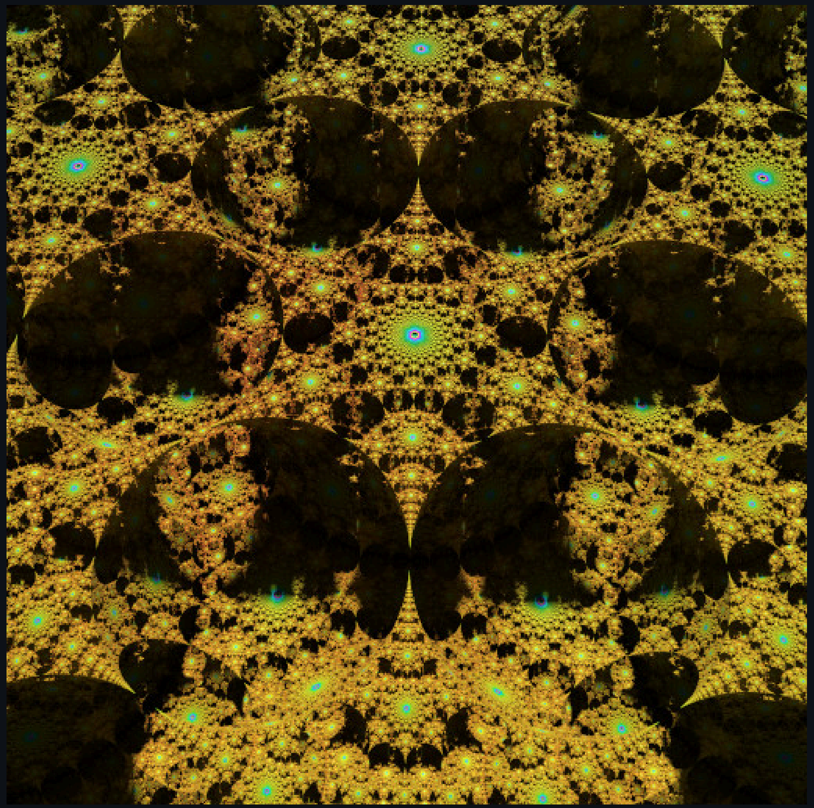
フラクタル描画ソフトウェアの開発



Schottky Link：円の反転によるフラクタルを描画するソフトウェア

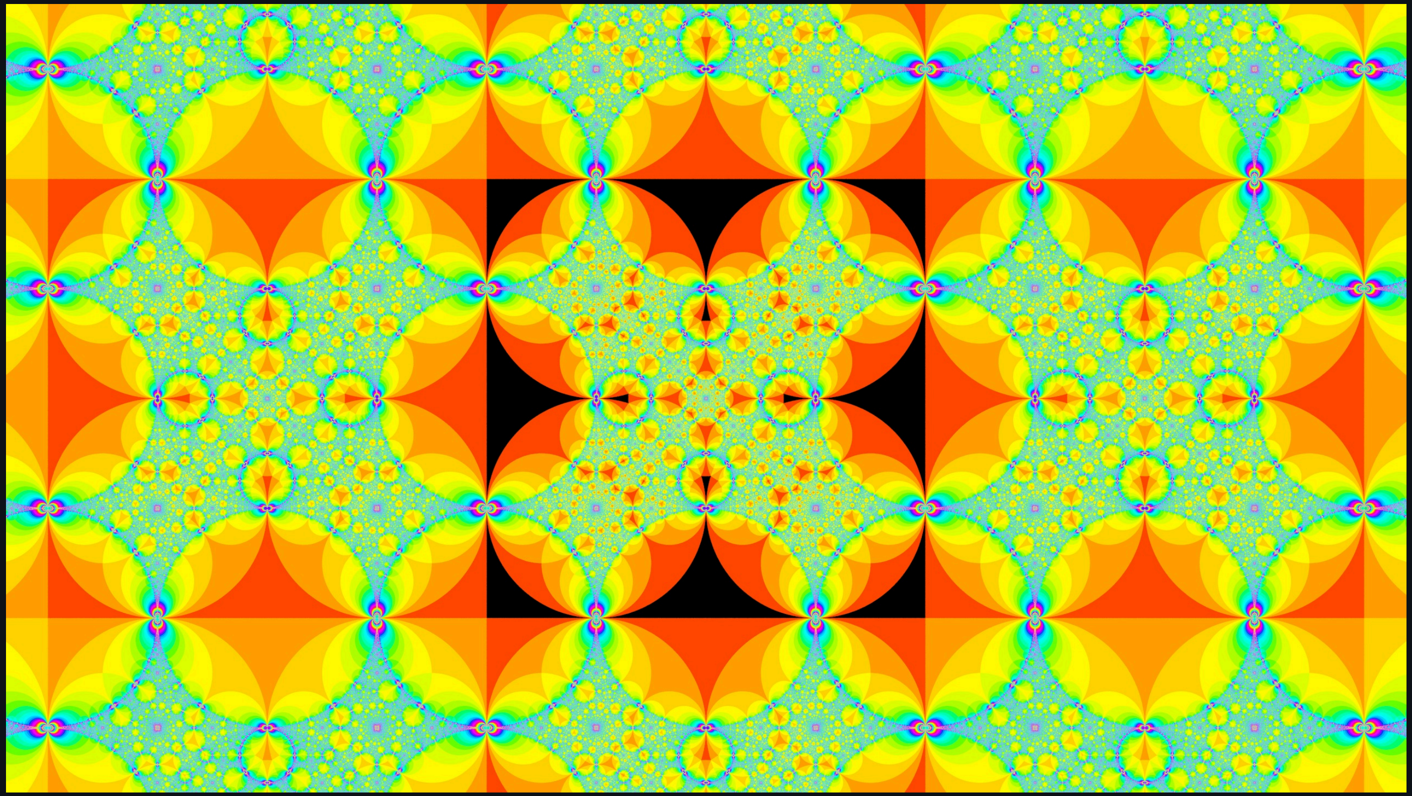
三次元フラクタル（Ahara-Araki Fractal）





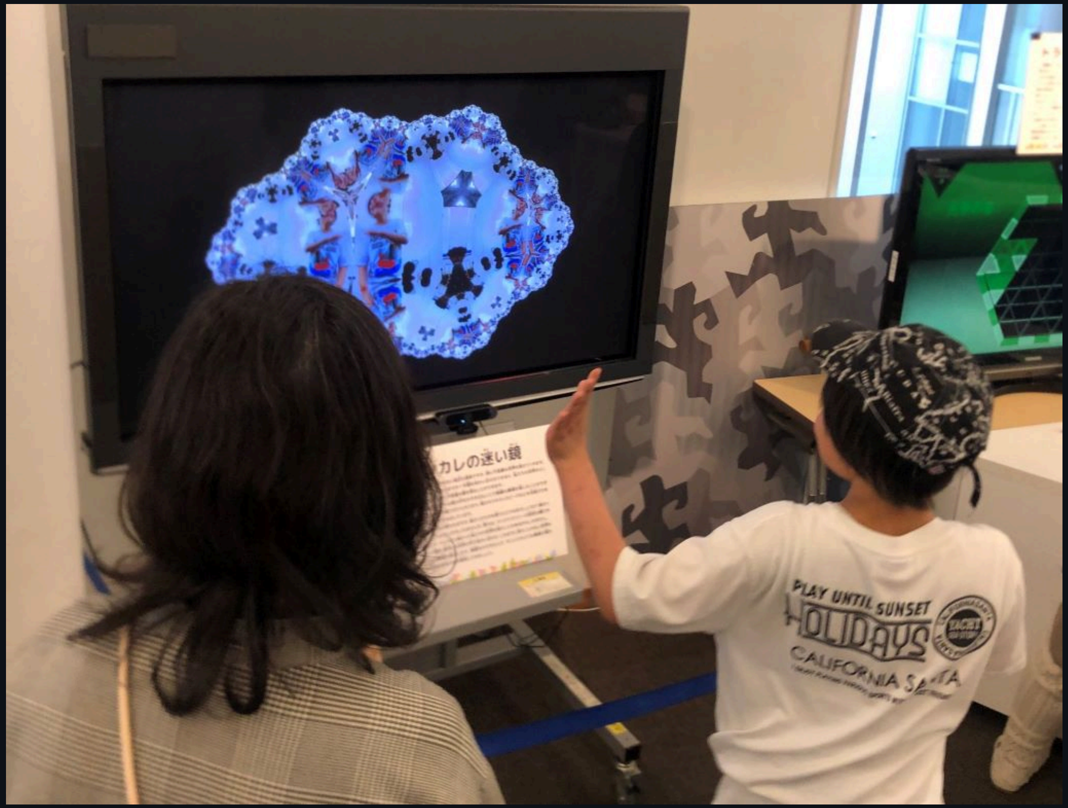
通称Ahara-Araki Fractalと呼ばれる三次元形状を持つフラクタルの描画ソフトウェア

アニメーション



Schottky Waltz

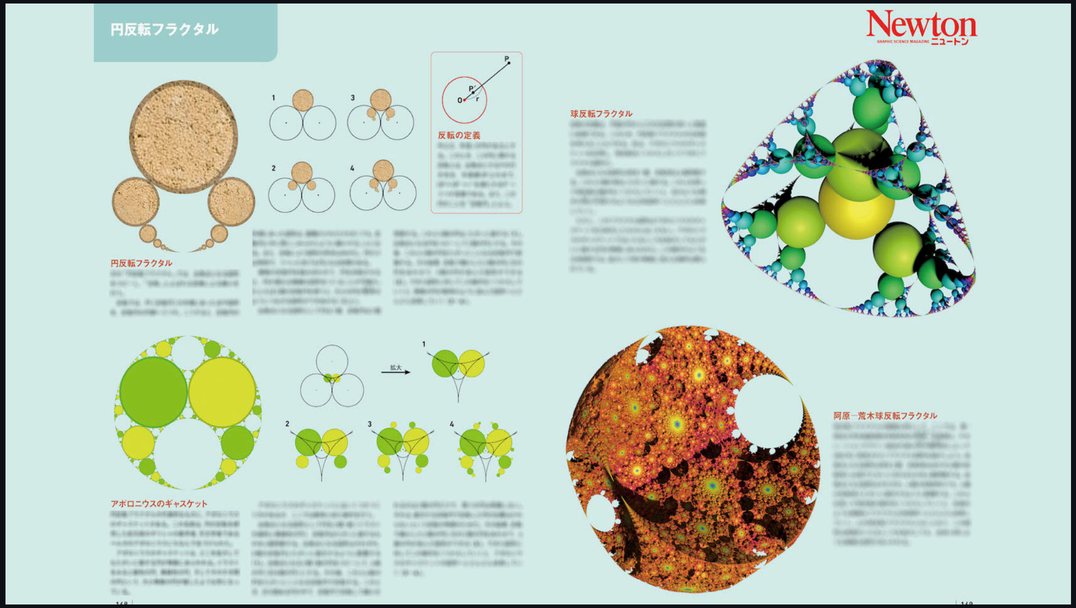
ポワンカレの迷い鏡



渋谷科学センター・ハチラボにおけるテセレーション展
つくばエキスポセンターにおける企画展で展示

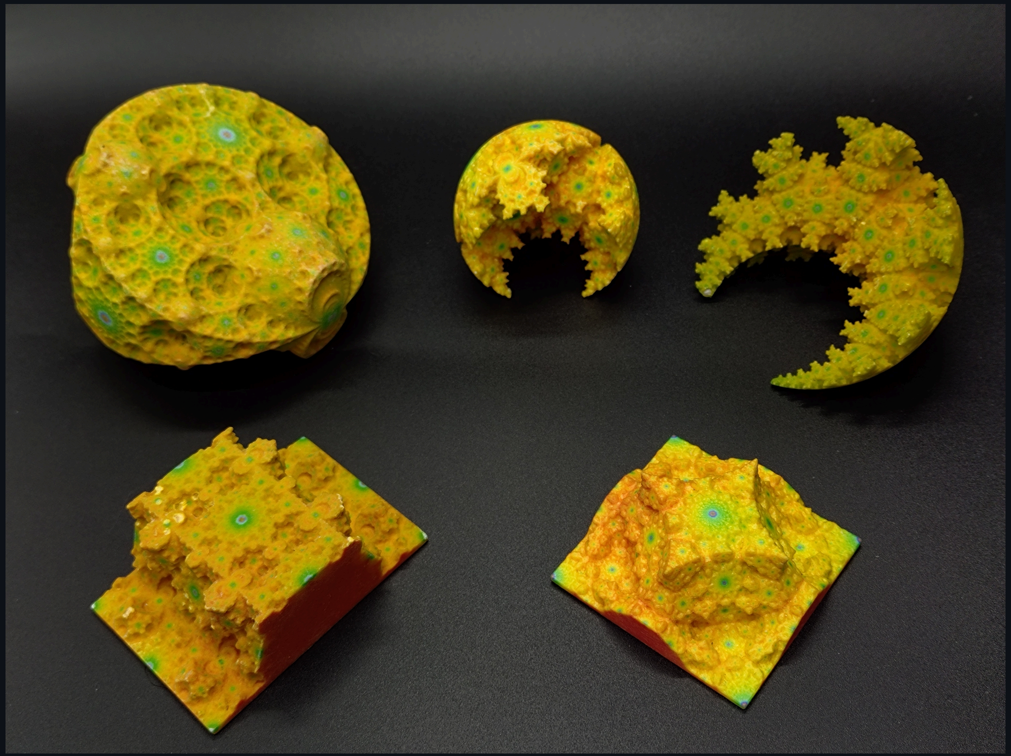
表紙・挿絵

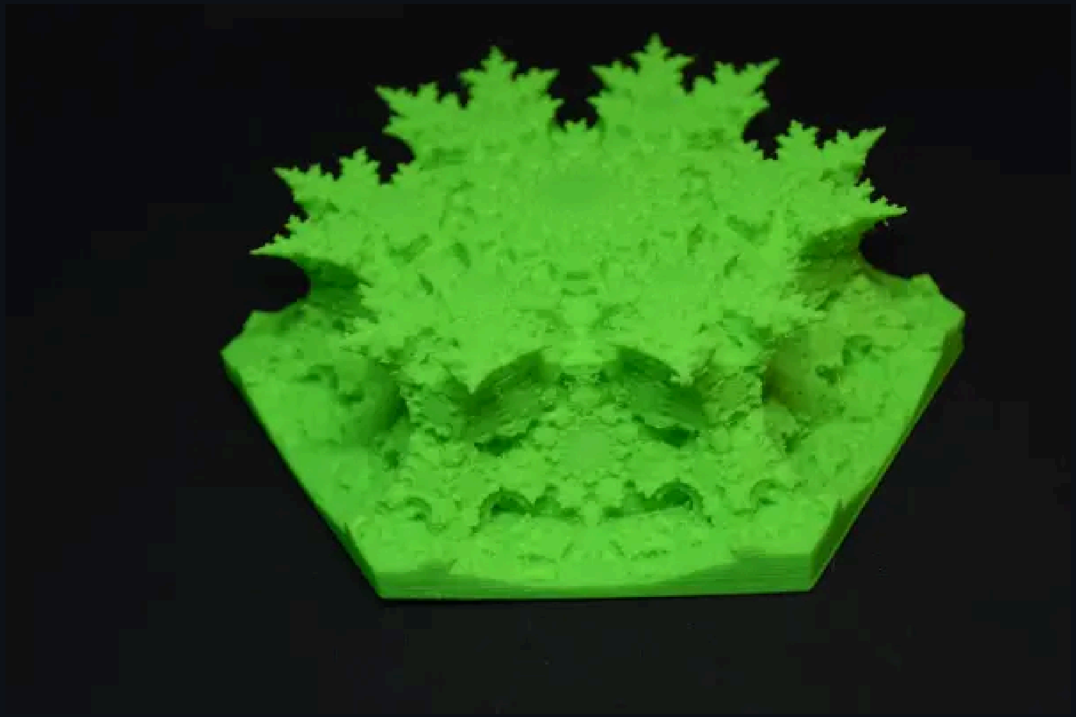
講談社　「複雑系」入門　表紙



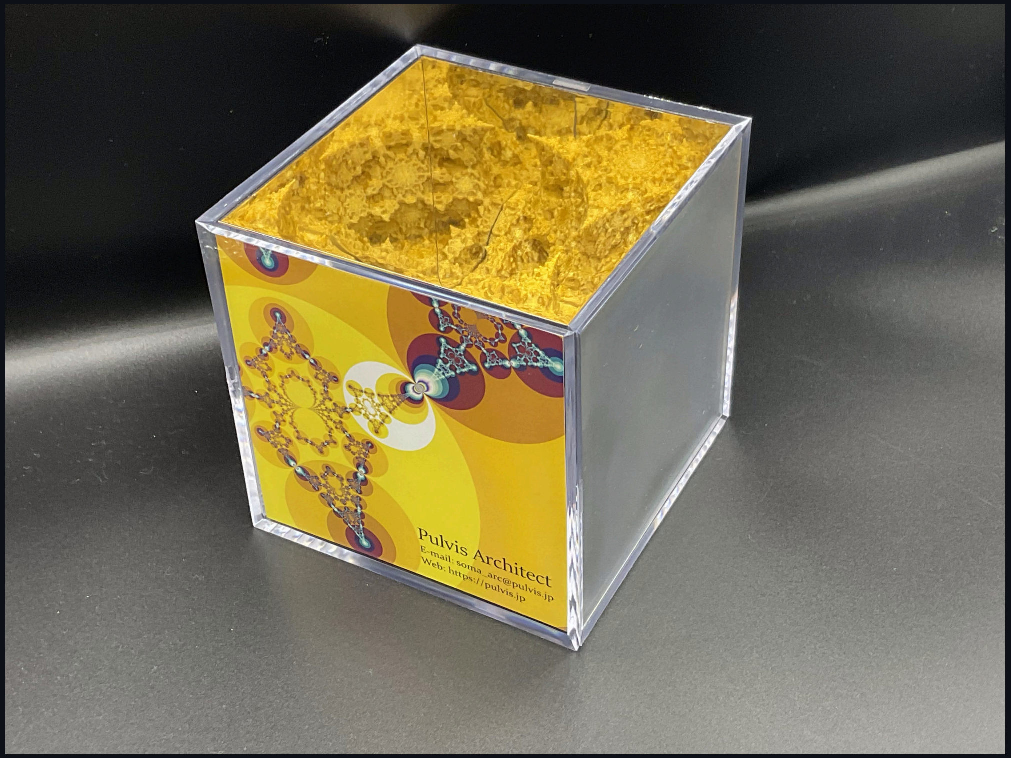
Newton別冊：数学の世界
図形編改訂第２版　フラクタル画像

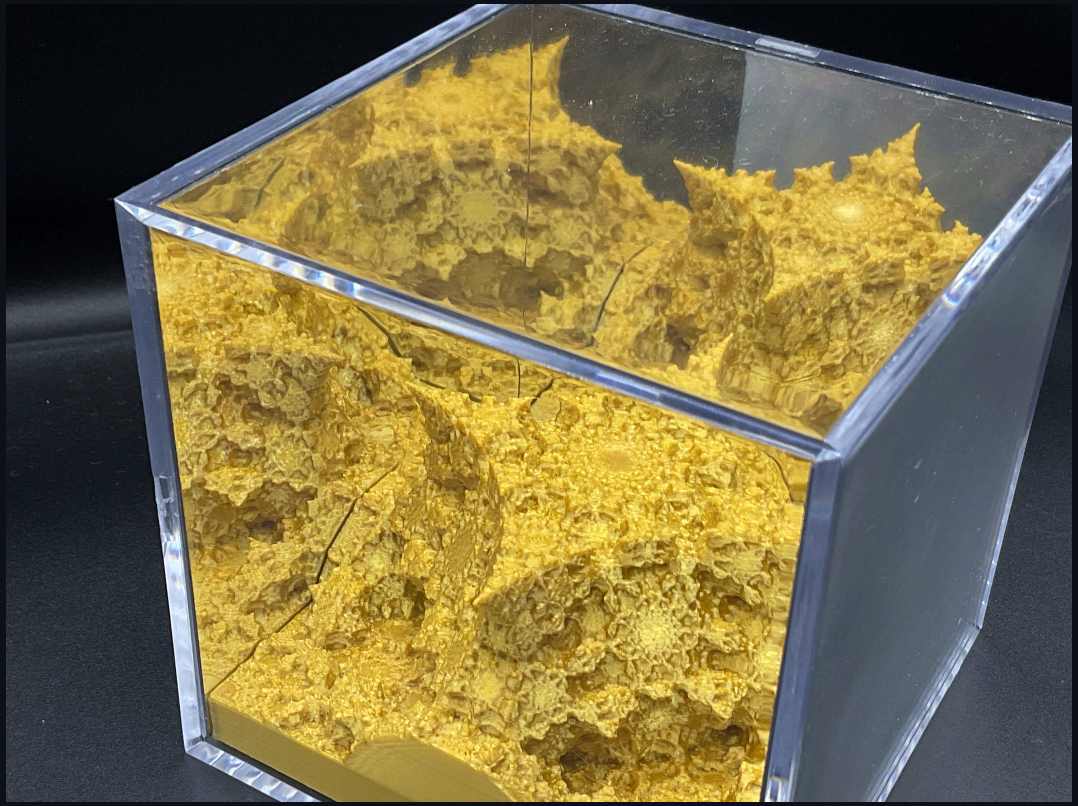
Ahara-Araki FractalのDプリント



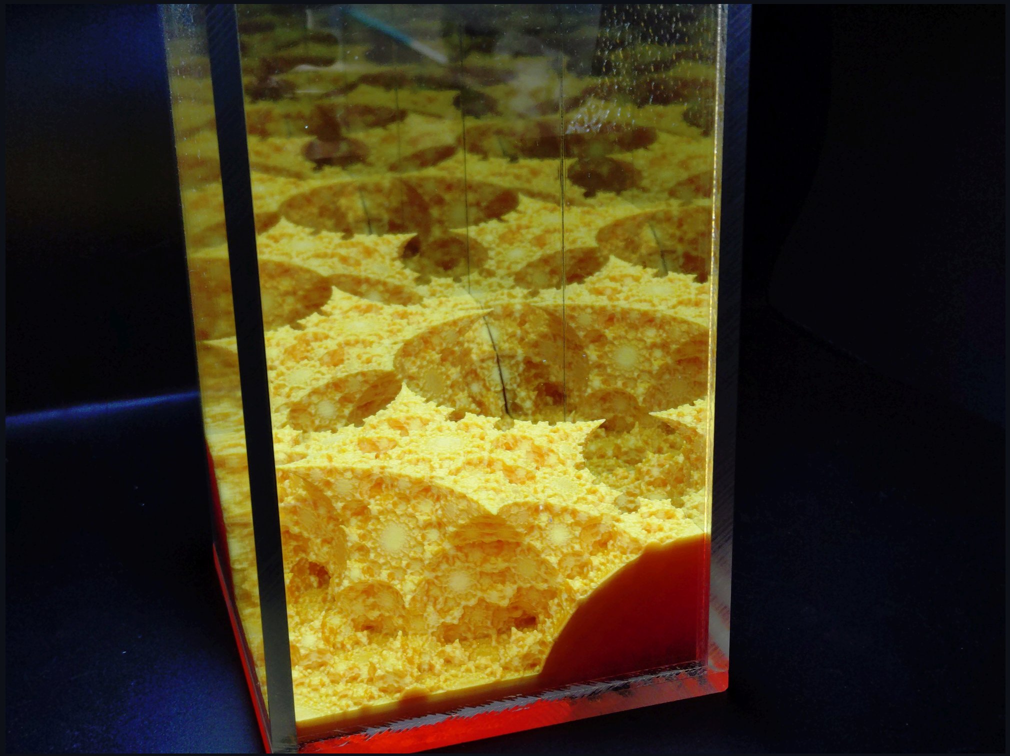


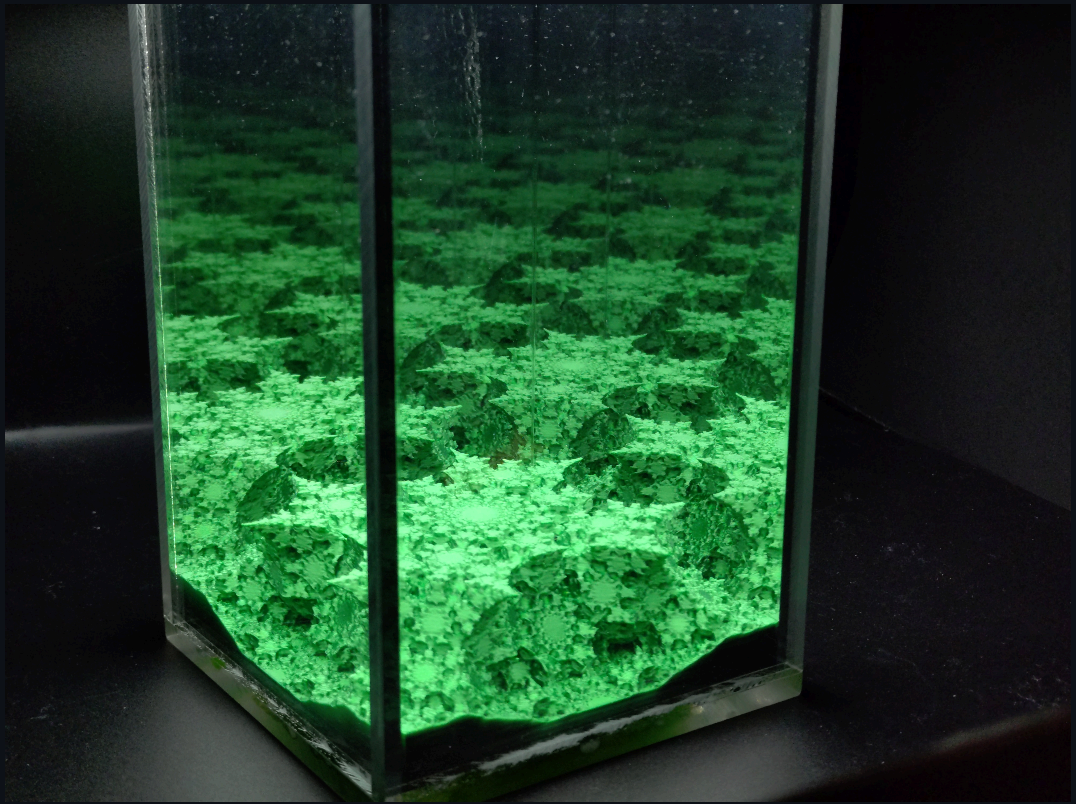
Fractal Box


Pulvis Architect
E-mail: soma_arc@pulvis.jp
Web: https://pulvis.jp



Infinity Fractal Box





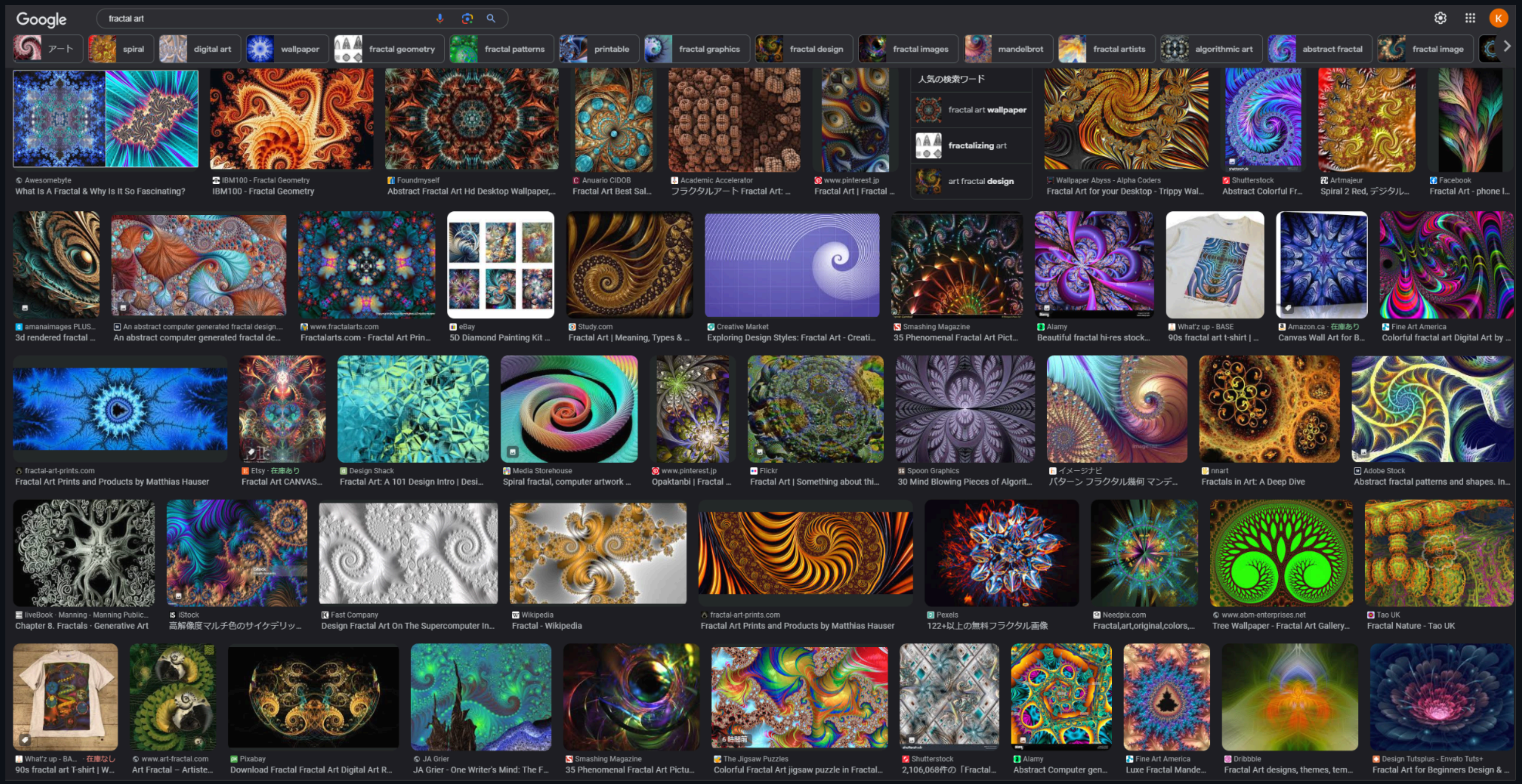
モチベーション

フラクタル図形のような複雑怪奇な図形を理解して自由自在に描きたい

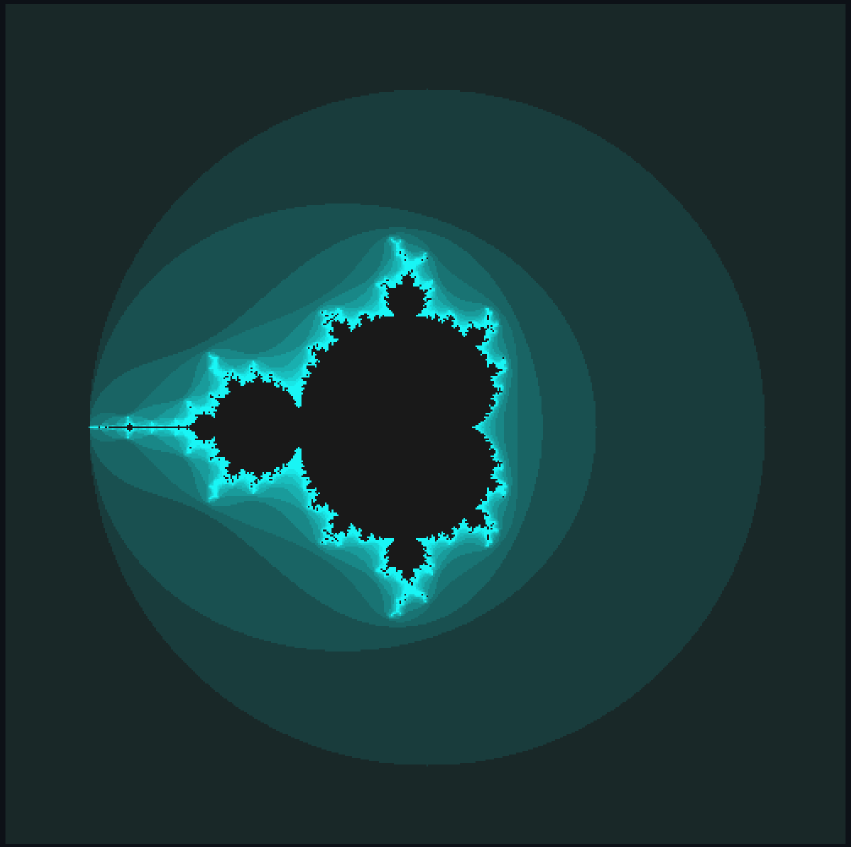
そのために

- ソフトウェアの開発
  - どうやって計算するのか
  - どうやって描画するのか
- 数学の知識
  - フラクタルができる数学の仕組み・ルール

きっかけはフラクタルアートとの出会い

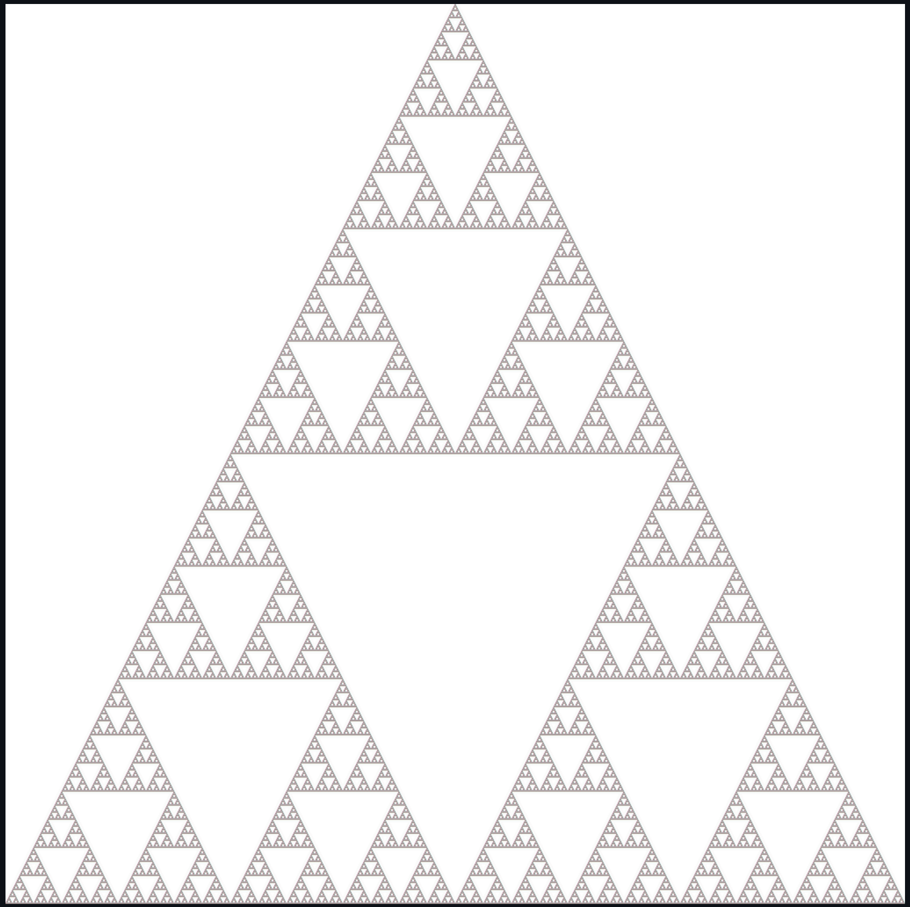


はじめてのフラクタル

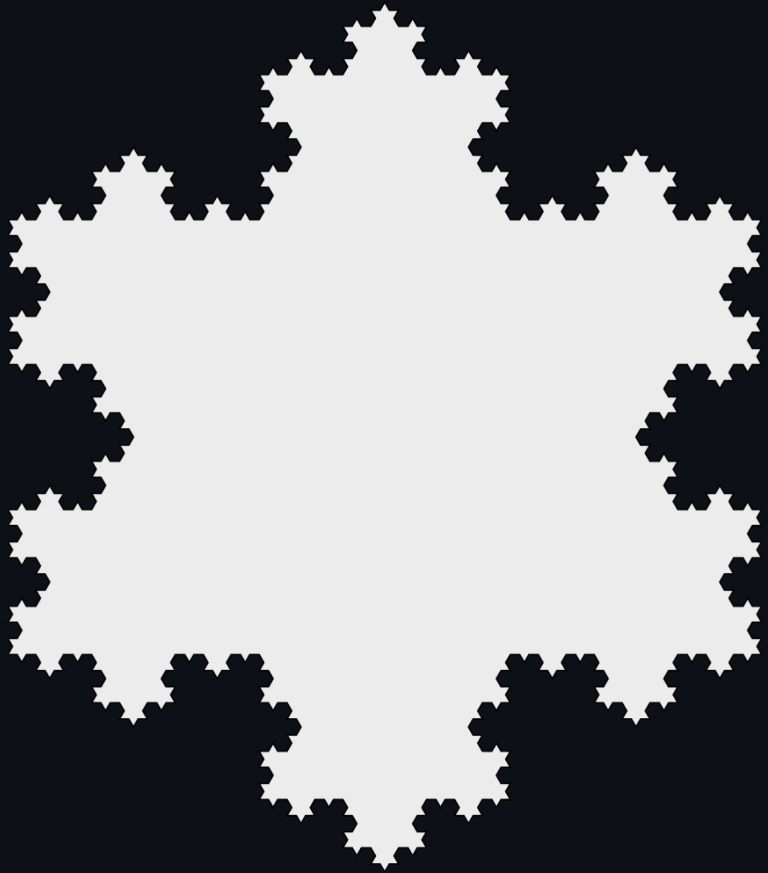


Processingで描画したマンデルブロ集合

その他の有名なフラクタル

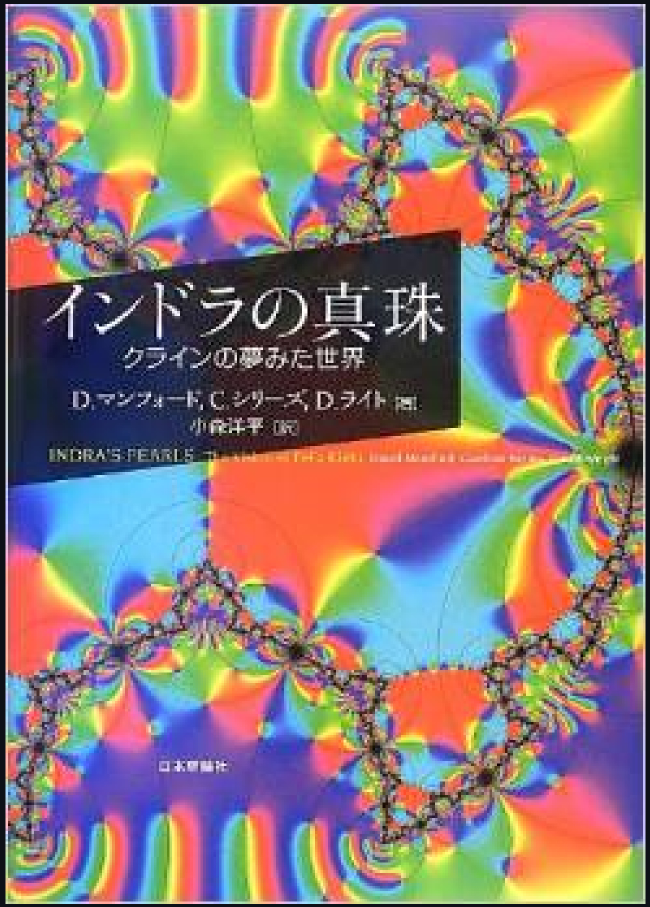


シェルピンスキーのギャスケット

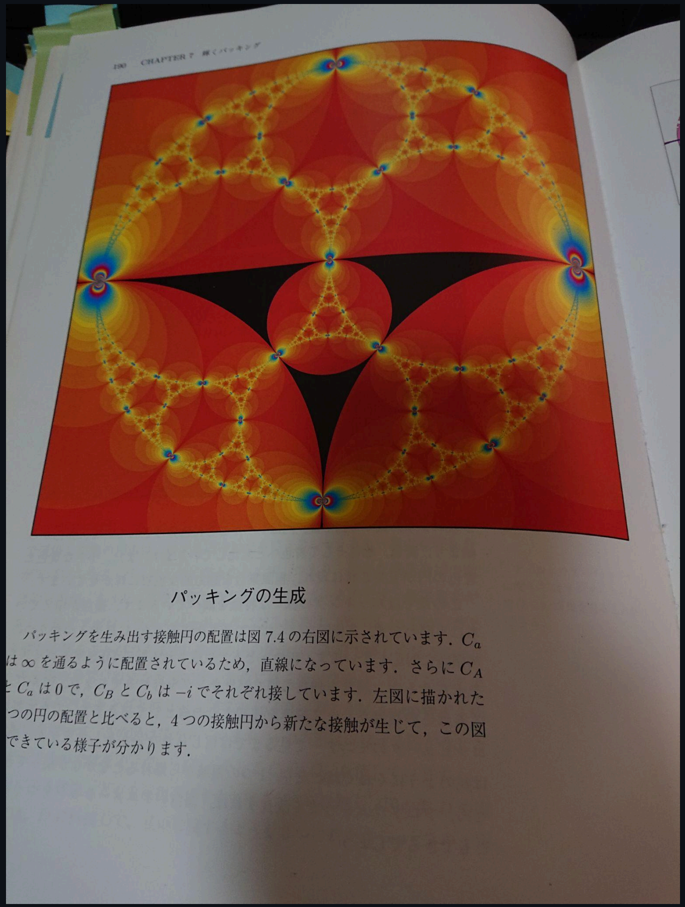


コッホ曲線

インドラの真珠との出会い

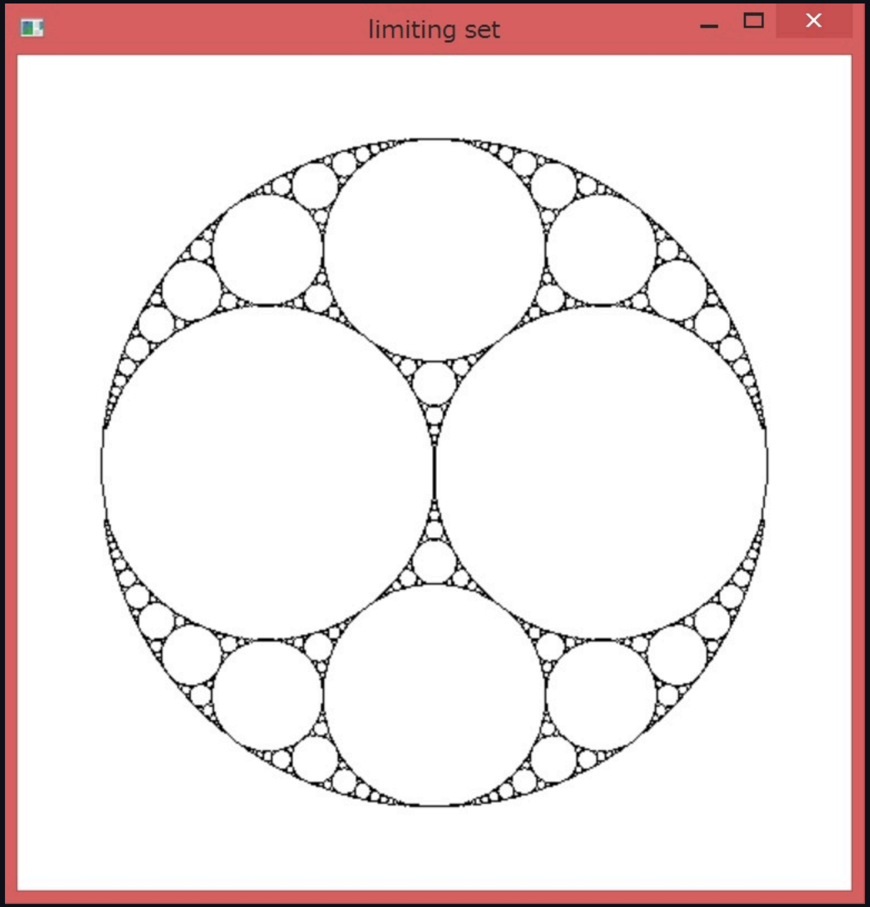


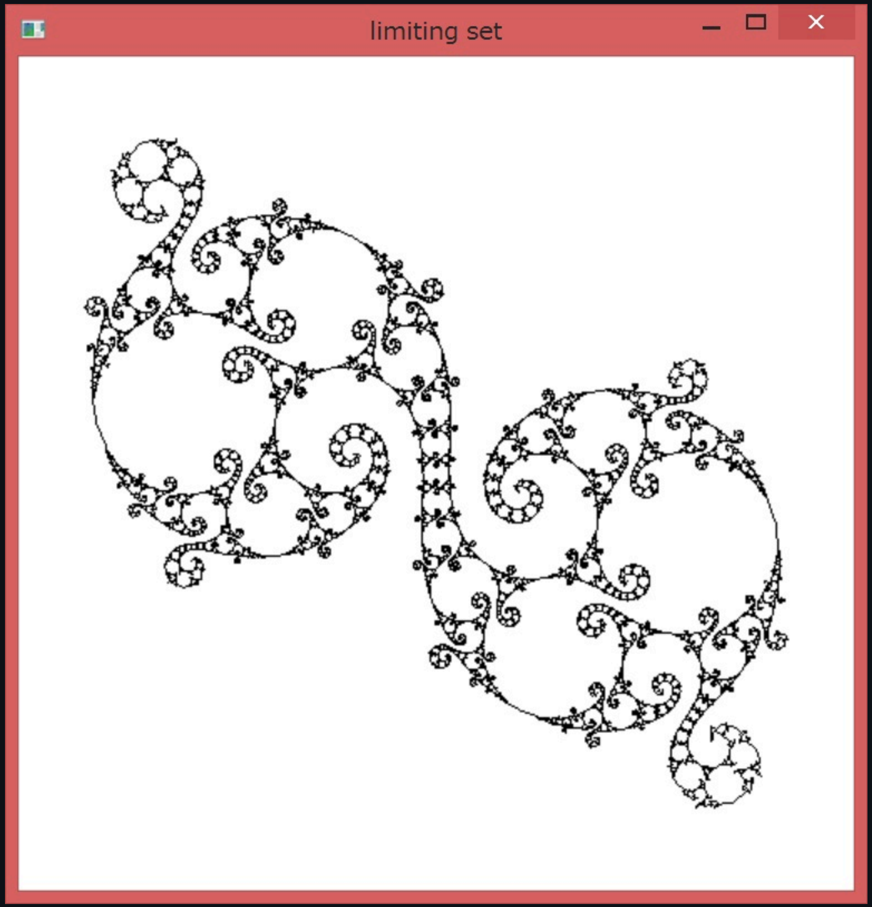
インドラの真珠: クラインの夢みる世界



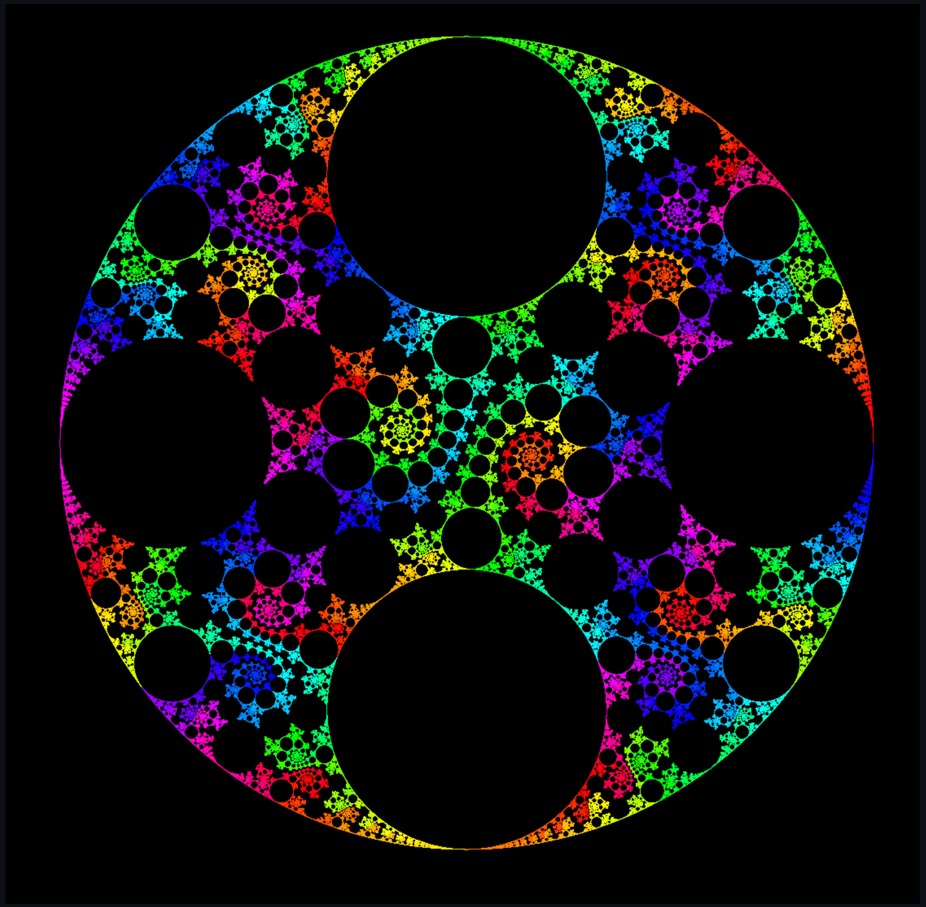
円板で構成されるフラクタル

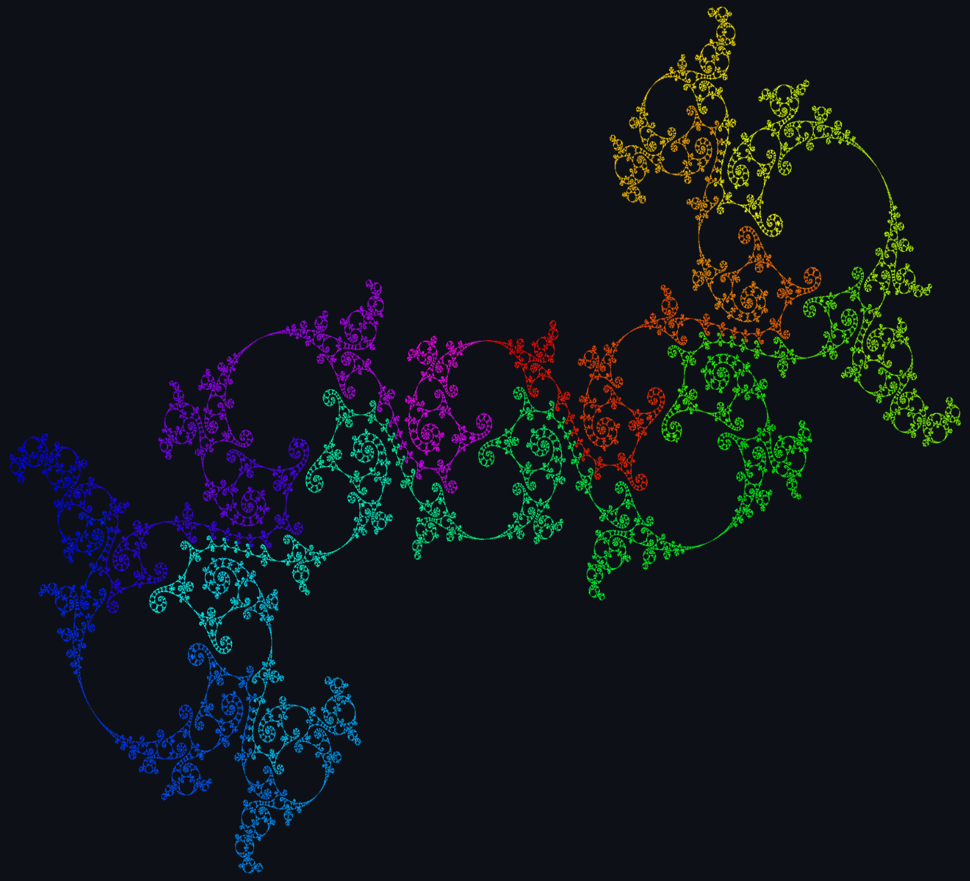
クライン群の極限集合をProcessingで描画





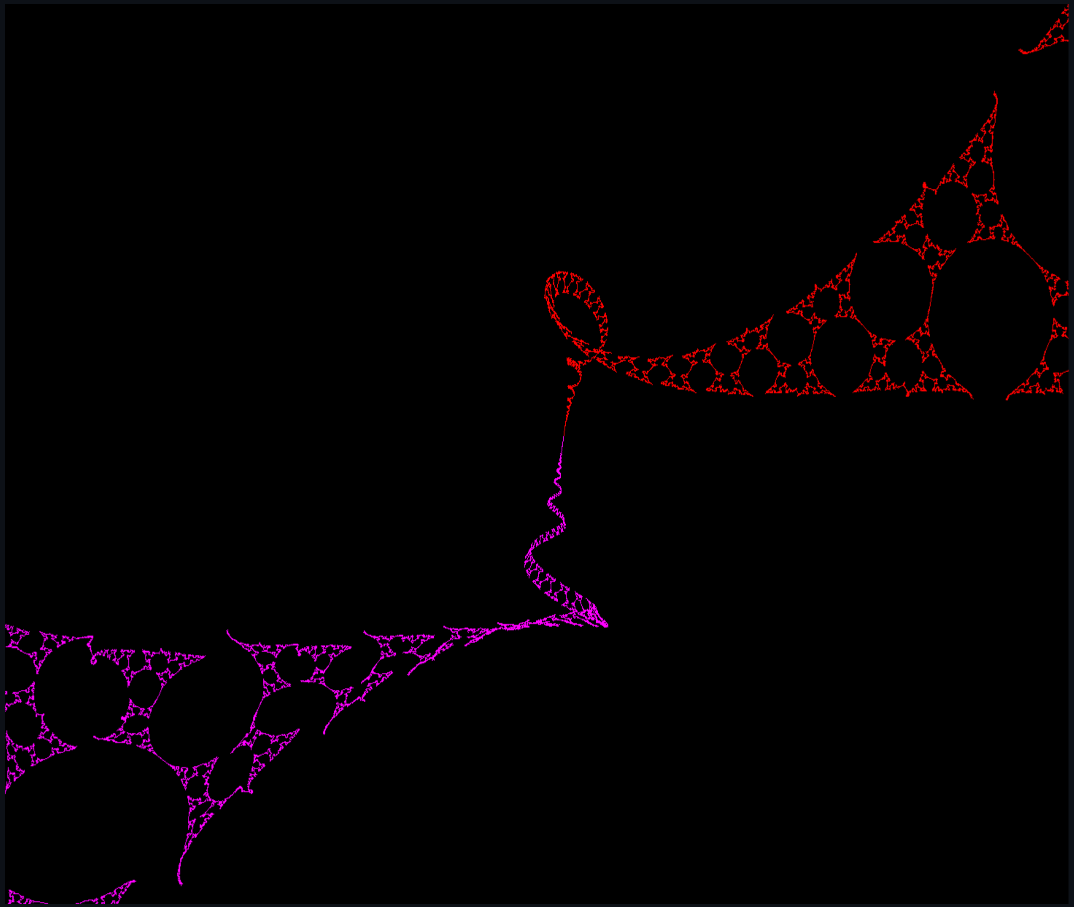
クライン群の極限集合

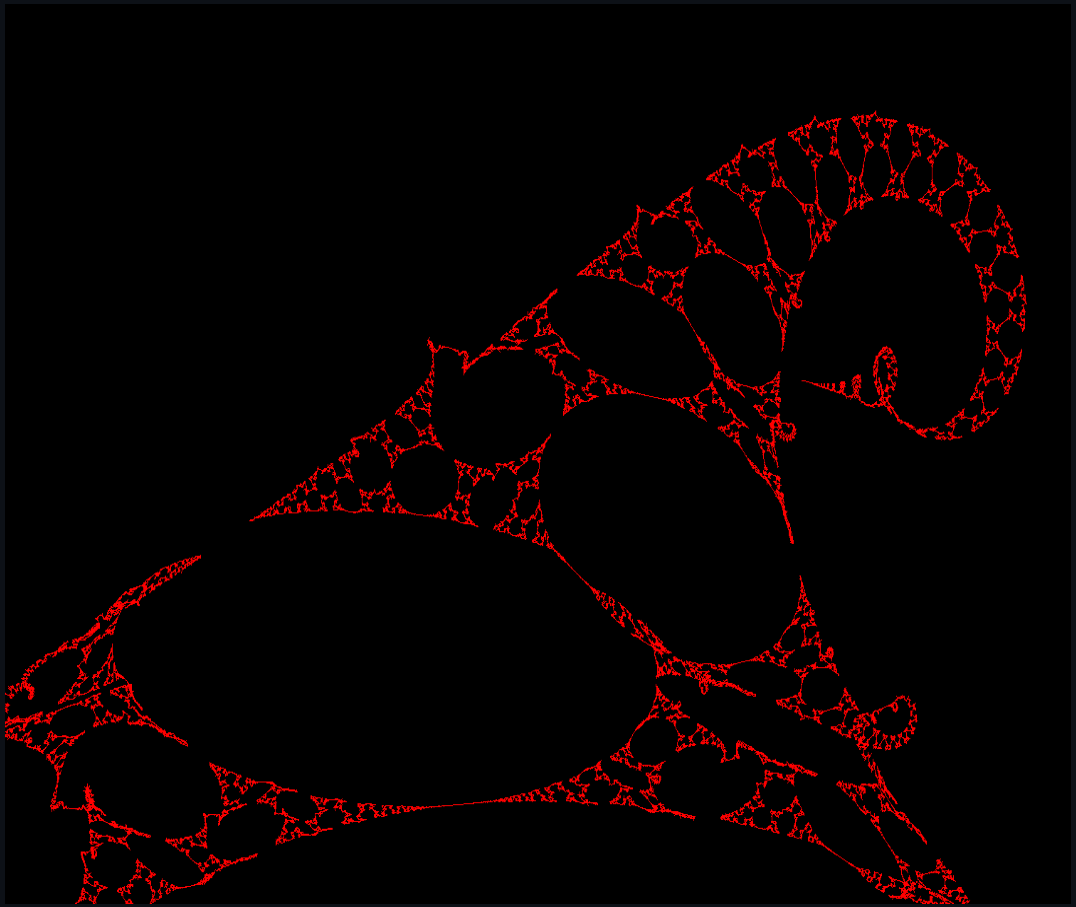




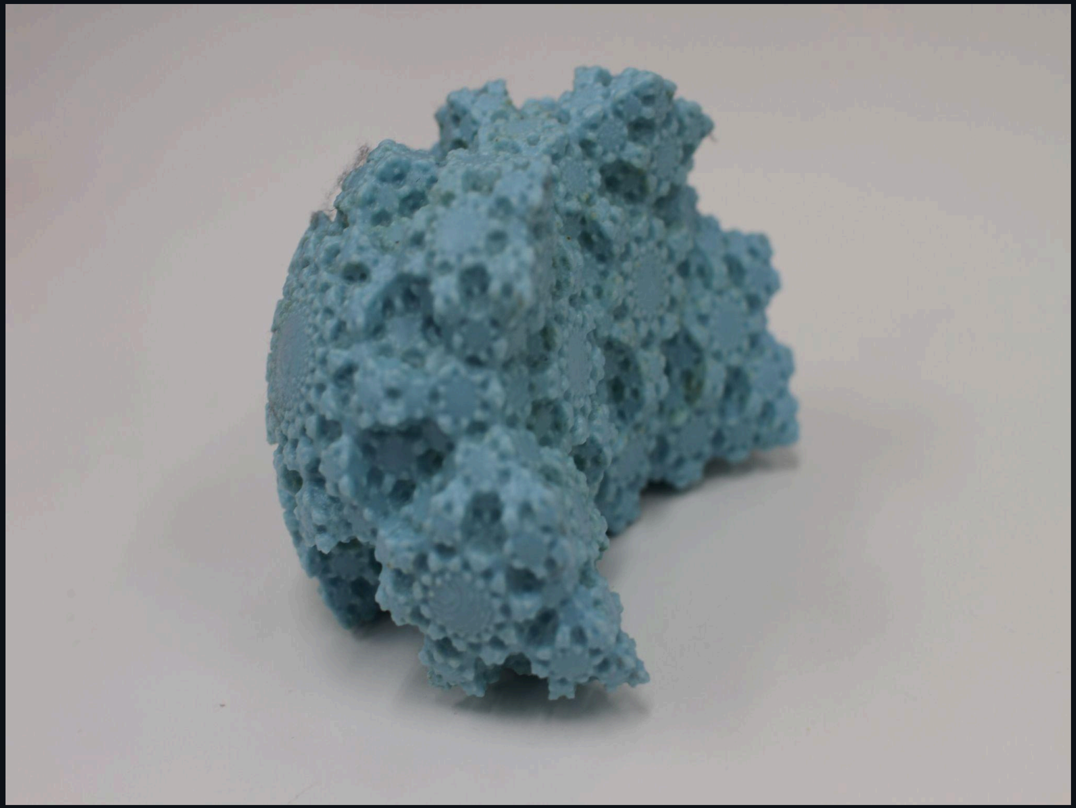
極限集合ポスター

三次元の極限集合



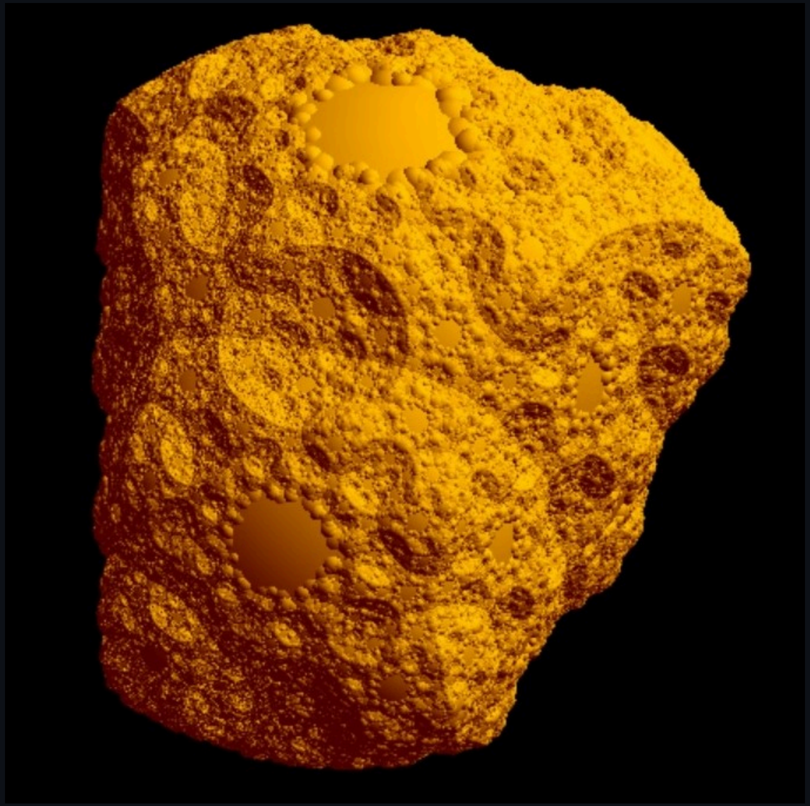


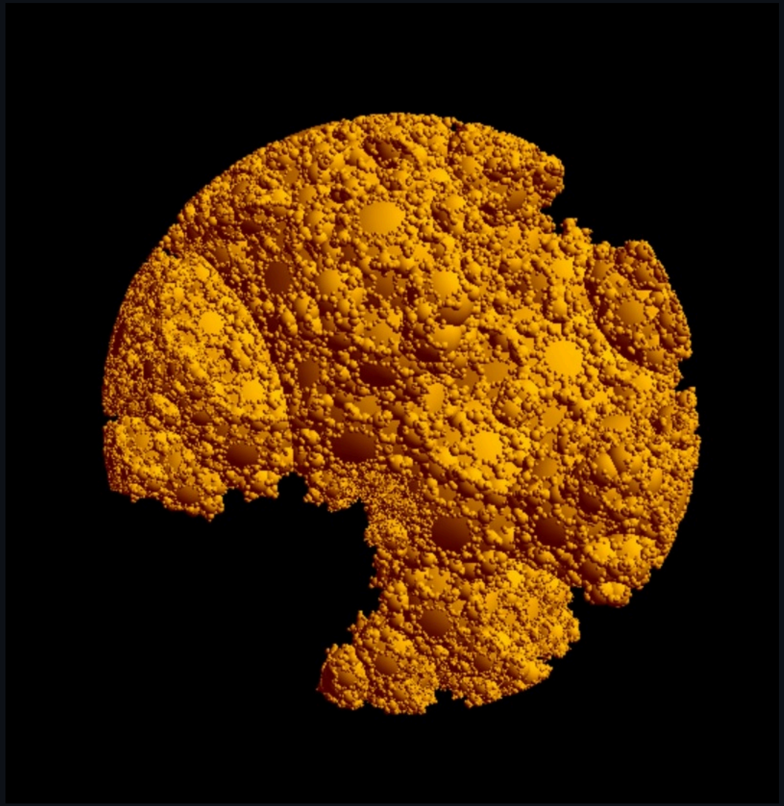
阿原研の"脳みそ"



Ahara-Araki Fractal

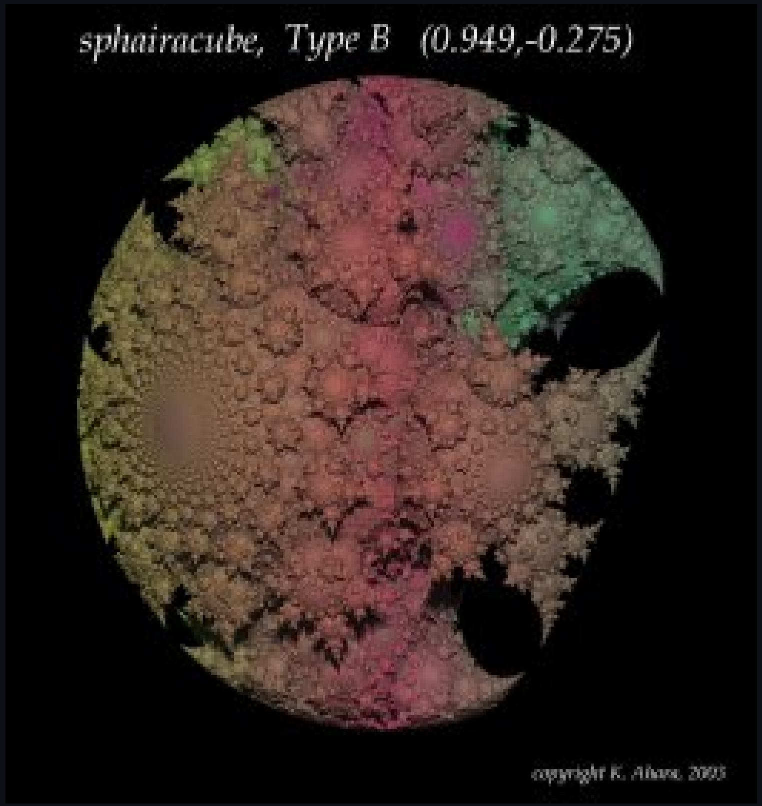
初めて描いた三次元フラクタル





コンピュータによる計算と描画の問題

- 右図のフラクタルは大量の球の集合体で形作ることができる
- 現在のハードウェアでも愚直に球を描いていくのは時間がかかる



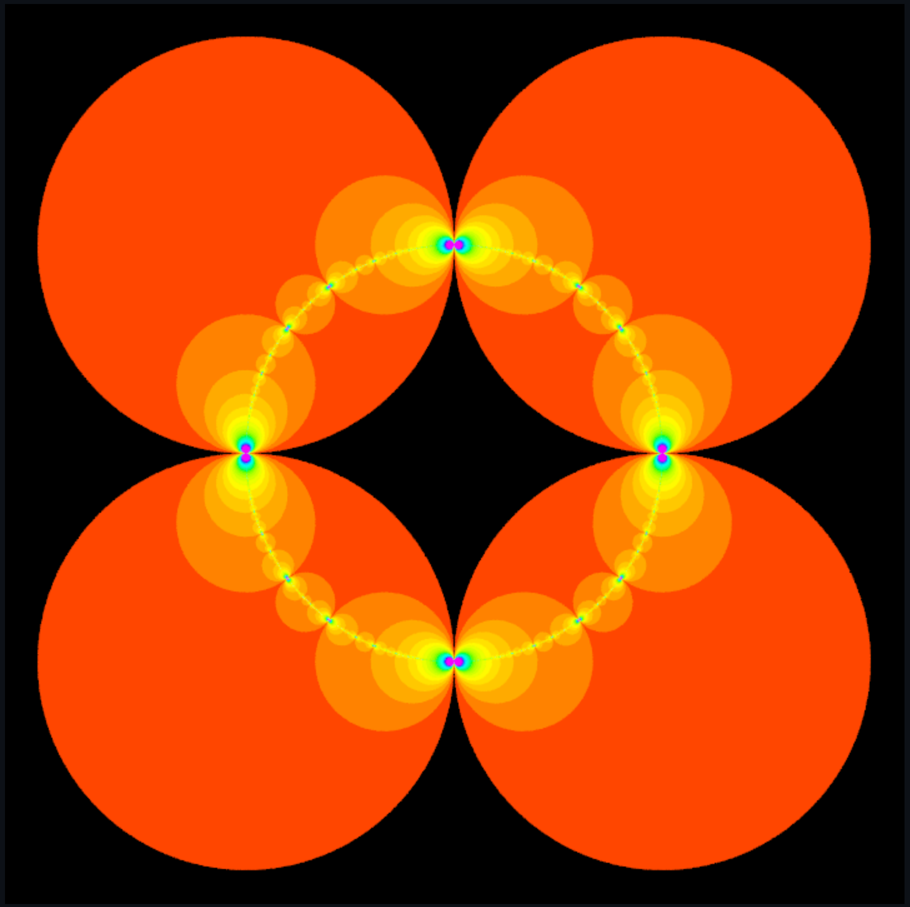
阿原先生によって描画された画像

当時１枚１０分はかかっていたらしい

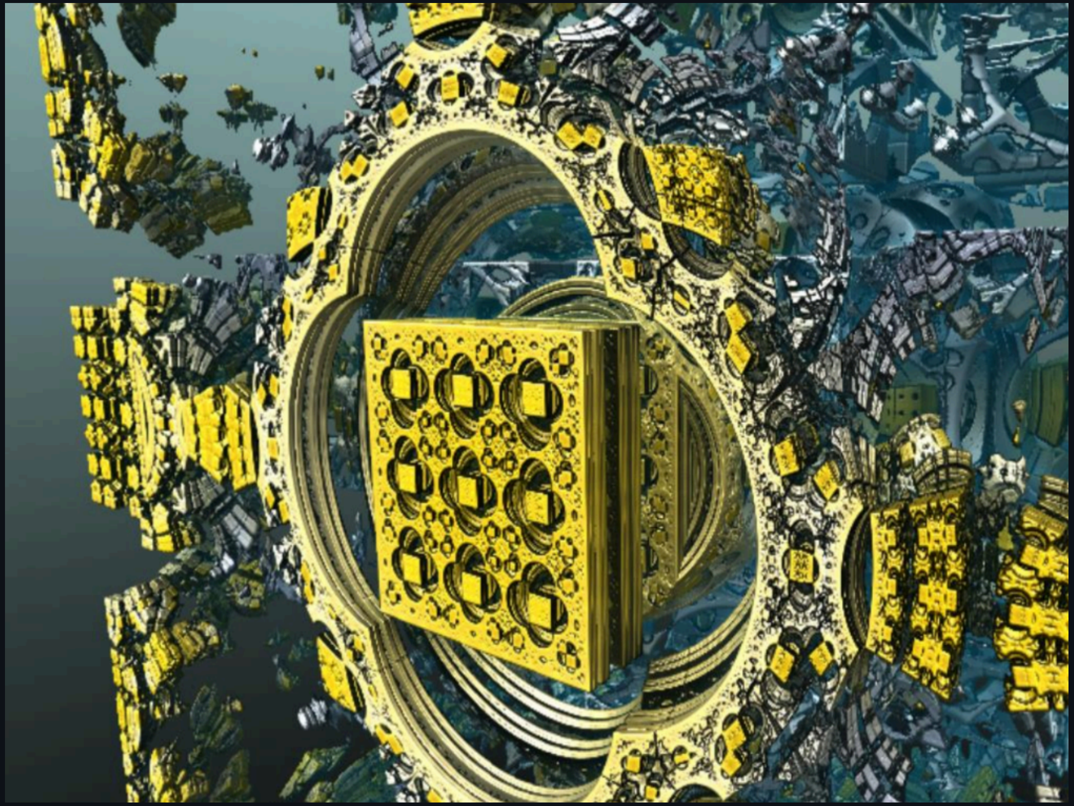
コンピュータによる計算と描画の問題

フラクタルは無限に続く構造をもつ
→ **どこまで計算し、どう描くか？**

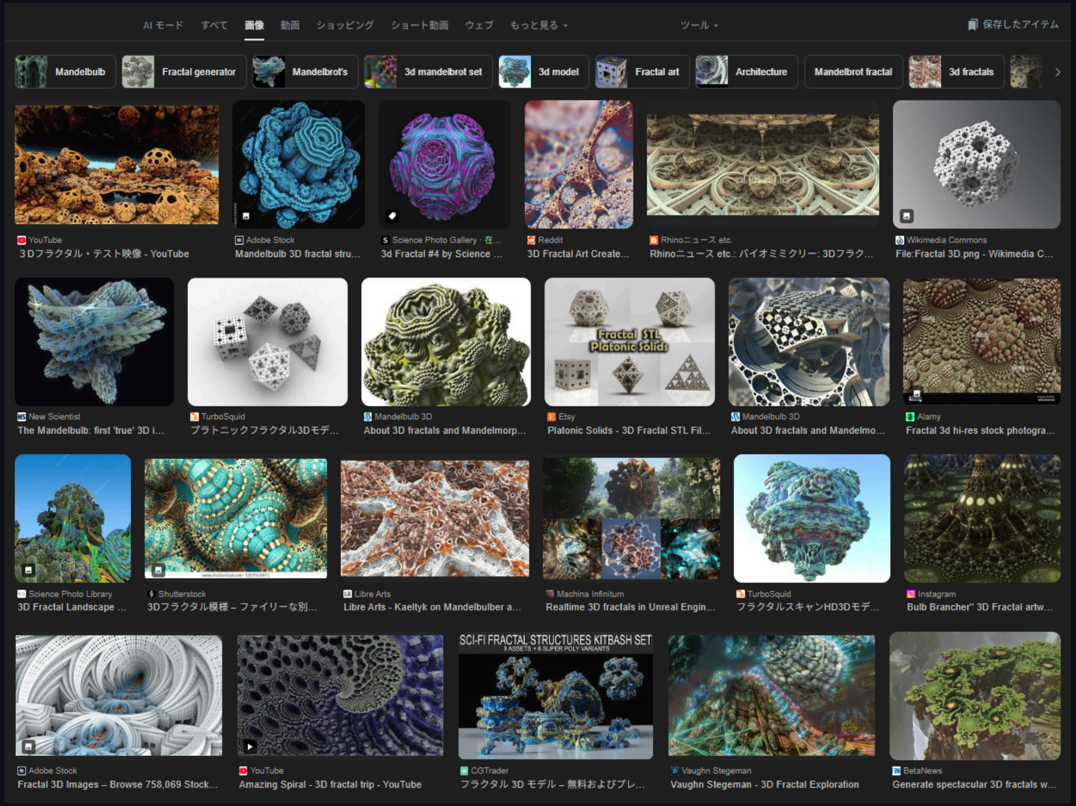
右図では深さnで$\sum_{k=1}^{d} 4 \cdot 3^{k-1}$個の円が存在（指数オーダーで増える）
→ 効率的な計算・描画アルゴリズムが必要



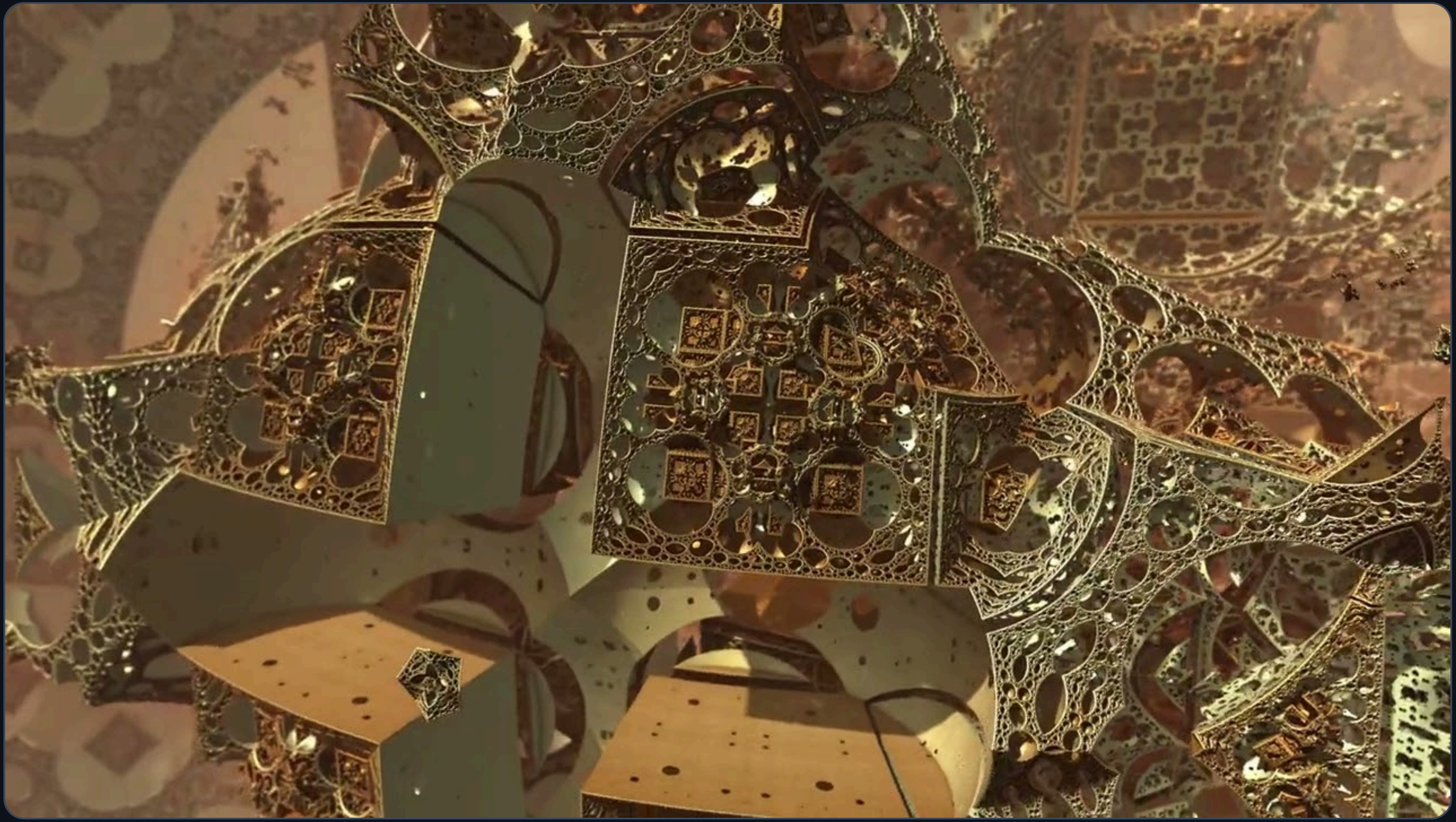
解決の糸口は３次元フラクタルアート



Mandelbox rendered by Fractal Lab



リアルタイム３Dフラクタル



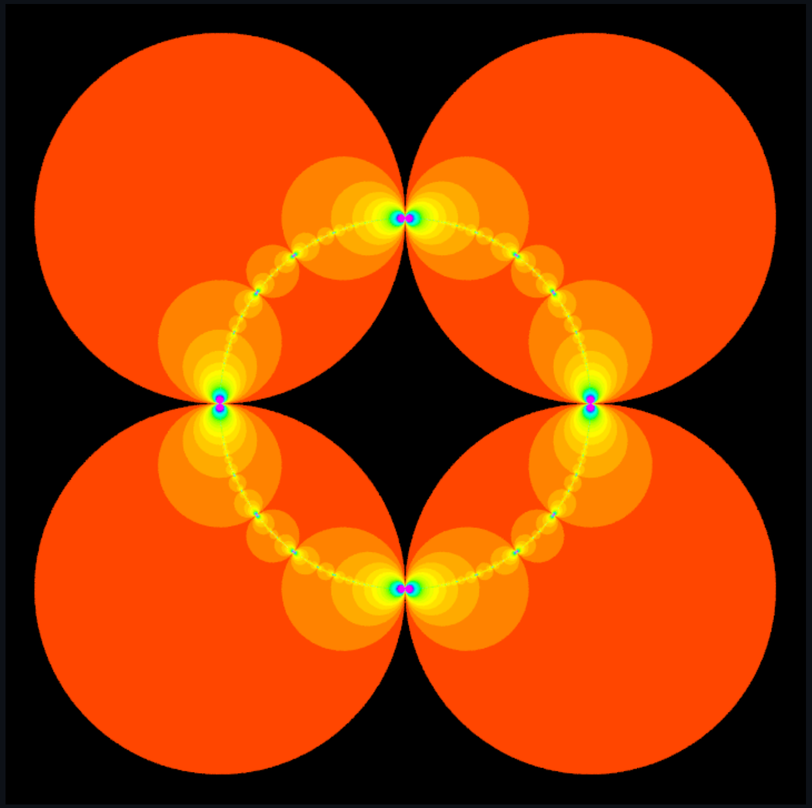
キーワードは並列計算

通常のアプローチ

- たくさんの円や球の座標を計算して直接描く

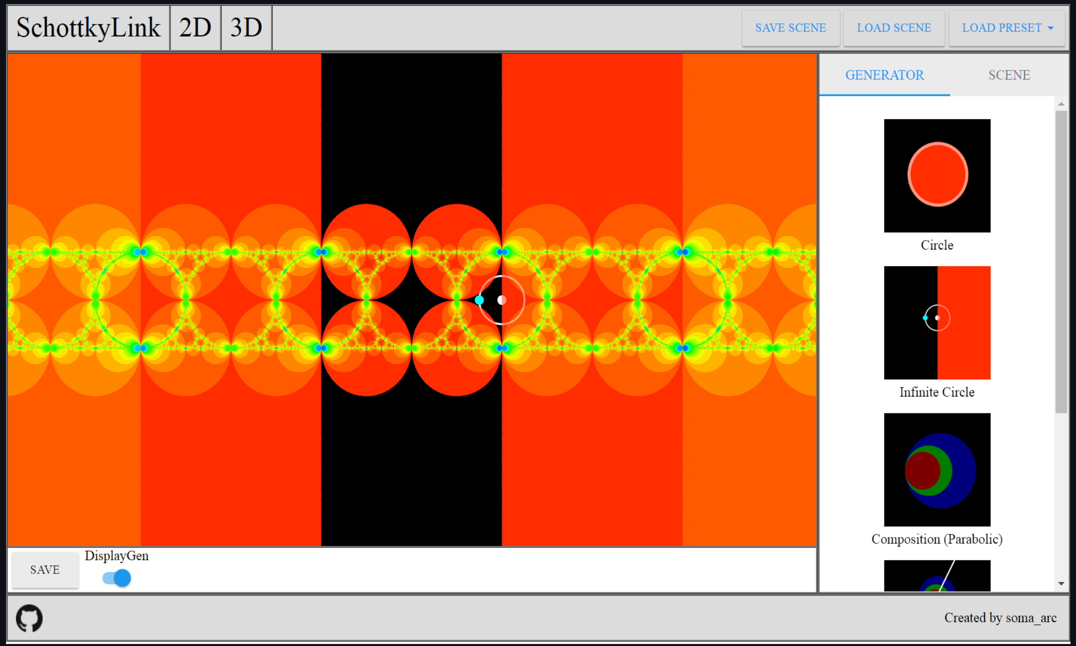
高速に描画するためのアプローチ

- 画面の点（ピクセル）の色を同時に計算し、点ごとに塗る
→GPUによる**並列計算**と相性が良い
- ただし、制約も多く、対象となる幾何学やアルゴリズムに対する理解が不可欠

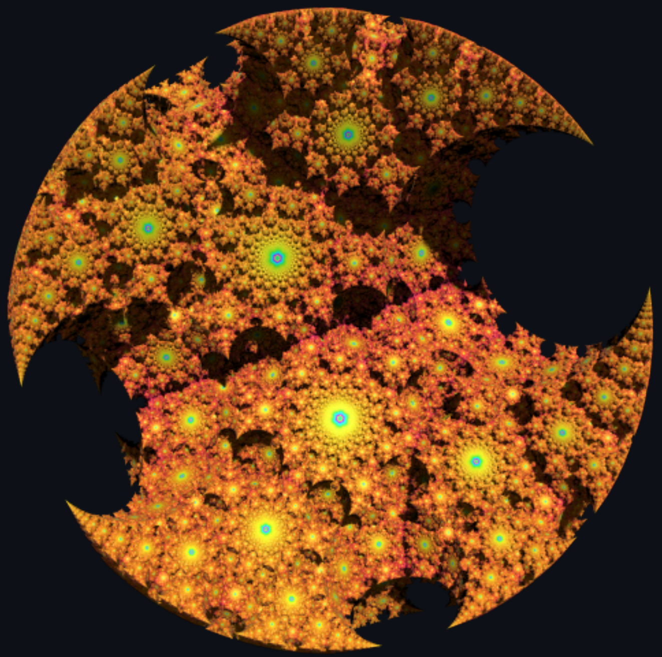


円そのものではなく、ある点がどの円板に属しているかを計算する

リアルタイムフラクタル描画アプリケーションへ



Schottky Link



Sphairahedron Based Fractal

幾何学を可視化する方法

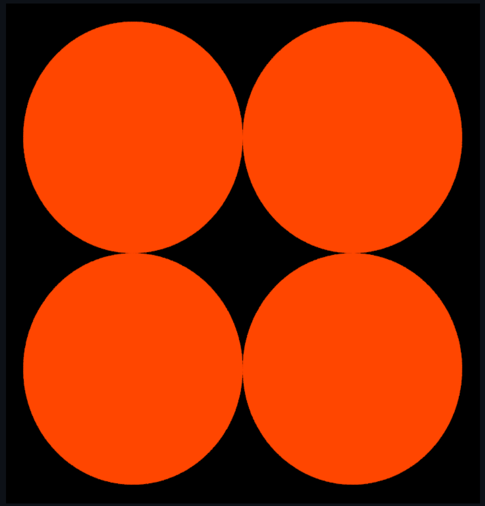
可視化に関する２つの課題

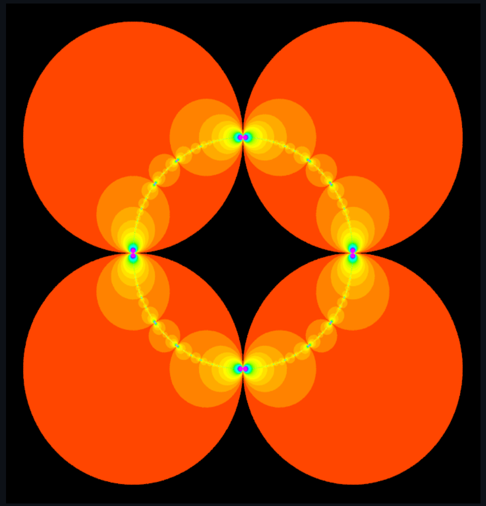
- **コンピュータでどうやって描くのか？**
  - 計算量と描画の最適化
- **数学的に理解すべきこと**
  - **見方**：どの「視点」で捉えるか
    - 例：地図投影（球→平面）、座標系の選択
  - **ルール**：どんな「条件」で成立するか
    - 例：鏡の角度、対称性、タイル張りの条件

    → これから紹介していきます

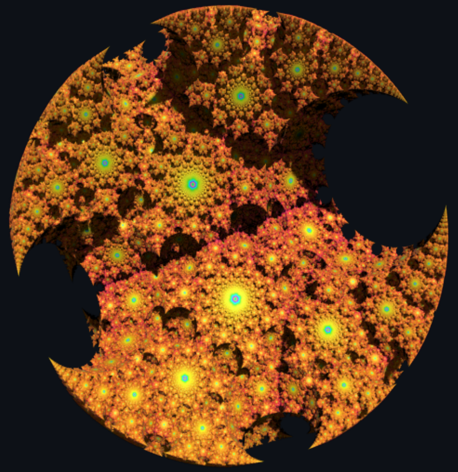
これまで紹介した複雑なフラクタル図形の秘密

基本的なパターン＋**鏡映の繰り返し**でできている
→鏡の組み合わせで、無限に複雑な世界が生まれる


基本のパターン


フラクタル


基本のパターン


フラクタル

本日の内容

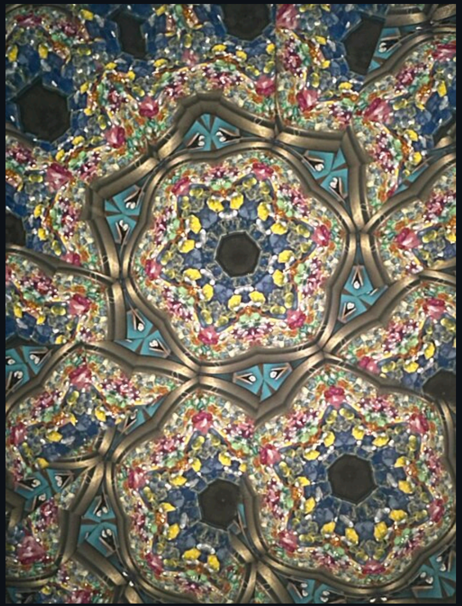
キーワード：”鏡”と”万華鏡”

- 鏡によって形作られるパターンの性質を知る
- 鏡の組み合わせ方のルールを知る
- 通常の鏡を数学的に拡張し、より複雑な世界を知る
- それらの性質を意識して実際に模様を作ってみる（課題）

万華鏡

鏡張りの筒の底にオブジェクト（ビーズなど）を封入し、反対側からのぞき込む玩具

Kaleidoscope by S Parkhrin



Smaller kaleidoscope by Magpieturtle

鏡映

右の猫の画像を鏡や万華鏡で写していく
鏡映の前後で以下の点に注目しよう

- 猫の向き
- 猫の大きさ
- しっぽや耳の角度

鏡映

鏡を挟んで等距離の位置に映す

- 鏡映の前後で像が反転する
- 大きさや角度は保たれる

点 $(\mathbf{p})$ を鏡面を通る点、鏡面の単位法線ベクトル $(\mathbf{n})$ とすると、鏡映写像 $\mathrm{R}_{\mathbf{p},\mathbf{n}}(\mathbf{a})$は以下のように表せる

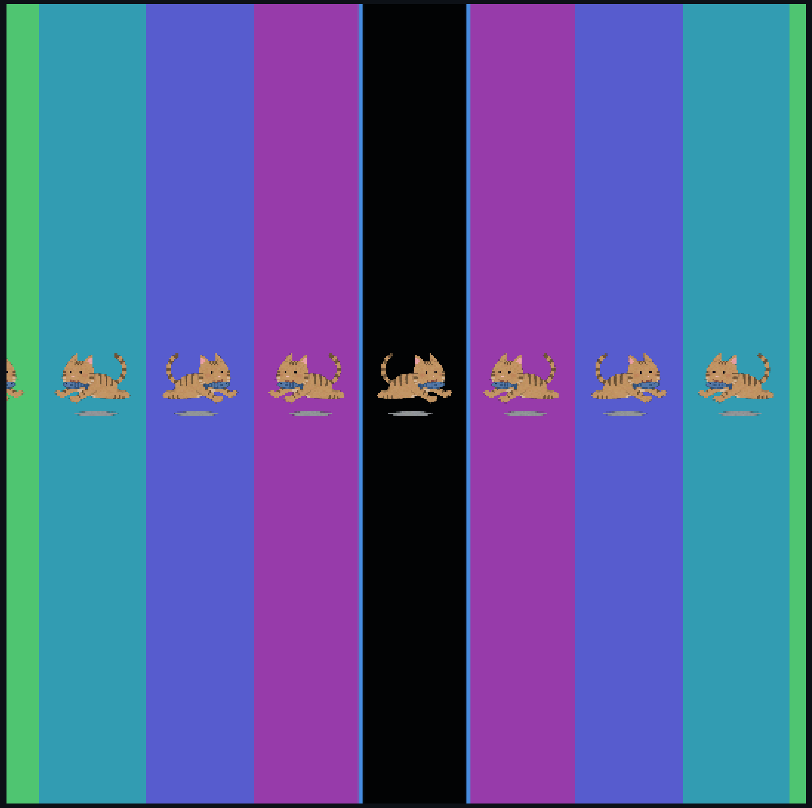
$$\mathrm{R}_{\mathbf{p},\mathbf{n}}(\mathbf{a}) = \mathbf{a} - 2\left((\mathbf{a} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n}\right)\mathbf{n}$$

合わせ鏡

二枚の鏡を平行に向かい合わせて置く
→反転像と正しい向きの像が交互に現れる

向かい合う鏡の鏡映変換Rを合成すると鏡の間の距離dの二倍の平行移動になる

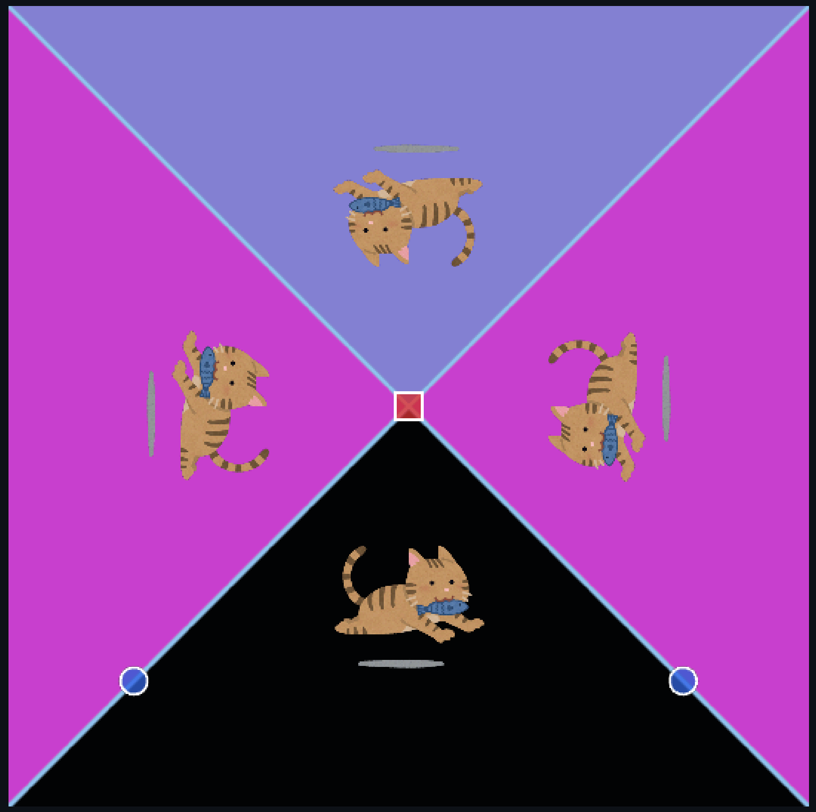
$$R_{L_i}(\mathbf{a}) = \mathbf{a} - 2\left((\mathbf{a} - \mathbf{p}_i) \cdot \mathbf{n}\right)\mathbf{n}$$
$$T(\mathbf{a}) = R_{L_2}\left(R_{L_1}(\mathbf{a})\right) = \mathbf{a} + 2d\,\mathbf{n}$$



交わる鏡

二枚の鏡を交差させて配置
→鏡の外の空間が折りたたまれ、いくつかの空間になるように見える
ただし、**鏡が交差する角度によっては綺麗に分割されない**

交わる二枚の鏡の鏡映変換を合成すると鏡のなす角度の二倍の回転になる

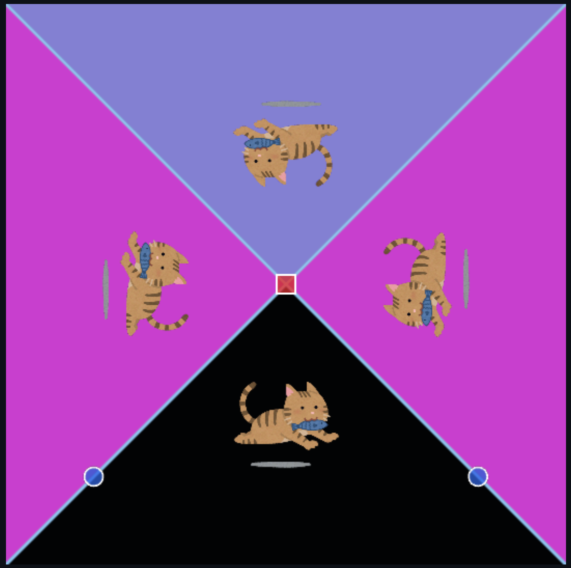


コンピュータによる実装の制限

プログラムは"順番に"計算する

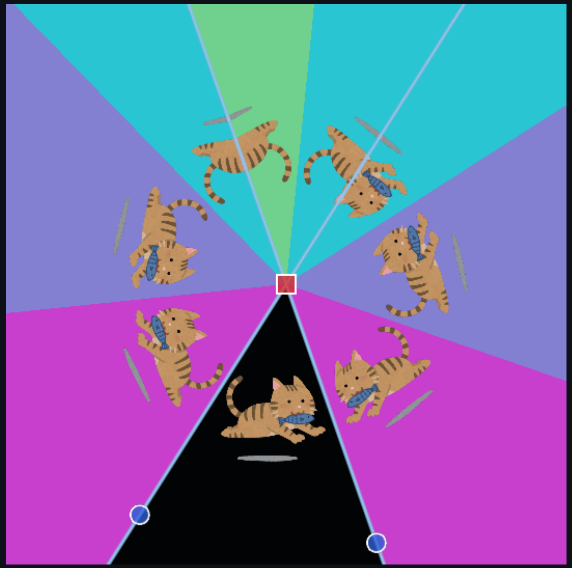
→ 数学的に成立しない角度では実装の方法で見え方が変わる

成立する角度



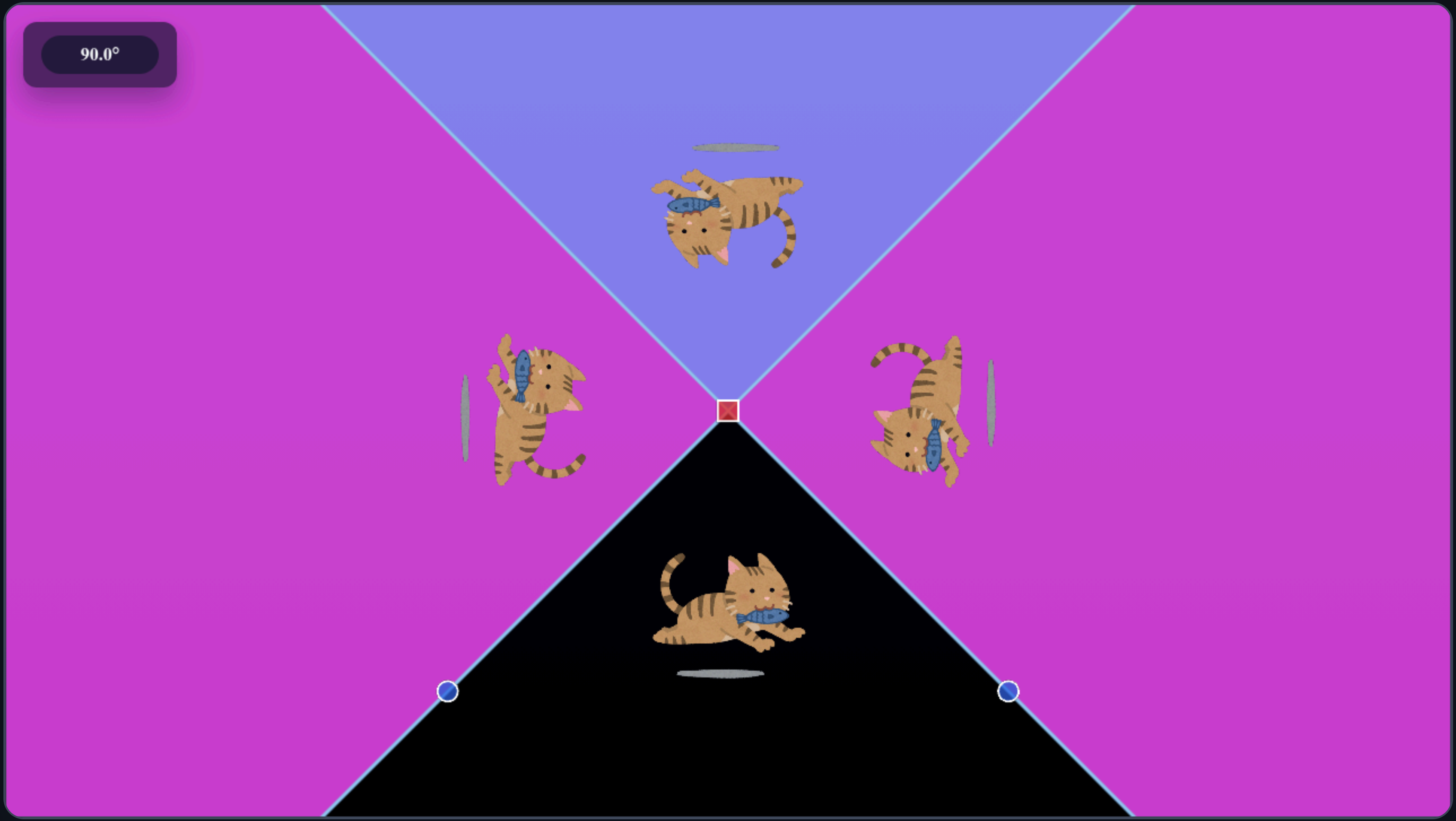
ぴったり敷き詰め

中途半端な角度



鏡映の処理順で見え方が変わる

実験：二枚の鏡による像

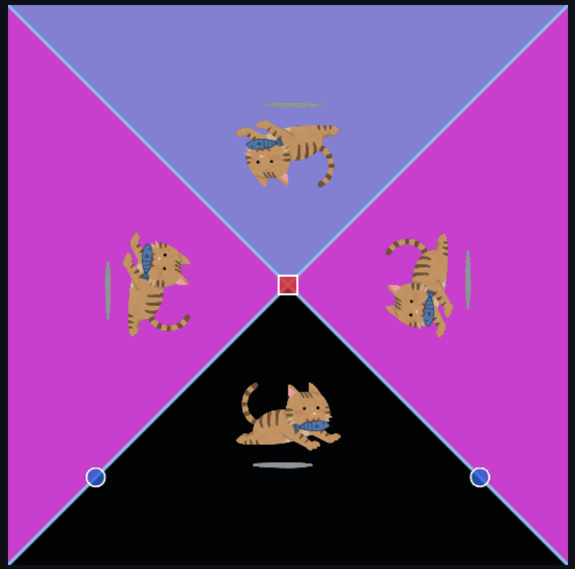


実験の見方：綺麗に領域が分割される角度を確認する。像は正/反転が交互に現れる。

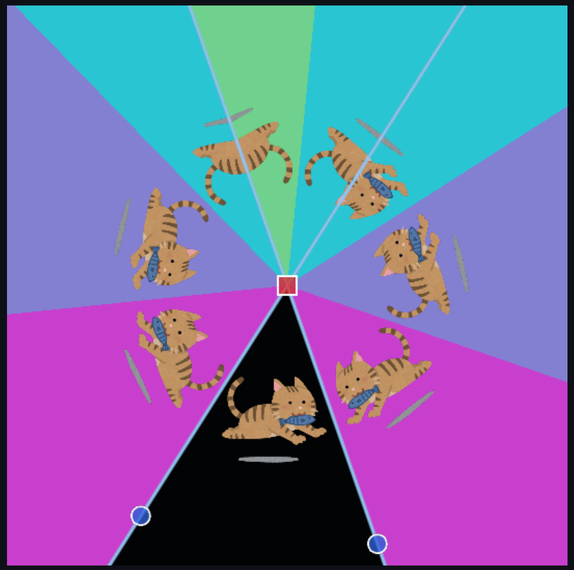
交わる鏡による平面の分割

鏡のなす角を$\frac{\pi}{n}$とするとき、$2n$個の空間に等分される（nは自然数）

$\frac{\pi}{n}$以外の角度の場合、等分されず、重なりが生まれる



なす角$\frac{\pi}{2}$のとき、４個の空間



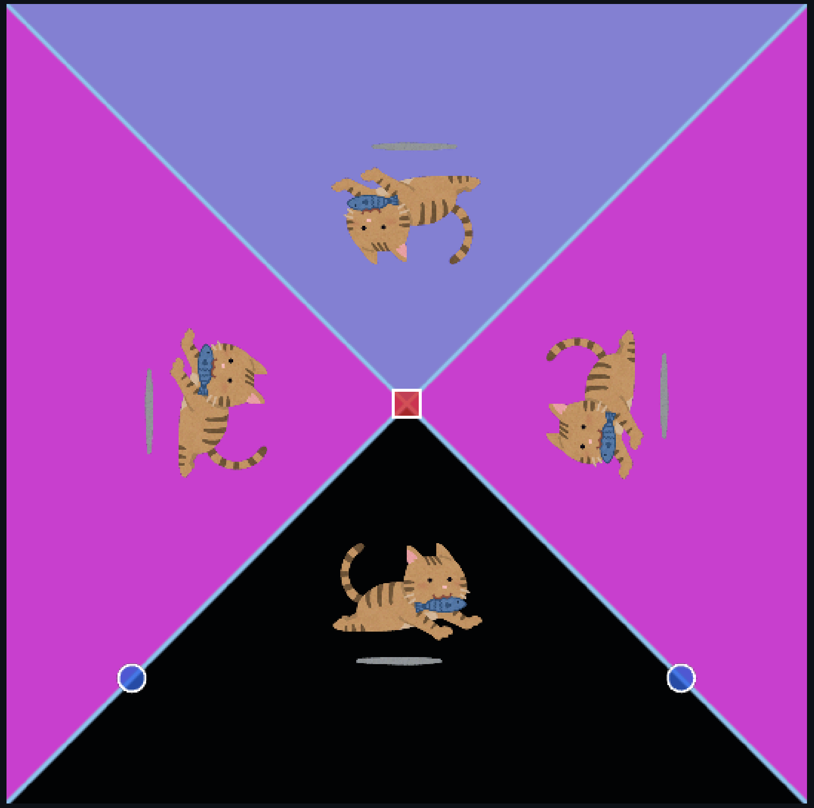
$\frac{\pi}{n}$でないとき、空間は等分されず、図に重なりが生まれる

鏡映とタイル張り

万華鏡の鏡映像 = 平面のタイル張り

鏡で囲まれた領域（基本領域）が鏡映で繰り返され、平面全体を埋め尽くす

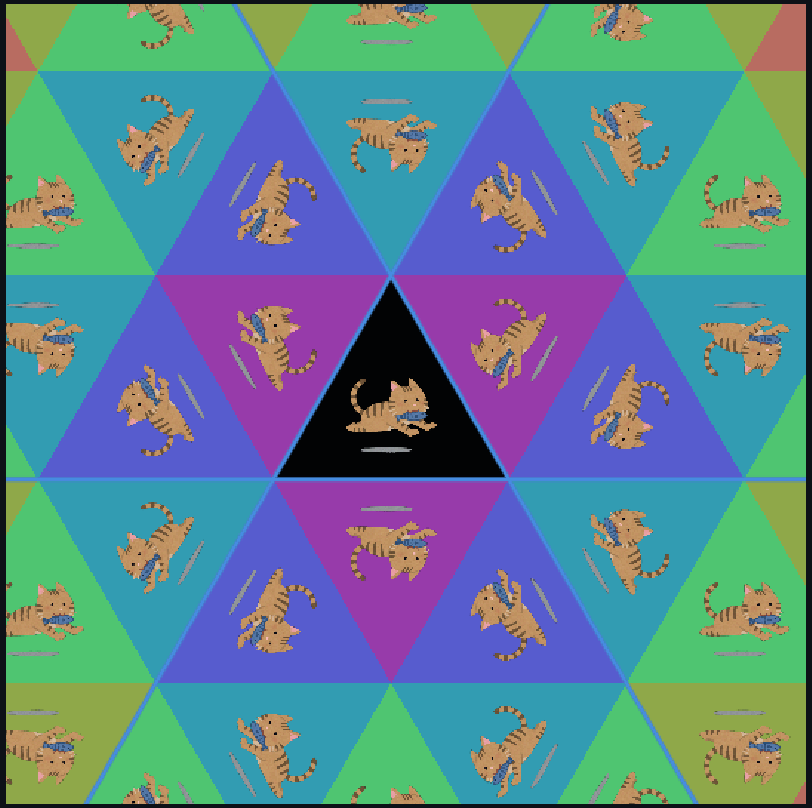
- 隙間も重なりもなく平面を覆うことを**タイル張り(テセレーション)** という
- **綺麗な万華鏡の条件 = タイル張りができる条件**



三枚の鏡で万華鏡を作る

二枚の鏡の角度は$\frac{\pi}{n}$にならないとタイル張りできなかった

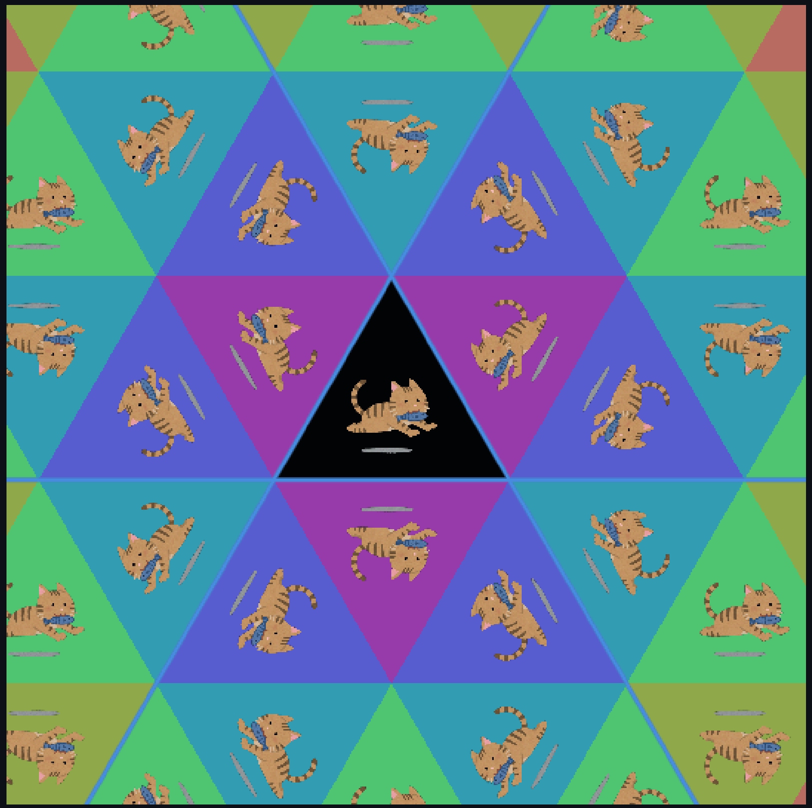
では三角形の場合は？



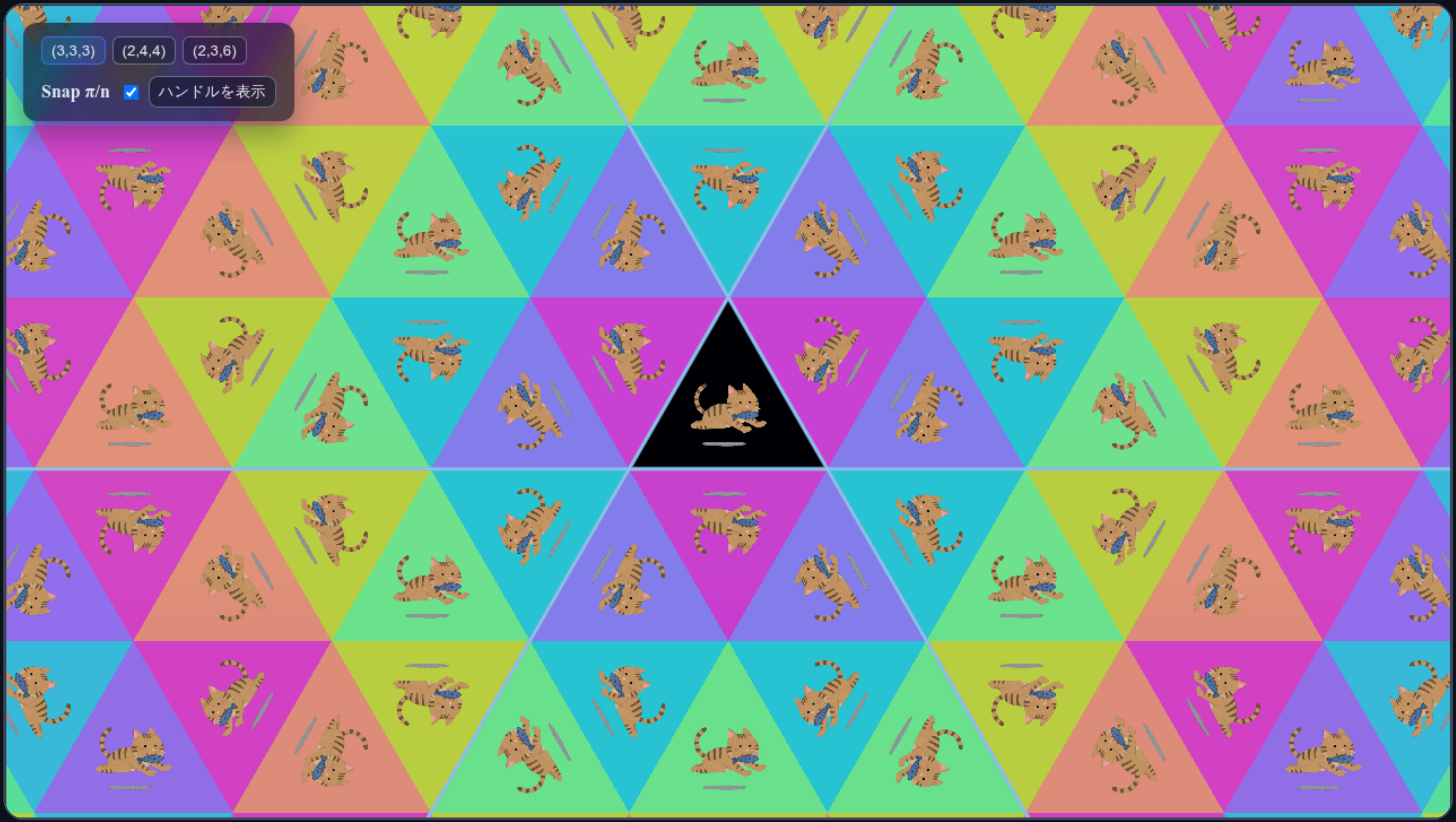
三角形の場合の条件

三角形の角度をそれぞれ$\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}$とする。このとき、三角形の内角の和の条件を満たす$(p, q, r)$の組み合わせは３つしかない

- $(3, 3, 3)$ - 正三角形
- $(2, 4, 4)$ - 直角二等辺三角形
- $(2, 3, 6)$ - 90 - 60 - 30の直角三角形



実験：綺麗な鏡映像を得られる条件



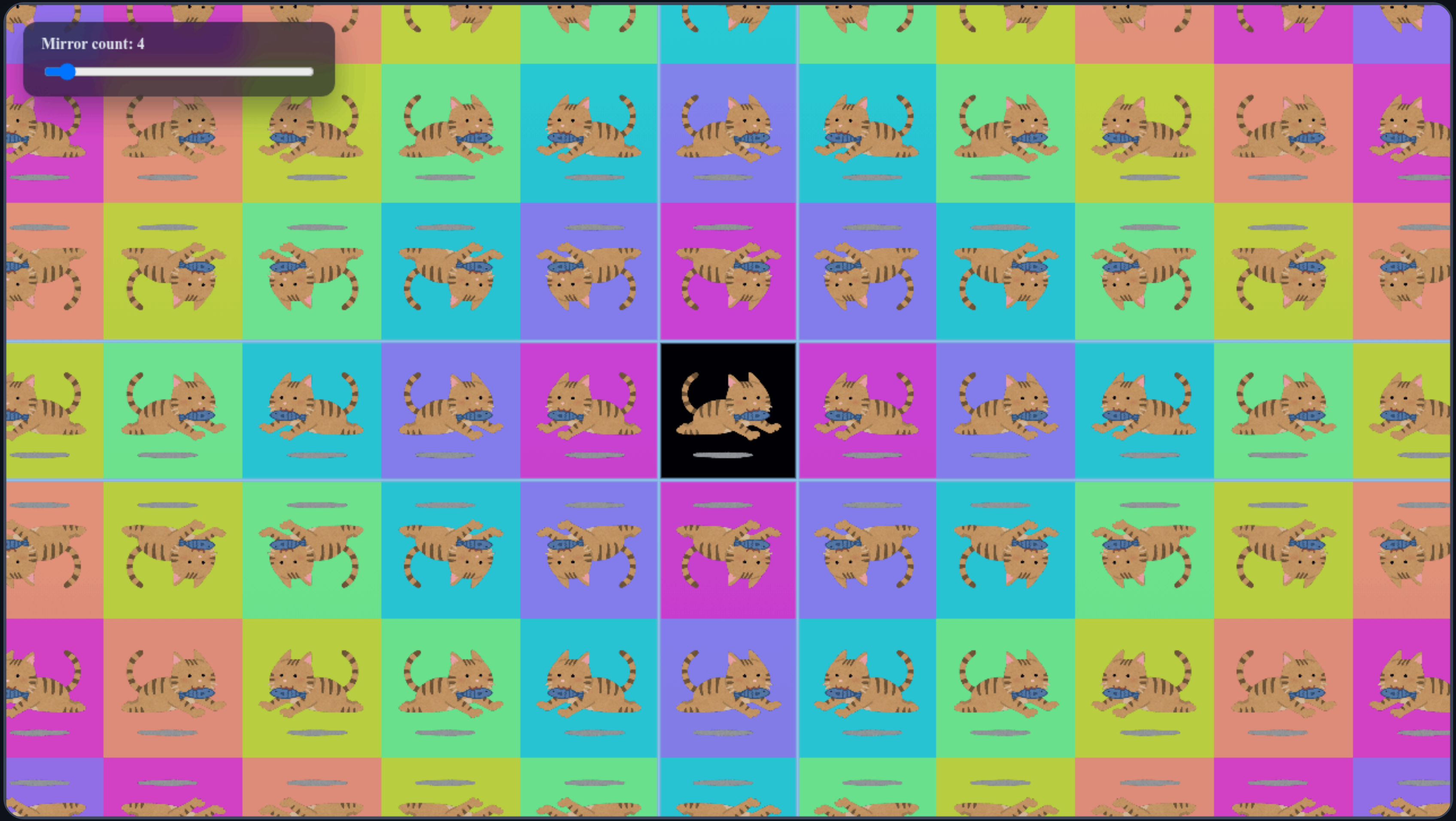
実験の見方：(3, 3, 3)(2, 4, 4,)(2, 3, 6)の場合敷き詰められる（他は敷き詰められない）。

さらに鏡の枚数を増やす

鏡の枚数を四枚以上にしたときはどうなる？

- ４枚
- ５枚
- ６枚
- ７枚
- ８枚
- ……

実験：さらに鏡の枚数を増やす



実験の見方：鏡の枚数を増やし、正n角形で像がピッタリ敷き詰められるか確認する

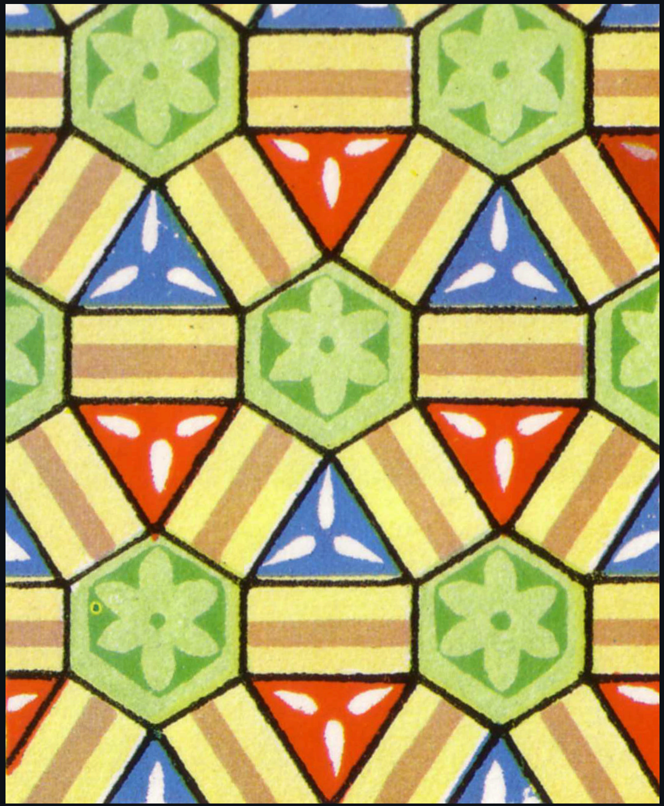
まとめ

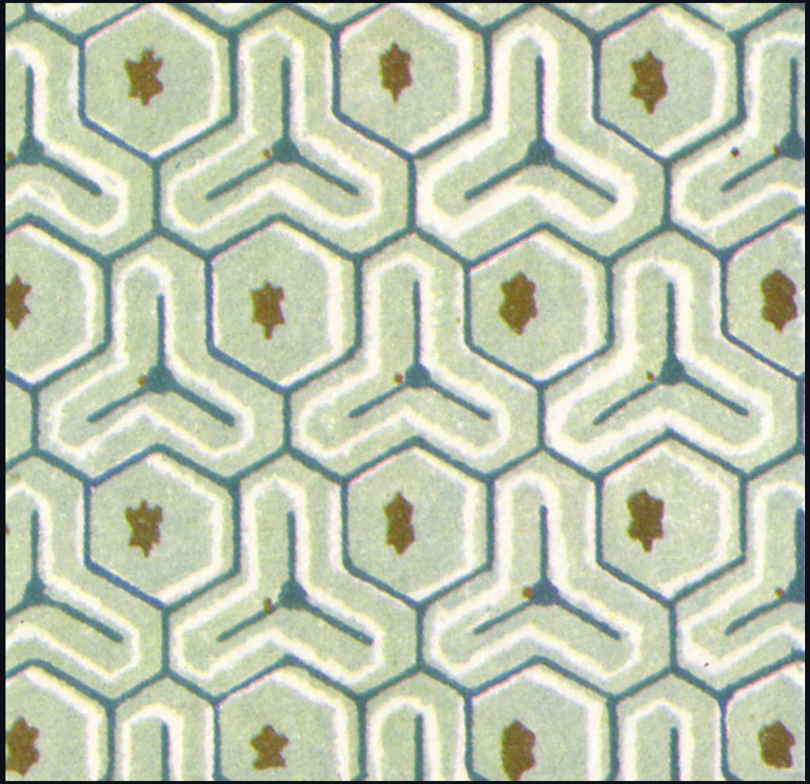
ピッタリとずれのない鏡映像を得るためには以下の条件を満たす必要がある

鏡同士のなす角を $\frac{\pi}{n}$ とすると

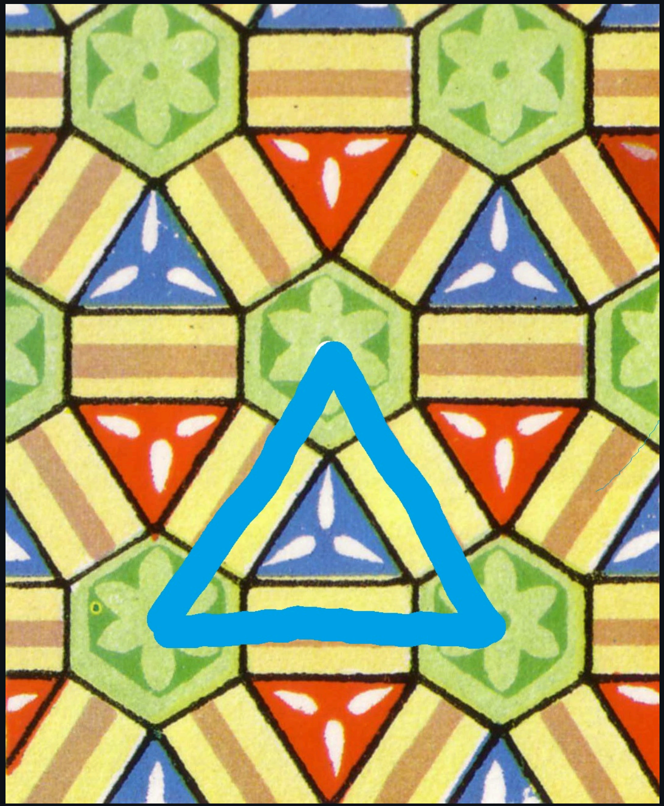
- 鏡が３枚のとき
  - (3, 3, 3)、(2, 4, 4)、(2, 3, 6)
- 鏡が４枚のとき
  - (2, 2, 2, 2)
- 鏡が５枚以上のとき
  - 存在しない

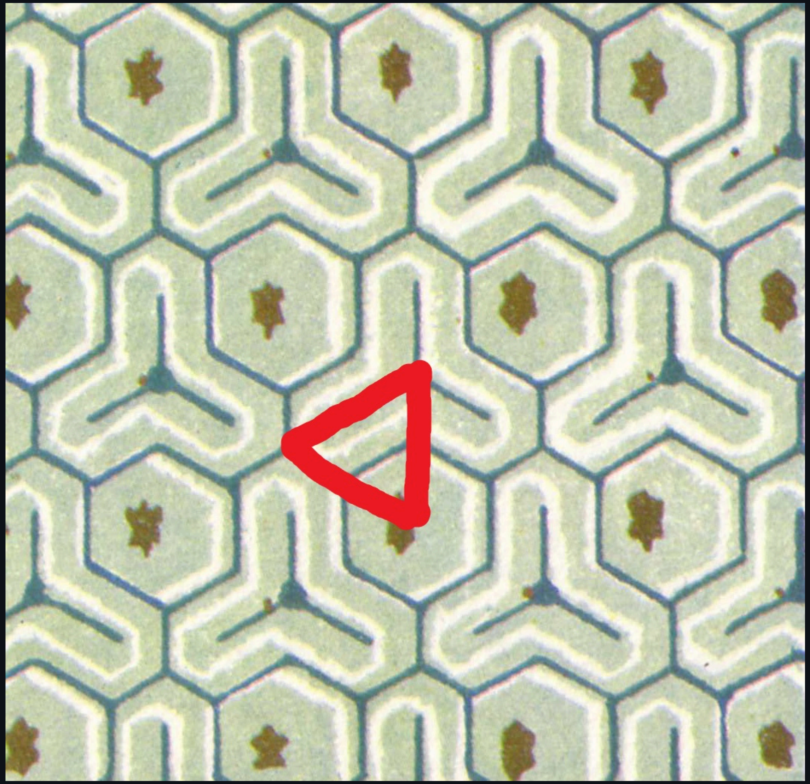
鏡映を用いた繰り返し模様　（３，３，３）



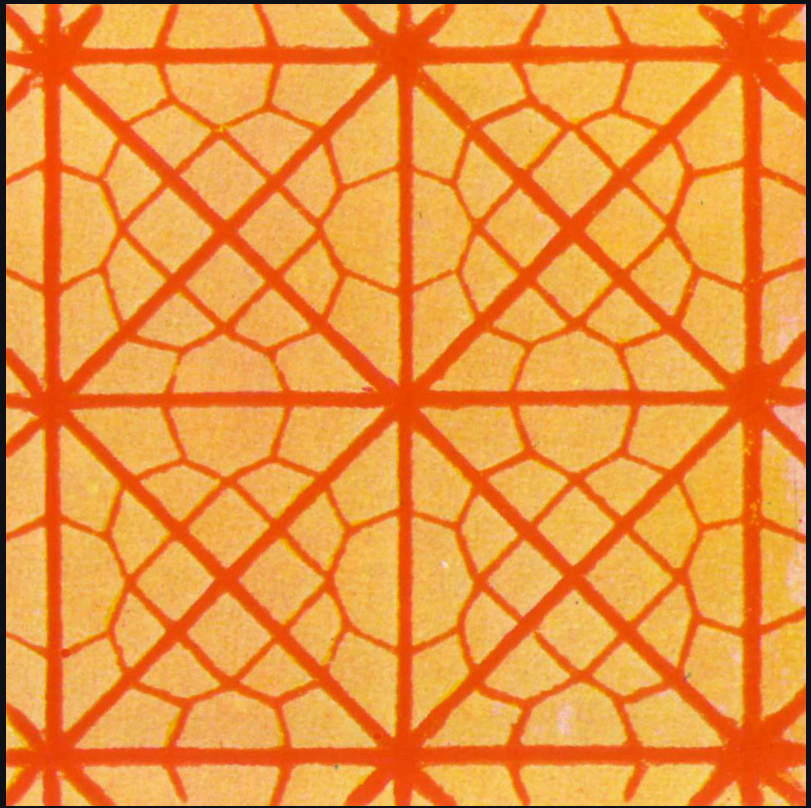


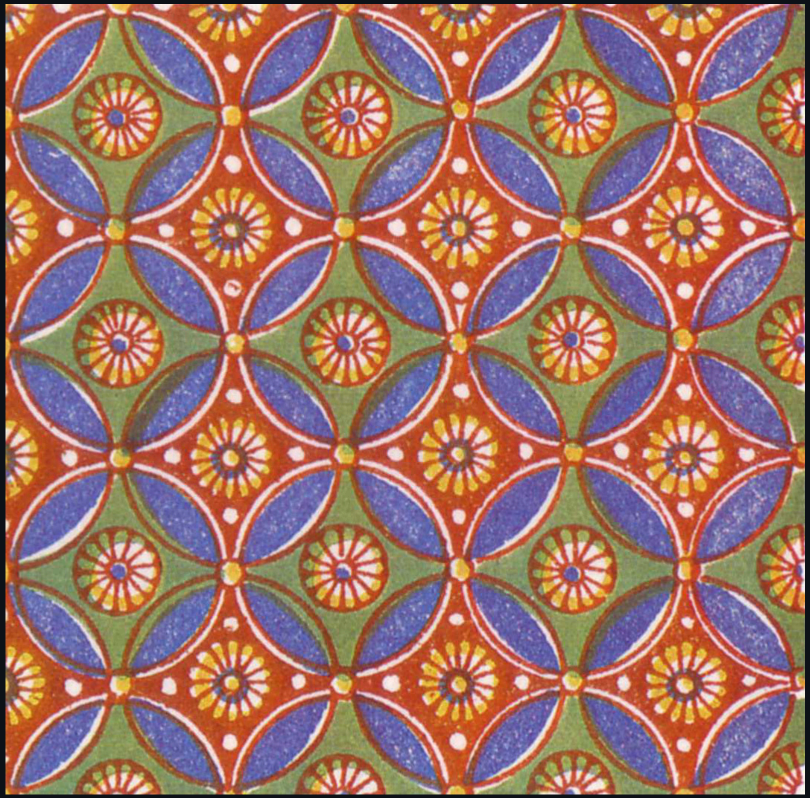
鏡映を用いた繰り返し模様　（３，３，３）



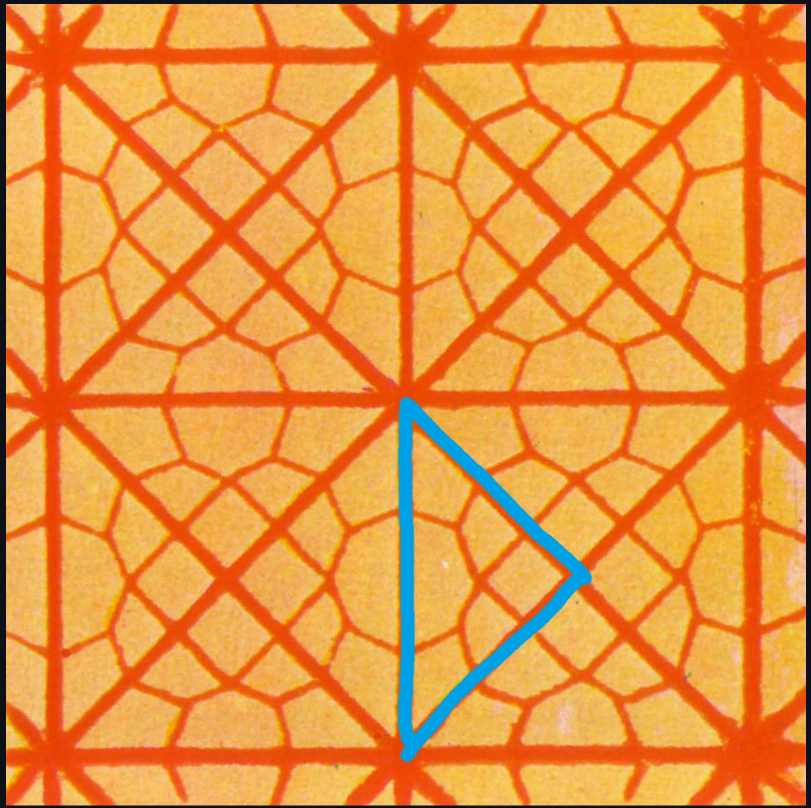


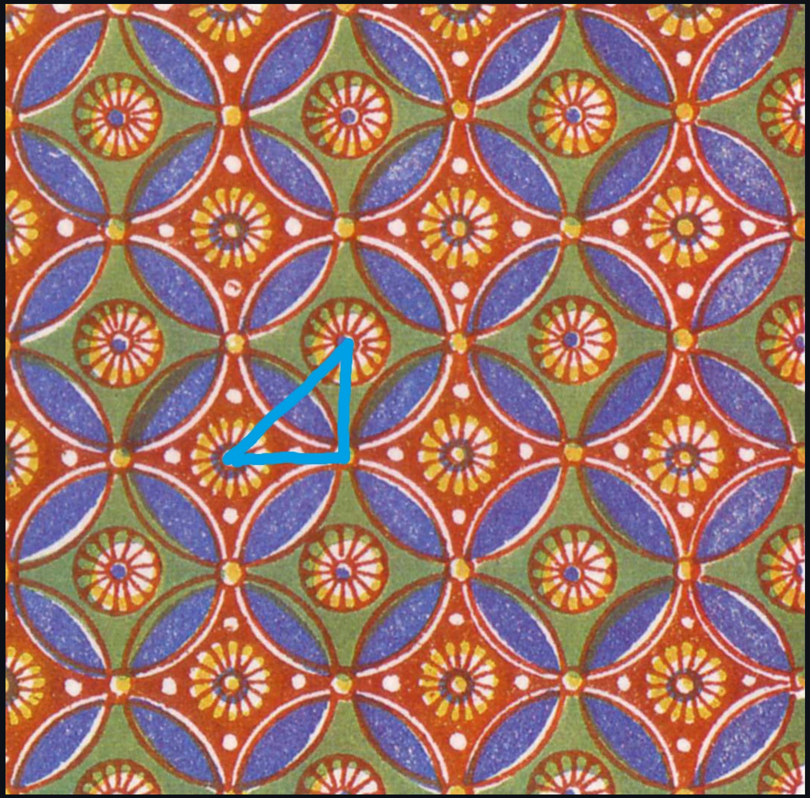
鏡映を用いた繰り返し模様　（2, 4, 4）



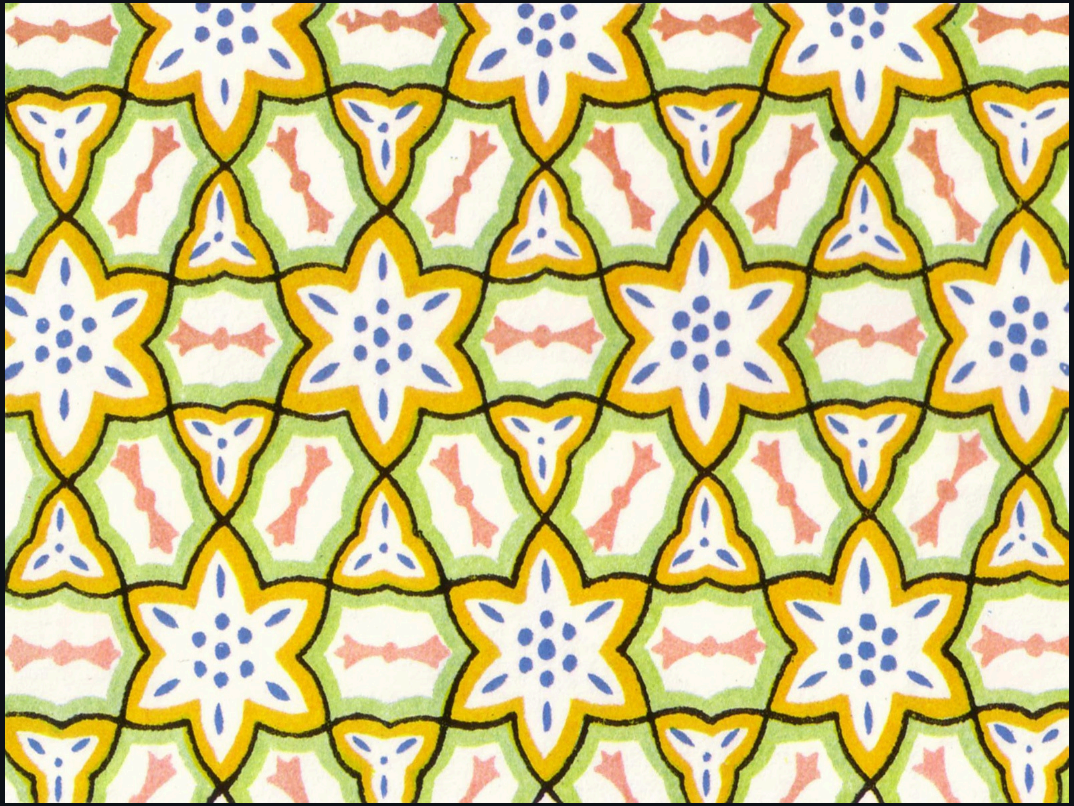


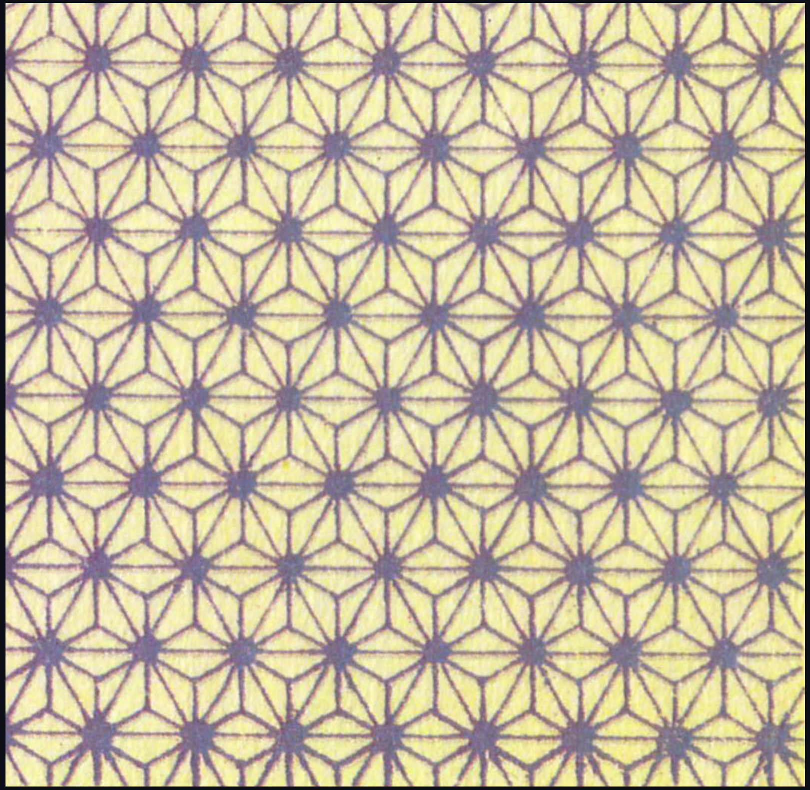
鏡映を用いた繰り返し模様　（2, 4, 4）



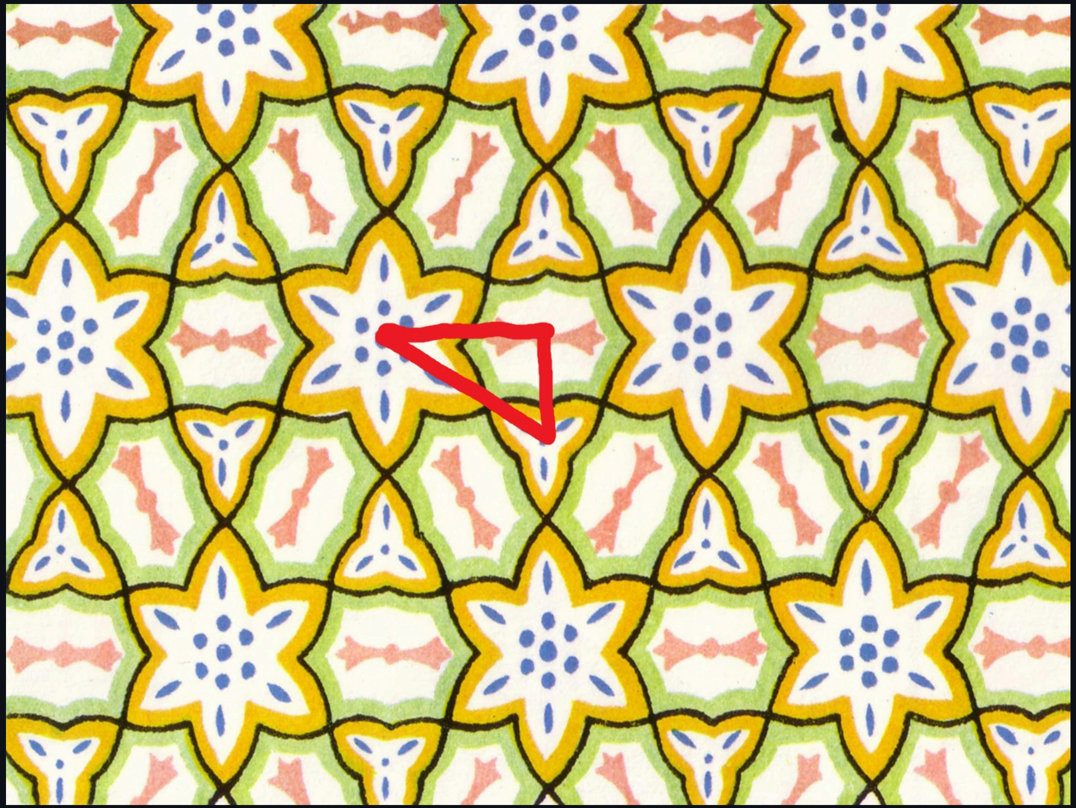


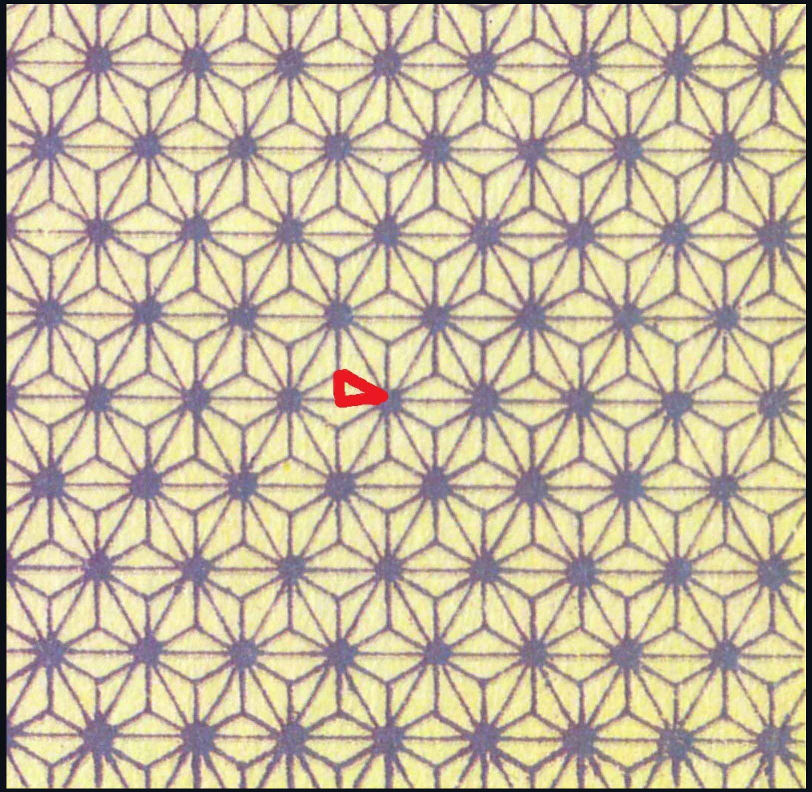
鏡映を用いた繰り返し模様　（2, 3, 6）





鏡映を用いた繰り返し模様　（2, 3, 6）





合同変換 - 鏡映変換の組み合わせで作る変換

平面上で図形の形や大きさを変えない変換

- **鏡映**

  等長変換の“原子”。合成することで他の基本操作が作れる。

- **平行移動**（合わせ鏡）

  平行な2直線で挟むと、直線に垂直な向きへ“間隔の2倍”だけ動く。

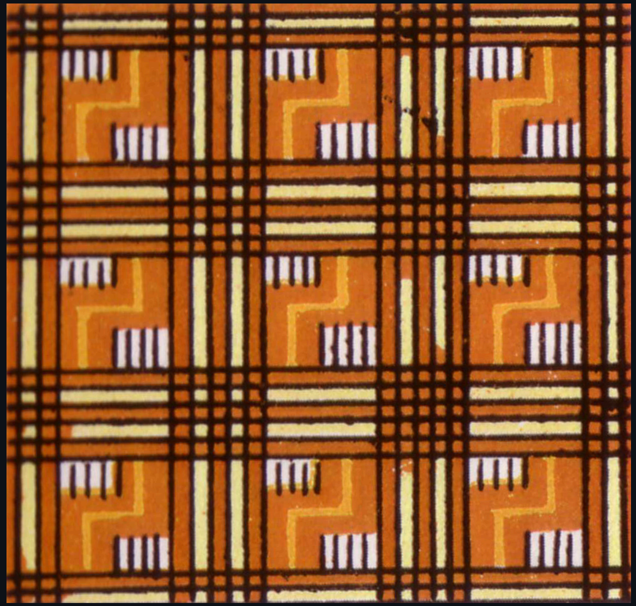
- **回転**（交わる鏡）

  交わる2直線の交点が回転中心、回転角は“交角の2倍”。

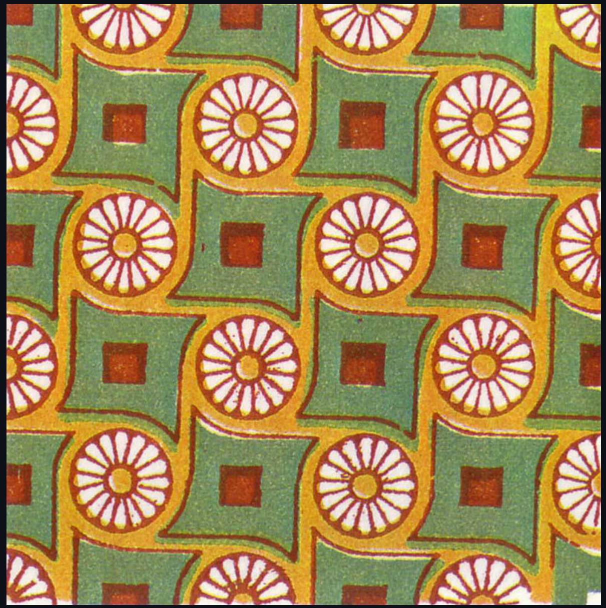
壁紙群 - 合同変換で作る模様

あるタイルの大きさや形を変えずに平面を敷き詰める変換の組み合わせは１７種類
それぞれ数字とアルファベットの国際共通表記がついている

p1:平行移動 出典



p2:π回転＋平行移動 出典

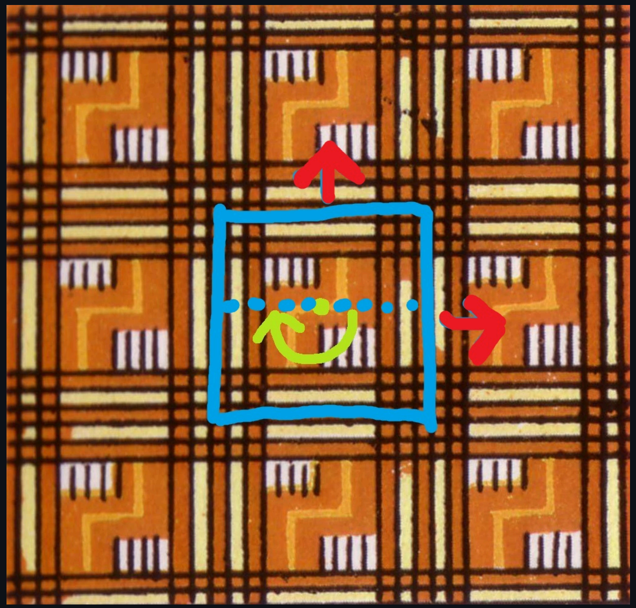


p4:$\frac{\pi}{2}$回転＋平行移動

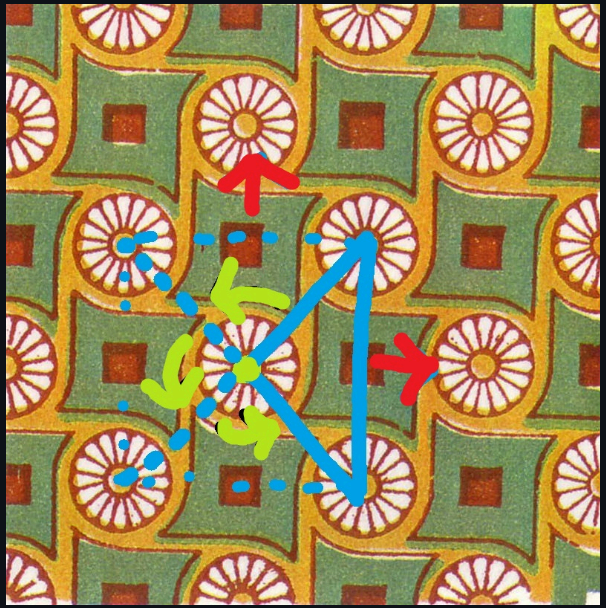
壁紙群 - 合同変換で作る模様

鏡映・平行移動・回転の軸を意識してさがしてみよう

p1:平行移動 出典



p2:π回転＋平行移動 出典

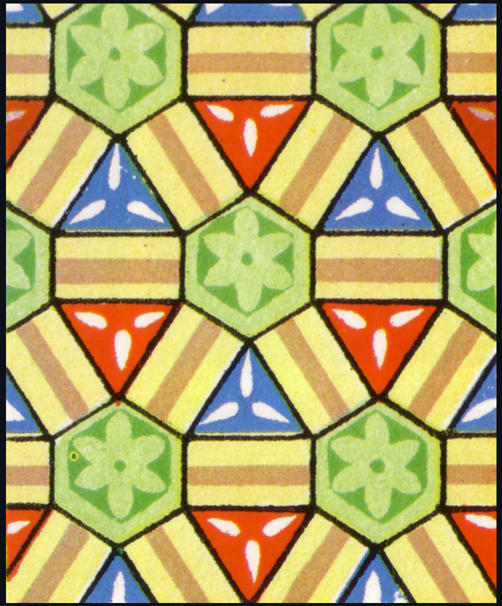


p4:$\frac{\pi}{2}$回転＋平行移動 出典

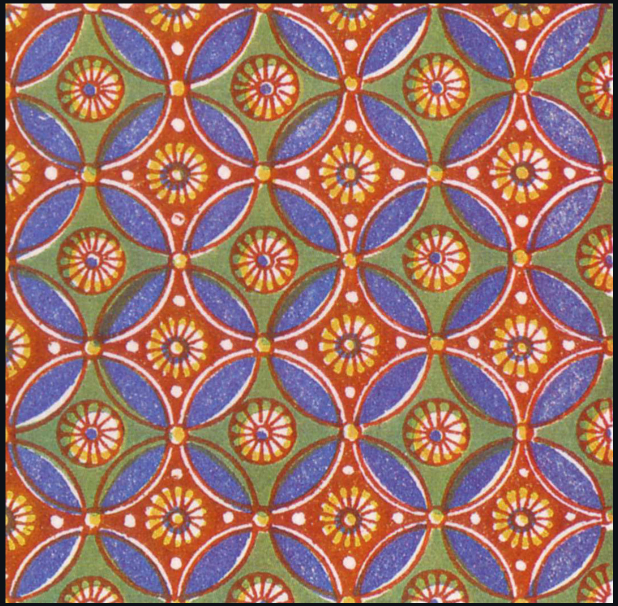
壁紙群 - 合同変換で作る模様

万華鏡のパターンも壁紙群の仲間

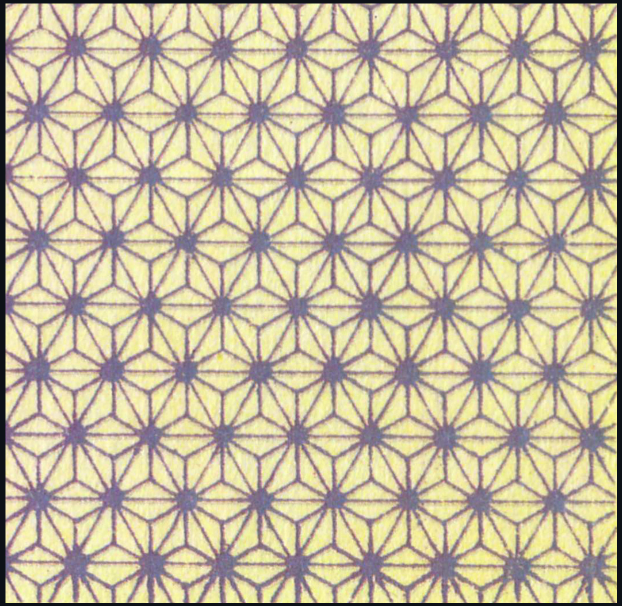
その他の分類→Wallpaper group - wikipedia



(3, 3, 3): p3m1 出典



(2, 4, 4): p4m



(2, 3, 6): p6m

壁紙群 - エッシャーによる作品

画家のエッシャーは壁紙群をもとにした作品をいくつも描いている
動物をモチーフにした図柄が特徴的で、エッシャータイリングと呼ばれる

M.C. Escher Collection - Symmetry

まとめ：平面での鏡映とタイル張り

鏡の配置とタイル張りの関係

- 鏡の角度が $\frac{\pi}{n}$ のとき綺麗な鏡映像が得られる（タイル張りできる）
- 三角形の場合：(3,3,3), (2,4,4), (2,3,6) の3パターンのみ
- 正多角形の場合：正三角形、正方形のみ（正五角形以上は不可）

鏡映の組み合わせでできる変換 - 合同変換

- 変換の前後で図形の形も大きさも変わらない（鏡映・平行移動・回転）
- 同じ形・大きさのタイルでタイル張りできる

次は円の反転による新しい鏡映の世界へ

曲がった鏡

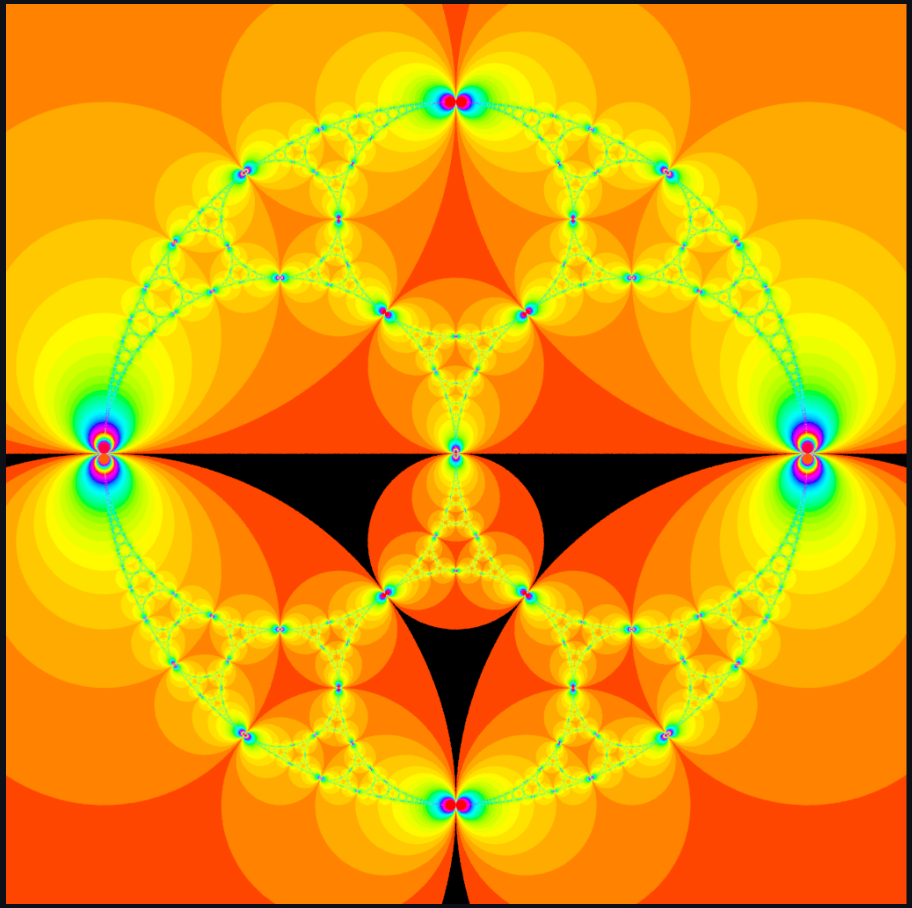
曲がった鏡による鏡映は存在している？

Mirro ball panoramio by Max Nossin

円による鏡映

円に関する鏡変換をみてみよう

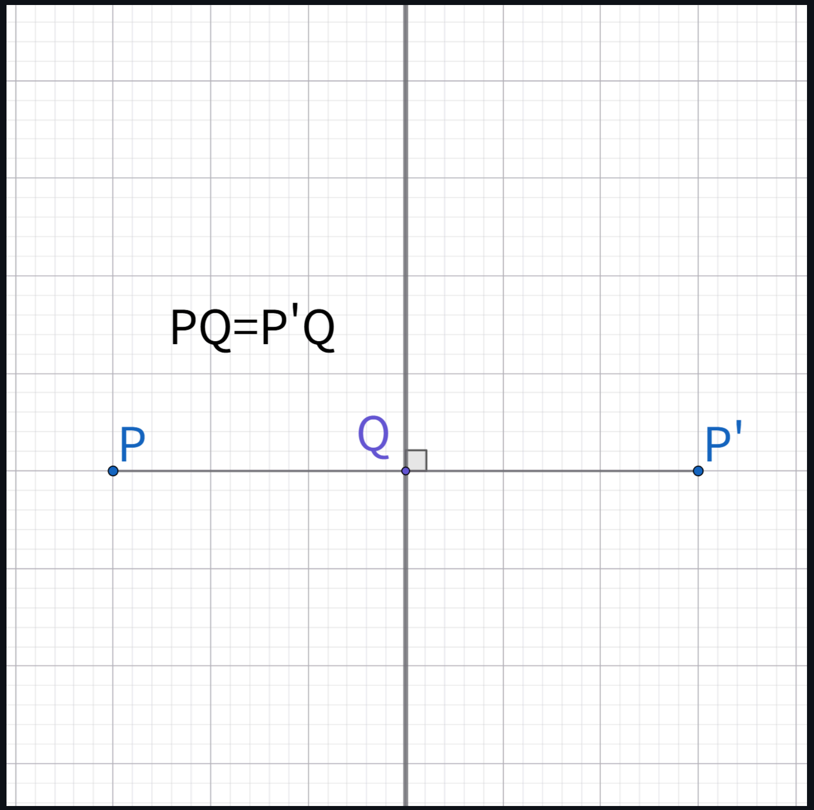
※ただし、物理現象とは異なるので注意



円の鏡映によって描かれたフラクタル

おさらい：通常の鏡映の計算方法

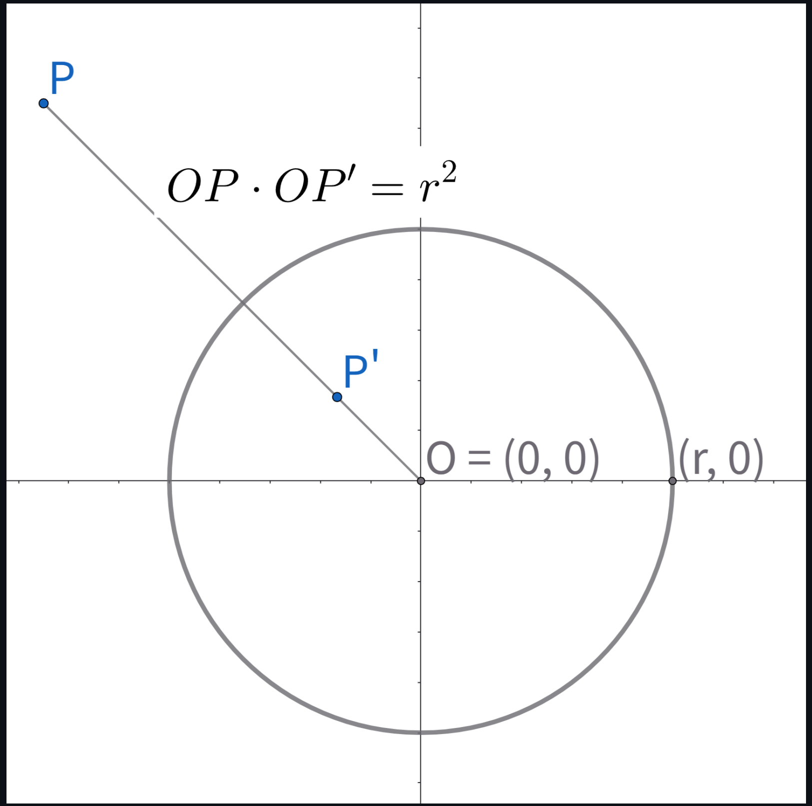
- 点Pから鏡へ垂線を引く
- 垂線と鏡の交差点をQとすると、移された点P'はQから等距離の位置にある



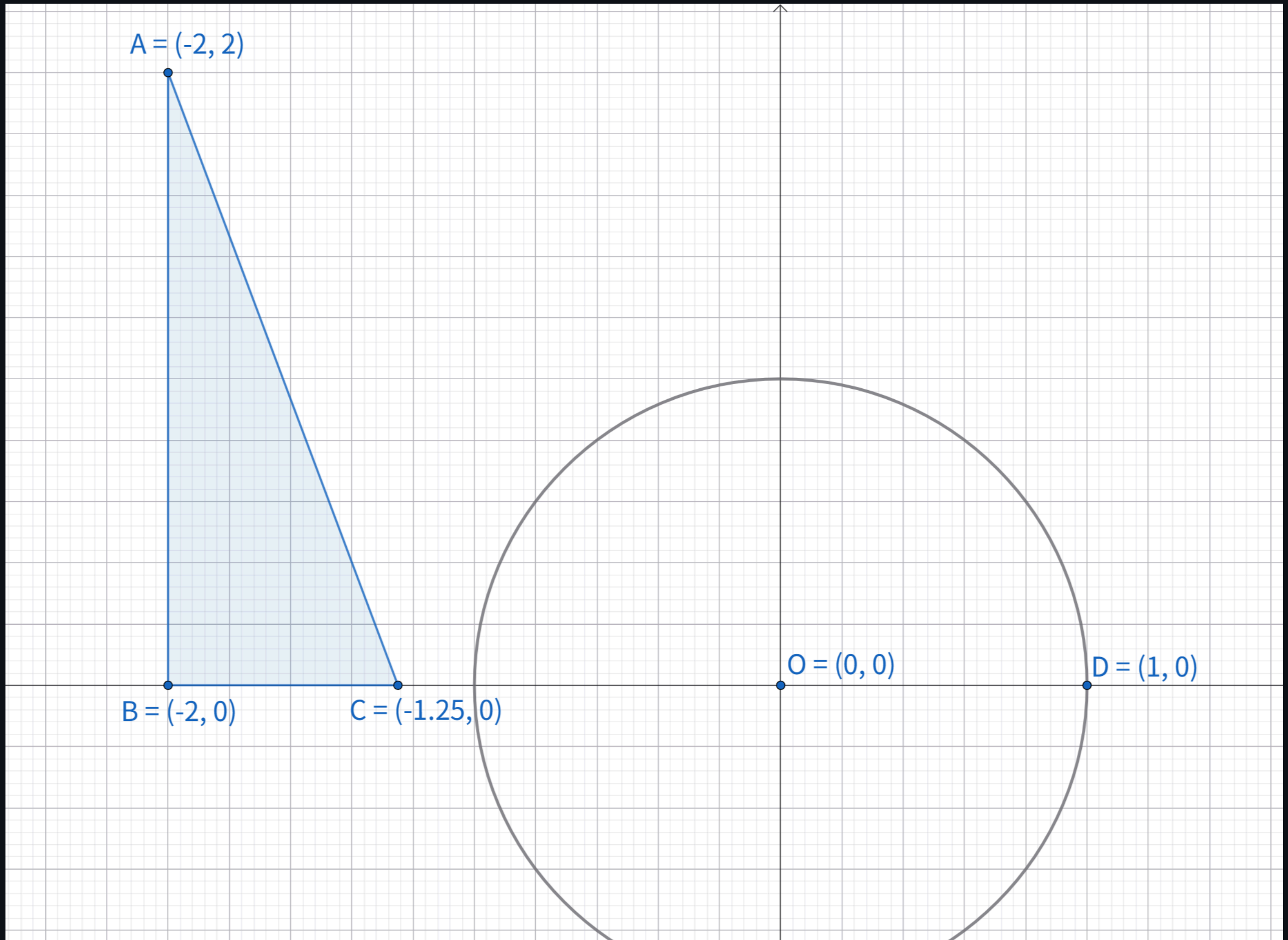
実験２　円による鏡映を計算してみる

反転の計算

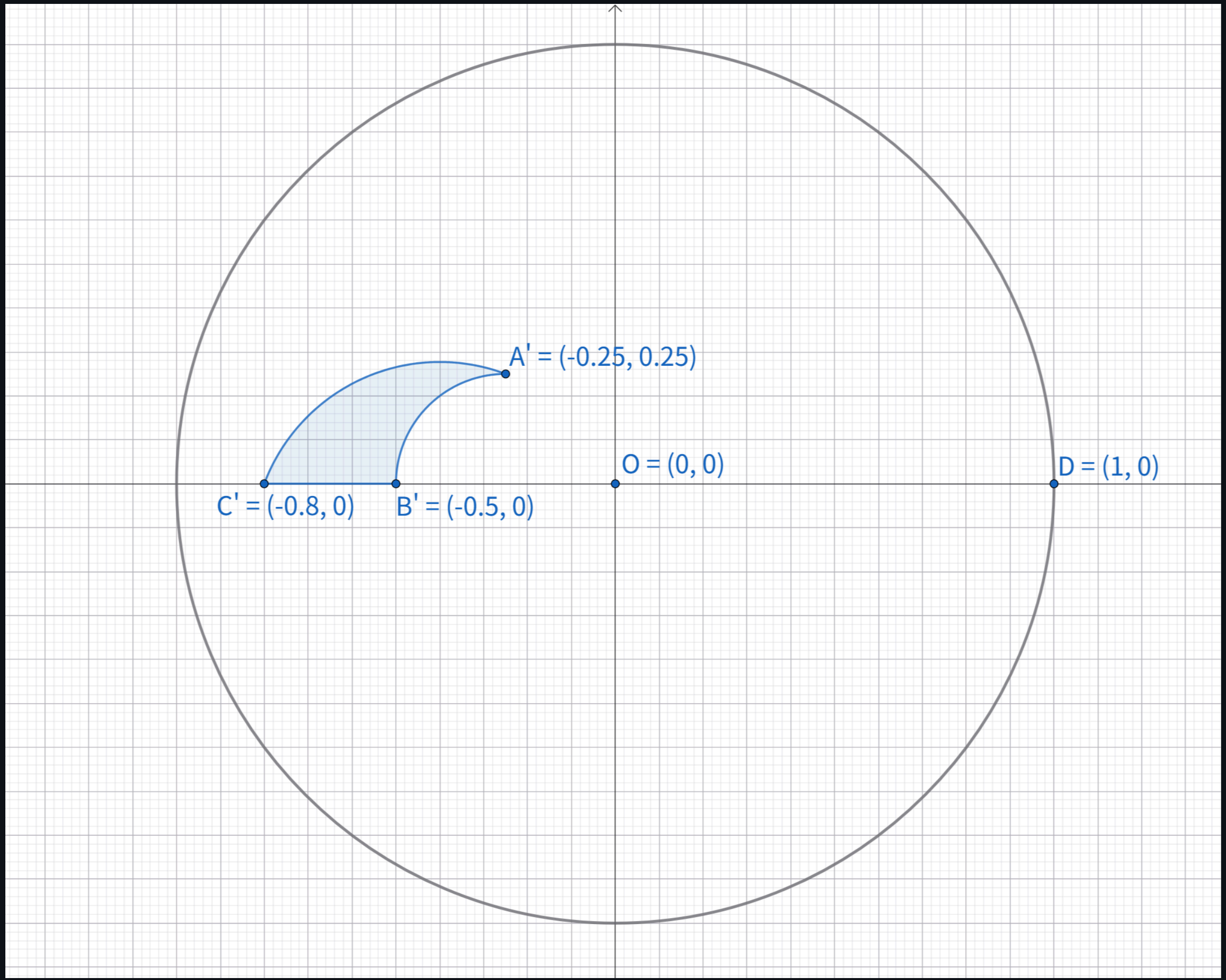
- 鏡映変換を作用させる点をP、移された点をP'とする
- 点Pから円の中心Oへ直線を引く
- P'はOP・$OP' = r^2$を満たす点に移る



実験２　円の反転（鏡映）を計算してみる

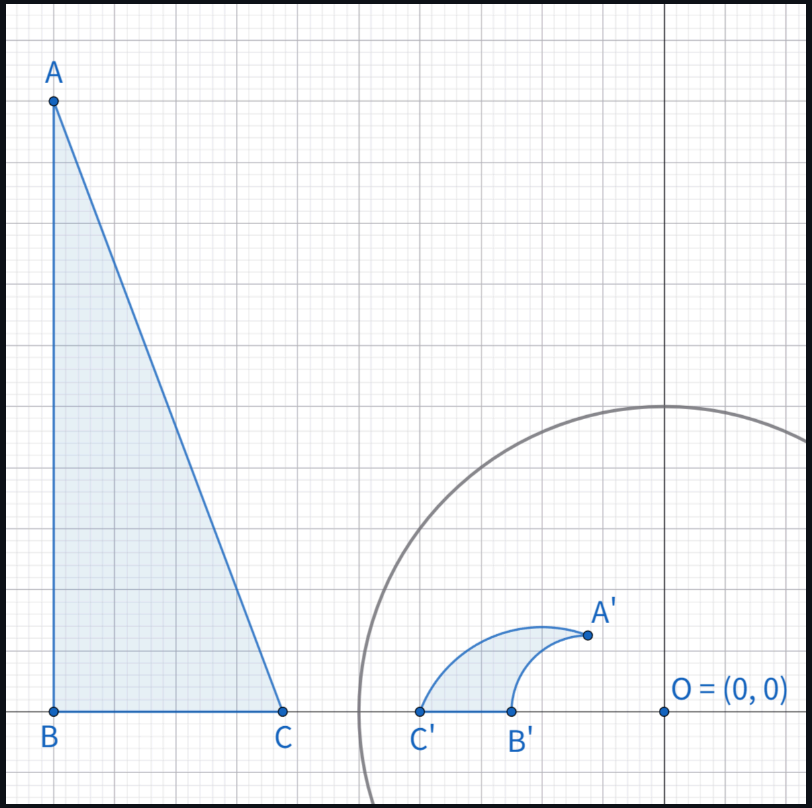


実験２　円の反転　答え

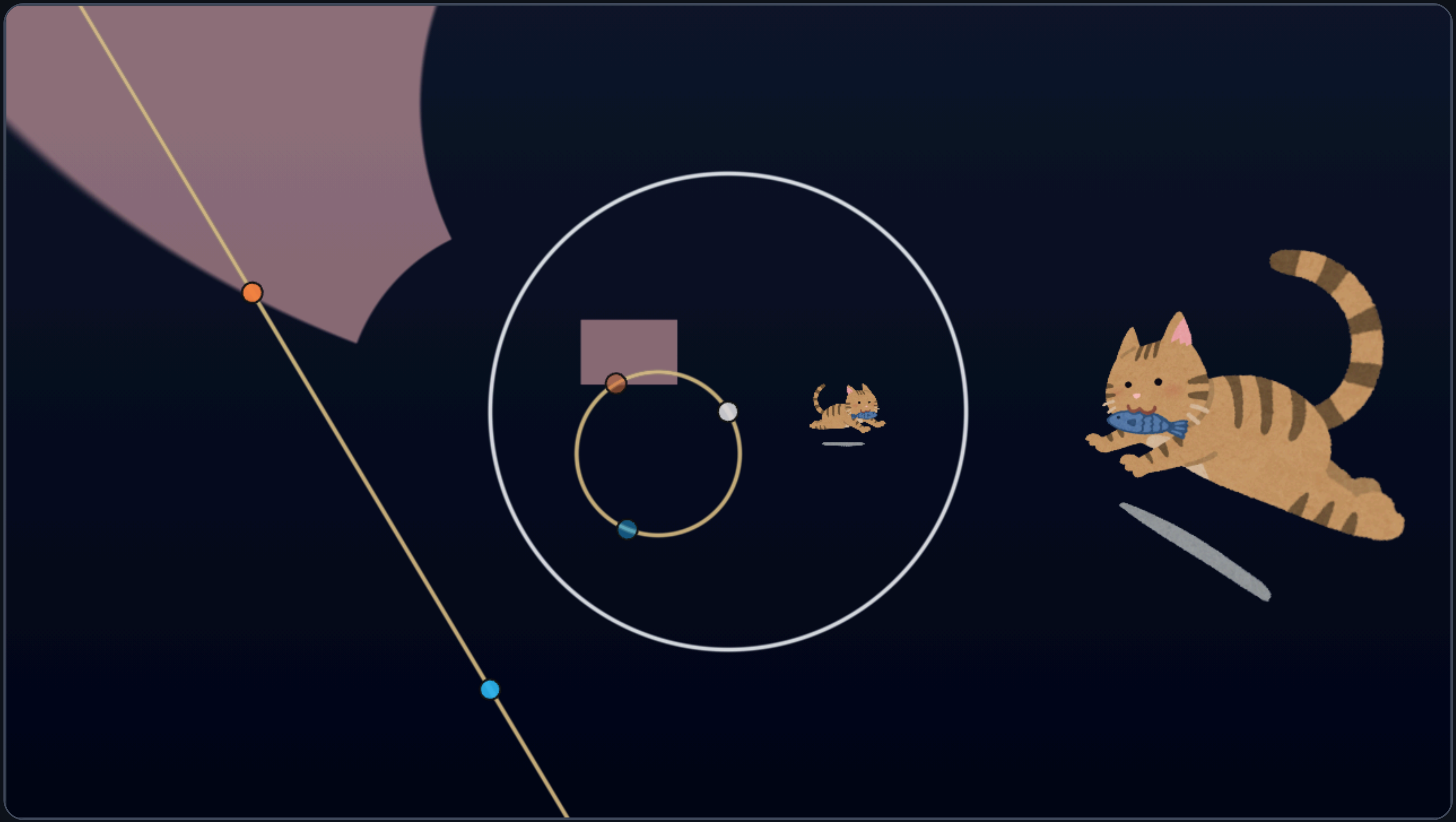


円に関する鏡映の性質

- 点と点の距離を保たない
- 角度は保つ
- 直線は円に、円は直線に入れ替わる
  - 直線は半径が無限大の円
  - 無限遠点は円の中心へ移される
  - →線分は円の中心を通る円弧になる



実験：円に関する鏡映の挙動

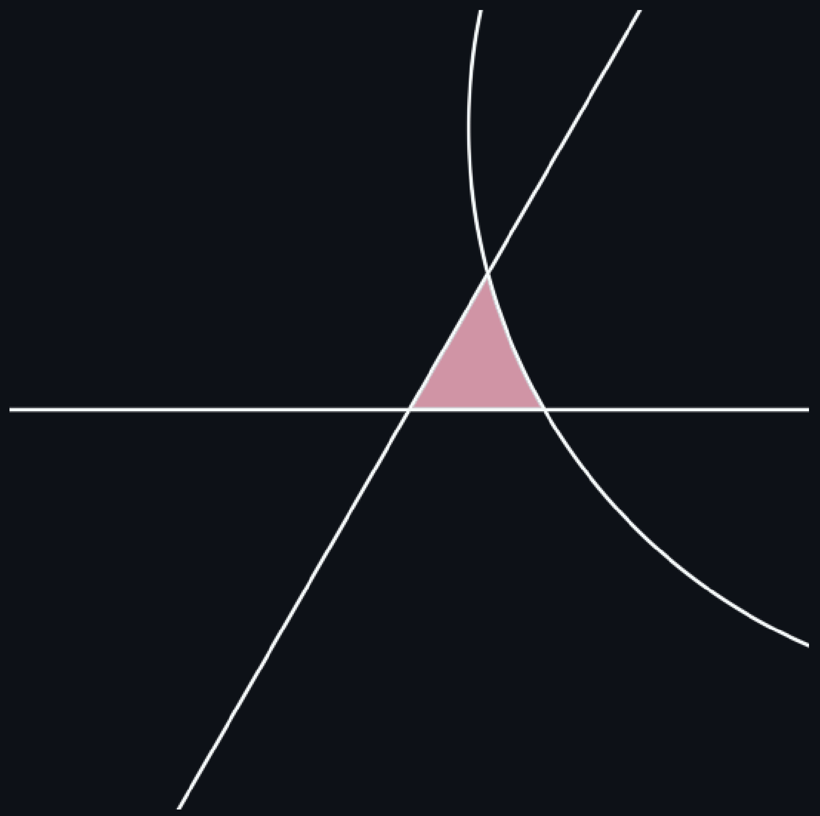


ポイント：直線は円へ、円は直線へ入れ替わる。角度（交わり方）は保たれる。

円の鏡による万華鏡

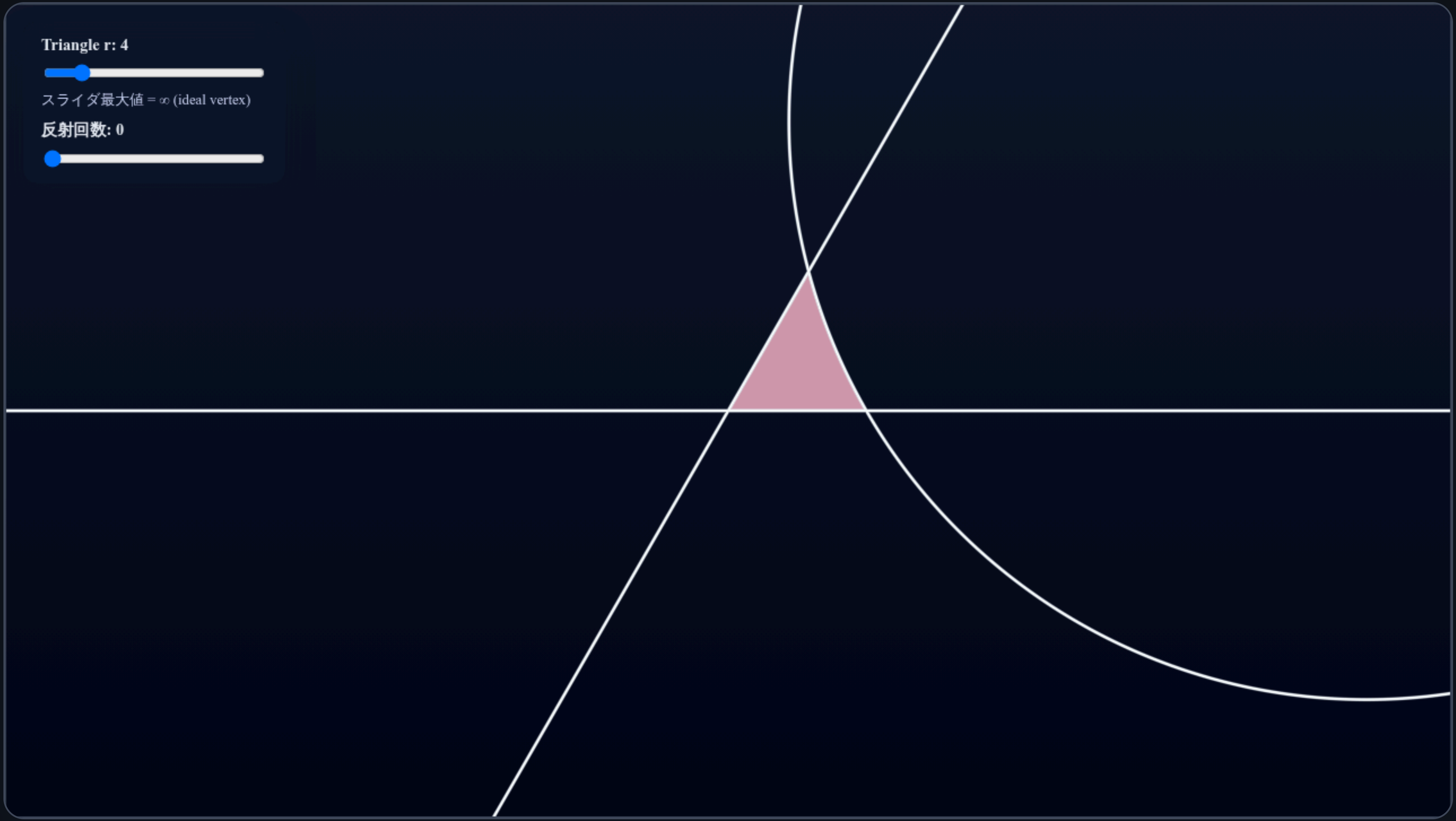
円弧で囲まれる三角形で万華鏡を描いてみる

- 直線は半径が無限大の円
- 二つの角度が$\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$になるよう、二直線を固定し、残りの辺を円弧にする



画像はミス (3, 3, r)を使用する

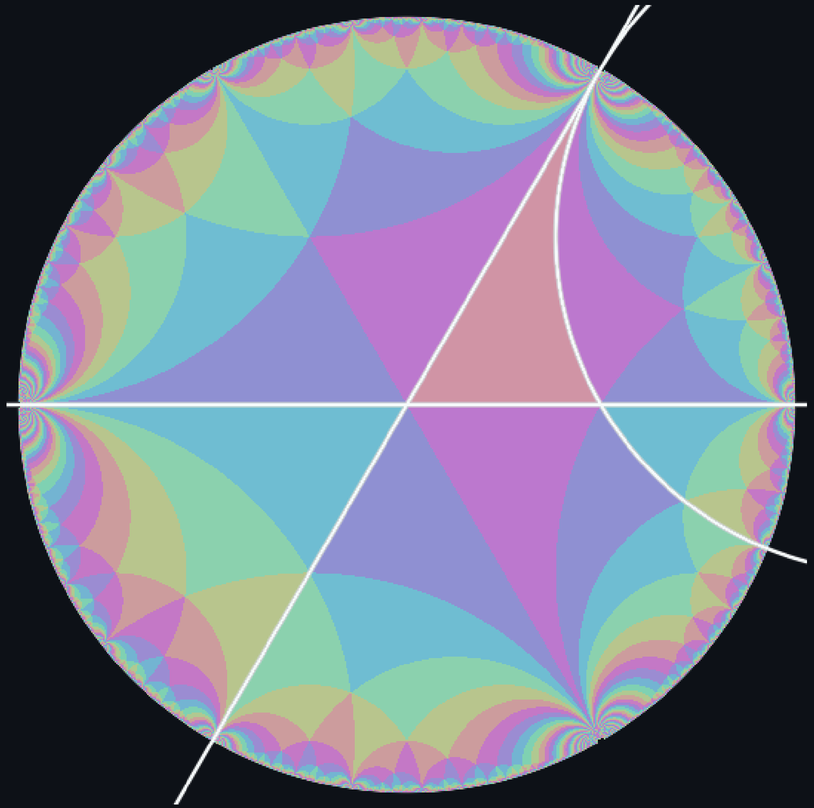
実験：円の鏡による万華鏡



実験の見方：円の鏡で展開されたタイルは円周へ収束。

円の鏡による万華鏡

- タイルは円周に収束していく
- 三角形の内角をそれぞれ$(3, 3, r)$としたとき、$r >= 4$の整数
  →無限のパターンが存在する
- $r = \infty$のとき、角度は０度
  →辺と辺が接する状態



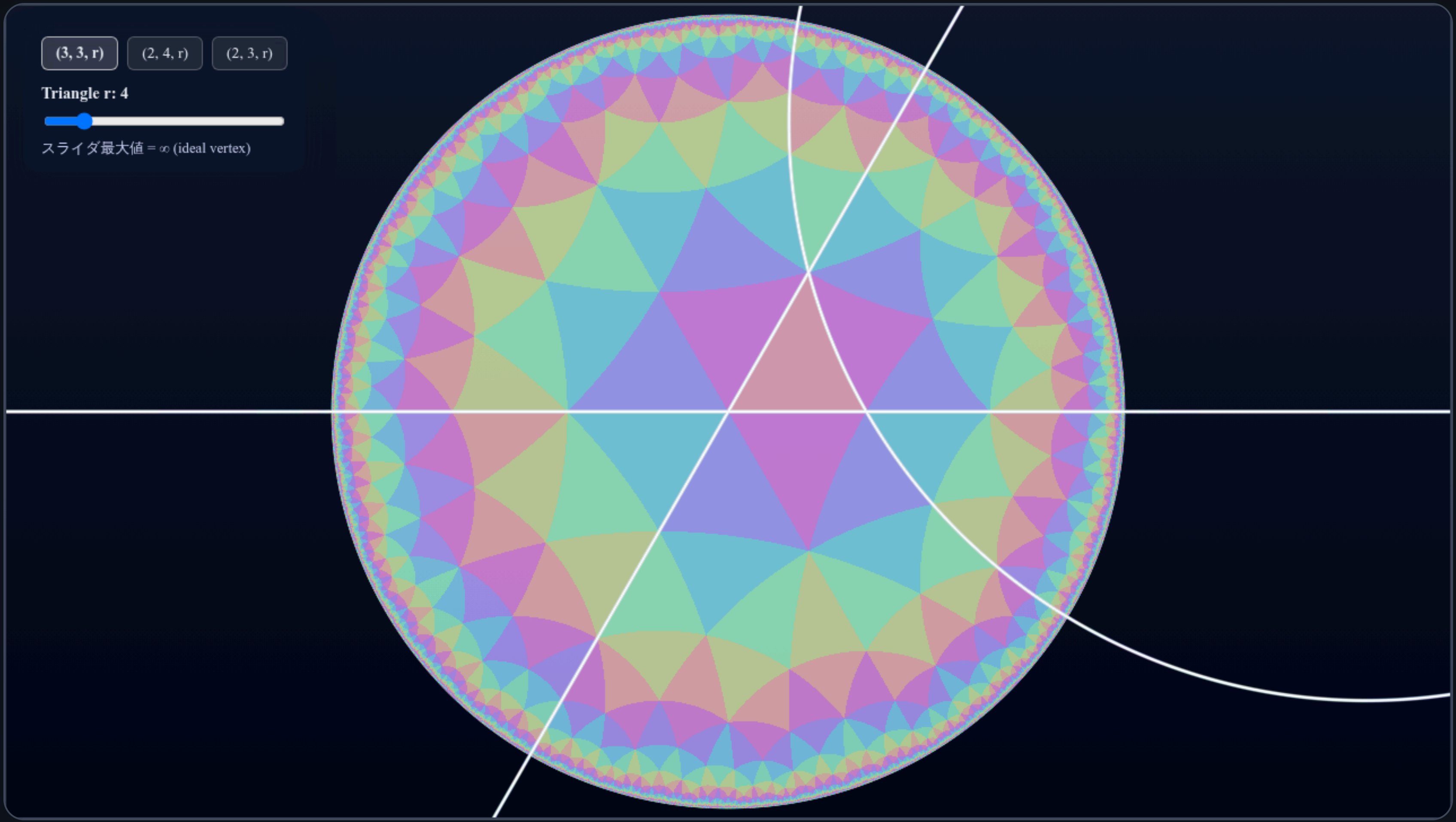
$r = \infty$の状態　三角形の内角の和は$\frac{2\pi}{3}$

より詳しく条件を調査する

他の条件の時も調査してみる

- $(2, 4, r)$の場合
- $(2, 3, r)$の場合

実験　円の万華鏡の角度

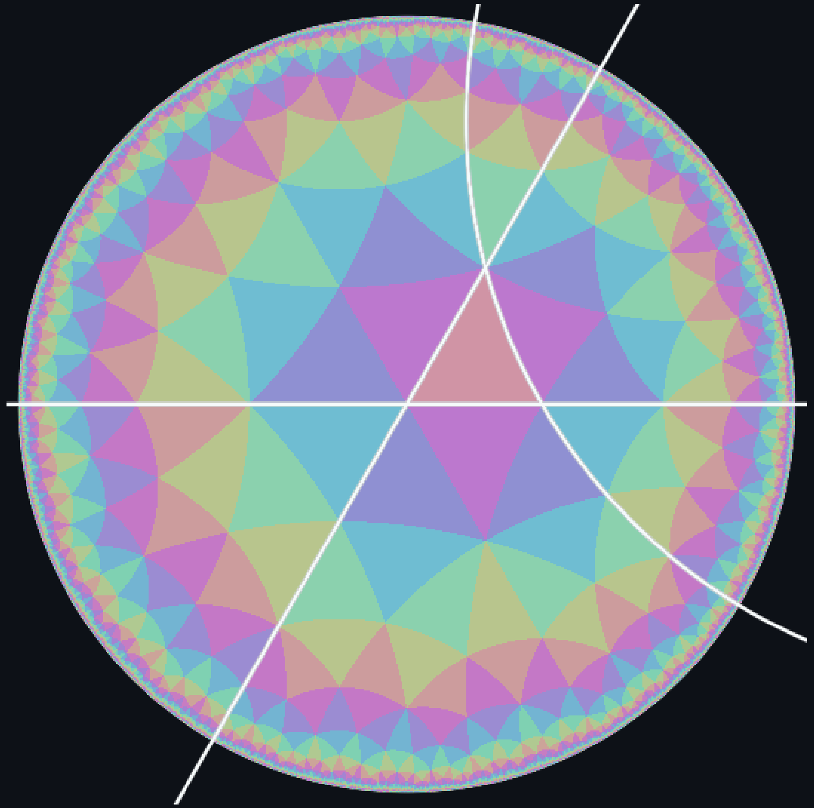


ポイント：直線の鏡の場合と対比してみる

円の三角形タイル張り条件

$$\frac{\pi}{p} + \frac{\pi}{q} + \frac{\pi}{r} < \pi$$

- ⇔ 内角和 < π の時、ぴったりとタイル張りができる
- 例） (3,3,7), (2,3,7), (2,4,5)……
- 組み合わせパターンは無限に存在
- 模様は円周へ収束する
- このようなタイル張りを双曲タイリングとよぶ

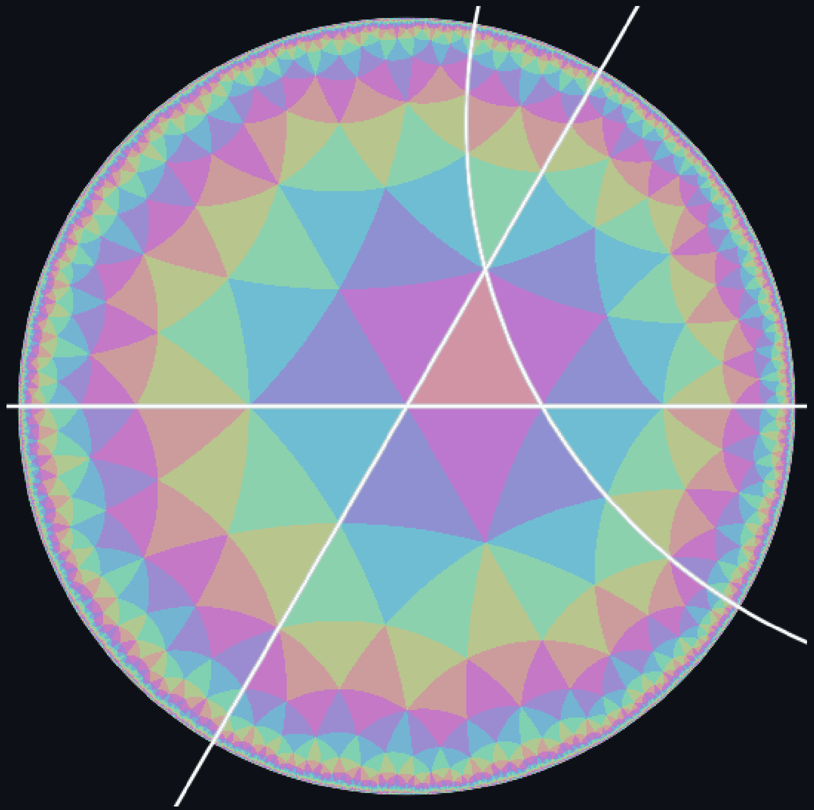


円板の中のタイル張り = 双曲タイリング

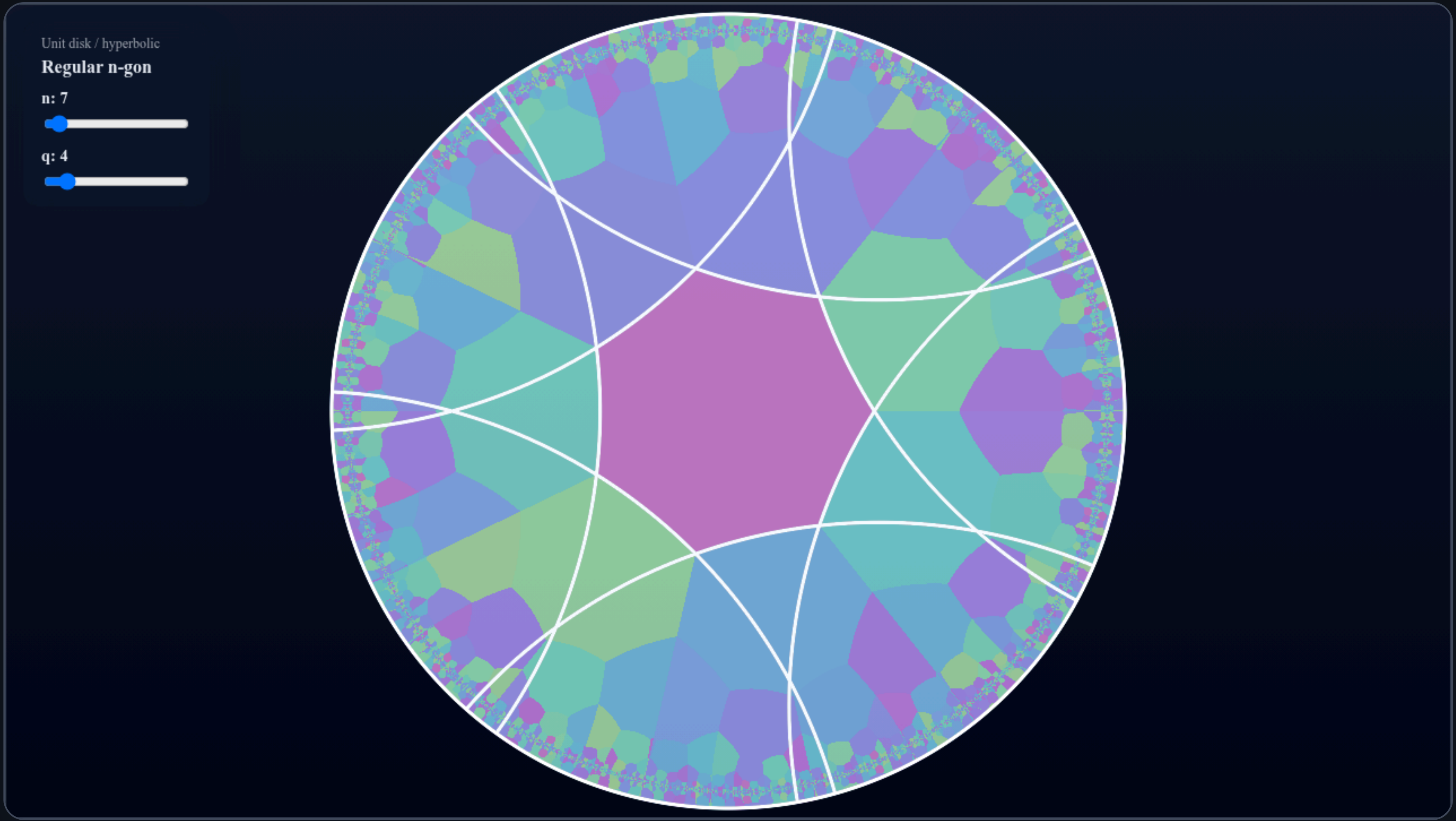
このようなタイル張りを**双曲タイリング**と呼ぶ

特徴

- 中心から離れるほど模様が細かくなる
- 通常の鏡では不可能な正五角形や正七角形の敷き詰めが可能

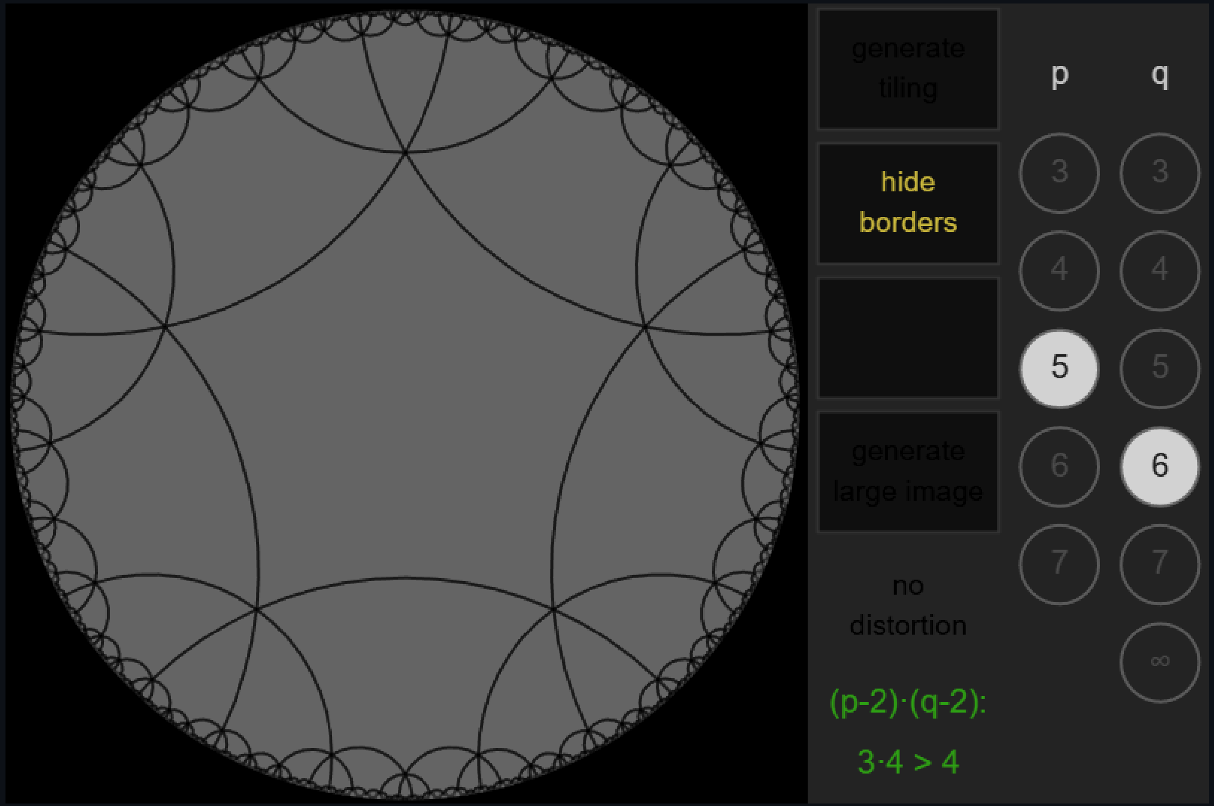


鏡の枚数を増やす



実験の見方：鏡の枚数を増やしても、成立条件を満たす場合のみ敷き詰め可能。

鏡の枚数を増やす



Make Hyperbolic Tiling of Images 出典

まとめ：タイル張りの条件

平面でのタイル張り

- 三角形の内角和 = π
- タイル張りできるのは3パターン
  - (3,3,3), (2,4,4), (2,3,6)
- 正多角形は正三角形、正方形のみ

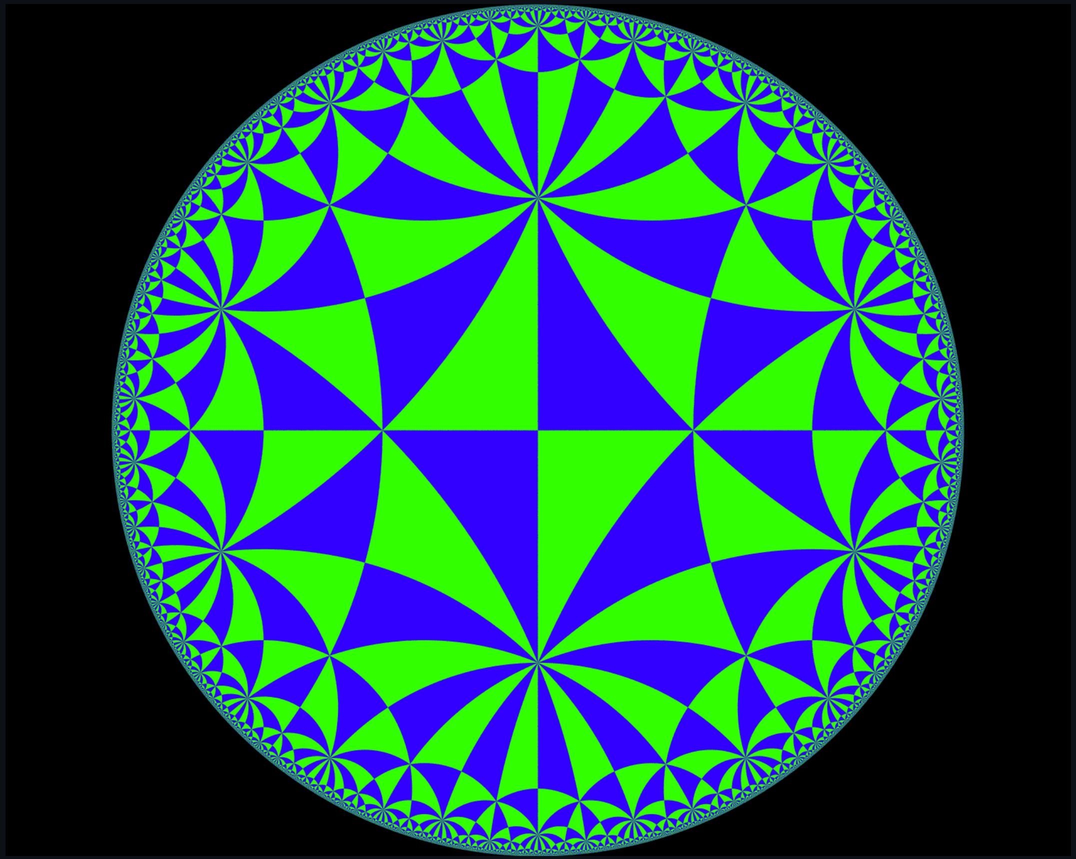
円板の中でのタイル張り

- 三角形の内角和 < π
- 綺麗にタイル張りできるパターンは**無限に存在**
  - (3,3,7), (2,3,7), (2,4,5), (3,4,5)……
- 正五角形以上も可能
- 模様は円周へ向かって無限に細かくなる

エッシャーによる作品

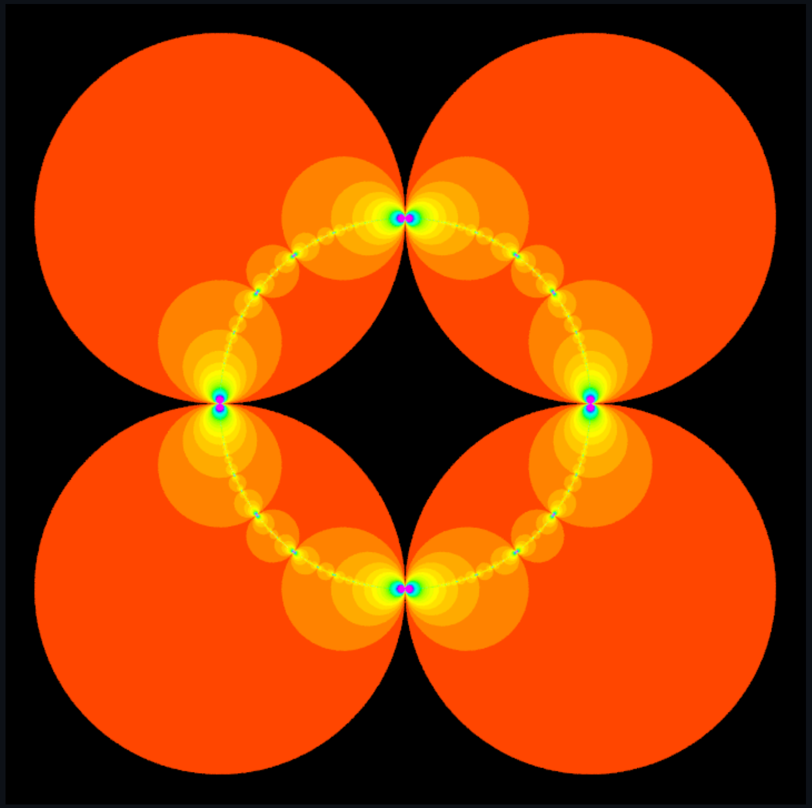
M.C. Escher Collection - Mathematics

- Circle Limit I～IVなどの木版画



円の反転フラクタル

この図では自由に円を配置し、その鏡映像を描いている。
→双曲タイリングのように、角度の条件は考慮していない

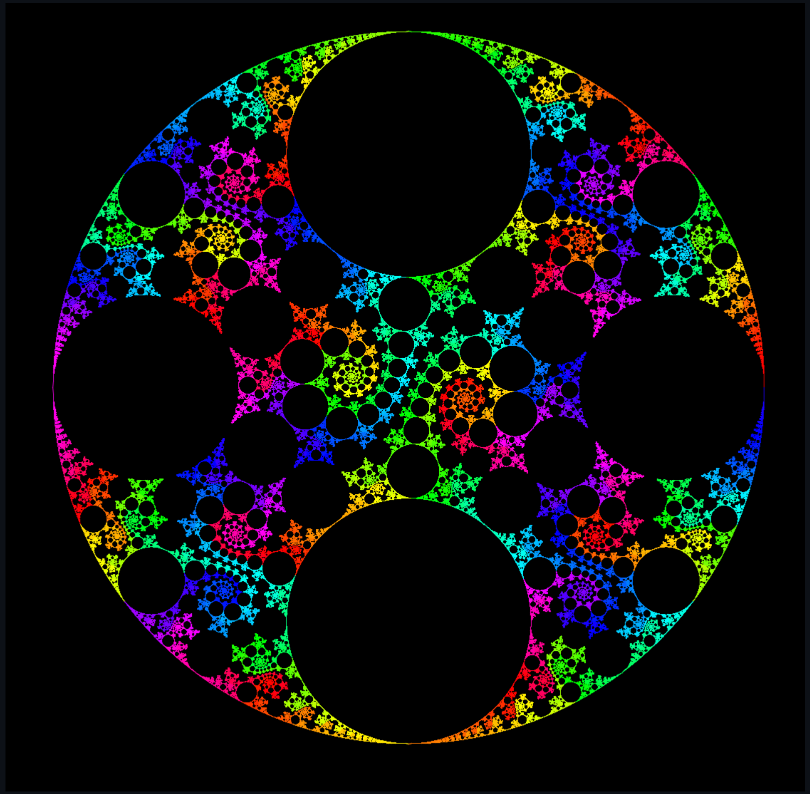


Schottky Linkで描画したフラクタル

円の鏡映の組み合わせで作る変換

円の反転の組み合わせによって構成される変換はメビウス変換とも呼ばれる

- 鏡映
  - 円に関する鏡映
  - 直線に関する鏡映
- 平行移動
- 回転
- **拡大縮小**
- **ねじれ・うず**



この図はメビウス変換によってねじれやうずをみることができる

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}>1$の世界

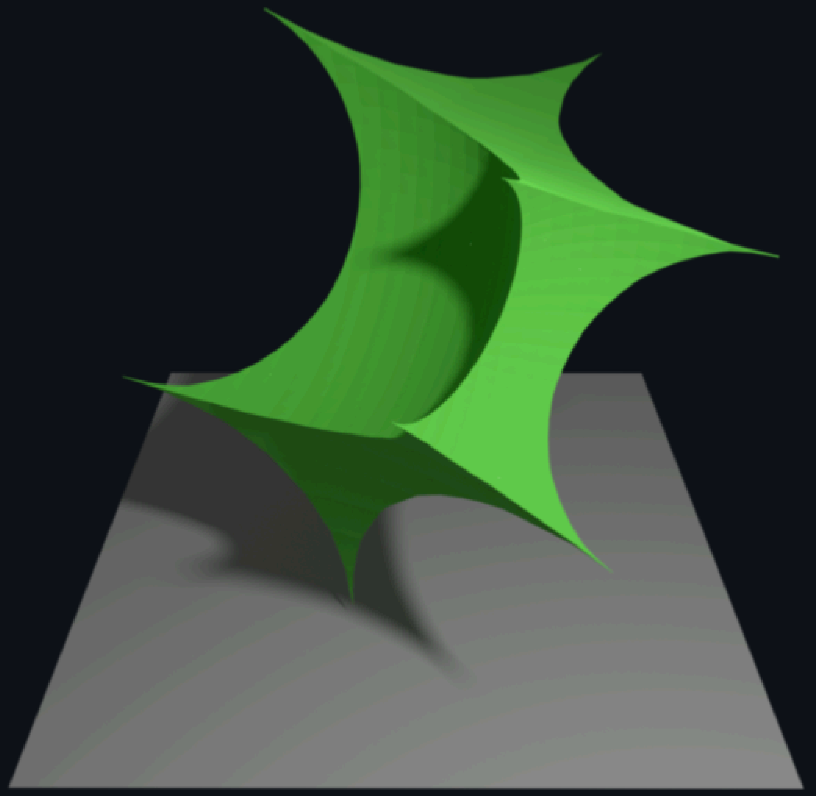
実験の見方：曲がった鏡（球）では“角度”を保ちつつ構造が球面へ押し寄せる。

Ahara-Araki Fractalの作り方

三次元空間で万華鏡を考えて、三次元のタイル張りを行う

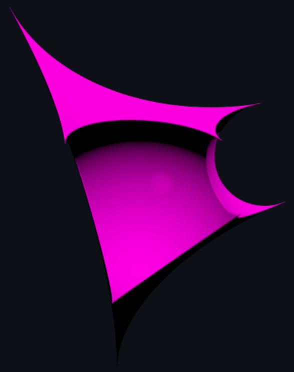
右図は立方体の表面を**球**で削った立体

→球に関する鏡映（反転）を考えてタイル張りを行う



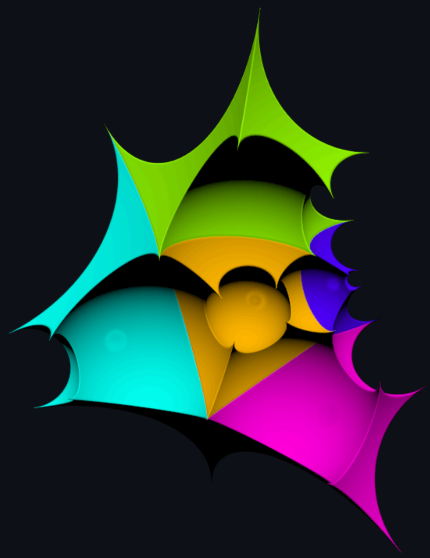
球の鏡によるタイル張り

三次元形状なので、万華鏡の最も外側を観察することになる



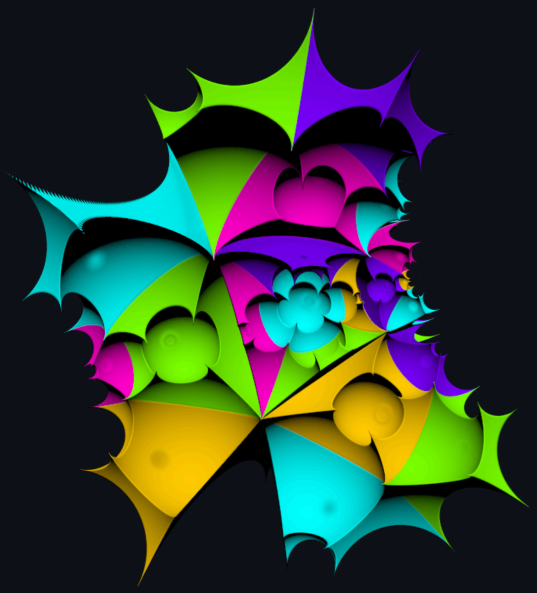
球の鏡によるタイル張り

三次元形状なので、万華鏡の最も外側を観察することになる



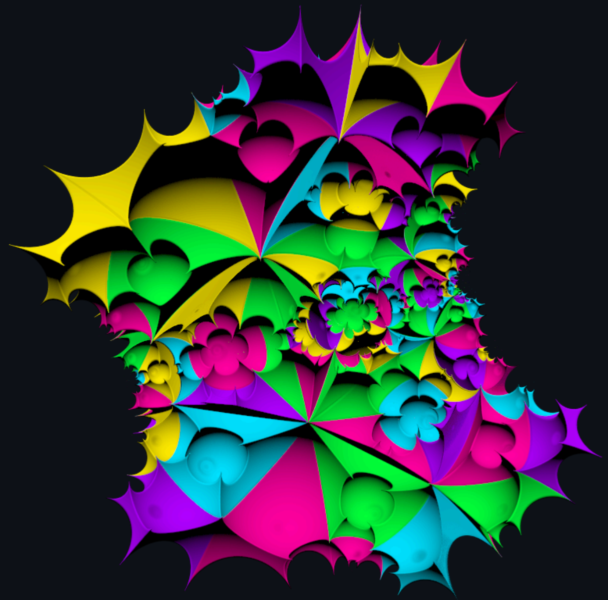
球の鏡によるタイル張り

三次元形状なので、万華鏡の最も外側を観察することになる



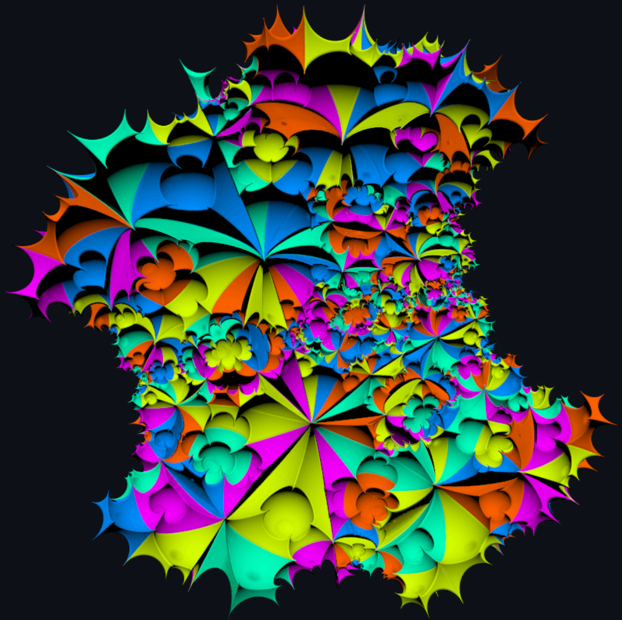
球の鏡によるタイル張り

三次元形状なので、万華鏡の最も外側を観察することになる



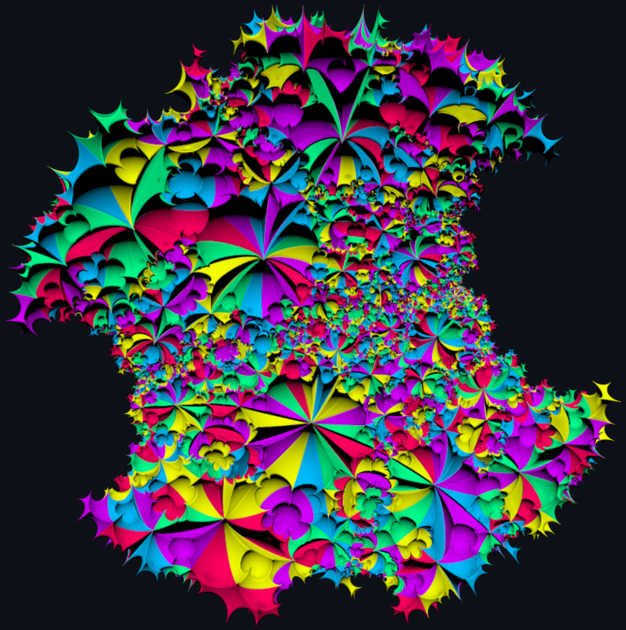
球の鏡によるタイル張り

三次元形状なので、万華鏡の最も外側を観察することになる



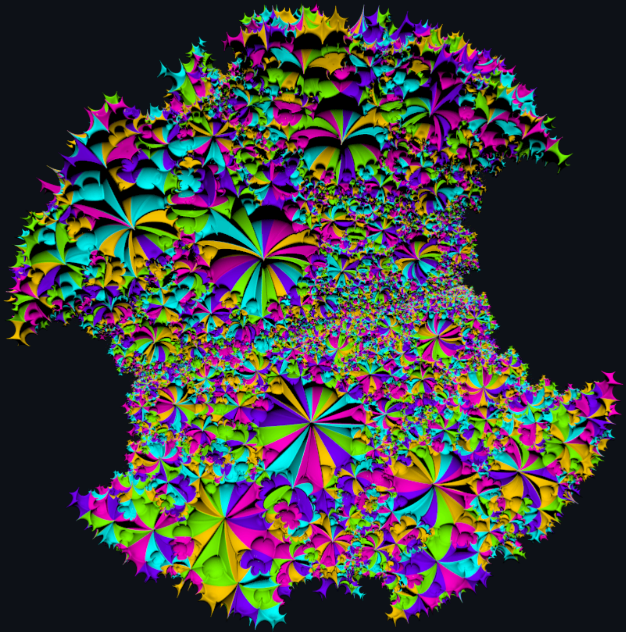
球の鏡によるタイル張り

三次元形状なので、万華鏡の最も外側を観察することになる



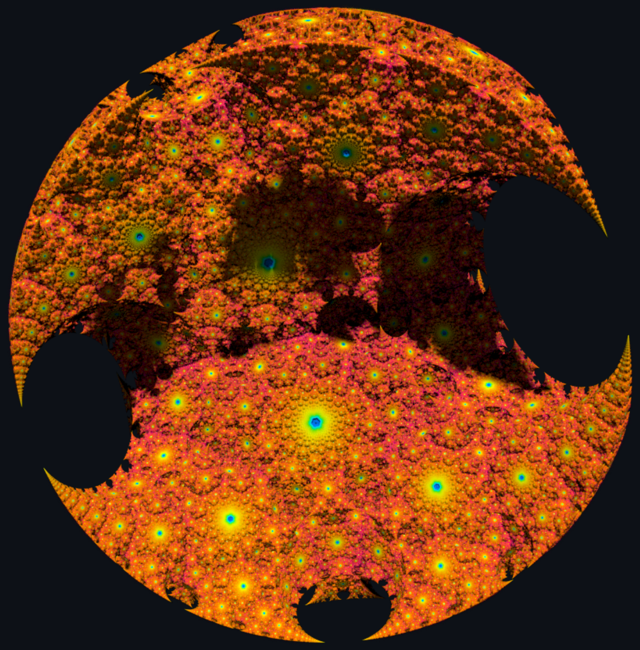
球の鏡によるタイル張り

三次元形状なので、万華鏡の最も外側を観察することになる



球の鏡によるタイル張り

三次元形状なので、万華鏡の最も外側を観察することになる



本日のまとめ

コンピュータによる描画

- フラクタルを描画するときにはどこまで計算し、どう描くか？という問題が常に付きまとう
- 解決策の一つは並列計算。画面の点ごとに計算し、色を塗る
- 数学的な仕組みやルールを理解し、アルゴリズムに落とし込む必要がある

本日のまとめ

平面の鏡：身近な法則から万華鏡やタイル模様へ

- 2枚の鏡：角度π/nで$2n$個の部屋に分割
- 3枚の鏡：(3,3,3) / (2,4,4) / (2,3,6) の3パターンだけ

円の鏡：無限の世界

- 内角和$< \pi$で無限のパターンが存在

球の鏡：三次元へ

- 球面では内角和$> \pi$の三角形が存在する
- 球の反転によるAhara-Araki Fractal（三次元フラクタル）

課題　模様・パターンを制作してみる

- 任意の手段で模様・パターンを作成してください。
- 作成した模様のアピールポイント、作った感想などを書いてください。
- その他、わかったこと・わかりにくかったことなどがあれば教えてください。
- 上記をまとめてpdfで提出してください。

作成手段例

- 各種アプリ
- 手書き
- プログラムを書く
- AIに書かせる

課題　模様・パターンを制作してみる

ポイント

- 鏡や軸（鏡映軸・回転軸・平行移動軸）がどこにあるかを意識する
- モチーフに”見立て”を用いてみる（動植物は定番）
- もちろん純粋に幾何学的なパターンでもよい

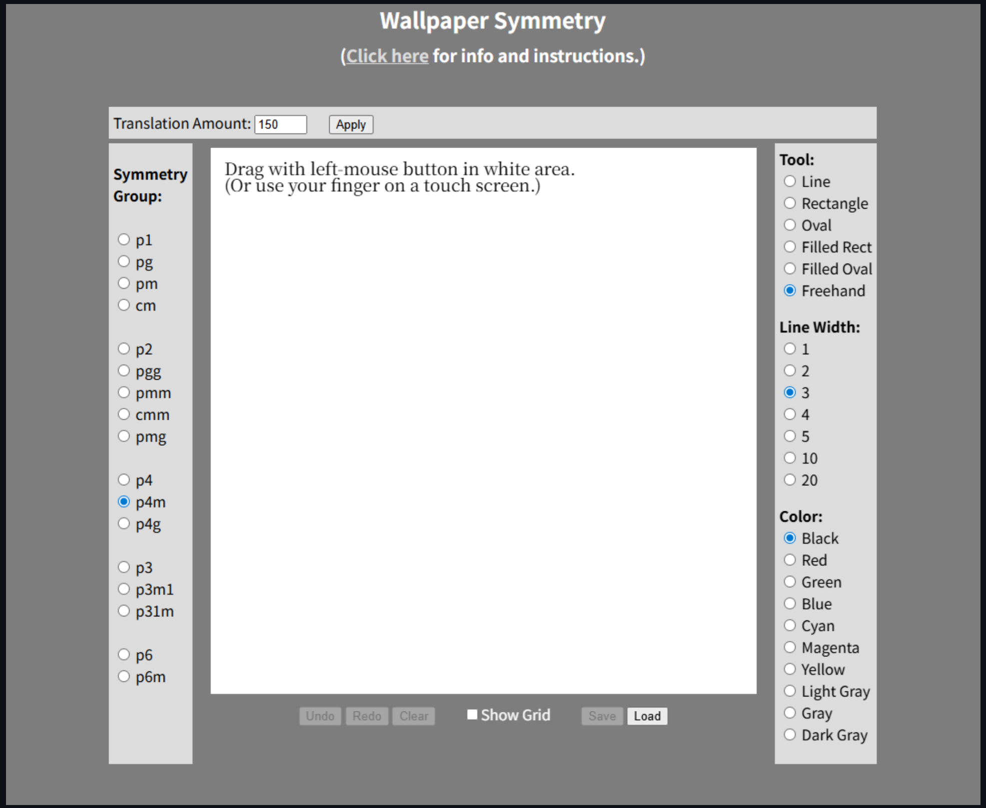
アプリケーションの例

- Wallpaper Symmetry
  壁紙群に基づき描画することのできるアプリケーション
- iOrnalemt Pro (iOS)
  壁紙群・双曲・球面まで対応しているiOS専用アプリケーション
- SingSurf Wallpaper
  写真を元に壁紙群のパターンを描画するアプリケーション
- Make Hyperbolic Tiling of Images
- Hyperbolic Tessellator

Wallpaper Symmetry

最低限の機能がそろっている

- 左パネル　17種類の壁紙群を選択
- 右パネル　ペン設定
- Show Grid　簡易的なグリッド表示
- p3m1とp31mが入れ替わっているので注意（おそらく勘違い）

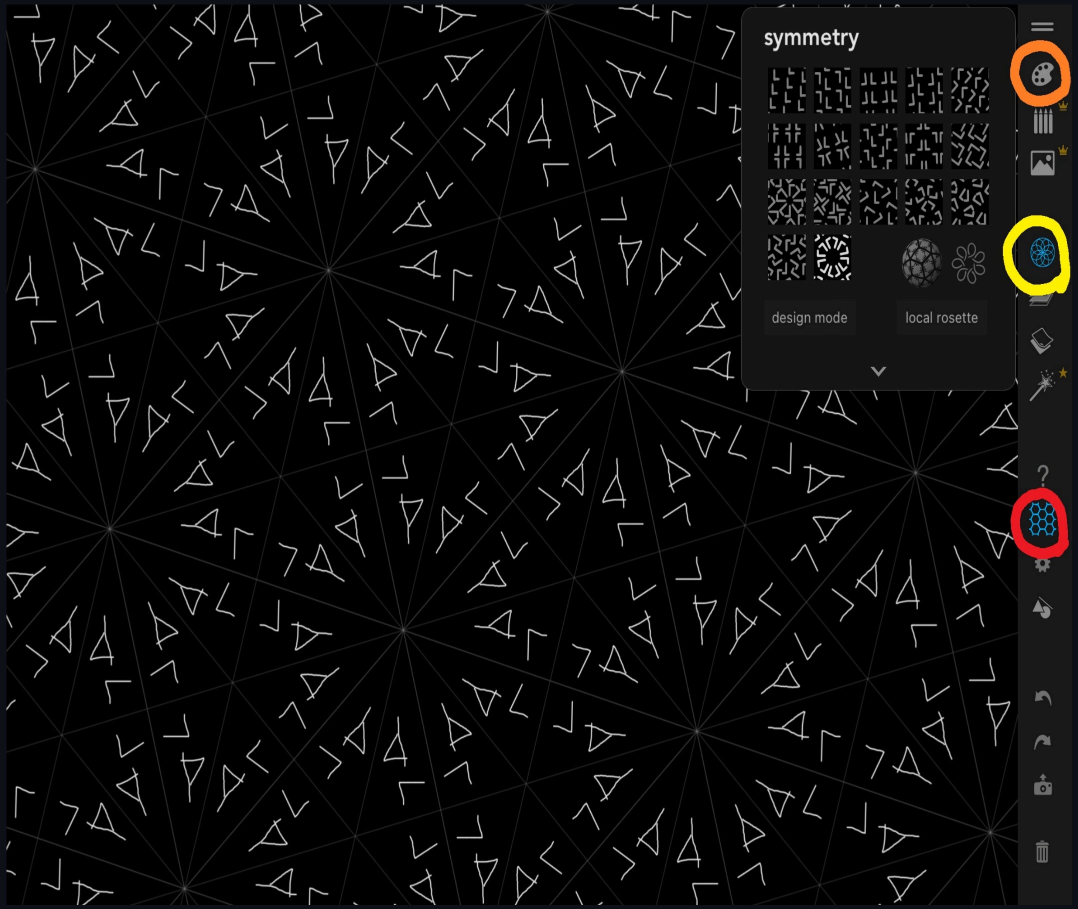


iOrnament Pro

iOS端末を持っている場合お勧め

- 赤丸　グリッド表示
- 橙丸　ペン設定
- 黄丸　壁紙群の種類を設定（１７種類）

有料機能で双曲タイリング・球面も扱える



AIにプログラムを書かせる

画像生成AIでタイル張りのルールを守って描画させることは難しい
→タイル張りを行うプログラムをAIに書かせる

ツール

- ChatGPT, Gemini
  WebUI上でアプリの製作が可能
- codex, Gemini cli, GitHub Copilot

AIにプログラムを書かせる

うまく実装させるコツ
→計画させてから実行させる

- まずAIに計画を立てさせる
- 計画をAIに相談しながらブラッシュアップする
  - インタビューしてもらうのも有効
- 実装を行ってもらう

さらに学ぶなら

- https://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group
  壁紙群についてまとまっている
- 装飾パターンの法則 http://www.sangensha.co.jp/allbooks/index/376.htm
  数学的分類から実際にデザインに落とし込む方法までを網羅
- インドラの真珠
  最初に紹介したフラクタル図形を描くための基礎知識が得られる