第九周作业

邓贤杰

2020 年 7 月 5 日

P255.2(1) 一致收敛，因为

极限函数

$$f(x) = 0$$

则

$$\left|\frac{1}{2^n + x^2}\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$$

P255.2(2) 一致收敛，因为

极限函数

$$f(x) = x^2$$

则

$$\left|\sqrt{x^4 + e^{-n}} - x^2\right| \leq \left|\frac{e^{-n}}{\sqrt{x^4 + e^{-n}} + x^2}\right| \leq e^{-n/2} \to 0$$

P270.1

(1)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)2^{n+1}}{n2^n} = \frac{1}{2}$$

故 $R = 2$

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k n!}{n^k(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

故 $R=\infty$

(3)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!n^n}{n!(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=e^{-1}$$

故 $R=e$

(4)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[(n+1)!]^2(2n)!}{n!^2(2n+2)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{1}{4}$$

故 $R=4$

2(2)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na^n}{(n+1)a^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)a}=\frac{1}{a}$$

故 $R=a$

$x=a$ 时

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

发散，故 a 取不到

$x=-a$ 时

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$$

收敛，故 $-a$ 取到

所以，收敛区间 $(-a,a)$，收敛域 $[-a,a)$

2(4)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2n(n+2)}=\frac{1}{2}$$

故 $R=2$

$x=2$ 时，由

$$\frac{n}{n+1}>\frac{1}{n+1}$$

有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$$

发散，故 2 取不到

$x=-2$ 时，由

$$\frac{n}{n+1}\to 1$$

有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$$

发散，故 -2 取不到

所以，收敛区间与收敛域均为 $(-2,2)$

2(6)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{-n-1}+5^{-n-1}}{3^{-n}+5^{-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{5}\right)^n}=\frac{1}{3}$$

故 $R=3$

$x=3$ 时，由

$$1+\left(\frac{3}{5}\right)^n\to 1$$

有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[1+\left(\frac{3}{5}\right)^n\right]$$

发散，故 3 取不到

$x=-3$ 时，由

$$1+\left(\frac{3}{5}\right)^n \to 1$$
$$-1-\left(\frac{3}{5}\right)^n \to -1$$

有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[1+\left(\frac{3}{5}\right)^n\right]$$

发散，故 -3 取不到

所以，收敛区间与收敛域均为 $(-3,3)$