基本信息: 尤淇正 19楼114室 qizhengyou@stu.pku.edu.cn

习题课后答疑 (或者邮件约时间)

作业说明: 1. 课可以不来，作业一定要交

2. 听课可以任选助教

3. 作业正确率与分数正相关

课程内容概述:

18世纪之后的代数学　解方程 $\begin{cases} \text{n元1次方程 (线性方程组)} \rightsquigarrow \text{线性代数} \quad (\text{chap 1}) \\ \text{1元n次方程} \rightsquigarrow \text{抽象代数} \quad (\text{Abel, Galois}) \end{cases}$

线性代数 { 矩阵理论 (chap 2 ; chap 4 ; chap 5, 6)
　行列式　矩阵定义与运算　矩阵的关系与标准型 (*)

线性空间理论 (chap 3, 7, 8, 9)
　线性空间, 映射; 额外的结构 (**)

(*): 集合之间可定义 Cartesian product (笛卡儿乘积).

集合 X 上的一个关系 R 是 $X \times X$ 的子集. 记 xRy 若 $(x,y) \in R$.

Eg. $(\mathbb{R}, =)$ $(\mathbb{R}, \leq)$ $(\mathbb{R}, <)$ $(\mathbb{Z}, \equiv_k)$

称 R 是一个等价关系, 若 ① 自反 ② 对称 ③ 传递.

对 $x \in X$. 可定义其等价类 $[x]_R = \{y \in X : yRx\}$.

Prop. $(X, \sim)$ 是等价关系集. $x, y \in X$. 或者 $[x] = [y]$, 或者 $[x] \cap [y] = \phi$.

从而 $\{[x] : x \in X\}$ 构成 X 的一个划分.

问题: ① 给 $x, y \in X$. 如何判断 $x \overset{?}{\sim} y$

② 等价类 $[x]$ 中有没有最简单的元素?

Eg. $(\mathbb{Z}, \equiv_3)$

$1403 \not\equiv_3 1701$

$0, 1, 2$

(**): 结构是额外添加的

$\mathbb{C}$ 代数 $+, \times.$ 序 (字典序, 模长比大小) 几何 {平面向量}

结构本身性质及其之间的相容性 → $\mathbb{R}$上 $x_1 \le x_2,\ 0 \le y \Rightarrow x_1 y \le x_2 y$

序 $\begin{cases} \text{字典序: } z_1 \le_d z_2,\ z_2 \le_d z_1 \Rightarrow z_1 = z_2 \\ \text{模长序: } z_1 \le_n z_2,\ z_1 \le_n z_2 \not\Rightarrow z_1 = z_2 \end{cases}$

但在 $(\mathbb{C}, \times, \le_d)$ 上

$-i \le_d 1,\ 0 \le_d i$ 但 $1 \ge_d i$

(字典序与乘法相容性差)

解线性方程组

例1. $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{pmatrix}$ 何时无解/有唯一解/有无穷多解?

$\xrightarrow{\text{消法}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 0 & -1 & -2 & a-3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{消法}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$ 数乘 (讨论对象: $a-1$ 能否数乘) ⇢

Case1. $a=1$

$\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 - 1 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 + 1 \\ 0 = b+1 \\ 0 = 0 \end{cases}$

Case1.1 若 $b \ne -1$, 则原方程无解.

Case1.2 若 $b=-1$, 则原方程有无穷多解

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

构成其解空间.

Case2. $a \ne 1$ 此时 $a-1 \ne 0$ 可以数乘

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{b+1}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\text{消法}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1+\frac{b+1}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1-2\cdot\frac{b+1}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{b+1}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{消法}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1+\frac{b+1}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1-2\cdot\frac{b+1}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{b+1}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

有唯一解

$\begin{cases} x_1 = -1 + \frac{b+1}{a-1} \\ x_2 = 1 - 2\cdot\frac{b+1}{a-1} \\ x_3 = \frac{b+1}{a-1} \\ x_4 = 0 \end{cases}$ ▨

例2. (2024秋 Midterm T2)

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}1&-3&-5&0\\2&-7&-4&0\\4&-9&a&0\\5&b&-55&0\end{pmatrix}$$ 讨论解的情形.

齐次方程一定有解. 只需讨论唯一性.

$$\tilde{A}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-3&-5&0\\0&-1&6&0\\0&3&a+20&0\\0&b+15&-30&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-3&-5&0\\0&1&-6&0\\0&0&a+38&0\\0&0&6b+60&0\end{pmatrix}$$

唯一解 $\Leftarrow a\neq-38$ 或 $b\neq-10$

无穷多解 $\Leftarrow a=-38$ 且 $b=-10$

数域

例3. $K=\{a+b\sqrt{2}+ci+d\sqrt{2}i \mid a.b.c.d\in\mathbb{Q}\}$ 是一个数域.

证: 记 $L=\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\mid a.b\in\mathbb{Q}\}$, 是数域.

则 $K=\{x+yi\mid x.y\in L\}$. 验证四则运算封闭

加.减 $(x_1+y_1i)\pm(x_2+y_2i)=(x_1\pm x_2)+(y_1\pm y_2)i\in K$

乘 $(x_1+y_1i)(x_2+y_2i)=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)i\in K$

除 $\dfrac{1}{x+yi}=\dfrac{x-yi}{x^2+y^2}=\dfrac{x}{x^2+y^2}+\dfrac{-y}{x^2+y^2}i\in K$. ▨

思考: $K=\{a+b\sqrt[3]{2}\mid a.b\in\mathbb{Q}\}$ 是不是数域?

$L=\{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}\mid a.b.c\in\mathbb{Q}\}$ 是不是数域?

提示: 利用因式分解 $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$.

思考题证明: (1) K不是数域. 只需证明 $\sqrt[3]{4}\neq a+b\sqrt[3]{2}\ (a.b\in\mathbb{Q})$

若不然则有 $a+b\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}=0$, 利用提示得 $a^3+2b^3-4+6ab=0$ (即令 $\begin{cases}x=a\\y=b\sqrt[3]{2}\\z=-\sqrt[3]{4}\end{cases}$ 代入)

设 $a=\frac{p}{q}$. $b=\frac{r}{s}$ $(p.r\in\mathbb{Z}.\ q.s\in\mathbb{N}^*.\ (p.q)=(r.s)=1)$

则 $p^3s^3+2q^3r^3-4q^3s^3+6prq^2s^2=0\ \Rightarrow\ 2\mid p^3s^3\ \Rightarrow\ 2\mid p$ 或 $2\mid s$

1° 若 $2\mid p$. 则设 $p=2p_0\ \Rightarrow\ 8p_0^3s^3+2q^3r^3-4q^3s^3+12p_0rq^2s^2=0\ \Rightarrow\ 2\mid q^3r^3$ 因为 $(p.q)=1$, 则 $2\mid r$

设 $r=2r_0$. 则 $8p_0^3s^3+16q^3r_0^3-4q^3s^3+24p_0r_0q^2s^2=0 \Rightarrow 2\mid q^3s^3$ 但 $(p,q)=(r,s)=1$, 这不可能.

2° 若 $2\mid s$, 类似于上可得矛盾.

(2) L是数域. $0,1\in L$ 显然. 加法, 减法, 乘法封闭易证.

除法封闭 $\Leftarrow$ 对任意 $x\in L$ $(x\neq 0)$, 有 $\frac{1}{x}\in L$

取 $x=a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}\in L$ $(x\neq 0)$, 要证 $\frac{1}{x}\in L$.

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}}=\frac{1}{a^3+2b^3+4c^3-6abc}\left(a^2+b^2\sqrt[3]{4}+2c^2\sqrt[3]{2}-ab\sqrt[3]{2}-ac\sqrt[3]{4}-2bc\right)$$

$$=\frac{a^2-2bc}{分母}+\frac{2c^2-ab}{分母}\cdot\sqrt[3]{2}+\frac{b^2-ac}{分母}\cdot\sqrt[3]{4}$$

注意: 这里还需说明分子分母同乘而 $a^2+b^2\sqrt[3]{4}+2c^2\sqrt[3]{2}-ab\sqrt[3]{2}-ac\sqrt[3]{4}-2bc\neq 0$.

否则会出现形如 $\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}\cdot 0}{0}=\frac{0}{0}\in\mathbb{Q}$ 的错误判断.

引理: 若 $a,b,c\in\mathbb{Q}$. 则 $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0 \iff a=b=c=0$.

证明引理: "$\Leftarrow$" 显然

"$\Rightarrow$" 若 $c\neq 0$. 则 $\sqrt[3]{4}=\left(-\frac{a}{c}\right)+\left(-\frac{b}{c}\right)\sqrt[3]{2}$ 由第(1)可知. 不成立

若 $c=0$. 则 $a+b\sqrt[3]{2}$: 若 $b\neq 0$. 则 $\sqrt[3]{2}=-\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$, 不成立; 若 $b=0$ 则 $a=0$ ✓

引理证毕.

同乘项不为0. 因为: 由引理 a,b,c 不全为零. 若同乘项为0, 则有
$$\begin{cases} a^2-2bc=0 \\ 2c^2-ab=0 \\ b^2-ac=0 \end{cases}$$

由此推出 $a,b,c\neq 0$. 一二式相除得 $\frac{a^2}{2c^2}=\frac{2c}{a} \Rightarrow \frac{a}{c}=\sqrt[3]{4}\notin\mathbb{Q}$ 矛盾.

行列式的计算

例1. $D=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & a_n \end{vmatrix}$ （爪形）

若 $a_i\neq 0\ (i\geq 1)$，则 $D=\begin{vmatrix} A & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{vmatrix} = A a_1\cdots a_n$ 其中 $A=a_0-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$.

若 $\exists\ i$ s.t. $a_i=0$，则 $D=\begin{array}{r} \\ \\ \\ i+1 \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & & 1 \\ \vdots & a_1 & & & \\ 0 & & \ddots & & \\ 1 & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & a_n \end{vmatrix} = (-1)^{i+2}\begin{array}{c}\begin{vmatrix} 1 & \cdots & & \cdots & & 1 \\ a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_{i-1} & 0 & a_{i+1} & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & a_n \end{vmatrix} \\ \uparrow \\ i \end{array}$

$= (-1)^{2i+3}\begin{vmatrix} a_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_{i-1} & & \\ & & & a_{i+1} & \\ & & & & \ddots \ a_n \end{vmatrix} = -\prod\limits_{k\neq i} a_k$ ∎

例2. 设 $n\geq 2$，D 是一个元素均为 ± 1 的行列式

求证：(1) D 是偶数　(2) 在 $n=3$ 时，求 D 的最大值.

(3) 在 $n\geq 3$ 时，求证 $|D|\leq (n-1)!\cdot(n-1)$

证明：(1) $D=|a_{ij}| = \sum (-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)} a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$　　$a_{ij}\in\{\pm 1\}$

将某个 a_{ij} 变号，D 变化一个偶数值；所以 $D\equiv_2 D_1 = |a_{ij}=1| = 0$.

(2) $n=3$ 时 $D=$ 6个单项式求和，每项 $=\pm 1$，故 $D\leq 6$

若 $D=6$ 则 $\begin{cases} a_{11}a_{22}a_{33}=a_{12}a_{23}a_{31}=a_{13}a_{21}a_{32}=1 \\ a_{13}a_{22}a_{31}=a_{12}a_{21}a_{33}=a_{11}a_{23}a_{32}=(-1) \end{cases}$ 全乘起来得 $\prod\limits_{i,j} a_{ij}^2 = (-1)$ 矛盾.

令 $D=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$.

(3) $n=3$ 时 $|D|\leq 4$，设 n 时 $|D|\leq (n-1)!\,(n-1)$

则 $(n+1)$ 时，按第一行展开 D 得 $|D|\leq (n-1)!\,(n-1)\cdot(n+1) = n!\,(n-1)+(n-1)!\,(n-1)$

$= n!\cdot n-(n-1)! \leq n!\cdot n$ 完成归纳过渡 ∎

例3. 令 $D(t) = \left| f_{ij}(t) \right|$，$D_i(t) =$ 只对第i行求导得到的行列式

求证 $\frac{d}{dt} D(t) = \sum_{i=1}^{n} D_i(t)$

证明：$D(t) = \sum (-1)^{\tau(i_1 \cdots i_n)} f_{1i_1} f_{2i_2} \cdots f_{ni_n}$

$$\frac{d}{dt} D(t) = \frac{d}{dt} \left(\sum (-1)^{\tau(i_1 \cdots i_n)} f_{1i_1} \cdots f_{ni_n} \right) = \sum (-1)^{\tau} \frac{d}{dt} \left(f_{1i_1} \cdots f_{ni_n} \right)$$

$$= \sum (-1)^{\tau} \left(f_{1i_1}' f_{2i_2} \cdots f_{ni_n} + f_{1i_1} f_{2i_2}' \cdots f_{ni_n} + \cdots + f_{1i_1} \cdots f_{ni_n}' \right) = \sum_{i=1}^{n} D_i(t)$$

■