МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«МИРЭА – Российский технологический университет»

ИНСТИТУТ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Типовой расчет

по дисциплине **«Случайные процессы»**

ВАРИАНТ 90

Выполнил:
Студент 4-го курса
Демченко Г. Д.

Группа: КМБО-04-21

МОСКВА 2024

Оглавление

Задания

I. «Цепи Маркова»

Каждому состоянию системы соответствует определенная последовательность из двух нулей и двух единиц. Состояния системы нумеруются следующим образом:

№	состояние	№	состояние
1	0011	4	1001
2	0101	5	1010
3	0110	6	1100

На каждом шаге один из нулей превращается в единицу, и, одновременно, одна из единиц превращается в нуль. Вероятность превращения в единицу для первого слева нуля равна p, а для второго слева нуля равна $1-p$. Вероятность превращения в нуль для первой слева единицы равна q, а для второй слева единицы равна $1-q$.

Задание 1

Требуется:

1. Составить Таблицу 1.1 всех возможных переходов между состояниями следующего вида:

№ состояния	Состояние	Список возможных состояний на следующем шаге (с ненулевой вероятностью перехода)
1	0011	1001(4), 1010(5), 0101(2), 0110(3), (состояния с нулевой вероятностью перехода нужно исключить)
2	0101	(состояния с нулевой вероятностью перехода нужно исключить)
3	0110	…
4	1001	

5	1010	
6	1100	

В скобках указываются номера состояний.

2. Построить матрицу переходных вероятностей P и граф состояний цепи Маркова.
3. Найти матрицы переходных вероятностей за n шагов P^n $(n=2,\dots,k)$ и величины отклонений $\delta_n = max(\vee p_{ij}(n) - p_{ij}(n-1) \vee; i, j=1,2,\dots,6)$ $(n=2,\dots,k)$ для $k=16$. Результаты представить в Таблице 1.2 следующего вида:

n	P^n	δ_n
1	$\begin{pmatrix} p_{11}(1) & p_{12}(1) & p_{13}(1) & p_{14}(1) & p_{15}(1) & p_{16}(1) \\ p_{21}(1) & p_{22}(1) & p_{23}(1) & p_{24}(1) & p_{25}(1) & p_{26}(1) \\ p_{31}(1) & p_{32}(1) & p_{33}(1) & p_{34}(1) & p_{35}(1) & p_{36}(1) \\ p_{41}(1) & p_{42}(1) & p_{43}(1) & p_{44}(1) & p_{45}(1) & p_{46}(1) \\ p_{51}(1) & p_{52}(1) & p_{53}(1) & p_{54}(1) & p_{55}(1) & p_{56}(1) \\ p_{61}(1) & p_{62}(1) & p_{63}(1) & p_{64}(1) & p_{65}(1) & p_{66}(1) \end{pmatrix}$	–
2	$\begin{pmatrix} p_{11}(2) & p_{12}(2) & p_{13}(2) & p_{14}(2) & p_{15}(2) & p_{16}(2) \\ p_{21}(2) & p_{22}(2) & p_{23}(2) & p_{24}(2) & p_{25}(2) & p_{26}(2) \\ p_{31}(2) & p_{32}(2) & p_{33}(2) & p_{34}(2) & p_{35}(2) & p_{36}(2) \\ p_{41}(2) & p_{42}(2) & p_{43}(2) & p_{44}(2) & p_{45}(2) & p_{46}(2) \\ p_{51}(2) & p_{52}(2) & p_{53}(2) & p_{54}(2) & p_{55}(2) & p_{56}(2) \\ p_{61}(2) & p_{62}(2) & p_{63}(2) & p_{64}(2) & p_{65}(2) & p_{66}(2) \end{pmatrix}$	δ_2
…	…	…

$k=16$	$\begin{pmatrix} p_{11}(k) & p_{12}(k) & p_{13}(k) & p_{14}(k) & p_{15}(k) & p_{16}(k) \\ p_{21}(k) & p_{22}(k) & p_{23}(k) & p_{24}(k) & p_{25}(k) & p_{26}(k) \\ p_{31}(k) & p_{32}(k) & p_{33}(k) & p_{34}(k) & p_{35}(k) & p_{36}(k) \\ p_{41}(k) & p_{42}(k) & p_{43}(k) & p_{44}(k) & p_{45}(k) & p_{46}(k) \\ p_{51}(k) & p_{52}(k) & p_{53}(k) & p_{54}(k) & p_{55}(k) & p_{56}(k) \\ p_{61}(k) & p_{62}(k) & p_{63}(k) & p_{64}(k) & p_{65}(k) & p_{66}(k) \end{pmatrix}$	δ_{16}

Для каждого состояния цепи Маркова нужно по своим данным вычислить элементы матрицы переходных вероятностей $P=(p_{ij})$:
например, из состояния №3 (0110) система может перейти в состояние №5 (1010) с вероятностью pq, в состояние №6 (1100) с вероятностью $p(1-q)$, в состояние №1 (0011) с вероятностью $(1-p)q$, в состояние №2 (0101) с вероятностью $(1-p)(1-q)$.
При этом $pq+p(1-q)+(1-p)q+(1-p)(1-q)=1$.

Задание 2

Требуется:

1. Найти стационарное распределение вероятностей состояний цепи Маркова

1	2	3	4	5	6	
r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	$\sum_j r_j$

Провести проверку стационарности найденного распределения, т.е. вычислить $(r_1, r_2, \ldots, r_6)P$ и сравнить с $\underline{r}=(r_1, r_2, \ldots, r_6)$.

2. Выявить существенные и несущественные состояния

Существенные	$i_1, \ldots.$
Несущественные	$j_1, \ldots.$

3. Проверить эргодичность цепи Маркова (ответ обосновать).

II. «Процесс рождения, гибели и мутации»

В популяции могут находиться объекты двух видов: N-объекты и M-объекты.

Дано:

- время жизни каждого N-объекта является случайной величиной, имеющей показательное распределение с заданным параметром λ;
- время жизни каждого M-объекта является случайной величиной, имеющей показательное распределение с заданным параметром μ;
- по окончании времени жизни каждый N-объект порождает с вероятностью pn_1 один N-объект (событие $S_N(1)$), с вероятностью pn_2 два N-объекта (событие $S_N(2)$), с вероятностью $pn_{11}=1-pn_1-pn_2$ один N-объект и один M-объект (событие $S_N(3)$);
- по окончании времени жизни каждый M-объект порождает с вероятностью pm_1 один M-объект (событие $S_M(1)$), ничего не порождает с вероятностью pm_0 (событие $S_M(0)$), с вероятностью $pm_{11}=1-pm_1-pm_0$ один N-объект и один M-объект (событие $S_M(2)$);
- до начального момента $t=0$ в популяции не было объектов, в начальный момент происходит событие $S_N(1)$ и появляется первый объект: N-объект.

Состояние системы в момент времени t характеризуется параметрами $(N(t), M(t))$, где N(t) – число N-объектов, $M(t)$ – число M-объектов. Событием в развитии системы называется момент окончания жизни (исчезновения) любого из объектов и (одновременно) появления новых объектов.

События могут быть следующих типов: $S_N(1)$, $S_N(2)$, $S_N(3)$, $S_M(0)$, $S_M(1)$, $S_M(2)$. При появлении каждого нового объекта случайным образом в соответствии с заданным законом распределения определяется время его жизни. Считать для первого события: момент наступления события $t_{соб}(1)=0$; тип события $Type(1)=S_N(1)$.

Задание 3

Требуется:

1. Провести моделирование первых 100 событий в развитии популяции в соответствии с Указаниями.
2. Составить Таблицу 3.1 с данными о событиях:

- номер события i;
- момент наступления события $t_{соб}(i)$;
- тип события $Type(i)$;
- время жизни появившихся новых объектов (2 столбца) $t_{ж1}(i)$, $t_{ж2}(i)$;
- состояние системы после события $C(i)$;
- время ожидания до следующего события $t_{ож}(i)$;
- номер $J_{кж}(i)$ объекта, у которого раньше закончится жизнь;
- вид этого исчезающего объекта $Gen_{кж}(i)$ (N или M).

3. Составить Таблицу 3.2 с данными об объектах:

- номер объекта j;
- вид объекта $Gen(j)$ (N или M);
- момент появления (рождения) объекта $t_b(j)$;
- время жизни объекта $t_l(j)$;
- момент исчезновения объекта $t_d(j)$;
- номера объектов-потомков (2 столбца) $Des_1(j)$, $Des_2(j)$.

Моделирование событий должно сопровождаться одновременным формированием массивов для заполнения Таблиц 3.1 и 3.2.

В соответствии с Заданием момент наступления первого события $t_{соб}(1)=0$, тип первого события $Type(1)=S_N(1)$, то есть в популяции появился один объект вида N.

В строку 1 Таблицы 3.1 заносятся:

− номер события $i=1$;

− момент наступления события $t_{соб}(1)=0$;

− тип события $Type(1)=S_N(1)$;

− время жизни $t_{ж1}(1)$ объекта вида N определяется случайным образом в соответствии с показательным законом распределения с параметром λ, при этом $t_{ж2}(1)=-1$ (признак того, что появился только один объект);

− состояние системы после события $C(1)=(1,0)$;

− время ожидания до следующего события $t_{ож}(1)=t_{ж1}(1)$;

− номер объекта, у которого раньше закончится жизнь $J_{кж}(1)=1$ (он в данный момент единственный);

− вид этого объекта $Gen_{кж}(1)=N$.

В строку 1 Таблицы 3.2 заносятся:

− номер объекта j 1 ;

− вид объекта $Gen(1)=N$;

− момент появления объекта $t_b(1)=0$;

− время жизни объекта $t_l(1)=t_{ж1}(1)$;

− момент исчезновения объекта $t_d(1)=t_b(1)+t_l(1)=t_{ж1}(1)$;

− номера объектов-потомков $Des_1(1)$, $Des_2(1)$ определяются в момент наступления следующего (второго) события, до этого полагаем $Des_1(1)=Des_2(1)=-1$.

Очевидно, что момент наступления второго события $t_{соб}(2)=t_{ж1}(1)$. В момент $t_{соб}(2)$ определяется тип события 2: генерируется псевдослучайное число ω из равномерного распределения на отрезке [0,1] и

$$Type(2)=\begin{cases} S_N(1), & 0\le\omega<pn_1; \\ S_N(2), & pn_1\le\omega<pn_1+pn_2; \\ S_N(3), & pn_1+pn_2\le\omega\le1. \end{cases}$$

Если тип события 2 получился $S_N(3)$ (с вероятностью $pn_{11}=1-pn_1-pn_2$), то объект № 1 исчез и одновременно появились два новых объекта видов N и M (состояние системы C(2)=(1,1)). Сразу же определяется случайным образом время жизни N-объекта t_N в соответствии с показательным законом распределения с параметром λ и время жизни M-объекта t_M в соответствии с показательным законом распределения с параметром μ. **При появлении сразу двух объектов меньший номер присваивается объекту с меньшим временем жизни.**

Предположим, что $t_M<t_N$. Тогда M-объект будет объектом № 2 и $t_{ж1}(2)=t_M$, а N-объект будет объектом № 3 и $t_{ж2}(2)=t_N$. Объект № 2 (M-объект) исчезнет раньше объекта № 3 (N-объект), поэтому $t_{ож}(2)=t_{ж1}(2)$. Строку 1 Таблицы 3.2 можно полностью заполнить:
$Des_1(1)=2, Des_2(1)=3$ (до этого было $Des_1(1)=Des_2(1)=-1$).

В строку 2 Таблицы 3.1 заносятся:
номер события
$i=2, t_{соб}(2)=t_{ж1}(1), Type(2)=S_N(3), t_{ж1}(2), t_{ж2}(2), C(2)=(1,1), t_{ож}(2)=t_{ж1}(2), J_{кж}(2)=2, \geq n_{кж}(2)=M.$

В строку 2 Таблицы 3.2 заносятся:
номер объекта
$j=2, Gen(2)=M, t_b(2)=t_{соб}(2), t_l(2)=t_{ж1}(2), t_d(2)=t_b(2)+t_l(2), Des_1(2)=Des_2(2)=-1$(временно, до конца жизни этого объекта, когда будут определены настоящие значения $Des_1(2)$ и $Des_2(2)$).

В строку 3 Таблицы 3.2 заносятся:
номер объекта
$j=3, Gen(3)=N, t_b(3)=t_{соб}(2),$ $t_l(3)=t_{ж2}(2), t_d(3)=t_b(3)+t_l(3), Des_1(3)=Des_2(3)=-1$ (временно, до конца жизни этого объекта, когда будут определены настоящие значения $Des_1(3)$ и $Des_2(3)$).

Если тип события 2 получился $S_N(2)$ (с вероятностью pn_2), то объект № 1 исчез и одновременно появились два новых N-объекта (состояние системы

$C(2)=(2,0)$). Сразу же определяются случайным образом времена жизни этих объектов $t_{N,1}$ и $t_{N,2}$ в соответствии с показательным законом распределения с параметром λ. **При появлении сразу двух объектов меньший присваивается объекту с меньшим временем жизни.**

Предположим, что $t_{N,1}<t_{N,2}$. Тогда $t_{ж1}(2)=t_{N,1}$ и этот N-объект будет объектом № 2, а другой N-объект будет объектом № 3 и $t_{ж2}(2)=t_{N.2}$. Объект № 2 исчезнет раньше объекта № 3, поэтому $t_{ож}(2)=t_{ж1}(2)$. Строку 1 Таблицы 3.2 можно полностью заполнить: $Des_1(1)=2$, $Des_2(1)=3$(до этого было $Des_1(1)=Des_2(1)=-1$).

В строку 2 Таблицы 3.1 заносятся:

номер события

$i=2, t_{соб}(2)=t_{ж1}(1), Type(2)=S_N(2), t_{ж1}(2), t_{ж2}(2), C(2)=(2,0), t_{ож}(2)=t_{ж1}(2), J_{кж}(2)=2, J_{кж}(2)=2, \geq n_{кж}$

В строку 2 Таблицы 3.2 заносятся:

номер объекта

$j=2, Gen(2)=N, t_b(2)=t_{соб}(2), t_l(2)=t_{ж1}(2), t_d(2)=t_b(2)+t_l(2), Des_1(2)=Des_2(2)=-1$

(временно, до конца жизни этого объекта, когда будут определены настоящие значения $Des_1(2)$и $Des_2(2)$).

В строку 3 Таблицы 3.2 заносятся:

номер объекта

$j=3, Gen(3)=N, t_b(3)=t_{соб}(2), t_l(3)=t_{ж2}(2), t_d(3)=t_b(3)+t_l(3), Des_1(3)=Des_2(3)=-1$

(временно, до конца жизни этого объекта, когда будут определены настоящие значения $Des_1(3)$ и $Des_2(3)$).

Если тип события 2 получился $S_N(1)$ (с вероятностью pn_1), то объект № 1 исчез и одновременно появился только один новый N-объект (состояние системы не изменилось $C(2)=(1,0)$). Сразу же определяется случайным образом время жизни этого объекта t_N в соответствии с показательным законом распределения с параметром λ. При этом $t_{ож}(2)=t_{ж1}(2)=t_N$. Строку 1 Таблицы 3.2 можно полностью заполнить:

$Des_1(1)=2, Des_2(1)=-1$(до этого было $Des_1(1)=Des_2(1)=-1$).

В строку 2 Таблицы 3.1 заносятся:

номер события

$i=2, t_{соб}(2)=t_{ж1}(2), Type(2)=S_n(1), t_{ж1}(2), t_{ж2}(2)=-1, C(2)=(1,0), t_{ож}(2)=t_{ж1}(2), J_{кж}(2)=2,$ $Gen_{кж}(2)=N$.

В строку 2 Таблицы 3.2 заносятся:

номер объекта

$j=2, Gen(2)=N, t_b(2)=t_{соб}(2), t_l(2)=t_{ж1}(2), t_d(2)=t_b(2)+t_l(2), Des_1(2)=Des_2(2)=-1$

(временно, до конца жизни этого объекта, когда будут определены настоящие значения $Des_1(2)$ и $Des_2(2)$).

Очевидно, что момент наступления третьего события $t_{соб}(3)=t_{соб}(2)+t_{ож}(2)$.

Если тип события 2 был $S_N(3)$ и $t_M<t_N$, т.е. М-объект будет объектом № 2, то в момент $t_{соб}(3)$ исчезновения этого М-объекта тип события 3 определяется следующим образом: генерируется псевдослучайное число из равномерного распределения на отрезке [0,1] и

$$Type(3)=\begin{cases} S_M(0), & 0\le\omega<pm_0; \\ S_M(1), & pm_0\le\omega<pm_0+pm_1; \\ S_M(2), & pm_0+pm_1\le\omega\le 1. \end{cases}$$

Если тип события 3 получился $S_M(0)$ (с вероятностью pm_0), то объект № 2 исчез и новые объекты не появились (состояние системы $C(3)=(1,0)$).

В строке 2 Таблицы 3.2 останется: $Des_1(2)=Des_2(2)=-1$. В таблицу 2 новой информации не заносится.

В строку 3 Таблицы 3.1 заносятся:

номер события

$i=3, t_{соб}(3), Type(3)=S_M(0), t_{ж1}(3)=t_{ж2}(3)=-1, C(3)=(1,0),$
$t_{ож}(3)=t_d(3)-t_{соб}(3)=t_{ж2}(2)-t_{ож}(2), J_{кж}(3)=3, \geq n_{кж}(3)=N.$

Если тип события 3 получился $S_M(1)$ (с вероятностью pm_1), то объект № 2 исчез и одновременно появился только один новый М-объект, это объект № 4, состояние системы не изменилось $C(3)=(1,1)$. Сразу же определяется случайным образом время жизни этого объекта t_M в соответствии с показательным законом распределения с параметром μ. При этом $t_{ж1}(3)=t_M$. Строку 2 таблицы 2 можно полностью заполнить: $Des_1(2)=4, Des_2(2)=-1$ (до этого было $Des_1(2)=Des_2(2)=-1$).

В строку 3 Таблицы 3.1 заносятся:

номер события

$i=3, t_{соб}(3)=t_{соб}(2)+t_{ож}(2), Type(3)=S_M(1), t_{ж1}(3), t_{ж2}(3)=-1, C(3)=(1,1), t_{ож}(3)=min\{t_{ж1}(3), t_d(3)-t_c$

$$J_{кж}(3)=\begin{cases}3, & \text{если } t_{ож}(3)=t_d(3)-t_{соб}(3);\\ 4, & \text{если } t_{ож}(3)=t_{ж1}(3);\end{cases}, \quad Gen_{кж}(3)=\begin{cases}\text{N}, & \text{если } J_{кж}(3)=3;\\ \text{M}, & \text{если } J_{кж}(3)=4.\end{cases}$$

В строку 4 Таблицы 3.2 заносятся:

номер объекта

$j=4, Gen(4)=M, t_b(4)=t_{соб}(3), t_l(4)=t_{ж1}(3), t_d(4)=t_b(4)+t_l(4), Des_1(4)=Des_2(4)=-1$

(временно, до конца жизни этого объекта, когда будут определены настоящие значения $Des_1(4)$ и $Des_2(4)$).

Если тип события 3 получился $S_M(2)$ (с вероятностью $pm_{11}=1-pm_1-pm_0$), то объект № 2 исчез и одновременно появились два новых объекта видов N и M (состояние системы $C(3)=(2,1)$). Сразу же определяется случайным образом время жизни N-объекта t_N в соответствии с показательным законом распределения с параметром λ и время жизни M-объекта t_M в соответствии с показательным законом распределения с параметром μ. **При появлении сразу двух объектов меньший номер присваивается объекту с меньшим временем жизни.**

Если $t_N < t_M$, то $t_{ж1}(3) = t_N$ и этот N-объект будет объектом № 4, а M-объект будет объектом № 5 и $t_{ж2}(3) = t_M$. Если $t_M < t_N$, то $t_{ж1}(2) = t_M$ и этот M-объект будет объектом № 4, а N-объект будет объектом № 5 и $t_{ж2}(3) = t_N$.

В Таблице 3.2 строку 2 можно полностью заполнить: $Des_1(2) = 4$, $Des_2(2) = 5$ (до этого было $Des_1(2) = Des_2(2) = -1$) и начать заполнение строк 4 и 5, занеся в них номер объекта j, $Gen(j)$, $t_b(j) = t_{соб}(3)$, $t_l(j)$, $t_d(j) = t_b(j) + t_l(j)$; $Des_1(j) = Des_2(j) = -1$ (временно, до конца жизни этих объектов, когда будут определены настоящие значения $Des_1(j)$ и $Des_2(j)$).

В строку 3 Таблицы 3.1 заносятся:

номер события $i = 3, t_{соб}(3) = t_{соб}(2) + t_{ож}(2), Type(3) = S_M(2), t_{ж1}(3)$, $t_{ж2}(3), C(3) = (2,1), t_{ож}(3) = min\{t_{ж1}(3), t_d(3) - t_{соб}(3)\}$,

$$J_{кж}(3) = \begin{cases} 3, \text{ если } t_{ож}(3) = t_d(3) - t_{соб}(3); \\ 4, \text{ если } t_{ож}(3) = t_{ж1}(3); \end{cases}, \quad Gen_{кж}(3) = \begin{cases} N, & \text{если } J_{кж}(3) = 3; \\ Gen(4), & \text{если } J_{кж}(3) = 4. \end{cases}$$

В общем случае для определения значения $t_{ож}(i)$ следует найти время дожития каждого живого объекта j после события i (включая объекты которые могли появиться в событии i) $T_{end}(i,j) = t_d(j) - t_{соб}(i) > 0$, $t_{ож}(i)$ будет равно наименьшему из таких $T_{end}(i,j)$.

Задание 4

Требуется:

1. Составить Таблицу 4.1 с данными о типах событий следующего вида:

Тип события	$S_N(1)$	$S_N(2)$	$S_N(3)$	$S_M(0)$	$S_M(1)$	$S_M(2)$	
Число событий							Σ
Относительная частота							Σ

Относительная частота типа события равна числу событий данного типа деленному на 100.

2. Составить Таблицу 4.2 с данными о видах объектов следующего вида:

Вид объекта	Число появившихся объектов за время $[0, t_{соб}(100)]$	Число объектов в момент $t_{соб}(100)$
N		
M		

Задание 5

Требуется:

1. Составить Таблицу 5.1 с данными о состояниях (которые появились при моделировании и имеются в Таблице 3.1) следующего вида:

№	Состояние	$N_{сост}$	$V_{сост}$	$T_{сост}$	$\Delta_{сост}$
1	(1,0)				
2	(1,1)				
…	…				
…	(2,0)				
…	(2,1)				
…	…				

l	$(n(l), m(l))$	$N_{сост}(l)$	$V_{сост}(l)$	$T_{сост}(l)$	$\Delta_{сост}(l)$
…	…				
		Σ	Σ	Σ	Σ

где $n(l)$ – число N-объектов в состоянии с номером l;

$m(l)$ – число M-объектов в состоянии с номером l;

$N_{сост}(l)$ – число попаданий в состояние с номером l;

$v_{сост}(l) = \frac{N_{сост}(l)}{100}$ – относительная частота попаданий в состояние с номером l;

$T_{сост}(l)$ – общее время пребывания в состоянии с номером l за время $[0, t_{соб}(100)]$;

$\Delta_{сост}(l) = \frac{T_{сост}(l)}{t_{соб}(100)}$ – доля времени пребывания в состоянии с номером l за время $[0, t_{соб}(100)]$.

2. Вычислить по Таблице 5.1:

среднее число N-объектов и M-объектов соответственно по относительным частотам попаданий в состояния

$\underline{N}_{част} = \sum_l n(l) \cdot v_{сост}(l)$ и $\underline{M}_{част} = \sum_l m(l) \cdot v_{сост}(l)$;

среднее число N-объектов и M-объектов соответственно по долям времени пребывания в состояниях

$\underline{N}_{дв} = \sum_l n(l) \cdot \Delta_{сост}(l)$ и $\underline{M}_{дв} = \sum_l m(l) \cdot \Delta_{сост}(l)$.

Вывод результатов проводить с округлением до 0,000001.

Краткие теоретические сведения

Определение 1. Последовательность с.в. $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется *цепью Маркова*, если для произвольного набора $i_1<i_2<i_3<\ldots<i_k(k=3,4,\ldots)$ и любых $E_{j_1},\ldots,E_{j_k}$ справедливо равенство

$$P(X_{i_k}=E_{j_k}\vee X_{i_1}=E_{j_1},\ldots,X_{i_{k-1}}=E_{j_{k-1}})=P(x_{i_k}=E_{j_k}\vee X_{i_{k-1}}=E_{j_{k-1}})$$

Определение 2. Цепь Маркова $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется *однородной*, если для всех i и j вероятности $P(X_{n+1}=E_j\vee X_n=E_i)$ не зависят от n.

Определение 3. Если существует $\lim_{n\to\infty}\underline{p}(n)=\underline{p}(\infty)$ и $\sum_i p_i(\infty)=1$, то распределение $\underline{p}(\infty)$ называется *предельным*.

Определение 4. Распределение $\underline{p}$ цепи Маркова называется *стационарным*, если оно остается неизменным на каждом шаге. Стационарное распределение $\underline{p}^*=\underline{p}^*P$.

Определение 5. Состояние $i-$*существенное*, если из $i\to j$ следует $j\to i$. Если $i-$ существенное состояние и $i\to j$, то $j-$существенное.

Определение 6. Если для состояния i существует такое состояние j, что j достижимо из состояния i, но i недостижимо из j, то состояние i называется *несущественным*.

Определение 7. Периодом состояния $i\in S$ называется $k_i=НОД(k:p_{ii}(k)>0)$.

Определение 8. Цепь Маркова называется *эргодической*, если для всех j существует не зависящий от i предел.

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}(n)=q_j>0, \sum_j q_j=1$$

Условия эргодичности:

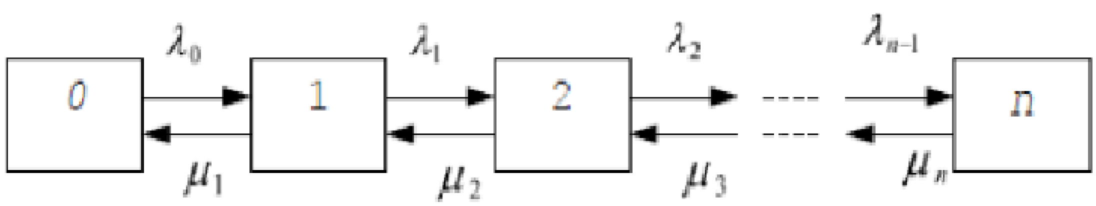
1) существует предел $\lim_{m\to\infty} p_j(m)=q_j$;
2) q_j не зависят от начального распределения;
3) $q_j>0$для всех j.

Теорема 1. Цепь Маркова является эргодической в том и только том случае, если существует предел $\lim_{n\to\infty} \underline{p}(n)=\underline{q}$, не зависящий от начального распространения, и $q_i>0$ для всех j, $\sum_j q_j=1$.

Теорема 2. (Теорема Маркова) Если для конечной цепи Маркова существует такое n, что $p_{ij}(n)>0$ для всех i и j, то цепь Маркова является *эргодической*.

О процессах рождения и гибели с конечным числом состояний:

Граф процесса рождения и гибели с конечным числом состояний:



Система дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{d\,p_i(t)}{dt}=\sum_j \lambda_{ji}\cdot p_j(t)=\lambda_{ii}\cdot p_i(t)+\sum_{j\neq i} \lambda_{ji}\cdot p_j(t)=$$

$$=\sum_{j\neq i} \lambda_{ji}\cdot p_j(t)=p_i(t)\cdot\sum_{j\neq i} \lambda_{ij};\ i=1,2,\ldots$$

Дифференциальные уравнения Колмогорова процесса рождения и гибели с конечным числом состояний:

$$\begin{cases} p'_0(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t); \\ p'_k(t) = \lambda_{k-1} p_{k-1}(t) - (\lambda_k + \mu_k) p_k(t) + \mu_{k+1} p_{k+1}(t),\ 1 \le k < n; \\ p'_n(t) = \lambda_{n-1} p_{n-1}(t) - \mu_n p_n(t). \end{cases}$$

Векторная форма дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний:

$\underline{p}'(t) = \underline{p}(t)\Lambda$.

Прямое уравнение Колмогорова:

$$P'(t) = P(t)\Lambda.$$

Обратное уравнение Колмогорова:

$$P'(t) = \Lambda P(t).$$

Формулы для нахождения стационарного распределения:

Стационарные вероятности состояний $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_n$ процесса рождения и гибели с конечным числом состояний удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 0 = -\lambda_0 r_0 + \mu_1 r_1; \\ 0 = \lambda_{k-1} r_{k-1} - (\lambda_k + \mu_k) r_k + \mu_{k+1} r_{k+1},\ 1 \le k < n; \\ 0 = \lambda_{n-1} r_{n-1} - \mu_n r_n. \end{cases}$$

а также уравнению нормировки

$$\sum_{k=0}^{n} r_k = 1.$$

Из уравнений для стационарных вероятностей состояний следуют формулы $\lambda_{k-1} r_{k-1} = \mu_k r_k$ при $k = 1, 2, \ldots, n$. Значит

$$r_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} r_0,\ r_k = \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} r_{k-1} = \ldots = \frac{\lambda_{k-1} \cdots \lambda_0}{\mu_k \cdots \mu_1} r_0.$$

Из уравнений нормировки получаем

$$r_0 = \left\{ 1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \ldots + \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdot \mu_1 \cdots \mu_n} \right\}^{-1}.$$

Результаты расчетов

Задание 1

$V=90,\ p=0,\ q=0.349$

Таблица 1.1. Возможные переходы между состояниями

№ состояния	Состояние	Список возможных состояний на следующем шаге (с ненулевой вероятностью перехода)
1	0011	0110(3), 0101(2)
2	0101	0011(1), 0110(3)
3	0110	0011(1), 0101(2)
4	1001	1010(5), 0011(1)
5	1010	0011(1), 1001(4)
6	1100	0101(2), 1001(4)

Матрица переходных вероятностей P:

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0.349 & 0.651 & 0 & 0 & 0 \\ 0.349 & 0 & 0.651 & 0 & 0 & 0 \\ 0.349 & 0.651 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.349 & 0 & 0 & 0 & 0.651 & 0 \\ 0.349 & 0 & 0 & 0.651 & 0 & 0 \\ 0 & 0.349 & 0 & 0.651 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Граф состояний цепи Маркова

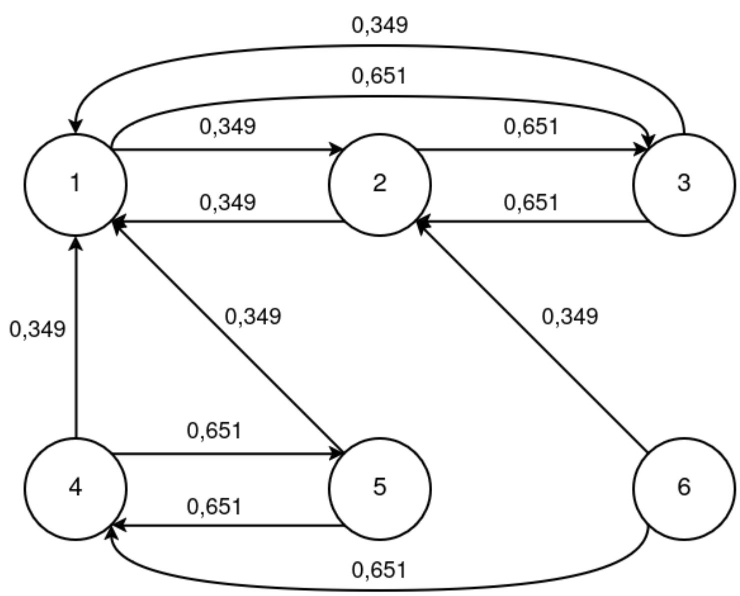


Таблица 1.2. Матрицы переходных вероятностей за n шагов P^n $(n=1,\dots,16)$

n	P^n	δ_n
1	$\begin{pmatrix} 0 & 0.34900 & 0.65100 & 0 & 0 & 0 \\ 0.34900 & 0 & 0.65100 & 0 & 0 & 0 \\ 0.34900 & 0.65100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.34900 & 0 & 0 & 0 & 0.65100 & 0 \\ 0.34900 & 0 & 0 & 0.65100 & 0 & 0 \\ 0 & 0.34900 & 0 & 0.65100 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	-
2	$\begin{pmatrix} 0.34900 & 0.42380 & 0.22720 & 0 & 0 & 0 \\ 0.22720 & 0.54560 & 0.22720 & 0 & 0 & 0 \\ 0.22720 & 0.12180 & 0.65100 & 0 & 0 & 0 \\ 0.22720 & 0.12180 & 0.22720 & 0.42380 & 0 & 0 \\ 0.22720 & 0.12180 & 0.22720 & 0 & 0.42380 & 0 \\ 0.34900 & 0 & 0.22720 & 0 & 0.42380 & 0 \end{pmatrix}$	0.651
3	$\begin{pmatrix} 0.22720 & 0.26971 & 0.50309 & 0 & 0 & 0 \\ 0.26971 & 0.22720 & 0.50309 & 0 & 0 & 0 \\ 0.26971 & 0.50309 & 0.22720 & 0 & 0 & 0 \\ 0.26971 & 0.22720 & 0.22720 & 0 & 0.27589 & 0 \\ 0.26971 & 0.22720 & 0.22720 & 0.27589 & 0 & 0 \\ 0.22720 & 0.26971 & 0.22720 & 0.27589 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	0.50309
4	$\begin{pmatrix} 0.26971 & 0.40681 & 0.32349 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25487 & 0.42164 & 0.32349 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25487 & 0.24203 & 0.50309 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25487 & 0.24203 & 0.32349 & 0.17961 & 0 & 0 \\ 0.25487 & 0.24203 & 0.32349 & 0 & 0.17961 & 0 \\ 0.26971 & 0.22720 & 0.32349 & 0 & 0.17961 & 0 \end{pmatrix}$	0.50309
5	$\begin{pmatrix} 0.25487 & 0.30472 & 0.44041 & 0 & 0 & 0 \\ 0.26005 & 0.29954 & 0.44041 & 0 & 0 & 0 \\ 0.26005 & 0.41646 & 0.32349 & 0 & 0 & 0 \\ 0.26005 & 0.29954 & 0.32349 & 0 & 0.11692 & 0 \\ 0.26005 & 0.29954 & 0.32349 & 0.11692 & 0 & 0 \\ 0.25487 & 0.30472 & 0.32349 & 0.11692 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	0.44041
6	$\begin{pmatrix} 0.26005 & 0.37566 & 0.36429 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25824 & 0.37746 & 0.36429 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25824 & 0.30135 & 0.44041 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25824 & 0.30135 & 0.36429 & 0.07612 & 0 & 0 \\ 0.25824 & 0.30135 & 0.36429 & 0 & 0.07612 & 0 \\ 0.26005 & 0.29954 & 0.36429 & 0 & 0.07612 & 0 \end{pmatrix}$	0.44041

7	$$\begin{pmatrix} 0.25824 & 0.32791 & 0.41385 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25887 & 0.32728 & 0.41385 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25887 & 0.37683 & 0.36429 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25887 & 0.32728 & 0.36429 & 0 & 0.04955 & 0 \\ 0.25887 & 0.32728 & 0.36429 & 0.04955 & 0 & 0 \\ 0.25824 & 0.32791 & 0.36429 & 0.04955 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$	0.41385
8	$$\begin{pmatrix} 0.25887 & 0.35954 & 0.38159 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25865 & 0.35976 & 0.38159 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25865 & 0.32750 & 0.41385 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25865 & 0.32750 & 0.38159 & 0.03226 & 0 & 0 \\ 0.25865 & 0.32750 & 0.38159 & 0 & 0.03226 & 0 \\ 0.25887 & 0.32728 & 0.38159 & 0 & 0.03226 & 0 \end{pmatrix}$$	0.41385
9	$$\begin{pmatrix} 0.25865 & 0.33876 & 0.40259 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25873 & 0.33868 & 0.40259 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25873 & 0.35968 & 0.38159 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25873 & 0.33868 & 0.38159 & 0 & 0.02100 & 0 \\ 0.25873 & 0.33868 & 0.38159 & 0.02100 & 0 & 0 \\ 0.25865 & 0.33876 & 0.38159 & 0.02100 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$	0.40259
10	$$\begin{pmatrix} 0.25873 & 0.35235 & 0.38892 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25870 & 0.35238 & 0.38892 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25870 & 0.33871 & 0.40259 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25870 & 0.33871 & 0.38892 & 0.01367 & 0 & 0 \\ 0.25870 & 0.33871 & 0.38892 & 0 & 0.01367 & 0 \\ 0.25873 & 0.33868 & 0.38892 & 0 & 0.01367 & 0 \end{pmatrix}$$	0.40259
11	$$\begin{pmatrix} 0.25870 & 0.34348 & 0.39782 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25871 & 0.34347 & 0.39782 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25871 & 0.35237 & 0.38892 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25871 & 0.34347 & 0.38892 & 0 & 0.00890 & 0 \\ 0.25871 & 0.34347 & 0.38892 & 0.00890 & 0 & 0 \\ 0.25870 & 0.34348 & 0.38892 & 0.00890 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$	0.39782
12	$$\begin{pmatrix} 0.25871 & 0.34927 & 0.39202 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25871 & 0.34927 & 0.39202 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25871 & 0.34347 & 0.39782 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25871 & 0.34347 & 0.39202 & 0.00579 & 0 & 0 \\ 0.25871 & 0.34347 & 0.39202 & 0 & 0.00579 & 0 \\ 0.25871 & 0.34347 & 0.39202 & 0 & 0.00579 & 0 \end{pmatrix}$$	0.39782

13	$\begin{pmatrix} 0.25871 & 0.34550 & 0.39579 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25871 & 0.34550 & 0.39579 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25871 & 0.34927 & 0.39202 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25871 & 0.34550 & 0.39202 & 0 & 0.00377 & 0 \\ 0.25871 & 0.34550 & 0.39202 & 0.00377 & 0 & 0 \\ 0.25871 & 0.34550 & 0.39202 & 0.00377 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	0.39579
14	$\begin{pmatrix} 0.25871 & 0.34795 & 0.39334 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25871 & 0.34795 & 0.39334 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25871 & 0.34550 & 0.39579 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25871 & 0.34550 & 0.39334 & 0.00246 & 0 & 0 \\ 0.25871 & 0.34550 & 0.39334 & 0 & 0.00246 & 0 \\ 0.25871 & 0.34550 & 0.39334 & 0 & 0.00246 & 0 \end{pmatrix}$	0.39579
15	$\begin{pmatrix} 0.25871 & 0.34635 & 0.39494 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25871 & 0.34635 & 0.39494 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25871 & 0.34795 & 0.39334 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25871 & 0.34635 & 0.39334 & 0 & 0.00160 & 0 \\ 0.25871 & 0.34635 & 0.39334 & 0.00160 & 0 & 0 \\ 0.25871 & 0.34635 & 0.39334 & 0.00160 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	0.39494
16	$\begin{pmatrix} 0.25871 & 0.34739 & 0.39390 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25871 & 0.34739 & 0.39390 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25871 & 0.34635 & 0.39494 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25871 & 0.34635 & 0.39390 & 0.00104 & 0 & 0 \\ 0.25871 & 0.34635 & 0.39390 & 0 & 0.00104 & 0 \\ 0.25871 & 0.34635 & 0.39390 & 0 & 0.00104 & 0 \end{pmatrix}$	0.39494

Задание 2

$V=90,\ p=0,\ q=0.349$

Стационарное распределение вероятностей состояний цепи Маркова

1	2	3	4	5	6	$\sum_{i=1}^{6} r_i$
0.25871	0.34698	0.39431	0	0	0	1

Проверка стационарности найденного распределения

$$(r_1, r_2, \ldots, r_6)P=$$

$$=\begin{pmatrix} 0.25871 & 0.34698 & 0.39431 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0.34900 & 0.65100 & 0 & 0 & 0 \\ 0.34900 & 0 & 0.65100 & 0 & 0 & 0 \\ 0.34900 & 0.65100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.34900 & 0 & 0 & 0 & 0.65100 & 0 \\ 0.34900 & 0 & 0 & 0.65100 & 0 & 0 \\ 0 & 0.34900 & 0 & 0.65100 & 0 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0.25871 & 0.34698 & 0.39431 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=(r_1, r_2, \ldots, r_6)$$

Существенные и несущественные состояния

Существенные	1, 2, 3
Несущественные	4, 5, 6

Цепь Маркова не является эргодической, т.к. не является неприводимой.

Задание 3

$V=90,\ p=0,\ q=0.349,\ \lambda=0.813,\ \mu=1.105,\ pn_1=0.319,\ pn_2=0.470,\ pm_0=0.494,\ pm_1=0.252$

Таблица 3.1. Данные о событиях

i	$t_{соб}$	$Type(i)$	$t_{ж1}(i)$	$t_{ж2}(i)$	$C(i)$	$t_{ож}(i)$	$J_{кж}(i)$	$Gen_{кж}(i)$
1	0.00000	S_n(1)	0.20103	-1.00000	(1, 0)	0.20103	1	N
2	0.20103	S_n(3)	0.10287	0.04781	(1, 1)	0.04781	2	M
3	0.24883	S_m(0)	-1.00000	-1.00000	(1, 0)	0.05506	3	N
4	0.30390	S_m(2)	0.34599	1.59162	(2, 0)	0.29092	4	N
5	0.59482	S_n(2)	7.03260	0.50488	(3, 0)	0.02416	8	N
6	0.61898	S_n(2)	0.60639	0.02416	(4, 0)	0.18980	6	N
7	0.80878	S_n(2)	0.35067	3.01670	(5, 0)	0.16087	10	N
8	0.96965	S_n(2)	4.32160	2.31280	(6, 0)	0.18476	15	N
9	1.15441	S_n(1)	4.81308	-1.00000	(6, 0)	0.04680	9	N
10	1.20121	S_n(3)	0.18476	0.51891	(6, 1)	0.13791	18	M
11	1.33912	S_n(1)	0.33737	-1.00000	(6, 1)	0.00836	21	M
12	1.34748	S_n(3)	1.93443	0.18471	(6, 2)	0.00215	23	N
13	1.34963	S_n(1)	0.02446	-1.00000	(6, 2)	0.02446	27	N
14	1.37408	S_n(3)	1.22265	0.14626	(6, 3)	0.01189	20	N
15	1.38597	S_m(2)	0.01051	0.30372	(7, 3)	0.10259	16	M
16	1.48856	S_m(2)	1.36363	2.74237	(8, 3)	0.15428	24	M
17	1.64284	S_n(1)	0.39397	-1.00000	(8, 3)	0.02236	30	N
18	1.66521	S_n(3)	0.48816	2.05245	(8, 4)	0.17258	28	N
19	1.83779	S_n(2)	0.29112	0.90136	(9, 4)	0.00267	5	M
20	1.84045	S_n(2)	3.08870	0.95840	(10, 4)	0.16914	36	M
21	2.00960	S_m(0)	-1.00000	-1.00000	(10, 3)	0.05920	34	M
22	2.06880	S_m(2)	2.74240	0.58024	(11, 3)	0.17913	43	M
23	2.24794	S_m(1)	0.36676	-1.00000	(11, 3)	0.02008	44	N
24	2.26801	S_n(3)	1.57802	1.96231	(11, 4)	0.00743	31	N
25	2.27544	S_n(3)	1.18956	0.64954	(11, 5)	0.06893	32	N
26	2.34438	S_m(0)	-1.00000	-1.00000	(11, 4)	0.06599	53	M
27	2.41037	S_m(2)	0.80521	2.95379	(12, 4)	0.01349	22	N

28	2.42386	S_m(1)	0.23834	-1.00000	(12, 4)	0.06347	39	M
29	2.48733	S_m(2)	0.19921	1.18810	(13, 4)	0.01593	50	M
30	2.50325	S_m(1)	0.49764	-1.00000	(13, 4)	0.00301	60	M
31	2.50626	S_n(2)	0.61216	2.05139	(14, 4)	0.06927	62	M
32	2.57553	S_n(1)	0.26298	-1.00000	(14, 4)	0.07014	41	N
33	2.64567	S_n(3)	2.17280	0.22781	(14, 5)	0.01653	57	N
34	2.66219	S_n(1)	1.22894	-1.00000	(14, 5)	0.01962	69	N
35	2.68182	S_n(3)	8.74150	0.06599	(14, 6)	0.02929	25	N
36	2.71111	S_m(0)	-1.00000	-1.00000	(14, 5)	0.03447	46	M
37	2.74557	S_m(2)	0.83894	0.65811	(15, 5)	0.02027	67	N
38	2.76584	S_n(1)	0.19594	-1.00000	(15, 5)	0.01267	65	N
39	2.77851	S_n(3)	1.15242	1.58185	(15, 6)	0.03895	61	N
40	2.81746	S_m(2)	0.33013	0.01894	(16, 6)	0.01542	80	N
41	2.83288	S_m(1)	0.07228	-1.00000	(16, 6)	0.04730	47	N
42	2.88017	S_m(0)	-1.00000	-1.00000	(16, 5)	0.00022	66	M
43	2.88040	S_m(2)	0.63262	0.52541	(17, 5)	0.02476	84	N
44	2.90516	S_m(2)	0.20298	0.30487	(18, 5)	0.00014	85	N
45	2.90530	S_n(2)	0.55755	0.12018	(19, 5)	0.04858	87	N
46	2.95388	S_n(2)	0.76064	0.01962	(20, 5)	0.00791	77	N
47	2.96178	S_n(3)	1.91647	1.31247	(20, 6)	0.04586	78	N
48	3.00765	S_n(3)	0.51732	0.71007	(20, 7)	0.01971	40	N
49	3.02735	S_m(0)	-1.00000	-1.00000	(20, 6)	0.00432	63	M
50	3.03168	S_m(2)	1.69153	0.43167	(21, 6)	0.03680	55	M
51	3.06848	S_n(1)	0.86257	-1.00000	(21, 6)	0.01741	106	N
52	3.08589	S_n(3)	0.24180	0.54711	(21, 7)	0.00295	19	N
53	3.08884	S_n(2)	1.09501	0.05436	(22, 7)	0.01930	91	N
54	3.10814	S_n(2)	1.66594	0.47979	(23, 7)	0.00177	94	N
55	3.10991	S_n(1)	1.20210	-1.00000	(23, 7)	0.01167	12	N
56	3.12158	S_n(3)	0.07242	2.22157	(23, 8)	0.01730	64	N
57	3.13888	S_n(2)	0.07370	0.94906	(24, 8)	0.00798	92	M
58	3.14686	S_m(2)	0.29568	1.15688	(25, 8)	0.02922	89	N
59	3.17607	S_n(1)	1.56701	-1.00000	(25, 8)	0.00117	75	M

60	3.17724	S_n(3)	0.53120	0.24170	(25, 9)	0.02598	68	N
61	3.20322	S_n(2)	0.78844	0.20461	(26, 9)	0.00007	104	M
62	3.20329	S_n(1)	1.48226	-1.00000	(26, 9)	0.00929	119	N
63	3.21258	S_n(3)	0.62207	1.91319	(26, 10)	0.01585	73	N
64	3.22843	S_n(1)	2.88775	-1.00000	(26, 10)	0.00137	105	N
65	3.22979	S_n(3)	0.48359	0.49422	(26, 11)	0.01343	37	N
66	3.24322	S_n(3)	1.28195	1.45149	(26, 12)	0.00609	56	N
67	3.24931	S_n(3)	0.20244	0.17594	(26, 13)	0.00759	45	M
68	3.25690	S_m(2)	0.05421	0.68928	(27, 13)	0.01741	134	M
69	3.27431	S_m(1)	0.29680	-1.00000	(27, 13)	0.02293	82	N
70	3.29725	S_n(2)	0.21390	2.81206	(28, 13)	0.00254	109	N
71	3.29979	S_n(3)	0.82774	0.21468	(28, 14)	0.00374	111	M
72	3.30352	S_n(2)	0.77748	0.47438	(29, 14)	0.00778	138	M
73	3.31131	S_n(3)	0.66573	1.05579	(29, 15)	0.00165	79	M
74	3.31296	S_n(2)	1.65465	1.18439	(30, 15)	0.02031	132	N
75	3.33327	S_n(1)	1.04951	-1.00000	(30, 15)	0.03200	108	M
76	3.36527	S_n(3)	3.37157	0.22840	(30, 16)	0.00201	120	M
77	3.36728	S_m(0)	-1.00000	-1.00000	(30, 15)	0.03480	29	M
78	3.40208	S_m(2)	1.90642	2.27841	(31, 15)	0.00323	150	M
79	3.40531	S_n(3)	2.11057	0.83324	(31, 16)	0.00376	162	M
80	3.40907	S_m(2)	3.01443	0.31594	(32, 16)	0.01110	144	M
81	3.42017	S_n(2)	0.45863	0.65951	(33, 16)	0.00101	74	M
82	3.42118	S_m(2)	2.70841	0.91943	(34, 16)	0.00165	70	N
83	3.42283	S_n(3)	0.12069	0.86055	(34, 17)	0.01353	93	N
84	3.43636	S_n(3)	1.07150	0.04589	(34, 18)	0.00902	100	N
85	3.44538	S_n(2)	1.18694	0.78651	(35, 18)	0.01063	101	M
86	3.45600	S_n(3)	0.25196	0.06808	(35, 19)	0.00900	49	N
87	3.46501	S_n(3)	2.00337	0.69485	(35, 20)	0.02817	126	M
88	3.49318	S_m(0)	-1.00000	-1.00000	(35, 19)	0.00003	156	N
89	3.49321	S_m(2)	2.07588	0.60746	(36, 19)	0.00015	146	M
90	3.49336	S_m(1)	0.14586	-1.00000	(36, 19)	0.00183	139	N
91	3.49519	S_n(1)	2.41486	-1.00000	(36, 19)	0.00562	169	N

92	3.50081	S_n(3)	0.28489	0.19611	(36, 20)	0.01034	145	N
93	3.51115	S_n(2)	1.65944	0.22620	(37, 20)	0.00243	165	N
94	3.51357	S_m(0)	-1.00000	-1.00000	(37, 19)	0.01242	148	N
95	3.52599	S_m(2)	1.03549	0.10179	(38, 19)	0.01071	163	N
96	3.53670	S_m(1)	1.25427	-1.00000	(38, 19)	0.02631	177	M
97	3.56301	S_m(1)	1.44855	-1.00000	(38, 19)	0.00015	194	N
98	3.56316	S_n(3)	1.14907	0.96551	(38, 20)	0.01279	97	N
99	3.57595	S_m(0)	-1.00000	-1.00000	(38, 19)	0.00033	58	N
100	3.57628	S_m(2)	0.12794	0.71362	(39, 19)	0.00586	147	N

Таблица 3.2. Данные об объектах

j	$Gen(j)$	$t_b(j)$	$t_l(j)$	$t_d(j)$	$Des1(j)$	$Des2(j)$
1	N	0.00000	0.20103	0.20103	2	3
2	M	0.20103	0.04781	0.24883	4	5
3	N	0.20103	0.10287	0.30390	6	7
4	N	0.24883	0.34599	0.59482	8	9
5	M	0.24883	1.59162	1.84045	41	42
6	N	0.30390	0.50488	0.80878	12	13
7	N	0.30390	7.03260	7.33649	-1	-1
8	N	0.59482	0.02416	0.61898	10	11
9	N	0.59482	0.60639	1.20121	21	22
10	N	0.61898	0.35067	0.96965	15	16
11	N	0.61898	3.01670	3.63568	-1	-1
12	N	0.80878	2.31280	3.12158	117	118
13	N	0.80878	4.32160	5.13037	-1	-1
14	N	0.96965	4.32160	5.29124	-1	-1
15	N	0.96965	0.18476	1.15441	18	19
16	M	0.96965	0.51891	1.48856	34	35
17	N	1.15441	4.81308	5.96749	-1	-1
18	M	1.15441	0.18471	1.33912	23	24
19	N	1.15441	1.93443	3.08884	111	112
20	N	1.20121	0.18476	1.38597	32	33

21	M	1.20121	0.14626	1.34748	25	26
22	N	1.20121	1.22265	2.42386	58	59
23	N	1.33912	0.01051	1.34963	28	29
24	M	1.33912	0.30372	1.64284	36	-1
25	N	1.34748	1.36363	2.71111	73	74
26	M	1.34748	2.74237	4.08984	-1	-1
27	N	1.34963	0.02446	1.37408	30	31
28	N	1.34963	0.48816	1.83779	39	40
29	M	1.34963	2.05245	3.40208	160	161
30	N	1.37408	0.29112	1.66521	37	38
31	N	1.37408	0.90136	2.27544	50	51
32	N	1.38597	0.95840	2.34438	53	54
33	N	1.38597	3.08870	4.47468	-1	-1
34	M	1.48856	0.58024	2.06880	44	45
35	N	1.48856	2.74240	4.23097	-1	-1
36	M	1.64284	0.36676	2.00960	43	-1
37	N	1.66521	1.57802	3.24322	138	139
38	M	1.66521	1.96231	3.62752	-1	-1
39	M	1.83779	0.64954	2.48733	60	61
40	N	1.83779	1.18956	3.02735	104	105
41	N	1.84045	0.80521	2.64567	67	68
42	M	1.84045	2.95379	4.79424	-1	-1
43	M	2.00960	0.23834	2.24794	46	-1
44	N	2.06880	0.19921	2.26801	47	48
45	M	2.06880	1.18810	3.25690	142	143
46	M	2.24794	0.49764	2.74557	75	76
47	N	2.26801	0.61216	2.88017	87	88
48	N	2.26801	2.05139	4.31940	-1	-1
49	N	2.27544	1.18956	3.46501	179	180
50	M	2.27544	0.22781	2.50325	62	-1
51	N	2.27544	2.17280	4.44824	-1	-1
52	N	2.34438	-1.00000	1.34438	-1	-1

53	M	2.34438	0.06599	2.41037	55	56
54	N	2.34438	8.74150	11.08587	-1	-1
55	M	2.41037	0.65811	3.06848	108	-1
56	N	2.41037	0.83894	3.24931	140	141
57	N	2.42386	0.23834	2.66219	69	70
58	N	2.42386	1.15242	3.57628	208	209
59	M	2.42386	1.58185	4.00571	-1	-1
60	M	2.48733	0.01894	2.50626	63	64
61	N	2.48733	0.33013	2.81746	82	83
62	M	2.50325	0.07228	2.57553	65	66
63	M	2.50626	0.52541	3.03168	106	107
64	N	2.50626	0.63262	3.13888	120	121
65	N	2.57553	0.20298	2.77851	80	81
66	M	2.57553	0.30487	2.88040	89	90
67	N	2.64567	0.12018	2.76584	78	79
68	N	2.64567	0.55755	3.20322	128	129
69	N	2.66219	0.01962	2.68182	71	72
70	N	2.66219	0.76064	3.42283	169	170
71	M	2.68182	1.31247	3.99429	-1	-1
72	N	2.68182	1.91647	4.59829	-1	-1
73	N	2.71111	0.51732	3.22843	134	135
74	M	2.71111	0.71007	3.42118	167	168
75	M	2.74557	0.43167	3.17724	126	127
76	N	2.74557	1.69153	4.43710	-1	-1
77	N	2.76584	0.19594	2.96178	100	101
78	N	2.76584	0.24180	3.00765	102	103
79	M	2.76584	0.54711	3.31296	153	-1
80	N	2.77851	0.05436	2.83288	85	86
81	N	2.77851	1.09501	3.87352	-1	-1
82	N	2.81746	0.47979	3.29725	146	147
83	N	2.81746	1.66594	4.48340	-1	-1
84	N	2.83288	0.07228	2.90516	92	93

85	N	2.83288	0.07242	2.90530	94	95
86	M	2.83288	2.22157	5.05445	-1	-1
87	N	2.88017	0.07370	2.95388	97	98
88	N	2.88017	0.94906	3.82924	-1	-1
89	N	2.88040	0.29568	3.17607	124	125
90	M	2.88040	1.15688	4.03728	-1	-1
91	N	2.90516	0.20298	3.10814	113	114
92	M	2.90516	0.24170	3.14686	122	123
93	N	2.90516	0.53120	3.43636	172	173
94	N	2.90530	0.20461	3.10991	115	116
95	N	2.90530	0.78844	3.69374	-1	-1
96	N	2.95388	0.76064	3.71451	-1	-1
97	N	2.95388	0.62207	3.57595	206	207
98	M	2.95388	1.91319	4.86706	-1	-1
99	N	2.96178	1.91647	4.87826	-1	-1
100	N	2.96178	0.48359	3.44538	175	176

Задание 4

$V=90,\ p=0,\ q=0.349,\ \lambda=0.813,\ \mu=1.105,\ pn_1=0.319,\ pn_2=0.470,\ pm_0=0.494,\ pm_1=0.252$

Таблица 4.1. Данные о событиях

Тип события	$S_N(1)$	$S_N(2)$	$S_N(3)$	$S_M(0)$	$S_M(1)$	$S_M(2)$	
Число событий	15	19	29	10	8	19	100
Относительная частота	0.15	0.19	0.29	0.1	0.08	0.19	1

Таблица 4.2. Данные о видах объектов

Вид объекта	Число появившихся объектов за время [0, $t_{соб}(100)$]	Число объектов в момент $t_{соб}(100)$
N	135	72
M	74	37

Задание 5

$V=90,\ p=0,\ q=0.349,\ \lambda=0.813,\ \mu=1.105,\ pn_1=0.319,\ pn_2=0.470,\ pm_0=0.494,\ pm_1=0.252$

№	Состояние	$N_{сост}$	$v_{сост}$	$T_{сост}$	$\Delta_{сост}$
0	(1, 0)	1	0.01000	0.25609	0.07161
1	(1, 1)	1	0.01000	0.04781	0.01337
2	(2, 0)	1	0.01000	0.29092	0.08135
3	(3, 0)	1	0.01000	0.02416	0.00676
4	(4, 0)	1	0.01000	0.18980	0.05307
5	(5, 0)	1	0.01000	0.16087	0.04498
6	(6, 0)	2	0.02000	0.23156	0.06475
7	(6, 1)	2	0.02000	0.14626	0.04090
8	(6, 2)	2	0.02000	0.02661	0.00744
9	(6, 3)	1	0.01000	0.01189	0.00333
10	(7, 3)	1	0.01000	0.10259	0.02869
11	(8, 3)	2	0.02000	0.17664	0.04939
12	(8, 4)	1	0.01000	0.17258	0.04826
13	(9, 4)	1	0.01000	0.00267	0.00075
14	(10, 4)	1	0.01000	0.16914	0.04730
15	(10, 3)	1	0.01000	0.05920	0.01655
16	(11, 3)	2	0.02000	0.19921	0.05570
17	(11, 4)	2	0.02000	0.07342	0.02053
18	(11, 5)	1	0.01000	0.06893	0.01928
19	(12, 4)	2	0.02000	0.07696	0.02152
20	(13, 4)	2	0.02000	0.01894	0.00530
21	(14, 4)	2	0.02000	0.13940	0.03898
22	(14, 5)	3	0.03000	0.07061	0.01975
23	(14, 6)	1	0.01000	0.02929	0.00819
24	(15, 5)	2	0.02000	0.03294	0.00921
25	(15, 6)	1	0.01000	0.03895	0.01089
26	(16, 6)	2	0.02000	0.06272	0.01754
27	(16, 5)	1	0.01000	0.00022	0.00006

28	(17, 5)	1	0.01000	0.02476	0.00692
29	(18, 5)	1	0.01000	0.00014	0.00004
30	(19, 5)	1	0.01000	0.04858	0.01358
31	(20, 5)	1	0.01000	0.00791	0.00221
32	(20, 6)	2	0.02000	0.05018	0.01403
33	(20, 7)	1	0.01000	0.01971	0.00551
34	(21, 6)	2	0.02000	0.05421	0.01516
35	(21, 7)	1	0.01000	0.00295	0.00083
36	(22, 7)	1	0.01000	0.01930	0.00540
37	(23, 7)	2	0.02000	0.01344	0.00376
38	(23, 8)	1	0.01000	0.01730	0.00484
39	(24, 8)	1	0.01000	0.00798	0.00223
40	(25, 8)	2	0.02000	0.03038	0.00850
41	(25, 9)	1	0.01000	0.02598	0.00726
42	(26, 9)	2	0.02000	0.00936	0.00262
43	(26, 10)	2	0.02000	0.01721	0.00481
44	(26, 11)	1	0.01000	0.01343	0.00376
45	(26, 12)	1	0.01000	0.00609	0.00170
46	(26, 13)	1	0.01000	0.00759	0.00212
47	(27, 13)	2	0.02000	0.04034	0.01128
48	(28, 13)	2	0.02000	0.00254	0.00071
49	(28, 14)	1	0.01000	0.00374	0.00104
50	(29, 14)	1	0.01000	0.00778	0.00218
51	(29, 15)	1	0.01000	0.00165	0.00046
52	(30, 15)	3	0.03000	0.08711	0.02436
53	(30, 16)	1	0.01000	0.00201	0.00056
54	(31, 15)	1	0.01000	0.00323	0.00090
55	(31, 16)	1	0.01000	0.00376	0.00105
56	(32, 16)	1	0.01000	0.01110	0.00310
57	(33, 16)	1	0.01000	0.00101	0.00028
58	(34, 16)	1	0.01000	0.00165	0.00046
59	(34, 17)	2	0.02000	0.01353	0.00378

60	(34, 18)	1	0.01000	0.00902	0.00252
61	(35, 18)	1	0.01000	0.01063	0.00297
62	(35, 19)	2	0.02000	0.00903	0.00253
63	(35, 20)	1	0.01000	0.02817	0.00788
64	(36, 19)	3	0.03000	0.00760	0.00212
65	(36, 20)	1	0.01000	0.01034	0.00289
66	(37, 20)	1	0.01000	0.00243	0.00068
67	(37, 19)	1	0.01000	0.01242	0.00347
68	(38, 19)	4	0.04000	0.03750	0.01049
69	(38, 20)	1	0.01000	0.01279	0.00358
		100	0.10000		

Среднее число N-объектов по относительным частотам попаданий в состояния − $N_{част} = 20.96$

Среднее число M-объектов по относительным частотам попаданий в состояния − $M_{част} = 9$

Среднее число N-объектов по долям времени пребывания в состояниях − $N_{дв} = 11.14354$

Среднее число M-объектов по долям времени пребывания в состояниях − $M_{дв} = 3.96142$

Список литературы

1. Лобузов А.А. Системы массового обслуживания [Электронный ресурс]: методические указания. – М.: РТУ МИРЭА, 2022.
2. Лобузов А.А., Гумляева С.Д., Норин Н.В. Задачи по теории случайных процессов. – М.: МИРЭА, 1993. – 68 с.
3. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: ЛКИ, 2021. – 400 с.
4. Кирпичников А.П. Методы прикладной теории массового обслуживания. – М.: URSS, 2018. – 224 с.
5. Ивченко Г.И., Каштанов В.А., Коваленко И.Н. Теория массового обслуживания. – М.: URSS, 2012. – 304 с.

Приложение

```
V=90
p=0
q=0.349
lamda=0.813
mu=1.105
pn_1=0.319
pn_2=0.470
pm_0=0.494
pm_1=0.252

import numpy as np

P1 = np.array([
    [0,     0.349, 0.651,    0, 0,  0],
    [0.349, 0,     0.651,    0, 0,  0],
    [0.349, 0.651, 0, 0,     0,     0],
    [0.349, 0,     0, 0,     0.651, 0],
    [0.349, 0,     0, 0.651, 0,     0],
    [0,     0.349, 0, 0.651, 0,     0],
           ])

print("matrix{")
for i in P1:
    print(f"    {i[0]} # {i[1]} # {i[2]} # {i[3]} # {i[4]} # {i[5]} ##")
print("}")

P_list = [P1]
for i in range(1, 16):
  P_list.append(np.dot(P1, P_list[i-1]))

def mlatex(m):
    print("left (")
    print("matrix{")
    for i in m:
        s = []
        for value in i:
            if value == 0:
                s.append("0")
            else:
                s.append(f"{value:.5f}")
        print("    " + " # ".join(s) + " ##")
    print("}")
    print("right )")
```

```
#for i in P_list:
#  print(round(np.amax(i), 5))

for i in range (7, 16):
    print(i)
    print(mlatex(P_list[i]))
```

Приложение 1. SP_1.py

```
V=90
p=0
q=0.349
lamda=0.813
mu=1.105
pn_1=0.319
pn_2=0.470
pm_0=0.494
pm_1=0.252

import numpy as np
from random import randint



I = [1]
t_sob = [0]
Type = ['S_n(1)']
t_zh1 = [np.random.exponential(1/lamda)]
t_zh2 = [-1]
C = [[1, 0]]
t_ozh = [t_zh1[0]]
J_kzh = [1]
Gen_kzh = ['N']
J = [1]
Gen = ['N']
t_b = [0]
t_l = [t_zh1[0]]
t_d = [t_b[0] + t_l[0]]
Des1 = [-1]
Des2 = [-1]
for i in range(1, 100):
  I.append(i+1)
  t_sob.append(t_sob[i-1] + t_ozh[i-1])
  prob = randint(0, 1000) / 1000
  n_ob = t_d.index(t_sob[-1])
  if (Gen_kzh[-1] == 'N'):
    if (prob < pn_1): ##N0
```

```
    Type.append('S_n(1)')
    t_zh1.append(np.random.exponential(1/lamda))
    t_zh2.append(-1)
    C.append([C[-1][0], C[-1][1]])
    j = max(J) + 1
    Des1.append(-1)
    Des2.append(-1)
    J.append(j)
    Gen.append('N')
    t_b.append(t_sob[i])
    t_l.append(t_zh1[i])
    t_d.append(t_sob[i] + t_zh1[i])
    Des1[n_ob] = j
    Des2[n_ob] = -1
  if (prob > pn_1 and prob < pn_1 + pn_2): ##NN
    Type.append('S_n(2)')
    t_zh1.append(np.random.exponential(1/lamda))
    t_zh2.append(np.random.exponential(1/lamda))
    C.append([C[-1][0] + 1, C[-1][1]])
    if (t_zh1[-1] <= t_zh2[-1]):
      j1 = max(J) + 1
      J.append(j1)
      j2 = j1 + 1
      J.append(j2)
      t_l.append(t_zh1[-1])
      t_l.append(t_zh2[-1])
      t_d.append(t_sob[-1] + t_zh1[-1])
      t_d.append(t_sob[-1] + t_zh2[-1])
      Des1[n_ob] = j1
      Des2[n_ob] = j2
    else:
      j2 = max(J) + 1
      J.append(j2)
      j1 = j2 + 1
      J.append(j1)
      t_l.append(t_zh2[-1])
      t_l.append(t_zh1[-1])
      t_d.append(t_sob[-1] + t_zh2[-1])
      t_d.append(t_sob[-1] + t_zh1[-1])
      Des1[n_ob] = j2
      Des2[n_ob] = j1
    Des1.append(-1)
    Des1.append(-1)
    Des2.append(-1)
    Des2.append(-1)
    Gen.append('N')
```

```
      Gen.append('N')
      t_b.append(t_sob[-1])
      t_b.append(t_sob[-1])
    else: ##NM
      Type.append('S_n(3)')
      t_zh1.append(np.random.exponential(1/lamda))
      t_zh2.append(np.random.exponential(1/mu))
      C.append([C[-1][0], C[-1][1] + 1])
      if (t_zh1[-1] <= t_zh2[-1]):
        j1 = max(J) + 1
        J.append(j1)
        j2 = max(J) + 1
        J.append(j2)
        t_l.append(t_zh1[-1])
        t_l.append(t_zh2[-1])
        t_d.append(t_sob[-1] + t_zh1[-1])
        t_d.append(t_sob[-1] + t_zh2[-1])
        Des1[n_ob] = j1
        Des2[n_ob] = j2
        Gen.append('N')
        Gen.append('M')
      else:
        j2 = max(J) + 1
        J.append(j2)
        j1 = max(J) + 1
        J.append(j1)
        t_l.append(t_zh2[-1])
        t_l.append(t_zh1[-1])
        t_d.append(t_sob[-1] + t_zh2[-1])
        t_d.append(t_sob[-1] + t_zh1[-1])
        Des1[n_ob] = j2
        Des2[n_ob] = j1
        Gen.append('M')
        Gen.append('N')
      Des1.append(-1)
      Des1.append(-1)
      Des2.append(-1)
      Des2.append(-1)
      t_b.append(t_sob[-1])
      t_b.append(t_sob[-1])
  else:
    if (prob < pm_0):##00
      Type.append('S_m(0)')
      t_zh1.append(-1)
      t_zh2.append(-1)
      C.append([C[-1][0], C[-1][1] - 1])
```

```
if (prob > pm_0 and prob < (pm_0 + pm_1)):##M0
  Type.append('S_m(1)')
  t_zh1.append(np.random.exponential(1/mu))
  t_zh2.append(-1)
  C.append([C[-1][0], C[-1][1]])
  j = max(J) + 1
  Des1.append(-1)
  Des2.append(-1)
  J.append(j)
  Gen.append('M')
  t_b.append(t_sob[-1])
  t_l.append(t_zh1[-1])
  t_d.append(t_sob[-1] + t_zh1[-1])
  Des1[n_ob] = j
  Des2[n_ob] = -1
else:##MN
  Type.append('S_m(2)')
  t_zh1.append(np.random.exponential(1/lamda))
  t_zh2.append(np.random.exponential(1/mu))
  C.append([C[-1][0] + 1, C[-1][1]])
  if (t_zh1[-1] <= t_zh2[-1]):
    j1 = max(J) + 1
    J.append(j1)
    j2 = max(J) + 1
    J.append(j2)
    t_l.append(t_zh1[-1])
    t_l.append(t_zh2[-1])
    t_d.append(t_sob[-1] + t_zh1[-1])
    t_d.append(t_sob[-1] + t_zh2[-1])
    Des1[n_ob] = j1
    Des2[n_ob] = j2
    Gen.append('N')
    Gen.append('M')
  else:
    j2 = max(J) + 1
    J.append(j2)
    j1 = max(J) + 1
    J.append(j1)
    t_l.append(t_zh2[-1])
    t_l.append(t_zh1[-1])
    t_d.append(t_sob[-1] + t_zh2[-1])
    t_d.append(t_sob[-1] + t_zh1[-1])
    Des1[n_ob] = j2
    Des2[n_ob] = j1
    Gen.append('M')
    Gen.append('N')
```

```
      Des1.append(-1)
      Des1.append(-1)
      Des2.append(-1)
      Des2.append(-1)
      t_b.append(t_sob[-1])
      t_b.append(t_sob[-1])
  t_ozh.append(1000000)
  for k in t_d:
    if (k > t_sob[-1] and k < t_ozh[-1]):
      t_ozh[-1] = k
  J_kzh.append(J[t_d.index(t_ozh[-1])])
  Gen_kzh.append(Gen[t_d.index(t_ozh[-1])])
  t_ozh[-1] = t_ozh[-1] - t_sob[-1]

#print(I)
#print(t_sob)
#print(Type)
#print(t_zh1)
#print(t_zh2)
#print(C) # > 0
#print(t_ozh)
#print(J_kzh)
#print(Gen_kzh)

print("I;t_sob;Type;t_zh1;t_zh2;C;t_ozh;J_kzh;Gen_kzh")
for i in range(100):
  print(f"{I[i]};{t_sob[i]};{Type[i]};{t_zh1[i]};{t_zh2[i]};({C[i][0]}, {C[i][1]});{t_ozh[i]};
{J_kzh[i]};{Gen_kzh[i]}")

#print(J)
#print(Gen)
#print(t_b)
#print(t_l) # > 0
#print(t_d)
#print(Des1)
#print(Des2)

print("J;Gen;t_b;t_l;t_d;Des1;Des2")
for i in range(100):
  print(f"{J[i]};{Gen[i]};{t_b[i]};{t_l[i]};{t_d[i]};{Des1[i]};{Des2[i]}")

Type_old = Type
Type = Type[0:100]
for i in ['S_n(1)', 'S_n(2)', 'S_n(3)', 'S_m(0)', 'S_m(1)', 'S_m(2)']:
  print(Type.count(i))
print(len(Type))
```

```
# 4.2
print(Gen.count('N'))
print(Gen.count('M'))

# N - S_n(1,2,3)
# M - S_m(1,2,3)

sost = []
cnt = []
time = []
for i in range(99):
  if C[i] not in sost:
    sost.append(C[i])
    cnt.append(1)
    time.append(t_sob[i+1] - t_sob[i])
  else:
    cnt[sost.index(C[i])] += 1
    time[sost.index(C[i])] += (t_sob[i+1] - t_sob[i])

print("№;Состояние;N_сост;%nu_сост;T_сост;%DELTA_сост")

for i in range(len(sost)):
  print(f"{i};({sost[i][0]}, {sost[i][1]});{cnt[i]};{cnt[i] / 100};{time[i]};{round(time[i] / t_sob[-1], 5)}")

for i in cnt:
  print(i / 100)

for i in time:
  print(round(i / t_sob[-1], 5))

print(time)

for i in range(len(sost)):
    print(sost[i][1])
```
Приложение 2. SP_2.py