Ejemplo de cálculo de polinomios de Lagrange

En varios soportes, se calcula el polinomio interpolador de Lagrange de una función conocida en un intervalo y el error cometido.

Consideramos la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\text{sen}(3x)$. En el intervalo $[0,\pi/4]$, creamos el soporte discreto $\{x_0=0, x_1=\pi/4\}$. Queremos obtener los polinomios de base de Lagrange asociados a este soporte y el polinomio interpolador de Lagrange de la función.

Para ello, aplicamos la fórmula que nos define los polinomios de base de Lagrange de grado n:

$$L_i=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

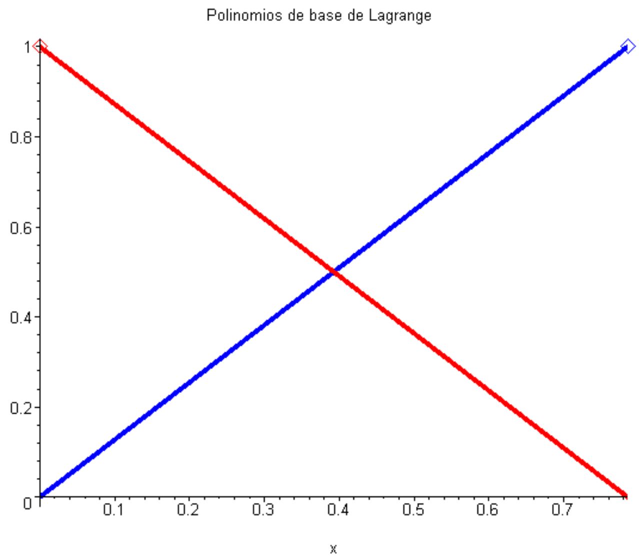
Al tener 2 puntos en el soporte ($n+1$ puntos), implica $n=1$. Por lo tanto, j va de 0 a 1, y:

$$L_0=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{1}\frac{x-x_j}{x_0-x_j}=\frac{x-x_1}{x_0-x_1},\ L_1=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{1}\frac{x-x_j}{x_1-x_j}=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

Con los valores de los puntos del soporte, tenemos

$$L_0=\frac{x-\pi/4}{0-\pi/4}=-4\frac{x-\pi/4}{\pi},\ L_1=\frac{x-0}{\pi/4-0}=4\frac{x}{\pi}$$

Representamos gráficamente estos 2 polinomios de base de Lagrange:



Observamos que se verifican las 2 propiedades de los polinomios de base de Lagrange:

$$L_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}0 \text{ si } i\neq j\\ 1 \text{ si } i=j\end{cases},\ \forall x\in[x_0,x_n]\ \sum_{i=0}^{n}L_i(x)=1$$

Ahora queremos la expresión del polinomio interpolador de Lagrange en este soporte. Para ello, aplicamos la fórmula que nos da el polinomio de Lagrange de grado n:

$$p_n = \sum_{i=0}^{n} f_i L_i$$

donde f_i representa el valor que toma la función en el punto de soporte x_i: $f_i = f(x_i)$.

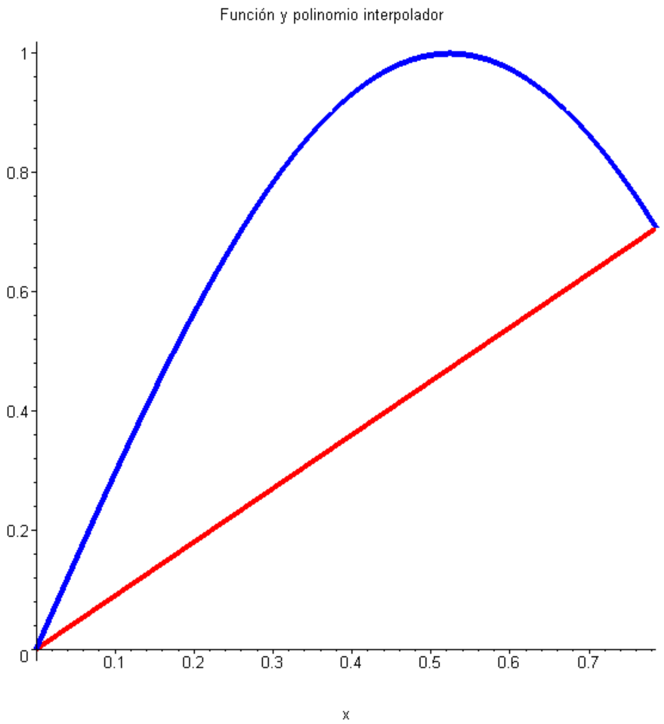
En nuestro caso, $n = 1$ y $p_1 = f_0 L_0 + f_1 L_1$. Ya hemos calculado los polinomios de base Lagrange, y nos queda evaluar la función en los puntos del soporte:

$$f_0 = f(x_0) = \text{sen}(3\times 0) = 0,\ f_1 = f(x_1) = \text{sen}(3\pi/4) = \sqrt{2}/2$$

Por tanto

$$p_1 = 0\times(-4)\frac{x-\pi/4}{\pi} + \frac{\sqrt{2}}{2} 4 \frac{x}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} x = 0,900x$$

La representación gráfica de la función (azul) y del polinomio interpolador de Lagrange (rojo) es



Observamos que la aproximación obtenida no es muy buena…

Vamos a ver cuál es el error de aproximación que hemos cometido. Para ello, aplicamos la fórmula del error de interpolación de Lagrange

$$E(x) = \frac{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}{(n+1)!} \frac{d^{(n+1}f}{dx^{n+1}}(\xi_x)$$

En nuestro caso, con $n=1$ y los puntos del soporte tenemos

$$E(x)=\frac{\prod_{i=0}^{1}(x-x_i)}{2}\frac{d^{(1+1}f}{dx^{1+1}}(\xi_x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2}\frac{d^2f}{dx^2}(\xi_x)=\frac{x(x-\pi/4)}{2}\frac{d^2f}{dx^2}(\xi_x)$$

La segunda derivada de la función es

$$\frac{d^2f}{d\xi_x{}^2}(\xi_x)=\frac{d\left(\dfrac{df}{d\xi_x}\right)}{d\xi_x}(\xi_x)=\frac{d\left(3\cos(3\xi_x)\right)}{d\xi_x}=-9\operatorname{sen}(3\xi_x)$$

Con lo cual tenemos la expresión del error:

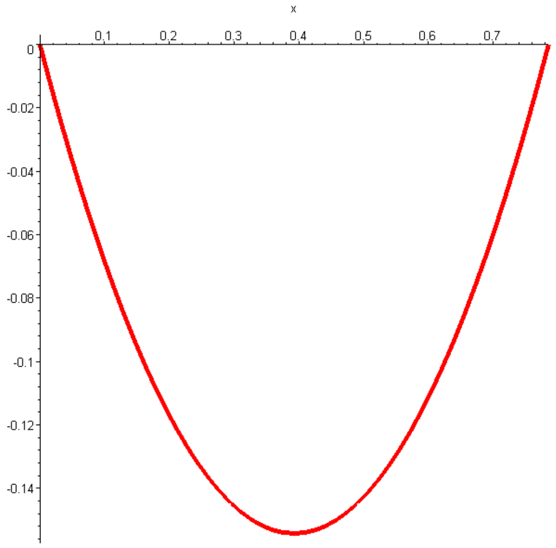
$$E(x)=\frac{-9}{2}x\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen}(3\xi_x)$$

Vamos a ver cuál es el error máximo que podemos cometer. Para ello, buscamos una cota de esta última relación, en valor absoluto en el intervalo de trabajo. En ella aparecen dos expresiones, una en la variable x, que llamamos función g, y la otra en la variable ξ_x, que llamamos función h. Para encontrar esa cota necesitamos buscar una cota del valor absoluto de cada una de estas 2 funciones.

Empezamos estudiando la función en x

$$g(x)=x\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=x^2-\frac{\pi}{4}x$$

Alcanza su máximo en unos de los puntos extremos del intervalo o en un punto estacionario (podría ser también en los puntos en los que no estuviera diferenciable, pero no existen). Dibujamos esta función:



Los puntos estacionarios se determinan resolviendo la ecuación de anulación de la derivada primera de g:

$$\frac{dg}{dx}(x) = 2x - \frac{\pi}{4} = 0$$

Esta ecuación tiene la raíz $x = \pi/8$, que pertenece al intervalo $\left[0, \pi/4\right]$

Comparamos el valor absoluto de g en el punto estacionario y en los extremos del intervalo:

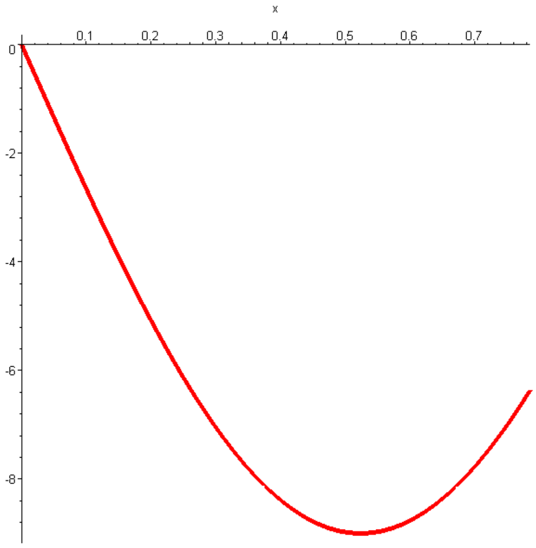
$$g\left(\frac{\pi}{8}\right) = \left(\frac{\pi}{8}\right)^2 - \frac{\pi}{4}\frac{\pi}{8} = \frac{\pi^2}{64} - \frac{\pi^2}{32} = \frac{-\pi^2}{64} = -0{,}154\,, \qquad g(0) = (0)^2 - \frac{\pi}{4} \times 0 = 0\,,$$
$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{\pi}{4}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi^2}{16} = 0$$

El máximo, en valor absoluto, es igual a 0,154.

Seguimos con la función $h(\xi_x)$

$$h(\xi_x) = -9\,\mathrm{sen}(3\xi_x)$$

Alcanza su máximo en unos de los puntos extremos del intervalo o en un punto estacionario (podría ser también en los puntos en los que no estuviera diferenciable, pero no existen). Su representación gráfica es



Los puntos estacionarios se determinan resolviendo la ecuación de anulación de la derivada primera de h:

$$\frac{dh}{dx}(\xi_x) = -27\cos(3\xi_x) = 0$$

Esta ecuación tiene la raíz que pertenece al intervalo $[0, \pi/4]$: $x = \pi/6$.

Comparamos el valor absoluto de h en el punto estacionario y en los extremos del intervalo:

$$h\left(\frac{\pi}{6}\right) = -9\,\mathrm{sen}\left(3\frac{\pi}{6}\right) = -9\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -9\,, \qquad h(0) = -9\,\mathrm{sen}(3\times 0) = -9\,\mathrm{sen}(0) = 0\,,$$

$$h\left(\frac{\pi}{4}\right) = -9\,\mathrm{sen}\left(3\frac{\pi}{4}\right) = -9\frac{\sqrt{2}}{2} = 6,364$$

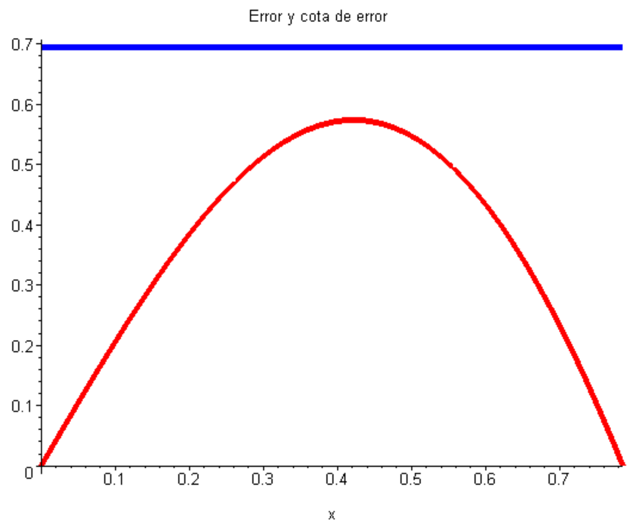
El máximo, en valor absoluto, es igual a 9.

Así, la cota del valor absoluto del error es

$$|E(x)| \leq \frac{9}{2}0,154 = 0,694$$

Esto significa que, como mucho, en el intervalo de trabajo cometemos un error de 0,694 al sustituir la función por el polinomio interpolador.

Ahora dibujamos en la misma gráfica la función de error, $|f(x) - p_1(x)|$, y la cota de error en el intervalo:



Observamos que la función de error no supera la cota de error en el intervalo.

Sin embargo, la aproximación se puede mejorar. Por ejemplo, podemos considerar un soporte con más puntos.

Consideramos 3 puntos en el soporte: $\{x_0 = 0, x_1 = \pi/8, x_2 = \pi/4\}$ y $n = 2$.

Siguiendo el mismo proceso, vamos a obtener los polinomios de base de Lagrange asociados a este soporte, el polinomio interpolador de Lagrange de la función y la cota de error en el intervalo.

Los polinomios de base de Lagrange son:

$$L_0 = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{2} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \frac{x - x_2}{x_0 - x_2}, \qquad L_1 = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{2} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2},$$

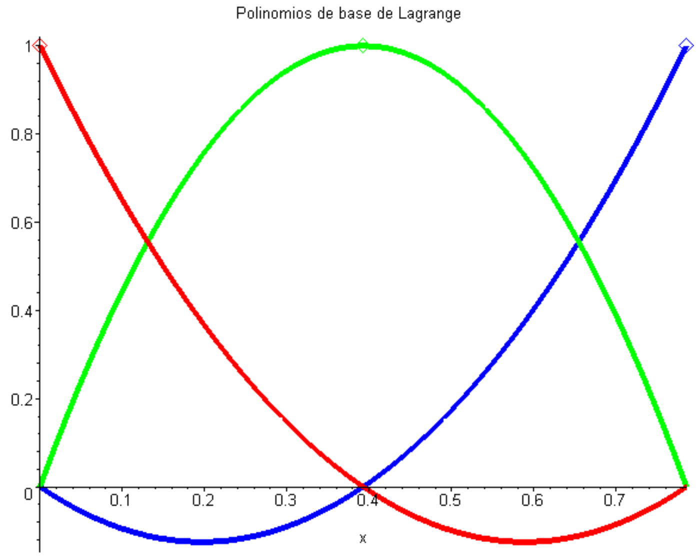
$$L_2 = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{2} \frac{x - x_j}{x_2 - x_j} = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

que, con los valores de los puntos del soporte, se expresan

$$L_0 = \frac{x - \pi/8}{0 - \pi/8} \frac{x - \pi/4}{0 - \pi/4} = 32 \frac{(x - \pi/8)(x - \pi/4)}{\pi^2},$$

$$L_1 = \frac{x - 0}{\pi/8 - 0} \frac{x - \pi/4}{\pi/8 - \pi/4} = -64 \frac{x(x - \pi/4)}{\pi^2}, \quad L_2 = \frac{x - 0}{\pi/4 - 0} \frac{x - \pi/8}{\pi/4 - \pi/8} = 32 \frac{x(x - \pi/8)}{\pi^2}$$

Representamos gráficamente estos 3 polinomios de base de Lagrange:



Esta vez también, observamos que se verifican las 2 propiedades de los polinomios de base de Lagrange:

$$L_i\left(x_j\right)=\delta_{ij}=\begin{cases}0 \text{ si } i\neq j\\ 1 \text{ si } i=j\end{cases},\ \forall x\in\left[x_0,x_n\right]\ \sum_{i=0}^{n}L_i\left(x\right)=1$$

Ahora el polinomio interpolador de Lagrange es $p_2=f_0L_0+f_1L_1+f_2L_2$. La función en los puntos del soporte toma los valores:

$$f_0=f\left(x_0\right)=\text{sen}(3\times 0)=0\,,\ f_1=f\left(x_1\right)=\text{sen}(3\pi/8)\,,\ f_1=f\left(x_1\right)=\text{sen}(3\pi/4)=\sqrt{2}/2$$

Por tanto

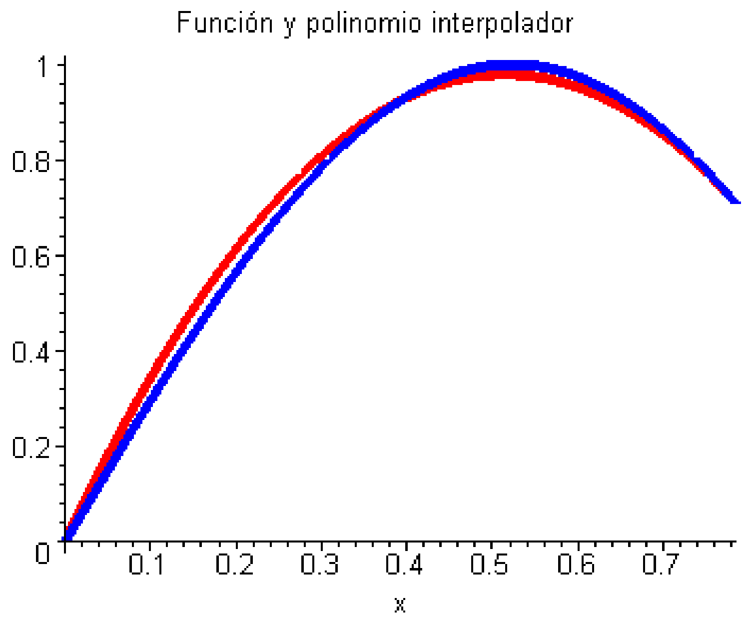
$$p_2=0\times 32\frac{\left(x-\pi/8\right)\left(x-\pi/4\right)}{\pi^2}+\text{sen}(3\pi/8)\times\left(-64\right)\frac{x\left(x-\pi/4\right)}{\pi^2}+\frac{\sqrt{2}}{2}32\frac{x\left(x-\pi/8\right)}{\pi^2}$$

$$p_2=\frac{-64\,\text{sen}(3\pi/8)}{\pi^2}\left(x^2-\frac{\pi}{4}x\right)+\frac{16\sqrt{2}}{\pi^2}\left(x^2-\frac{\pi}{8}x\right)$$

$$p_2=\left(\frac{-64\,\text{sen}(3\pi/8)}{\pi^2}+\frac{16\sqrt{2}}{\pi^2}\right)x^2+\left(\frac{16\,\text{sen}(3\pi/8)}{\pi}-\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\right)x$$

$$p_2=-3{,}698x^2+3{,}805x$$

La representación gráfica de la función (azul) y del polinomio interpolador de Lagrange (rojo) es



Observamos que la aproximación obtenida es bastante buena ya.

El error de aproximación viene dado ahora por

$$E(x)=\frac{\prod_{i=0}^{2}(x-x_i)}{3!}\frac{d^{(2+1}f}{dx^{2+1}}(\xi_x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{6}\frac{d^3f}{dx^3}(\xi_x)=\frac{x(x-\pi/8)(x-\pi/4)}{6}\frac{d^3f}{dx^3}(\xi_x)$$

La derivada que interviene es

$$\frac{d^3f}{d\xi_x^{\ 3}}(\xi_x)=\frac{d\left(\frac{d^2f}{d\xi_x^{\ 2}}\right)}{d\xi_x}(\xi_x)=\frac{d\left(-9\,\mathrm{sen}(3\xi_x)\right)}{d\xi_x}=-27\cos(3\xi_x)$$

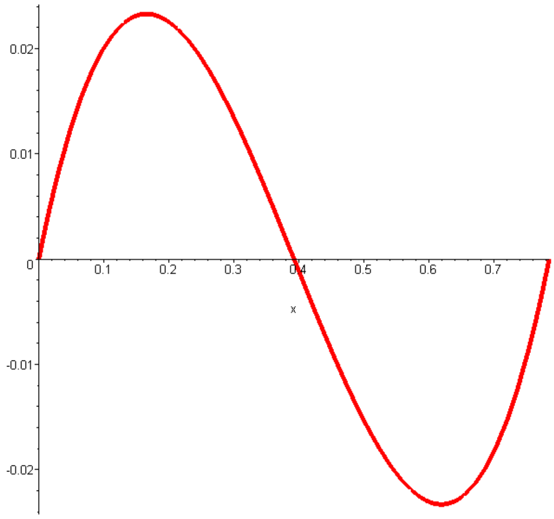
Y la expresión del error se escribe:

$$E(x)=\frac{-27}{6}x(x-\pi/8)(x-\pi/4)\cos(3\xi_x)$$

Definimos la función en x

$$g(x)=x(x-\pi/8)(x-\pi/4)=x^3-\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\right)x^2+\frac{\pi^2}{32}x$$

y dibujamos su gráfica



Los puntos estacionarios vienen determinados por la ecuación:

$$\frac{dg}{dx}(x)=3x^2-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)x+\frac{\pi^2}{32}=0$$

Esta ecuación tiene las raíces

$$x=\frac{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)^2-4\times3\times\frac{\pi^2}{32}}}{2\times3}=\frac{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)^2-3\times\frac{\pi^2}{8}}}{2\times3}$$

$$x=\left(\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{12}\right)\pm\frac{1}{6}\sqrt{\frac{3\pi^2}{16}}=\frac{3\pi}{24}\pm\frac{\pi}{24}\sqrt{3}=\frac{\pi}{8}\pm\frac{\pi}{24}\sqrt{3}=0,619 \text{ y } 0,166$$

Ambas raíces pertenecen al intervalo $[0,\pi/4]$

El valor de g en los puntos estacionarios y en los extremos del intervalo es:

$$g\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{24}\sqrt{3}\right)=\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{24}\sqrt{3}\right)^3-\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{24}\sqrt{3}\right)^2+\frac{\pi^2}{32}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{24}\sqrt{3}\right)=\ldots=-0,0233$$

,

$$g\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{24}\sqrt{3}\right)=\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{24}\sqrt{3}\right)^3-\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{24}\sqrt{3}\right)^2+\frac{\pi^2}{32}\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{24}\sqrt{3}\right)=\ldots=0,0233,$$

$$g(0)=(0)^3-\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\right)(0)^2+\frac{\pi^2}{32}(0)=0,$$

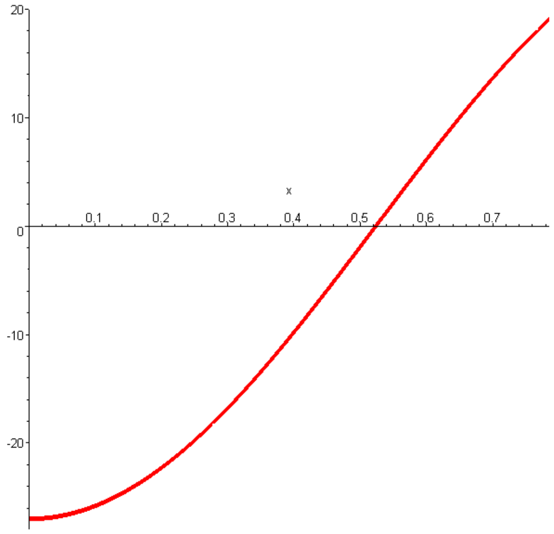
$$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\pi}{4}\right)^3-\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{\pi^2}{32}\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$$

El máximo, en valor absoluto, es igual a 0,0233.

Definimos la función $h(\xi_x)$

$$h(\xi_x) = -27\cos(3\xi_x)$$

Y dibujamos su gráfica



Los puntos estacionarios vienen determinados por la ecuación:

$$\frac{dh}{dx}(\xi_x) = 81\,\mathrm{sen}(3\xi_x) = 0$$

Esta ecuación tiene la raíz 0 que pertenece al intervalo $[0, \pi/4]$.

El valor absoluto de h en el punto estacionario y en los extremos del intervalo es:

$$h(0) = -27\cos(3\times 0) = -27\,,\; h\left(\frac{\pi}{4}\right) = -27\cos\left(3\frac{\pi}{4}\right) = -27\frac{\sqrt{2}}{2} = 19,0919$$

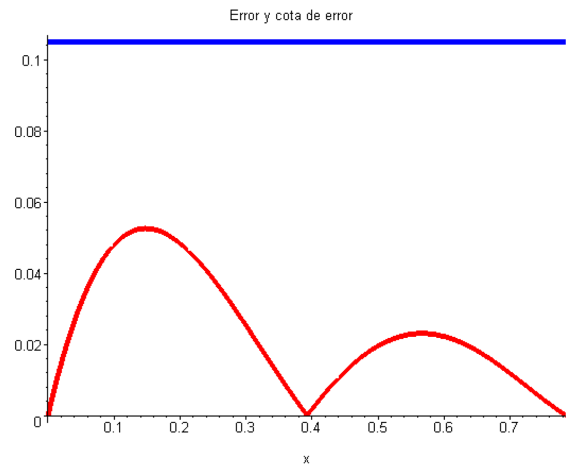
El máximo, en valor absoluto, es igual a 27.

Así, la cota del valor absoluto del error es

$$\left|E(x)\right| \le \frac{27}{6}0,0233 = \frac{9}{2}0,0233 = 0,105$$

Esto significa que, como mucho, en el intervalo de trabajo cometemos un error de 0,105 (menos de la sexta parte del error máximo cometido con el soporte de 2 puntos) al sustituir la función por el polinomio interpolador.

La gráfica de la función de error, $\left|f(x) - p_2(x)\right|$ y de la cota de error en el intervalo es:



La función de error no supera la cota de error en el intervalo.

Observamos la clara mejora de la interpolación al añadir un punto al soporte.

Para añadir más puntos, dejamos que lo haga Maple (o Matlab), sin antes dejar de comprobar que los cálculos llevados a cabo en los 2 soportes coinciden con los nuestros hechos a mano…

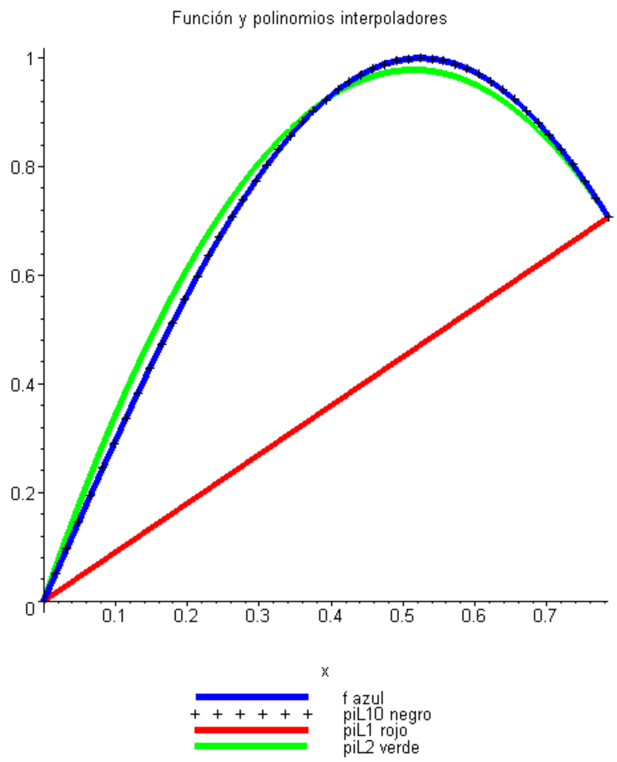
…

… Bien, obtenemos los mismos resultados.

Podemos plantear la existencia de un soporte con $n = 10$ (11 puntos equidistantes). El polinomio interpolador que se obtiene es

$$p_{10} = -0,0089x^{10} + 0,0739x^{9} - 0,03x^{8} - 0,42x^{7} + 2,0275x^{5} - 0,0007x^{4} - 4,5x^{3} + 0,000005x^{2} + 3x$$

Dibujamos los 3 polinomios interpoladores y la función en la misma gráfica:



Observamos la clara mejora de la interpolación al añadir puntos al soporte.

Los polinomios de Lagrange aproximan la función en un intervalo. Tienen su validez en el intervalo. Existe una diferencia fundamental con los polinomios de Taylor, que tienen una validez local, en el entorno de un punto… De hecho, el error cometido con las 2 aproximaciones se parece pero es distinto. Esta diferencia refleja el dominio de validez de cada uno.

$E(x)=\frac{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}{(n+1)!}\frac{d^{(n+1}f}{dx^{n+1}}(\xi_x)$ en el caso del polinomio interpolador de Lagrange, y $E(x)=\frac{(x-x_a)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{d^{(n+1}f}{dx^{n+1}}(\xi_x)$ en el caso del desarrollo en serie de Taylor 1D.