第八周作业

邓贤杰

2020 年 6 月 29 日

P222.2

(1) 收敛，由比值判别法：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^5}{(n+1)!} \Bigg/ \frac{n^5}{n!}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4}{n^5} = 0 < 1$$

(2) 发散，由比值判别法：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{3(n+1)^2} \Bigg/ \frac{n!}{3n^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} = +\infty > 1$$

(7) 收敛，由比值判别法：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1000^(n+1)}{(n+1)!} \Bigg/ \frac{1000^n}{n!}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1000}{n+1} = 0 < 1$$

(9) 收敛，由比值判别法：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^{n+1}} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{(n+1)^2} \Bigg/ \frac{1}{3^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \left[\frac{(n+1)n}{(n+1)^2}\right]^{n^2} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n+1}$$
$$= \frac{1}{3} e^{-1} e^2 = \frac{e}{3} < 1$$

P234.1

(1) 绝对收敛. 由于:

$$\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n)^2}\right| = \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4n^2}$$

为收敛的 p-级数

(2) 当 $p \leq 1$ 时为条件收敛，$p > 1$ 时为绝对收敛.
a.$p > 1$:

$$\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^p}\right| = \frac{1}{(2n-1)^p} < \frac{1}{2^p(n-1)^p}$$

为收敛的 p-级数
b.$p \leq 1$，由莱布尼兹判别法:
$\frac{1}{(2n-1)^p}$ 单调减
且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n-1)^p} = 0$$

故级数收敛
又

$$\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^p}\right| = \frac{1}{(2n-1)^p} > \frac{1}{2^p n^p}$$

为发散的 p-级数
故级数条件收敛

(4) 条件收敛
由莱布尼兹判别法:

$$\frac{\sqrt{n}-1}{n}$$

单调减
且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}-1}{n} = 0$$

故级数收敛

又

$$\left|(-1)^n\frac{\sqrt{n}-1}{n}\right|=\frac{\sqrt{n}-1}{n}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}>\frac{2}{n}-\frac{1}{n}=\frac{1}{n}(n>4)$$

为发散的 p-级数

故级数条件收敛

(5) 条件收敛

由莱布尼兹判别法：

$\frac{2n+1}{n(n+1)}$ 单调减

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}=0$$

故级数收敛

又

$$\left|(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}\right|=\frac{2n+1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$$

为两发散的 p-级数之和

故级数条件收敛