基本信息：尤洪亚　19楼114室　qizhengyou@stu.pku.edu.cn

习题课后答疑（或者邮件约时间）

作业说明：1. 课可以不来，作业一定要交

2. 听课可以任选助教

3. 作业正确率与分数正相关

课程内容概述：

18世纪之后的代数学　解方程 $\begin{cases} \text{n元1次方程（线性方程组）} \rightsquigarrow \text{线性代数} \quad (\text{chap 1}) \\ \text{1元n次方程} \rightsquigarrow \text{抽象代数} \quad (\text{Abel, Galois}) \end{cases}$

线性代数 $\begin{cases} \text{矩阵理论（chap 2；chap 4；chap 5.6）} \\ \quad \text{行列式　矩阵定义与运算　矩阵的关系与标准型 (*)} \\ \text{线性空间理论（chap 3.7.8.9）} \\ \quad \text{线性空间，映射；额外的结构 (**)} \end{cases}$

(*)：集合之间可定义 Cartesian product（笛卡儿乘积）.

集合 X 上的一个关系 R 是 $X\times X$ 的子集. 记 xRy 若 $(x,y)\in R$.

<u>E.g.</u> $(\mathbb{R},=)$　$(\mathbb{R},\le)$　$(\mathbb{R},<)$　$(\mathbb{Z},\equiv_k)$

称 R 是一个等价关系，若 ① 自身 ② 对称 ③ 传递.

对 $x\in X$. 可定义其等价类 $[x]_R=\{y\in X: yRx\}$.

<u>Prop.</u> $(X,\sim)$ 是等价关系集. $x,y\in X$. 或者 $[x]=[y]$，或者 $[x]\cap[y]=\phi$.

从而 $\{[x]: x\in X\}$ 构成 X 的一个划分.

问题：① 给 $x,y\in X$. 如何判断 $x\overset{?}{\sim}y$

② 等价类 $[x]$ 中有没有最简单的元素？

<u>E.g.</u> $(\mathbb{Z},\equiv_3)$

$1403 \not\equiv_3 1701$

$0.1.2$

(**)：结构是额外添加的

$\mathbb{C}$ 代数 +, ×.　序（字典序、模长比大小）　几何｛平面向量｝

运算本身性质及其之间的相容性

$\mathbb{R}$上 $x_1 \le x_2$, $0 \le y \Rightarrow x_1 y \le x_2 y$

序 $\begin{cases} \text{字典序: } z_1 \le_d z_2,\ z_2 \le_d z_1 \Rightarrow z_1 = z_2 \\ \text{模长序: } z_1 \le_n z_2,\ z_1 \le_n z_2 \nRightarrow z_1 = z_2 \end{cases}$

但在$(\mathbb{C}, \times, \le_d)$上

$-i \le_d 1$, $0 \le_d i$　但 $1 \ge_d i$

（字典序与乘法相容性差）

解线性方程组

例1. $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{pmatrix}$ 何时无解/有唯一解/有无穷多解？

$\xrightarrow{\text{消法}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 0 & -1 & -2 & a-3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{消法}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$

数乘（讨论前提：$a\ne 1$ 能否数乘）$\dashrightarrow$

Case1. $a=1$

$\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 - 1 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 + 1 \\ 0 = b+1 \\ 0 = 0 \end{cases}$

Case1.1 若 $b \ne -1$，则原方程无解.

Case1.2 若 $b=1$，则原方程有无穷多解

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

构成其解空间.

Case2. $a \ne 1$ 此时 $a-1 \ne 0$ 可以数乘

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{b+1}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{消法}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1+\frac{b+1}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1-2\cdot\frac{b+1}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{b+1}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{消法}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1+\frac{b+1}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1-2\cdot\frac{b+1}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{b+1}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

有唯一解

$\begin{cases} x_1 = -1 + \frac{b+1}{a-1} \\ x_2 = 1 - 2\cdot\frac{b+1}{a-1} \\ x_3 = \frac{b+1}{a-1} \\ x_4 = 0 \end{cases}$ ■

例2. (2024秋 Midterm T2)

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}1&-3&-5&0\\2&-7&-4&0\\4&-9&a&0\\5&b&-55&0\end{pmatrix}$$ 讨论解的情形.

齐次方程一定有解. 只需讨论唯一性.

$$\tilde{A}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-3&-5&0\\0&-1&6&0\\0&3&a+20&0\\0&b+15&-30&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-3&-5&0\\0&1&-6&0\\0&0&a+38&0\\0&0&6b+60&0\end{pmatrix}$$

唯一解 $\Leftarrow a\neq-38$ 或 $b\neq-10$

无穷多解 $\Leftarrow a=-38$ 且 $b=-10$

数域

例3. $K=\{a+b\sqrt{2}+ci+d\sqrt{2}i \mid a.b.c.d\in\mathbb{Q}\}$ 是一个数域.

证: 记 $L=\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\mid a.b\in\mathbb{Q}\}$, 是数域.

则 $K=\{x+yi\mid x.y\in L\}$. 该证四则运算封闭

加.减 $(x_1+y_1i)\pm(x_2+y_2i)=(x_1\pm x_2)+(y_1\pm y_2)i\in K$

乘 $(x_1+y_1i)(x_2+y_2i)=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)i\in K$

除 $\dfrac{1}{x+yi}=\dfrac{x-yi}{x^2+y^2}=\dfrac{x}{x^2+y^2}+\dfrac{-y}{x^2+y^2}i\in K$. ∎

思考: $K=\{a+b\sqrt[3]{2}\mid a.b\in\mathbb{Q}\}$ 是不是数域?

$L=\{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}\mid a.b.c\in\mathbb{Q}\}$ 是不是数域?

提示: 利用因式分解 $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$.

思考题证明: (1) K不是数域. 只需证明 $\sqrt[3]{4}\neq a+b\sqrt[3]{2}\ (a.b\in\mathbb{Q})$

若不然则有 $a+b\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}=0$, 利用提示得 $a^3+2b^3-4+6ab=0$ (即令 $\begin{cases}x=a\\y=b\sqrt[3]{2}\\z=-\sqrt[3]{4}\end{cases}$ 代入)

设 $a=\dfrac{p}{q}.\ b=\dfrac{r}{s}$ $(p.r\in\mathbb{Z}.\ q.s\in\mathbb{N}^*.\ (p.q)=(r.s)=1)$

则 $p^3s^3+2q^3r^3-4q^3s^3+6prq^2s^2=0\Rightarrow 2\mid p^3s^3\Rightarrow 2\mid p$ 或 $2\mid s$

1° 若 $2\mid p$. 则设 $p=2p_0\Rightarrow 8p_0^3s^3+2q^3r^3-4q^3s^3+12p_0rq^2s^2=0\Rightarrow 2\mid q^3r^3$ 因为 $(p.q)=1$, 则 $2\mid r$

设 $r=2r_0$，则 $8p_0^3s^3+16q^3r_0^3-4q^3s^3+24p_0r_0q^2s^2=0 \Rightarrow 2|q^3s^3$ 但 $(p,q)=(r,s)=1$，这不可能。

2° 若 $2|s$，类似于上可得矛盾。

(2) L 是数域。$0,1\in L$ 显然。加法、减法、乘法封闭易证。

除法封闭 $\Leftarrow$ 对任意 $x\in L\ (x\neq 0)$，有 $\frac{1}{x}\in L$

取 $x=a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}\in L\ (x\neq 0)$，要证 $\frac{1}{x}\in L$。

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}}=\frac{1}{a^3+2b^3+4c^3-6abc}\left(a^2+b^2\sqrt[3]{4}+2c^2\sqrt[3]{2}-ab\sqrt[3]{2}-ac\sqrt[3]{4}-2bc\right)$$

$$=\frac{a^2-2bc}{\text{分母}}+\frac{2c^2-ab}{\text{分母}}\cdot\sqrt[3]{2}+\frac{b^2-ac}{\text{分母}}\cdot\sqrt[3]{4}$$

注意：这里还需说明分子分母同乘而 $a^2+b^2\sqrt[3]{4}+2c^2\sqrt[3]{2}-ab\sqrt[3]{2}-ac\sqrt[3]{4}-2bc\neq 0$。

否则会出现形如 $\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}\cdot 0}{0}=\frac{0}{0}\in\mathbb{Q}$ 的错误判断。

引理：若 $a,b,c\in\mathbb{Q}$，则 $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0 \Leftrightarrow a=b=c=0$。

证明引理："$\Leftarrow$" 显然

"$\Rightarrow$"
- 若 $c\neq 0$，则 $\sqrt[3]{4}=\left(-\frac{a}{c}\right)+\left(-\frac{b}{c}\right)\sqrt[3]{2}$ 由第(1)可知，不成立
- 若 $c=0$，则 $a+b\sqrt[3]{2}$
  - 若 $b\neq 0$，则 $\sqrt[3]{2}=-\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$，不成立
  - 若 $b=0$ 则 $a=0$ ✓

引理证毕。

同乘项不为0，因为：由引理 a,b,c 不全为零。若同乘项为0，则有
$$\begin{cases}a^2-2bc=0\\2c^2-ab=0\\b^2-ac=0\end{cases}$$

由此推出 $a,b,c\neq 0$，一二式相除得 $\frac{a^2}{2c^2}=\frac{2c}{a}\Rightarrow\frac{a}{c}=\sqrt[3]{4}\notin\mathbb{Q}$ 矛盾。

行列式的计算

一、组合定义

例1. 令 $D(t)=\left|f_{ij}(t)\right|$，$D_i(t)=$ 只对第i行求导得到的行列式

求证 $\frac{d}{dt}D(t)=\sum_{i=1}^{n}D_i(t)$

证明：$D(t)=\sum(-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)}f_{1i_1}f_{2i_2}\cdots f_{ni_n}$

$$\frac{d}{dt}D(t)=\frac{d}{dt}\left(\sum(-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)}f_{1i_1}\cdots f_{ni_n}\right)=\sum(-1)^{\tau}\frac{d}{dt}\left(f_{1i_1}\cdots f_{ni_n}\right)$$

$$=\sum(-1)^{\tau}\left(f_{1i_1}'f_{2i_2}\cdots f_{ni_n}+f_{1i_1}f_{2i_2}'\cdots f_{ni_n}+\cdots+f_{1i_1}\cdots f_{ni_n}'\right)=\sum_{i=1}^{n}D_i(t)$$

例2. 设 $n\geqslant 2$，D 是一个元素均为 ±1 的行列式

求证：(1) D 是偶数　(2) 在 $n=3$ 时，求 D 的最大值.

(3) 在 $n\geqslant 3$ 时，求证 $|D|\leqslant(n-1)!\cdot(n-1)$

证明：(1) $D=\left|a_{ij}\right|=\sum(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$　　$a_{ij}\in\{\pm1\}$

将某个 a_{ij} 变号，D 变动一个偶数值；所以 $D\equiv_2 D_1=\left|a_{ij}=1\right|=0$.

(2) $n=3$ 时 $D=$ 6个单项式求和，每项 $=\pm1$，故 $D\leqslant 6$

若 $D=6$ 则 $\begin{cases}a_{11}a_{22}a_{33}=a_{12}a_{23}a_{31}=a_{13}a_{21}a_{32}=1\\ a_{13}a_{22}a_{31}=a_{12}a_{21}a_{33}=a_{11}a_{23}a_{32}=(-1)\end{cases}$　全乘起来得 $\prod_{i,j}a_{ij}^2=(-1)$ 矛盾.

令 $D=\begin{vmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{vmatrix}=4$.

(3) $n=3$ 时 $|D|\leqslant4$. 设 n 时 $|D|\leqslant(n-1)!\,(n-1)$

则 $(n+1)$ 时，按第一行展开 D 得 $|D|\leqslant(n-1)!\,(n-1)\cdot(n+1)=n!\,(n-1)+(n-1)!\,(n-1)$

$=n!\cdot n-(n-1)!\leqslant n!\cdot n$　完成归纳过渡.

二、初等变换

例3. $D=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & a_n \end{vmatrix}$ （爪形）

若 $a_i\neq 0\ (i\geq 1)$，则 $D=\begin{vmatrix} A & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{vmatrix} = A a_1\cdots a_n$ 其中 $A=a_0-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$.

若 $\exists\ i$ s.t. $a_i=0$，则 $D=\begin{array}{r} \\ \\ \\ i+1 \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & & 1 \\ \vdots & a_1 & & & \\ 0 & & \ddots & & \\ 1 & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & a_n \end{vmatrix} = (-1)^{i+2}\begin{vmatrix} 1 & \cdots & & & & 1 \\ a_1 & \ddots & & & & \\ & & a_{i-1} & 0 & a_{i+1} & \\ & & & & \ddots & a_n \end{vmatrix}$

$$= (-1)^{2i+3}\begin{vmatrix} a_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_{i-1} & & \\ & & & a_{i+1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & a_n \end{vmatrix} = -\prod_{k\neq i} a_k$$ ▨

练习：（2024秋 Midterm T3）设 $n\geq 3$. $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & & 1 \\ 1 & 2 & & & \\ \vdots & & 3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & n \end{vmatrix}$

例4. $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n & n & n \end{vmatrix}$

从最后一列开始，每一列减去前一列. $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & 0 & & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}_{n\times n} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} 1 & & & * \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ O & & 1 & \\ & & & n \end{vmatrix}$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n$$ ▨

例5.（2022秋 Midterm T2）设 $n\geq 2$，$a_i\neq 0\ (i=1,2,\cdots,n)$ 计算行列式的值.

$$D=\begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix}$$

每一行减去第一行 $D=\begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ a_1 & -a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_1 & & & -a_n \end{vmatrix}$ （爪形） $=\begin{vmatrix} \sigma & x_2 & \cdots & x_n \\ & -a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -a_n \end{vmatrix}$

其中 $\sigma = x_1-a_1+\sum_{k=2}^{n}\frac{a_1x_k}{a_k}$，则 $D=(-1)^{n-1}\sigma a_2a_3\cdots a_n$. ▨

例6. (2023秋 Midterm T3)

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

从最后一列开始，每一列减去前一列.
$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & \ddots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-2 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

每一行都加上第一行
$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & & & & * \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 2 \\ & & & & & n-1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} \cdot 2^{n-2} \cdot (n-1)$$

■

三. 选定行(列)展开

例7. 求证：
$$\begin{vmatrix} A & x \\ y^t & \lambda \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)} = \lambda |A| - \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j A_{ij}$$
其中 x_i, y_j 分别是 x, y 的第 i, j 元素

A_{ij} 是 $|A|$ 的 (i,j) 代数余子式

证明：
$$\text{LHS} = (-1)^{n+1} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j} y_j \begin{vmatrix} A_{(j)} & x \end{vmatrix}_{n\times n} + (-1)^{n+1} \lambda |A| \right)$$
$A_{(j)}$ 表示 A 删去第 j 列

$$= \lambda |A| + (-1)^{n+1} \cdot (-1)^{n} \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{i+j} x_i y_j D_{ij}$$
D_{ij} 表示 $|A|$ 的 (i,j) 余子式

$$= \text{RHS}$$

■

例8. (三对角行列式)
$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & & & \\ c & a & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b \\ & & & c & a \end{vmatrix}_{n\times n}$$
求值.

利用例7.
$$D_n = \begin{vmatrix} D_{n-1} & 0 \\ 0 \quad c & \begin{matrix} b \\ a \end{matrix} \end{vmatrix} = a D_{n-1} - bc D_{n-2}$$
且 $D_1 = a$. $D_2 = a^2 - bc$.

用特征根法就可以求得 D_n 的通项.

■

例9. (加边法. Van de Monde 行列式) 已知
$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i)$$

在 $n \geq 2$ 时，求行列式
$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n} & x_2^{n} & \cdots & x_n^{n} \end{vmatrix}$$
的值.

$$V_n(x_1,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0\\x_1&x_2-x_1&\cdots&x_n-x_1\\\vdots&\vdots&&\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}-x_1^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}-x_1^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{j=2}^{n}(x_j-x_1)\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0\\x_1&1&\cdots&1\\x_1^2&x_2+x_1&\cdots&x_n+x_1\\\vdots&x_2^2+x_1x_2+x_1^2&\cdots&x_n^2+x_1x_n+x_1^2\\&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&(x_2^{n-1}+\cdots+x_1^{n-1})&\cdots&(x_n^{n-1}+\cdots+x_1^{n-1})\end{vmatrix}$$

$$=\prod_{j=2}^{n}(x_j-x_1)\cdot\begin{vmatrix}1&0\\ * &V_{n-1}(x_2,\cdots,x_n)\end{vmatrix}$$

再用归纳法即可.

构造 $p(y)=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n&y\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}&y^{n-1}\\x_1^n&x_2^n&\cdots&x_n^n&y^n\end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)\cdot\prod_{i=1}^{n}(y-x_i)$

则 $p(y)$ 中 y^{n-1} 的系数是 $D_n\cdot(-1)^{n+(n+1)}=-(x_1+\cdots+x_n)\cdot\prod_{i<j}(x_j-x_i)$

故 $D_n=(x_1+\cdots+x_n)\cdot\prod_{i<j}(x_j-x_i)$ ▨

例10. 求行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1+x_1&\cdots&1+x_n\\\vdots&&\vdots\\1+x_1^n&\cdots&1+x_n^n\end{vmatrix}$ 的值.

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1+x_1&\cdots&1+x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&1+x_1^n&\cdots&1+x_n^n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\-1&x_1&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&x_1^n&\cdots&x_n^n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&\cdots&1\\0&x_1&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&x_1^n&\cdots&x_n^n\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&x_1&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&x_1^n&\cdots&x_n^n\end{vmatrix}$$

$$=\prod_{j=1}^{n}x_j\cdot V_n(x_1,\cdots,x_n)-V_{n+1}(1,x_1,\cdots,x_n)=\left(\prod_{j=1}^{n}x_j-\prod_{j=1}^{n}(x_j-1)\right)V_n(x_1,\cdots,x_n)$$ ▨

四. 数学归纳法

例11. 设 $n\geq 2$, 求行列式 $P_n(x)=\begin{vmatrix}x&&&&a_0\\-1&x&&&a_1\\&-1&\ddots&&\vdots\\&&\ddots&x&a_{n-2}\\&&&-1&x+a_{n-1}\end{vmatrix}$ 的值.

$n=2$ 时 $P_2(x)=\begin{vmatrix}x&a_0\\-1&x+a_1\end{vmatrix}=x^2+a_1x+a_0$

假设 $P_{n-1}(x)=x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$

则 $P_n(x)=x\cdot\begin{vmatrix}x&&&a_1\\-1&x&&\vdots\\&-1&\ddots&a_{n-2}\\&&-1&x+a_{n-1}\end{vmatrix}+(-1)^{n+1}\cdot a_0\begin{vmatrix}-1&&*\\&-1&\\&&\ddots\\&&&-1\end{vmatrix}$ 由归纳假设

$$=x\left(x^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_2x+a_1\right)+a_0=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$ ▨

例12.(2022春 Midterm T7) 设$n\geq 2$. $D_n=\left|\frac{1}{a_i+b_j}\right|_{n\times n}$

$$D_2=\begin{vmatrix}\frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2}\\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2}\end{vmatrix}=\frac{(a_1+b_2)(a_2+b_1)-(a_1+b_1)(a_2+b_2)}{\prod_{i,j=1}^{2}(a_i+b_j)}=\frac{(a_1-a_2)(b_1-b_2)}{\prod_{i,j=1}^{2}(a_i+b_j)}$$

假设 $D_n=\dfrac{\prod_{i<j}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod_{i,j}(a_i+b_j)}$ 用数学归纳法证明之

$$D_n=\begin{vmatrix}\frac{1}{a_1+b_1}-\frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n}-\frac{1}{a_n+b_n}\\ \frac{1}{a_2+b_1}-\frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n}-\frac{1}{a_n+b_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{1}{a_n+b_1} & & \frac{1}{a_n+b_n}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{a_n-a_1}{(a_1+b_1)(a_n+b_1)} & \cdots & \frac{a_n-a_1}{(a_1+b_n)(a_n+b_n)}\\ \frac{a_n-a_2}{(a_2+b_1)(a_n+b_1)} & \cdots & \frac{a_n-a_2}{(a_2+b_n)(a_n+b_n)}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{1}{a_n+b_1} & & \frac{1}{a_n+b_n}\end{vmatrix}$$ 每一行减去最后一行

$$=\prod_{j=1}^{n-1}(a_n-a_j)\cdot\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{a_n+b_j}\cdot\begin{vmatrix}\frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n}\\ \vdots & & \vdots\\ 1 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$ 每一行列提出公共因子

$$=\prod_{j=1}^{n-1}(a_n-a_j)\cdot\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{a_n+b_j}\begin{vmatrix}\frac{b_n-b_1}{(a_1+b_1)(a_1+b_n)} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n}\\ \frac{b_n-b_2}{(a_2+b_1)(a_2+b_n)} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n}\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$ 每一列减去最后一列

$$=\prod_{j=1}^{n-1}(a_n-a_j)(b_n-b_j)\cdot\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{(a_n+b_j)(a_j+b_n)}\begin{vmatrix}D_{n-1} & *\\ 0 & 1\end{vmatrix}$$ 再利用归纳假设即可. ∎

(代数)余子式

例1. 设某一个矩阵有一行元素全为1，求它所有代数余子式之和.

记这个矩阵是A，它的(i,j)代数余子式为 A_{ij}，它的第k行元素均为1.

$$\sum_{i,j} A_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\right) = \sum_{i\neq k} \begin{array}{c} \\ i \\ \\ k \end{array}\begin{vmatrix} & & \\ 1 & \cdots & 1 \\ & & \\ 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} + \sum_{j=1}^{n} 1\cdot A_{kj} = 0+|A| = |A|$$

∎

练习: $A=(a_{ij})$ 令 $A(t)=(a_{ij}+t)$.

求证: $A(t)$ 的所有代数余子式之和等于 A 所有代数余子式之和.

Cramer法则

例2. (插值多项式, 2023秋 Midterm T7) F是数域, $a_1, a_2, \cdots, a_n \in F$ 是互不相同的n个数, $b_1, b_2, \cdots, b_n \in F$ 是n个数. 求证: 存在唯一的次数不超过 (n-1) 的多项式 f 使 $f(a_i)=b_i$.

证明: 待定f的系数, 即 $f(x)=c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0 \quad (c_j\in F)$

则 $f(a_i)=b_i \iff Ac=b$ 其中 $A=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & & \\ a_1^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}\end{pmatrix}$ $c=\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1}\end{pmatrix}$ $b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n\end{pmatrix}$

因为 $\det A = \prod_{i<j}(a_j-a_i)\neq 0$. 所以存在唯一的 c 使 $Ac=b$ 成立.

构造: 令 $g_j(x)=\prod_{i\neq j}(x-a_i)$, $f_j(x)=\dfrac{g_j(x)}{g_j(a_j)}$ 则 f_j 满足 $f_j(a_i)=\delta_{ij}$

再令 $f(x)=\sum_{j=1}^{n} b_j f_j(x)$ 即可.

推论: 存在次数不超过 n 的多项式 f 满足如下条件

① $f(a_i)=0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$ 且 $f'(a_n)=1$，其中 a_i 两两不同.

或 ② $f(a_1)=1$ 且 $f(a_i)=0 \quad (i\geq 2)$ 且 $f'(a_n)=0$，其中 a_i 两两不同.

构造: 令 $g_1(x)=\prod_{i\neq 1}(x-a_i)\cdot(x-a_n)$ 则 $g_1(a_1)\neq 0$. $g_1(a_i)=0 \ (i\geq 2)$. $g_1'(a_n)=0$

则 $f_1(x)=\dfrac{g_1(x)}{g_1(a_1)}$ 满足②.

令 $g_2(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$ 则 $g_2(a_i)=0 \ (\forall i)$, $g_2'(a_n)\neq 0$. 则 $f_2(x)=\dfrac{g_2(x)}{g_2'(a_n)}$ 满足①.

例3. (2022秋 Midterm T3) 设 $D=|g_{ij}|\neq 0$

(1) 求证满足 $\sum_{i=1}^n g_{it}x_{ijl}=g_{jt}g_{lt}$ $(1\le j,t,l\le n)$ 的 x_{ijl} 唯一.

(2) 求 x_{ijl} 的值.

证明: (1) 固定 j,l 则方程化为 $\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{1n} & \cdots & g_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{1jl} \\ \vdots \\ x_{njl}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g_{j1}g_{l1} \\ \vdots \\ g_{jn}g_{ln}\end{pmatrix}$

系数行列式 $D^t=D\neq 0$

(2) 注意到 $\sum_{i=1}^n g_{it}A_{im}=D\delta_{tm}$ 其中 A_{im} 为 D 的 (i,m)-代数余子式

则令 $x_{ijl}=\sum_{m=1}^n A_{im}g_{jm}g_{lm}\Big/D$ ，就有

$$\sum_{i=1}^n g_{it}x_{ijl}=\sum_{i=1}^n\sum_{m=1}^n\frac{g_{it}A_{im}g_{jm}g_{lm}}{D}=\sum_{m=1}^n\delta_{tm}g_{jm}g_{lm}=g_{jt}g_{lt}$$

另法: $x_{ijl}\overset{\text{Cramer法则}}{=\!=}D^{-1}\cdot\begin{vmatrix} g_{j1}g_{l1} & g_{21} & \cdots & g_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{jn}g_{ln} & g_{2n} & \cdots & g_{nn}\end{vmatrix}\overset{\text{第1列展开}}{=\!=}D^{-1}\cdot\sum_{m=1}^n g_{jm}g_{lm}A_{1m}$

其余同理.

例4. (主对角占优矩阵) 设 $A=(a_{ij})$ 是一个 n 阶复方阵. 满足 $a_{ii}>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|$ (称为主对角占优阵)

求证: $\det A\neq 0$.

证明: 要考查 A 的行列式, 就是要考查方程 $Ax=0$ 是否有唯一解.

我们来证明一个一般结果: 方程 $Ax=\lambda x$ 有非零解, 则 $\exists i$ s.t. $|\lambda-a_{ii}|\le\sum_{j\neq i}|a_{ij}|$

设非零解为 $c=\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n\end{pmatrix}\neq 0$. 则 $\exists i$ s.t. $|c_i|=\max_j|c_j|>0$ ，则有 $\sum_{j=1}^n a_{ij}c_j=\lambda c_j$

故 $|\lambda-a_{ii}|=\left|\sum_{j\neq i}a_{ij}\frac{c_j}{c_i}\right|\le\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\cdot\left|\frac{c_j}{c_i}\right|\le\sum_{j\neq i}|a_{ij}|$

(称为 Gerschgorin 圆盘定理)

而主对角占优条件使 $0\notin\bigcup_{i=1}^n\left\{z\in\mathbb{C}\;\middle|\;|z-a_{ii}|\le\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\right\}$

故 $Ax=0$ 仅有零解. ■

加强版本：设 $A=(a_{ij})$ 是一个 n 阶实方阵，满足 $a_{ii}>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|$，求证：$\det A>0$。

证明：定义 $A(t)=(a_{ij}+t\delta_{ij})$ $(t\geqslant 0)$，则 $a_{ii}(t)=a_{ii}+t>a_{ii}>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|$

故 $\det A(t)\neq 0$ 且 $\det A(t)=t^n+p(t)$ 其中 $\deg p(t)\leqslant n-1$.

所以 $\lim_{t\to+\infty}\det A(t)=+\infty$，由介值定理 $\det A=\det A(0)>0$.

线性关系

例5.（2024 秋 A Midterm T3）求 λ 的值使 $A=\begin{pmatrix}3&1&1&4\\\lambda&4&10&1\\1&7&17&3\\2&2&4&3\end{pmatrix}$ 的秩最小.

因为初等变换不改变矩阵的秩，所以下列矩阵秩相等

$$A\longrightarrow\begin{pmatrix}1&7&17&3\\3&1&1&4\\2&2&4&3\\\lambda&4&10&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&7&17&3\\0&-20&-50&-5\\0&-12&-30&-3\\0&4-7\lambda&10-17\lambda&1-3\lambda\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&7&17&3\\0&4&10&1\\0&4&10&1\\0&4-7\lambda&10-17\lambda&1-3\lambda\end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&7&17&3\\0&4&10&1\\0&7\lambda&17\lambda&3\lambda\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

若 $\lambda=0$，则 $\operatorname{rank}(A)=2$ 为最小值.

若 $\lambda\neq 0$，则 $A\longrightarrow\begin{pmatrix}1&7&17&3\\0&4&10&1\\0&7&17&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ $\operatorname{rank}(A)=3$.

求向量组的秩 ⇝ 求矩阵的秩 ⇝ 阶梯形矩阵（rank = 主元个数）

例6.（2024 秋 Midterm T7）$A=\begin{pmatrix}1&1&2&x\\3&2&1&y\\1&-1&0&z\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&1&5&14\\0&2&-1&11\\0&0&3&3\end{pmatrix}$ 两个矩阵行向量组何时等价？

列变换 ⟺ 对行向量空间做同构

对矩阵做行变换 ⟺ 对行向量组做等价变换

$$A\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&2&x\\0&-1&-5&y-3x\\0&-2&-2&z-x\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-3&y-2x\\0&1&5&3x-y\\0&0&8&5x-2y+z\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&y-2x+\frac{3}{8}(5x-2y+z)\\0&1&0&3x-y-\frac{5}{8}(5x-2y+z)\\0&0&1&\frac{1}{8}(5x-2y+z)\end{pmatrix}$$ 记为 A_0

$$B\longrightarrow\begin{pmatrix}1&\frac{1}{3}&\frac{5}{3}&\frac{14}{3}\\0&1&-\frac{1}{2}&\frac{11}{2}\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$ 则 $5x-2y+z=8$ $A_0=\begin{pmatrix}I_3&\begin{matrix}y-2x+3\\3x-y-5\\1\end{matrix}\end{pmatrix}$

$$\hookrightarrow\begin{pmatrix}1&\frac{1}{3}&0&3\\0&1&0&6\\0&0&1&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}I_3&\begin{matrix}1\\6\\1\end{matrix}\end{pmatrix}$$ 则 $\begin{cases}y-2x=-2 & y=2x-2\\3x-y=11\Rightarrow x+2=11 & x=9\quad y=16\end{cases}$

则 $z=8+2y-5x=8+32-45=-5$ 综上 $\begin{cases} x=9 \\ y=16 \\ z=-5 \end{cases}$

<u>例7.</u> (2023秋 Midterm T6) 求n阶方阵 $A=\begin{pmatrix} x & & a \\ & x & \\ a & \ddots & x \end{pmatrix}$ 的秩. (下设 $n\geqslant 2$)

若 $a=x=0$. 则 $A=0$. 故 $\mathrm{rank}(A)=0$.

若 $a\neq 0$ 或 $x\neq 0$, $A\longrightarrow\begin{pmatrix} x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ & x & a \\ a & \ddots & x \end{pmatrix}$ 1° 若 $x+(n-1)a\neq 0$. 则

$$\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & x-a & \\ & \ddots & \\ & & x-a \end{pmatrix}$$

1.1° 若 $x-a\neq 0$. 则 $\mathrm{rank}(A)=n$. 1.2° 若 $x-a=0$. 则 $\mathrm{rank}(A)=1$

2° 若 $x+(n-1)a=0$. 即 $x=(1-n)a\neq 0$

$$A\longrightarrow\begin{pmatrix} 1-n & & \\ & 1-n & 1 \\ & & \ddots \\ & 1 & & 1-n \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} & 0 & & \\ & 1-n & & 1 \\ 1 & & \ddots & \\ & 1 & & 1-n \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} & 0 & & \\ & -n & & \\ 1 & & -n & \\ & & \ddots & \\ & & & -n \end{pmatrix}$$ $\mathrm{rank}(A)=n-1$.

<u>例8.</u> 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\-5\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}4\\3\\7\\-2\end{pmatrix}$ $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\4\\5\\3\end{pmatrix}$ $\alpha_4=\begin{pmatrix}7\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$ $\alpha_5=\begin{pmatrix}1\\2\\5\\6\end{pmatrix}$

(1) 求证: $\{\alpha_1.\alpha_2\}$ 线性无关 (2) 将 $\alpha_1.\alpha_2$ 扩充成 $\{\alpha_1.\cdots.\alpha_5\}$ 的一个极大无关组.

证明: (1) 根据定义证明即可.

(2) 若加入 α_3. 则 $\alpha_3=\alpha_2-\alpha_1$ 线性相关. 再加入 α_4 $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & 7 & -2 \\ 7 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 取一个子式

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=-1\cdot(-4+35)-2(2+15)<0$$ 故线性无关.

再加入 α_5 $$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & 7 & -2 \\ 7 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -4 & -1 & 0 & -5 \\ 25 & 3 & 13 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 15 & 2 & 9 & 6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -4 & 0 & -5 \\ 25 & 13 & -2 \\ 15 & 9 & 6 \end{vmatrix}\underset{5}{\equiv}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=6\underset{5}{\equiv}1\neq 0$$

所以 $\{\alpha_1.\alpha_2.\alpha_4.\alpha_5\}$ 是极大无关组.

另法: 构造 $A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5)$ 做行变换

$$A=\begin{pmatrix}3&4&1&7&1\\-1&3&4&-1&2\\2&7&5&2&5\\-5&-2&3&0&6\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-3&-4&1&-2\\0&13&13&4&7\\0&13&13&0&9\\0&-17&-17&5&-4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&&*&&\\0&1&1&0&\frac{9}{13}\\0&0&0&4&-2\\0&0&0&5&\frac{101}{13}\end{pmatrix}$$ 子式≠0

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1&*&*&*&*\\&1&*&*&*\\&&&1&*\\&&&&1\end{pmatrix}$$ 为阶梯形，故$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5\}$为极大无关组.