

枚举 — 基本思想

Enumerate

郭 炜 刘家瑛

北京大学



枚举

- 基于已有知识进行答案猜测的一种问题求解策略
 - 例如: 求小于 N 的最大素数
 - 找不到一个数学公式, 使得根据 N 就可以计算出这个素数
 - $N-1$ 是素数吗? $N-2$ 是素数吗?
 - $N-K$ 是素数的充分必要条件:
 $N-K$ 不能被任何一个大于1, 小于 $N-K$ 的素数整除
- 判断 $N-K$ 是否是素数的问题
- 转化为求小于 $N-K$ 的全部素数



枚举

■ 解决办法

- 2是素数, 记为 PRIM_0
- 根据 $\text{PRIM}_0, \text{PRIM}_1, \dots, \text{PRIM}_k$, 寻找比 PRIM_k 大的最小素数 PRIM_{k+1}
- 如果 PRIM_{k+1} 大于 N , 则 PRIM_k 是我们需要找的素数, 否则继续寻找



枚举的思想: 猜测

枚举

从可能的集合中一一列举各元素

- 根据所知道的**知识**, 给一个猜测的答案
- 2是素数

枚举算法

- 对问题可能解集合的每一项
- 根据问题给定的检验条件判定哪些是成立的
- 使条件成立的即是问题的解



枚举的思想: 猜测

枚举过程

- 判断猜测的答案是否正确
→ 2是小于N的最大素数吗?
- 进行新的猜测: 有两个关键因素要注意
 - 猜测的结果必须是前面的猜测中**没有出现过的**. 每次猜测是素数一定比已经找到的素数大
 - 猜测的过程中要**及早排除错误的**答案. 除2之外, 只有奇数才可能是素数



枚举中三个关键问题

问题一

给出解空间, 建立简洁的数学模型

可能的情况是什么

→ 模型中变量数尽可能少, 它们之间相互独立

- “求小于 N 的最大素数” 中的条件是 “ n 不能被 $[2, n)$ 中任意一个素数整除”
- 而不是 “ n 不能被 $[2, n)$ 中任意一个整数整除”



枚举中三个关键问题

问题二

减少搜索的空间

- 利用知识缩小模型中各变量的取值范围, 避免不必要的计算

→ 减少代码中循环体执行次数

- 除2之外, 只有奇数才可能是素数, $\{2, 2*i+1 | 1 \leq i, 2*i+1 < n\}$



枚举中三个关键问题

- ▲ 问题三
- ▲ 采用合适的搜索顺序
- ▲ 搜索空间的遍历顺序要与模型中条件表达式一致
 - 对 $\{2, 2*i+1 | 1 \leq i, 2*i+1 < n\}$ 按照从小到大的顺序



中国古代的枚举问题

百钱百鸡问题

- 鸡翁一值钱五, 鸡母一值钱三, 鸡雏三值钱一.
百钱买百鸡, 问鸡翁, 鸡母, 鸡雏各几何

—— 张丘建 《算经》

求解方法:

- 先构造可能的解的集合 $S=\{(X,Y,Z)|0\leq X,Y,Z\leq 100\}$
X, Y, Z分别代表买公鸡, 母鸡和小鸡的只数
- 然后验证条件 $X+Y+Z=100$, $5X+3Y+Z/3=100$
- 复杂度: $O(100^2)$



中国古代的枚举问题

百钱百鸡问题

```
for (int x=0; x<=100; x++)  
    for (int y=0 ; y<=100-x; y++){  
        z = 100 - x - y;  
        if (z % 3==0) then  
            if (5*x+3*y+z/3==100)  
                then (x,y,z) is solution  
    }
```