基本信息：尤洪正 19楼114室 qizhengyou@stu.pku.edu.cn

习题课后答疑（或者邮件约时间）

作业说明：1. 课可以不来，作业一定要交

2. 听课可以任选助教

3. 作业正确率与分数正相关

课程内容概述：

18世纪之后的代数学 解方程 $\begin{cases} \text{n元1次方程（线性方程组）} \overset{\text{chap1}}{\rightsquigarrow} \text{线性代数} \\ \text{1元n次方程} \rightsquigarrow \text{抽象代数} \end{cases}$

(Abel, Galois)

线性代数 $\begin{cases} \text{矩阵理论（chap2；chap 4；chap 5.6）} \\ \text{线性空间理论（chap 3.7.8.9）} \end{cases}$

矩阵理论：行列式 矩阵定义与运算 矩阵的关系与标准型 (*)

线性空间理论：线性空间，映射；额外的结构 (**)

(*)：集合之间可定义 Cartesian product（笛卡儿乘积）.

集合 X 上的一个关系 R 是 $X\times X$ 的子集. 记 xRy 若 $(x,y)\in R$.

E.g. $(\mathbb{R},=)$ $(\mathbb{R},\le)$ $(\mathbb{R},<)$ $(\mathbb{Z},\equiv_k)$

称 R 是一个等价关系，若 ①自反 ②对称 ③传递.

对 $x\in X$，可定义其等价类 $[x]_R=\{y\in X: yRx\}$.

Prop. $(X,\sim)$ 是等价关系集，$x,y\in X$，或者 $[x]=[y]$，或者 $[x]\cap[y]=\phi$.

从而 $\{[x]: x\in X\}$ 构成 X 的一个划分.

E.g. $(\mathbb{Z},\equiv_3)$

问题：① 给 $x,y\in X$，如何判断 $x\overset{?}{\sim}y$　　$1403\not\equiv_3 1701$

② 等价类 $[x]$ 中有没有最简单的元素？　　0. 1. 2

(**)：结构是额外添加的

$\mathbb{C}$ 代数 $+, \times$. 序（字典序、模长比大小） 几何｛平面向量｝

运算本身性质及其之间的相容性 → $\mathbb{R}$上 $x_1 \le x_2,\ 0 \le y \Rightarrow x_1 y \le x_2 y$

序 $\begin{cases} 字典序：z_1 \le_d z_2,\ z_2 \le_d z_1 \Rightarrow z_1 = z_2 \\ 模长序：z_1 \le_n z_2,\ z_1 \le_n z_2 \not\Rightarrow z_1 = z_2 \end{cases}$

但在 $(\mathbb{C}, \times, \le_d)$ 上

$-i \le_d 1,\ 0 \le_d i$ 但 $1 \ge_d i$

（字典序与乘法相容性差）

解线性方程组

例1. $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{pmatrix}$ 何时无解/有唯一解/有无穷多解？

$$\xrightarrow{消法} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 0 & -1 & -2 & a-3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{消法} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

数乘（讨论对注：$a=1$ 能否数乘）$\dashrightarrow$

Case 1. $a=1$

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 - 1 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 + 1 \\ 0 = b+1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Case 1.1 若 $b \ne -1$，则原方程无解.

Case 1.2 若 $b=1$，则原方程有无穷多解

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

构成其解空间.

Case 2. $a \ne 1$ 此时 $a-1 \ne 0$ 可以数乘

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{b+1}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{消法} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1+\frac{b+1}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1-2\cdot\frac{b+1}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{b+1}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{消法} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1+\frac{b+1}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1-2\cdot\frac{b+1}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{b+1}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = -1 + \frac{b+1}{a-1} \\ x_2 = 1 - 2\cdot\frac{b+1}{a-1} \\ x_3 = \frac{b+1}{a-1} \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$\blacksquare$

例2. (2024秋 Midterm T2)

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}1&-3&-5&0\\2&-7&-4&0\\4&-9&a&0\\5&b&-55&0\end{pmatrix}$$ 讨论解的情形.

齐次方程一定有解. 只需讨论唯一性.

$$\tilde{A}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-3&-5&0\\0&-1&6&0\\0&3&a+20&0\\0&b+15&-30&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&-3&-5&0\\0&1&-6&0\\0&0&a+38&0\\0&0&6b+60&0\end{pmatrix}$$

唯一解 $\Leftarrow$ $a\neq-38$ 或 $b\neq-10$

无穷多解 $\Leftarrow$ $a=-38$ 且 $b=-10$

数域

例3. $K=\{a+b\sqrt{2}+ci+d\sqrt{2}i \mid a.b.c.d\in\mathbb{Q}\}$ 是一个数域.

证: 记 $L=\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\mid a.b\in\mathbb{Q}\}$, 是数域.

则 $K=\{x+yi\mid x.y\in L\}$. 验证四则运算封闭

加.减 $(x_1+y_1i)\pm(x_2+y_2i)=(x_1\pm x_2)+(y_1\pm y_2)i\in K$

乘 $(x_1+y_1i)(x_2+y_2i)=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)i\in K$

除 $\dfrac{1}{x+yi}=\dfrac{x-yi}{x^2+y^2}=\dfrac{x}{x^2+y^2}+\dfrac{-y}{x^2+y^2}i\in K$. $\blacksquare$

思考: $K=\{a+b\sqrt[3]{2}\mid a.b\in\mathbb{Q}\}$ 是不是数域?

$L=\{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}\mid a.b.c\in\mathbb{Q}\}$ 是不是数域?

提示: 利用因式分解 $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$.

思考题证明: (1) K不是数域. 只需证明 $\sqrt[3]{4}\neq a+b\sqrt[3]{2}$ $(a.b\in\mathbb{Q})$

若不然则有 $a+b\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}=0$. 利用提示得 $a^3+2b^3-4+6ab=0$ (即令 $\begin{cases}x=a\\y=b\sqrt[3]{2}\\z=-\sqrt[3]{4}\end{cases}$ 代入)

设 $a=\dfrac{p}{q}$. $b=\dfrac{r}{s}$ $(p.r\in\mathbb{Z}.\ q.s\in\mathbb{N}^*.\ (p.q)=(r.s)=1)$

则 $p^3s^3+2q^3r^3-4q^3s^3+6prq^2s^2=0\Rightarrow 2\mid p^3s^3\Rightarrow 2\mid p$ 或 $2\mid s$

1° 若 $2\mid p$. 则设 $p=2p_0\Rightarrow 8p_0^3s^3+2q^3r^3-4q^3s^3+12p_0rq^2s^2=0\Rightarrow 2\mid q^3r^3$ 因为 $(p.q)=1$, 则 $2\mid r$

设 $r=2r_0$. 则 $8p_0^3s^3+16q^3r_0^3-4q^3s^3+24p_0r_0q^2s^2=0 \Rightarrow 2|q^3s^3$ 但 $(p,q)=(r,s)=1$, 这不可能.

2° 若 $2|s$, 类似于上可得矛盾.

(2) L 是数域. $0,1\in L$ 显然. 加法.减法.乘法封闭易证.

除法封闭 $\Leftarrow$ 对任意 $x\in L\ (x\neq 0)$, 有 $\frac{1}{x}\in L$

取 $x=a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}\in L\ \ (x\neq 0)$, 要证 $\frac{1}{x}\in L$.

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}}=\frac{1}{a^3+2b^3+4c^3-6abc}\left(a^2+b^2\sqrt[3]{4}+2c^2\sqrt[3]{2}-ab\sqrt[3]{2}-ac\sqrt[3]{4}-2bc\right)$$

$$=\frac{a^2-2bc}{分母}+\frac{2c^2-ab}{分母}\cdot\sqrt[3]{2}+\frac{b^2-ac}{分母}\cdot\sqrt[3]{4}$$

注意: 这里还需说明分子分母同乘的 $a^2+b^2\sqrt[3]{4}+2c^2\sqrt[3]{2}-ab\sqrt[3]{2}-ac\sqrt[3]{4}-2bc\neq 0$.

否则会出现形如 $\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}\cdot 0}{0}=\frac{0}{0}\in\mathbb{Q}$ 的错误判断.

引理: 若 $a,b,c\in\mathbb{Q}$. 则 $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0 \iff a=b=c=0$.

证明引理: "$\Leftarrow$" 显然

"$\Rightarrow$"
- 若 $c\neq 0$. 则 $\sqrt[3]{4}=\left(-\frac{a}{c}\right)+\left(-\frac{b}{c}\right)\sqrt[3]{2}$ 由第(1)可知. 不成立
- 若 $c=0$. 则 $a+b\sqrt[3]{2}$
  - 若 $b\neq 0$. 则 $\sqrt[3]{2}=-\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$, 不成立
  - 若 $b=0$ 则 $a=0$ ✓

引理证毕.

同乘项不为0. 因为: 由引理 a,b,c 不全为零. 若同乘项为0, 则有
$$\begin{cases} a^2-2bc=0 \\ 2c^2-ab=0 \\ b^2-ac=0 \end{cases}$$

由此推出 $a,b,c\neq 0$. 一二式相除得 $\frac{a^2}{2c^2}=\frac{2c}{a} \Rightarrow \frac{a}{c}=\sqrt[3]{4}\notin\mathbb{Q}$ 矛盾.

行列式的计算

一、组合定义

例1. 令 $D(t)=\left|f_{ij}(t)\right|$，$D_i(t)=$ 只对第i行求导得到的行列式

求证 $\frac{d}{dt}D(t)=\sum_{i=1}^{n}D_i(t)$

证明：$D(t)=\sum(-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)}f_{1i_1}f_{2i_2}\cdots f_{ni_n}$

$$\frac{d}{dt}D(t)=\frac{d}{dt}\left(\sum(-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)}f_{1i_1}\cdots f_{ni_n}\right)=\sum(-1)^{\tau}\frac{d}{dt}\left(f_{1i_1}\cdots f_{ni_n}\right)$$

$$=\sum(-1)^{\tau}\left(f_{1i_1}'f_{2i_2}\cdots f_{ni_n}+f_{1i_1}f_{2i_2}'\cdots f_{ni_n}+\cdots+f_{1i_1}\cdots f_{ni_n}'\right)=\sum_{i=1}^{n}D_i(t)$$ ▨

例2. 设 $n\geq 2$，D 是一个元素均为 ± 1 的行列式

求证：(1) D 是偶数　(2) 在 $n=3$ 时，求 D 的最大值.

(3) 在 $n\geq 3$ 时，求证 $|D|\leq (n-1)!\cdot(n-1)$

证明：(1) $D=\left|a_{ij}\right|=\sum(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$　　$a_{ij}\in\{\pm 1\}$

将某个 a_{ij} 变号，D 变动一个偶数值；所以 $D\equiv_2 D_1=\left|a_{ij}=1\right|=0$.

(2) $n=3$ 时 $D=$ 6个单项式求和，每项 $=\pm 1$，故 $D\leq 6$

若 $D=6$ 则 $\begin{cases}a_{11}a_{22}a_{33}=a_{12}a_{23}a_{31}=a_{13}a_{21}a_{32}=1\\ a_{13}a_{22}a_{31}=a_{12}a_{21}a_{33}=a_{11}a_{23}a_{32}=(-1)\end{cases}$　全乘起来得 $\prod_{i,j}a_{ij}^2=(-1)$ 矛盾.

令 $D=\begin{vmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{vmatrix}=4$.

(3) $n=3$ 时 $|D|\leq 4$. 设 n 时 $|D|\leq (n-1)!\,(n-1)$

则 $(n+1)$ 时，按第一行展开 D 得 $|D|\leq (n-1)!\,(n-1)\cdot(n+1)=n!\,(n-1)+(n-1)!\,(n-1)$

$=n!\cdot n-(n-1)!\leq n!\cdot n$ 完成归纳过渡. ▨

二、初等变换

<u>例3.</u> $D=\begin{vmatrix} a_0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & & & a_n \end{vmatrix}$ （爪形）

若 $a_i\neq 0\ (i\geqslant 1)$，则 $D=\begin{vmatrix} A & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{vmatrix}=Aa_1\cdots a_n$ 其中 $A=a_0-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$.

若 $\exists\ i$ s.t. $a_i=0$，则 $D=\begin{array}{c} \\ \\ \\ i+1 \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & & 1 \\ \vdots & a_1 & & & \\ 0 & & \ddots & & \\ 1 & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & a_n \end{vmatrix}=(-1)^{i+2}\begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & & 1 \\ a_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_{i-1} & 0 & a_{i+1} \\ & & & & \ddots \\ & & & & a_n \end{vmatrix}$（第 i 列）

$=(-1)^{2i+3}\begin{vmatrix} a_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_{i-1} & & \\ & & & a_{i+1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & a_n \end{vmatrix}=-\prod\limits_{k\neq i}a_k$ ▨

练习：（2024秋 Midterm T3）设 $n\geqslant 3$．$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & & \\ \vdots & & 3 & \\ & & & \ddots \\ 1 & & & n \end{vmatrix}$

<u>例4.</u> $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n & n & n \end{vmatrix}$

从最后一列开始，每一列减去前一列．$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & 0 & & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}_{n\times n}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} 1 & & & * \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ O & & 1 & \\ & & & n \end{vmatrix}$

$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n$ ▨

<u>例5.</u>（2022秋 Midterm T2）设 $n\geqslant 2$．$a_i\neq 0\ (i=1,2,\cdots,n)$ 计算行列式的值．

$D=\begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix}$

每一行减去第一行 $D=\begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ a_1 & -a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_1 & & & -a_n \end{vmatrix}$（爪形）$=\begin{vmatrix} \sigma & x_2 & \cdots & x_n \\ & -a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -a_n \end{vmatrix}$

其中 $\sigma=x_1-a_1+\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{a_1x_k}{a_k}$．则 $D=(-1)^{n-1}\sigma a_2a_3\cdots a_n$. ▨

例6. (2023秋 Midterm T3)

$$D=\begin{vmatrix}0&1&\cdots&n-2&n-1\\1&0&\cdots&n-3&n-2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n-2&n-3&\cdots&0&1\\n-1&n-2&\cdots&1&0\end{vmatrix}$$

从最后一列开始，每一列减去前一列. $D=\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&1&1\\1&-1&1&\cdots&1&1\\2&-1&-1&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n-2&-1&-1&\cdots&-1&1\\n-1&-1&-1&\cdots&-1&-1\end{vmatrix}$

每一行都加上第一行 $D=\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&1&1\\1&0&2&\cdots&2&2\\2&0&0&\cdots&2&2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n-2&0&0&\cdots&0&2\\n-1&0&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}\begin{vmatrix}1&&&&*\\&2&&&\\&&2&&\\&&&\ddots&\\0&&&&2\\&&&&&n-1\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}\cdot 2^{n-2}\cdot(n-1)$ ∎

三. 选定行(列)展开

例7. 求证: $\begin{vmatrix}A&x\\y^t&\lambda\end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}=\lambda|A|-\sum_{i,j=1}^{n}x_iy_jA_{ij}$ 其中 x_i, y_j 分别是 x, y 的第 i, j 元素

A_{ij} 是 $|A|$ 的 (i,j) 代数余子式

证明: $LHS=(-1)^{n+1}\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}(-1)^j y_j\begin{vmatrix}A_{(j)}&x\end{vmatrix}_{n\times n}+(-1)^{n+1}\lambda|A|\right)$ $A_{(j)}$ 表示 A 删去第 j 列

$=\lambda|A|+(-1)^{n+1}\cdot(-1)^n\sum_{i,j=1}^{n}(-1)^{i+j}x_iy_jD_{ij}$ D_{ij} 表示 $|A|$ 的 (i,j) 余子式

$=RHS$ ∎

例8. (三对角行列式) $D_n=\begin{vmatrix}a&b&&\\c&a&\ddots&\\&\ddots&\ddots&b\\&&c&a\end{vmatrix}_{n\times n}$ 求值.

利用例7. $D_n=\begin{vmatrix}D_{n-1}&0\\0\;\;c&\begin{matrix}b\\a\end{matrix}\end{vmatrix}=aD_{n-1}-bc\,D_{n-2}$ 且 $D_1=a$. $D_2=a^2-bc$.

用特征根法就可以求得 D_n 的通项. ∎

例9. (加边法. Van de Monde 行列式) 已知 $V_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-2}&x_2^{n-2}&\cdots&x_n^{n-2}\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$

在 $n\geq 2$ 时, 求行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-2}&x_2^{n-2}&\cdots&x_n^{n-2}\\x_1^{n}&x_2^{n}&\cdots&x_n^{n}\end{vmatrix}$ 的值.

$$V_n(x_1\cdots x_n)=\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0\\x_1&x_2-x_1&\cdots&x_n-x_1\\\vdots&\vdots&&\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}-x_1^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}-x_1^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{j=2}^{n}(x_j-x_1)\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0\\x_1&1&\cdots&1\\x_1^2&x_2+x_1&\cdots&x_n+x_1\\\vdots&x_2^2+x_1x_2+x_1^2&\cdots&x_n^2+x_1x_n+x_1^2\\&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&(x_2^{n-1}+\cdots+x_1^{n-1})&\cdots&(x_n^{n-1}+\cdots+x_1^{n-1})\end{vmatrix}$$

$$=\prod_{j=2}^{n}(x_j-x_1)\cdot\begin{vmatrix}1&0\\ *&V_{n-1}(x_2\cdots x_n)\end{vmatrix}$$

再用归纳法即可.

构造 $p(y)=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n&y\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}&y^{n-1}\\x_1^n&x_2^n&\cdots&x_n^n&y^n\end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)\cdot\prod_{i=1}^{n}(y-x_i)$

则 $p(y)$ 中 y^{n-1} 的系数是 $D_n\cdot(-1)^{n+(n+1)}=-(x_1+\cdots+x_n)\cdot\prod_{i<j}(x_j-x_i)$

故 $D_n=(x_1+\cdots+x_n)\cdot\prod_{i<j}(x_j-x_i)$ ▨

例10. 求行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1+x_1&\cdots&1+x_n\\\vdots&&\vdots\\1+x_1^n&\cdots&1+x_n^n\end{vmatrix}$ 的值.

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1+x_1&\cdots&1+x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&1+x_1^n&\cdots&1+x_n^n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\-1&x_1&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&x_1^n&\cdots&x_n^n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&\cdots&1\\0&x_1&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&x_1^n&\cdots&x_n^n\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&x_1&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&x_1^n&\cdots&x_n^n\end{vmatrix}$$

$$=\prod_{j=1}^{n}x_j\cdot V_n(x_1\cdots x_n)-V_{n+1}(1,x_1\cdots x_n)=\left(\prod_{j=1}^{n}x_j-\prod_{j=1}^{n}(x_j-1)\right)V_n(x_1\cdots x_n)$$ ▨

四. 数学归纳法

例11. 设 $n\geq 2$, 求行列式 $P_n(x)=\begin{vmatrix}x&&&&a_0\\-1&x&&&a_1\\&-1&\ddots&&\vdots\\&&\ddots&x&a_{n-2}\\&&&-1&x+a_{n-1}\end{vmatrix}$ 的值.

$n=2$ 时 $P_2(x)=\begin{vmatrix}x&a_0\\-1&x+a_1\end{vmatrix}=x^2+a_1x+a_0$

假设 $P_{n-1}(x)=x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$

则 $P_n(x)=x\cdot\begin{vmatrix}x&&&a_1\\-1&x&&\vdots\\&-1&\ddots&a_{n-2}\\&&-1&x+a_{n-1}\end{vmatrix}+(-1)^{n+1}\cdot a_0\begin{vmatrix}-1&&*\\&-1&\\&&\ddots\\&&&-1\end{vmatrix}$ 由归纳假设

$$=x\left(x^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_2x+a_1\right)+a_0=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$ ▨

例12.（2022春 Midterm T7）设 $n\geq 2$. $D_n = \left|\frac{1}{a_i+b_j}\right|_{n\times n}$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} \end{vmatrix} = \frac{(a_1+b_2)(a_2+b_1)-(a_1+b_1)(a_2+b_2)}{\prod_{i,j=1}^{2}(a_i+b_j)} = \frac{(a_1-a_2)(b_1-b_2)}{\prod_{i,j=1}^{2}(a_i+b_j)}$$

假设 $D_n = \dfrac{\prod_{i<j}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod_{i,j}(a_i+b_j)}$ 用数学归纳法证明之

$$D_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1}-\frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n}-\frac{1}{a_n+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1}-\frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n}-\frac{1}{a_n+b_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{a_n-a_1}{(a_1+b_1)(a_n+b_1)} & \cdots & \frac{a_n-a_1}{(a_1+b_n)(a_n+b_n)} \\ \frac{a_n-a_2}{(a_2+b_1)(a_n+b_1)} & \cdots & \frac{a_n-a_2}{(a_2+b_n)(a_n+b_n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

每一行减去最后一行

$$= \prod_{j=1}^{n-1}(a_n-a_j)\cdot\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{a_n+b_j}\cdot\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

每一行、列提出公共因子

$$= \prod_{j=1}^{n-1}(a_n-a_j)\cdot\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{a_n+b_j}\begin{vmatrix} \frac{b_n-b_1}{(a_1+b_1)(a_1+b_n)} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{b_n-b_2}{(a_2+b_1)(a_2+b_n)} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

每一列减去最后一列

$$= \prod_{j=1}^{n-1}(a_n-a_j)(b_n-b_j)\cdot\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{(a_n+b_j)(a_j+b_n)}\begin{vmatrix} D_{n-1} & * \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

再利用归纳假设即可. ▨

(代数)余子式

例13. 设某一个矩阵有一行元素全为1，求它所有代数余子式之和.

记这个矩阵为A，它的(i,j)代数余子式为 A_{ij}，它的第k行元素均为1.

$$\sum_{i,j}A_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\right) = \sum_{i\neq k}\begin{array}{c|ccc|} i & 1 & \cdots & 1 \\ k & 1 & \cdots & 1 \end{array} + \sum_{j=1}^{n}1\cdot A_{kj} = 0+|A| = |A|$$

▨

练习：$A=(a_{ij})$ 令 $A(t)=(a_{ij}+t)$.

求证：$A(t)$ 的所有代数余子式之和等于 A 所有代数余子式之和.