基本信息： 尤淇正 19楼114室 qizhengyou@stu.pku.edu.cn

习题课后答疑（或者邮件约时间）

作业说明： 1. 课可以不来，作业一定要交

2. 听课可以任选助教

3. 作业正确率与分数正相关

课程内容概述：

18世纪之后的代数学 解方程 $\begin{cases} \text{n元1次方程（线性方程组）chap1} \rightsquigarrow \text{线性代数} \\ \text{1元n次方程} \rightsquigarrow \text{抽象代数} \end{cases}$

(Abel, Galois)

线性代数 $\begin{cases} \text{矩阵理论 (chap2; chap 4; chap 5,6)} \\ \quad \text{行列式 矩阵定义与运算 矩阵的关系与标准型(*)} \\ \text{线性空间理论 (chap 3,7,8,9)} \\ \quad \text{线性空间，映射；额外的结构(**)} \end{cases}$

(*): 集合之间可定义 Cartesian product（笛卡儿乘积）.

集合 X 上的一个关系 R 是 $X\times X$ 的子集. 记 xRy 若 $(x,y)\in R$.

E.g. $(\mathbb{R},=)$ $(\mathbb{R},\le)$ $(\mathbb{R},<)$ $(\mathbb{Z},\equiv_k)$

称 R 是一个等价关系，若 ① 自反 ② 对称 ③ 传递.

对 $x\in X$. 可定义其等价类 $[x]_R=\{y\in X : yRx\}$.

Prop. $(X,\sim)$ 是等价关系集. $x,y\in X$. 或者 $[x]=[y]$，或者 $[x]\cap[y]=\phi$.

从而 $\{[x] : x\in X\}$ 构成 X 的一个划分.

问题：① 给 $x,y\in X$. 如何判断 $x\overset{?}{\sim}y$

② 等价类 $[x]$ 中有没有最简单的元素？

E.g. $(\mathbb{Z},\equiv_3)$

$1403 \not\equiv_3 1701$

0, 1, 2

(**): 结构是额外添加的

$\mathbb{C}$ 代数 $+, \times$. 序（字典序、模长比大小） 几何｛平面向量｝

运算基本性质及其之间的相容性

$\mathbb{R}$上 $x_1 \le x_2$, $0 \le y \Rightarrow x_1 y \le x_2 y$

但在 $(\mathbb{C}, \times, \le_d)$ 上

$-i \le_d 1$, $0 \le_d i$ 但 $1 \ge_d i$

（字典序与乘法相容性差）

序 $\begin{cases} \text{字典序: } z_1 \le_d z_2,\ z_2 \le_d z_1 \Rightarrow z_1 = z_2 \\ \text{模长序: } z_1 \le_n z_2,\ z_1 \le_n z_2 \not\Rightarrow z_1 = z_2 \end{cases}$

解线性方程组

例1. $$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{pmatrix}$$ 何时无解 / 有唯一解 / 有无穷多解？

$$\xrightarrow{\text{消法}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 0 & -1 & -2 & a-3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{消法}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

数乘（讨论标注：$a \ne 1$ 能否数乘）

Case 1. $a = 1$

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 - 1 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 + 1 \\ 0 = b+1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Case 1.1 若 $b \ne -1$，则原方程无解.

Case 1.2 若 $b = 1$，则原方程有无穷多解

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

构成其解空间.

Case 2. $a \ne 1$ 此时 $a-1 \ne 0$ 可以数乘

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{b+1}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{消法}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1+\frac{b+1}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1-2\cdot\frac{b+1}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{b+1}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{消法}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1+\frac{b+1}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1-2\cdot\frac{b+1}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{b+1}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = -1 + \frac{b+1}{a-1} \\ x_2 = 1 - 2\cdot\frac{b+1}{a-1} \\ x_3 = \frac{b+1}{a-1} \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

∎

例2. (2024秋 Midterm T2)

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}1 & -3 & -5 & 0\\ 2 & -7 & -4 & 0\\ 4 & -9 & a & 0\\ 5 & b & -55 & 0\end{pmatrix}$$ 讨论解的情形.

齐次方程一定有解. 只需讨论唯一性.

$$\tilde{A}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & -3 & -5 & 0\\ 0 & -1 & 6 & 0\\ 0 & 3 & a+20 & 0\\ 0 & b+15 & -30 & 0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & -3 & -5 & 0\\ 0 & 1 & -6 & 0\\ 0 & 0 & a+38 & 0\\ 0 & 0 & 6b+60 & 0\end{pmatrix}$$

唯一解 $\Leftarrow$ $a\neq-38$ 或 $b\neq-10$

无穷多解 $\Leftarrow$ $a=-38$ 且 $b=-10$

数域

例3. $K=\{a+b\sqrt{2}+ci+d\sqrt{2}i \mid a.b.c.d\in\mathbb{Q}\}$ 是一个数域.

证: 记 $L=\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\mid a.b\in\mathbb{Q}\}$. 是数域.

则 $K=\{x+yi\mid x.y\in L\}$. 验证四则运算封闭

加.减 $(x_1+y_1i)\pm(x_2+y_2i)=(x_1\pm x_2)+(y_1\pm y_2)i\in K$

乘 $(x_1+y_1i)(x_2+y_2i)=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)i\in K$

除 $\dfrac{1}{x+yi}=\dfrac{x-yi}{x^2+y^2}=\dfrac{x}{x^2+y^2}+\dfrac{-y}{x^2+y^2}i\in K$. ▨

思考: $K=\{a+b\sqrt[3]{2}\mid a.b\in\mathbb{Q}\}$ 是不是数域?

$L=\{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}\mid a.b.c\in\mathbb{Q}\}$ 是不是数域?

提示: 利用因式分解 $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$.

行列式的计算

例4. $D=\begin{vmatrix}a_0 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & a_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & a_n\end{vmatrix}$ (爪形)

若 $a_i\neq0\ (i\geq1)$. 则 $D=\begin{vmatrix}A & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & a_n\end{vmatrix}=Aa_1\cdots a_n$ 其中 $A=a_0-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$.

若 ∃ i s.t. $a_i=0$，则 $D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & & 1 \\ \vdots & a_1 & \ddots & & \\ 0 & & & & \\ 1 & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & a_n \end{vmatrix}$（$i+1$ 行）$=(-1)^{i+2}\begin{vmatrix} 1 & \cdots & & & 1 \\ a_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & a_{i-1} & & & \\ & & 0 & a_{i+1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & a_n \end{vmatrix}$（第 i 列）

$=(-1)^{2i+3}\begin{vmatrix} a_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_{i-1} & & \\ & & & a_{i+1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & a_n \end{vmatrix} = -\prod_{k\neq i} a_k$ ∎

例5. 设 $n\geqslant 2$. D 是一个元素均为 ±1 的行列式

求证：(1) D 是偶数　(2) 在 $n=3$ 时，求 D 的最大值.

(3) 在 $n\geqslant 3$ 时，求证 $|D|\leqslant (n-1)!\cdot(n-1)$

证明：(1) $D=|a_{ij}|=\sum(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$　　$a_{ij}\in\{\pm1\}$

将某个 a_{ij} 变号，D 变动一个偶数值；所以 $D\equiv_2 D_1=|a_{ij}=1|=0$.

(2) $n=3$ 时 $D=$ 6个单项式求和，每项 $=\pm1$，故 $D\leqslant 6$

若 $D=6$ 则 $\begin{cases} a_{11}a_{22}a_{33}=a_{12}a_{23}a_{31}=a_{13}a_{21}a_{32}=1 \\ a_{13}a_{22}a_{31}=a_{12}a_{21}a_{33}=a_{11}a_{23}a_{32}=(-1) \end{cases}$　全乘起来得 $\prod_{i,j}a_{ij}^2=(-1)$ 矛盾.

令 $D=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=4$.

(3) $n=3$ 时 $|D|\leqslant 4$. 设 n 时 $|D|\leqslant(n-1)!\,(n-1)$

则 $(n+1)$ 时，按第一行展开 D 得 $|D|\leqslant(n-1)!\,(n-1)\cdot(n+1)=n!\,(n-1)+(n-1)!\,(n-1)$

$=n!\cdot n-1\leqslant n!\cdot n$ 完成归纳过渡. ∎

例6. 令 $D(t)=|f_{ij}(t)|$，$D_i(t)=$ 只对第 i 行求导得到的行列式

求证 $\frac{d}{dt}D(t)=\sum_{i=1}^n D_i(t)$

证明：$D(t)=\sum(-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)}f_{1i_1}f_{2i_2}\cdots f_{ni_n}$

$\frac{d}{dt}D(t)=\frac{d}{dt}\left(\sum(-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)}f_{1i_1}\cdots f_{ni_n}\right)=\sum(-1)^{\tau}\frac{d}{dt}\left(f_{1i_1}\cdots f_{ni_n}\right)$

$=\sum(-1)^{\tau}\left(f_{1i_1}'f_{2i_2}\cdots f_{ni_n}+f_{1i_1}f_{2i_2}'\cdots f_{ni_n}+\cdots+f_{1i_1}\cdots f_{ni_n}'\right)=\sum_{i=1}^n D_i(t)$ ∎