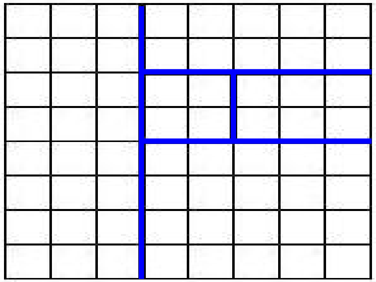
递归 — 棋盘分割

郭 炜 刘家瑛

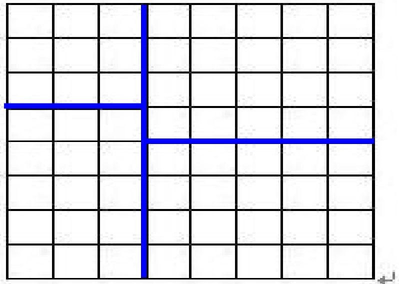
棋盘分割

- 将一个8*8的棋盘进行如下分割:
- 将原棋盘割下一块矩形棋盘并使剩下部分也是矩形,
- 再将剩下的部分继续如此分割, 这样割了(n-1)次后,
- 连同最后剩下的矩形棋盘共有n块矩形棋盘.

(每次切割都只能沿着棋盘格子的边进行)



允许的分割方案



不允许的分割方案

- 原棋盘上每一格有一个分值，
  一块矩形棋盘的总分为其所含各格分值之和
- 现在需要把棋盘按上述规则分割成 n 块矩形棋盘，
  并使各矩形棋盘总分的均方差最小

均方差 $\boxed{\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n}}}$ ，其中平均值 $\boxed{\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}}$ ，

x_i 为第 i 块矩形棋盘的总分

请编程对给出的棋盘及 n，求出 σ 的最小值

- 输入

第1行为一个整数n ($1 < n < 15$)
第2行至第9行每行为8个小于100的非负整数, 表示棋盘上相应格子的分值

每行相邻两数之间用一个空格分隔

- 输出

仅一个数, 为σ (四舍五入精确到小数点后三位)

- 样例输入

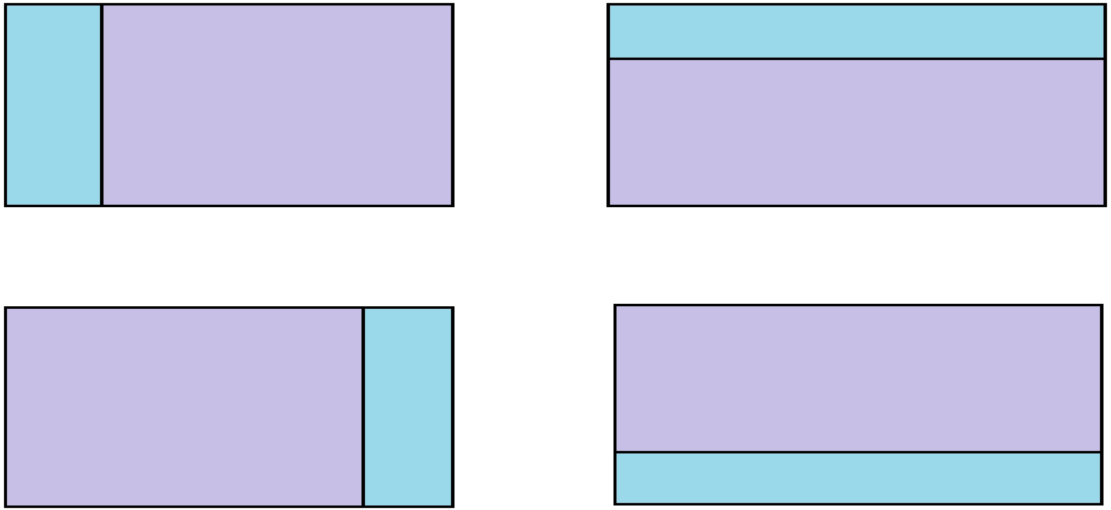
```
3
1 1 1 1 1 1 1 3
1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 1 1 1 1 0
1 1 1 1 1 1 0 3
```

- 样例输出

```
1.633
```

问题分析 (1)

- 每一次分割有以下4种方法:



$f(k, \text{棋盘}) = \{ f(1, \text{割下的棋盘}) + f(k-1, \text{待割的棋盘})\} \quad (k \geq 2)$

问题分析 (2)

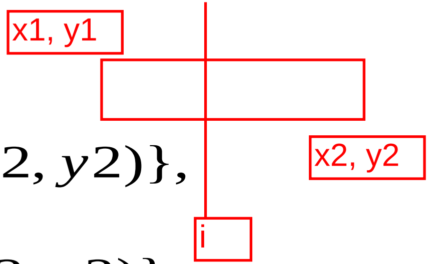
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n}}$$

- 如右式，若要求出最小方差，只需要求出最小的$\sum x_i^2$

$$\sum (x_i - \overline{x})^2$$
$$= \sum (x_i^2 - 2x_i \overline{x} + \overline{x}^2)$$
$$= \sum x_i^2 - \sum 2x_i \overline{x} + n\overline{x}^2$$
$$= \sum x_i^2 - 2n\overline{x}^2 + n\overline{x}^2$$
$$= \sum x_i^2 - n\overline{x}^2$$

问题分析 (3)

- 设fun(n,x1,y1,x2,y2)为以(x1, y1)为左上角, (x2, y2)为右下角的棋盘分割成n份后的最小平方和
- 那么fun(n,x1,y1,x2,y2)=



$$
\begin{aligned}
\min\{&\min_{i=x1}^{x2-1}\{fun(n-1,x1,y1,i,y2)+fun(1,i+1,y1,x2,y2)\},\\
&\min_{i=x1}^{x2-1}\{fun(1,x1,y1,i,y2)+fun(n-1,i+1,y1,x2,y2)\},\\
&\min_{i=y1}^{y2-1}\{fun(n-1,x1,y1,x2,i)+fun(1,x1,i+1,x2,y2)\},\\
&\min_{i=y1}^{y2-1}\{fun(1,x1,y1,x2,i)+fun(n-1,x1,i+1,x2,y2)\}\}
\end{aligned}
$$

其中fun(1,x1,y1,x2,y2)等于该棋盘内分数和的平方

问题分析 (3)

- 只想到这个还不够, TLE!
- 对于某个fun(n,x1,y1,x2,y2)来说, 可能使用多次这个值, 所以每次都计算太消耗时间
- 解决办法: 记录表
  - 用res[n][x1][y1][x2][y2]来记录fun(n,x1,y1,x2,y2)
  - res初始值统一为-1
  - 当需要使用fun(n,x1,y1,x2,y2)时, 查看res[n][x1][y1][x2][y2]
    - 如果为-1, 那么计算fun(n,x1,y1,x2,y2), 并保存于res[n][x1][y1][x2][y2]
    - 如果不为-1, 直接返回res[n][x1][y1][x2][y2]

参考程序

```
int s[9][9];    //每个格子的分数
int sum[9][9];   //(1,1)到(i,j)的矩形的分数之和
int res[15][9][9][9][9];   //fun的记录表

int calSum(int x1,int y1,int x2,int y2)//(x1,y1)到(x2,y2)的矩形的分数之和
{
    return sum[x2][y2]-sum[x2][y1-1]-sum[x1-1][y2]+sum[x1-1][y1-1];
}
```

```
int fun(int n,int x1,int y1,int x2,int y2)
{
    int t, a, b, c, e, MIN=10000000;
    if(res[n][x1][y1][x2][y2] !=-1)
        return res[n][x1][y1][x2][y2];
    if(n==1) {
        t=calSum(x1,y1,x2,y2);
        res[n][x1][y1][x2][y2]=t*t;
        return t*t;
    }
```

```
    for(a=x1;a<x2;a++) {
        c=calSum(a+1,y1,x2,y2);
        e=calSum(x1,y1,a,y2);
        t=min(fun(n-1,x1,y1,a,y2)+c*c, fun(n-1,a+1,y1,x2,y2)+e*e);
        if(MIN>t) MIN=t;
    }
    for(b=y1;b<y2;b++) {
        c=calSum(x1,b+1,x2,y2);
        e=calSum(x1,y1,x2,b);
        t=min(fun(n-1,x1,y1,x2,b)+c*c, fun(n-1,x1,b+1,x2,y2)+e*e);
        if(MIN>t) MIN=t;
    }
    res[n][x1][y1][x2][y2]=MIN;
    return MIN;
}
```

```
int main() {
    memset(sum, 0, sizeof(sum));
    memset(res, -1, sizeof(res));  //初始化记录表
    int n;
    cin>>n;
    for (int i=1; i<9; i++)
        for (int j=1, rowsum=0; j<9; j++) {
            cin>>s[i][j];
            rowsum +=s[i][j];
            sum[i][j] += sum[i-1][j] + rowsum;
    }
    double result = n*fun(n,1,1,8,8)-sum[8][8]*sum[8][8];
    cout<<setiosflags(ios::fixed)<<setprecision(3)<<sqrt(result/(n*n))<<endl;
    return 0;
}
```