

基本信息: 尤洪亚 19楼114室 qizhengyou@stu.pku.edu.cn

习题课后答案 (或者邮件的时间)

- 作业说明:
1. 课可以不来, 作业一定要交
 2. 听课可以任选助教
 3. 作业正确率与分数正相关

课程内容概述:

18世纪之后的代数学 解方程

chap1

n 元1次方程 (线性方程组) \leadsto 线性代数

1元 n 次方程 \leadsto 抽象代数 (Abel, Galois)

线性代数

矩阵理论 (chap2; chap4; chap5.6)

行列式 矩阵定义与运算 矩阵的关系与标准型 (*)

线性空间理论 (chap3, 7, 8, 9)

线性空间, 映射; 双线性结构 (**)

(*) 集合之间可定义 Cartesian product (笛卡尔乘积).

集合 X 上的一个关系 R 是 $X \times X$ 的子集. 记 xRy 若 $(x, y) \in R$.

Eq. $(\mathbb{R}, =)$ (\mathbb{R}, \leq) $(\mathbb{R}, <)$ (\mathbb{Z}, \equiv_k)

称 R 为一个等价关系, 若 ① 自身 ② 对称 ③ 传递.

对 $x \in X$, 可定义其等价类 $[x]_R = \{y \in X : yRx\}$.

Prop. $(x \sim)$ 是等价关系果. $x, y \in X$. 或者 $[x] = [y]$, 或者 $[x] \cap [y] = \emptyset$.

从而 $\{[x] : x \in X\}$ 构成 X 的一个划分.

问题: ① 给 $x, y \in X$, 如何判断 $x \sim y$

Eq. (\mathbb{Z}, \equiv_3)
 $1403 \not\equiv_3 1701$

② 等价类 $[x]$ 中有没有最简单的元素?

$0, 1, 2$

(**): 结构是额外添加的

① 代数 + . x. 序 (字典序, 模长比大小) 几何 {平面向量}

结构性质及其之间的相容性



序 { 字典序: $z_1 \leq_d z_2, z_2 \leq_d z_1 \Rightarrow z_1 = z_2$
模长序: $z_1 \leq_n z_2, z_2 \leq_n z_1 \nRightarrow z_1 = z_2$

→ \mathbb{R} 上 $x_1 \leq x_2, 0 \leq y \Rightarrow x_1 y \leq x_2 y$

但在 $(\mathbb{C}, x. \leq_d)$ 上

$-i \leq_d 1, 0 \leq_d i$ 但 $1 \not\geq_d i$

(字典序与乘法相容性差)

解线性方程组

例1.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{pmatrix}$$

何时无解/有唯一解/有无穷多解?

消法
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 0 & -1 & -2 & a-3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{消法}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

数乘 (讨论讨论: $a \neq 1$ 能否数乘) \rightarrow

Case 1. $a = 1$

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 - 1 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 + 1 \\ 0 = b+1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Case 1.1 若 $b \neq -1$, 则无方程无解.

Case 1.2 若 $b = -1$, 则方程有无穷多解

Case 2. $a \neq 1$ 这时 $a-1 \neq 0$ 可以数乘

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

构成其解空间.

→
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{b+1}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

消法
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 + \frac{b+1}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 - 2 \cdot \frac{b+1}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{b+1}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{消法}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 + \frac{b+1}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 - 2 \cdot \frac{b+1}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{b+1}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = -1 + \frac{b+1}{a-1} \\ x_2 = 1 - 2 \cdot \frac{b+1}{a-1} \\ x_3 = \frac{b+1}{a-1} \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

例2. (2024秋 Midterm T2)

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 \\ 2 & -7 & -4 & 0 \\ 4 & -9 & a & 0 \\ 5 & b & -55 & 0 \end{pmatrix} \text{ 讨论解的情况.}$$

齐次方程一定有解, 只需讨论唯一性.

$$\tilde{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & a+20 & 0 \\ 0 & b+15 & -30 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & a+38 & 0 \\ 0 & 0 & 6b+60 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{唯一解} \Leftrightarrow a \neq -38 \text{ 或 } b \neq -10 \\ \text{无穷多解} \Leftrightarrow a = -38 \text{ 且 } b = -10 \end{array}$$

数域

例3. $K = \{a+b\sqrt{2}+ci+d\sqrt{2}i \mid a,b,c,d \in \mathbb{Q}\}$ 是数域.

证: 证 $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a+b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$ 是数域.

则 $K = \{x+yi \mid x,y \in L\}$. 验证四则运算封闭

$$\text{加、减: } (x_1+y_1i) \pm (x_2+y_2i) = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i \in K$$

$$\text{乘: } (x_1+y_1i)(x_2+y_2i) = (x_1x_2-y_1y_2) + (x_1y_2+x_2y_1)i \in K$$

$$\text{除: } \frac{1}{x+yi} = \frac{x-yi}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{-y}{x^2+y^2}i \in K.$$

思考: $K = \{a+b\sqrt[3]{2} \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$ 是不是数域?

$L = \{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4} \mid a,b,c \in \mathbb{Q}\}$ 是不是数域?

提示: 利用因式分解 $x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$.

行列式的计算

$$\text{例4. } D = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & a_n \end{vmatrix} \quad (n+1)$$

$$\# a_i \neq 0 (i \geq 1), \text{ 则 } D = \begin{vmatrix} A & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{vmatrix} = A a_1 \cdots a_n \quad \text{其中 } A = a_0 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}.$$

$$\# \exists i \text{ s.t. } a_i = 0. \text{ 则 } D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & a_1 & \ddots & \\ 0 & \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & \vdots & \vdots & 0 & a_n \end{vmatrix} = (-1)^{i+2} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & a_{i-1} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & 0 & a_{i+1} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{2i+3} \begin{vmatrix} a_1 & \cdots & a_{i-1} & a_{i+1} & \cdots & a_n \end{vmatrix} = - \prod_{k \neq i} a_k$$

例5. 设 $n \geq 2$. D 是一个元素均为 ± 1 的行列式

求证: (1) D 是偶数 (2) 在 $n=3$ 时, 求 D 的最大值.

(3) 在 $n \geq 3$ 时, 求证 $|D| \leq (n-1)! \cdot (n-1)$

证明: (1) $D = |a_{ij}| = \sum (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} \quad a_{ij} \in \{\pm 1\}$

将某个 a_{ij} 变号, D 变成一个偶数值; 所以 $D \equiv D_1 = |a_{ij}=1| = 0$.

(2) $n=3$ 时 $D = 6$ 个单项式求和, 每项 $= \pm 1$, 故 $D \leq 6$

若 $D=6$ 则 $\begin{cases} a_{11}a_{22}a_{33} = a_{12}a_{23}a_{31} = a_{13}a_{21}a_{32} = 1 \\ a_{13}a_{22}a_{31} = a_{12}a_{21}a_{33} = a_{11}a_{23}a_{32} = (-1) \end{cases}$ 全乘起来得 $\prod_{i,j} a_{ij}^2 = (-1)$ 矛盾.

例 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$.

(3) $n=3$ 时 $|D| \leq 4$. 设 n 时 $|D| \leq (n-1)! \cdot (n-1)$

则 $(n+1)$ 时, 按第 i 行展开 D 得 $|D| \leq (n-1)!(n-1) \cdot (n+1) = n!(n-1) + (n-1)!(n-1)$
 $= n! \cdot n - (n-1)! \leq n! \cdot n$ 完成归纳过程.

例6. 令 $D(t) = |f_{ij}(t)|$, $D_i(t)$ 是对第 i 行求导得到的行列式

求证 $\frac{d}{dt} D(t) = \sum_{i=1}^n D_i(t)$

证明: $D(t) = \sum (-1)^{\tau(i_1 \cdots i_n)} f_{1i_1} f_{2i_2} \cdots f_{ni_n}$

$\frac{d}{dt} D(t) = \frac{d}{dt} \left(\sum (-1)^{\tau(i_1 \cdots i_n)} f_{1i_1} \cdots f_{ni_n} \right) = \sum (-1)^{\tau} \frac{d}{dt} (f_{1i_1} \cdots f_{ni_n})$

$= \sum (-1)^{\tau} \left(f'_{1i_1} f_{2i_2} \cdots f_{ni_n} + f_{1i_1} f'_{2i_2} \cdots f_{ni_n} + \cdots + f_{1i_1} \cdots f'_{ni_n} \right) = \sum_{i=1}^n D_i(t)$