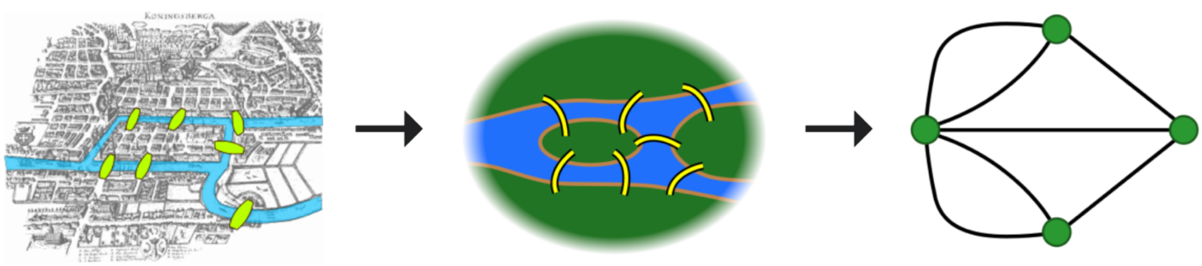
BÀI 1
CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN TRONG LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

Mục tiêu

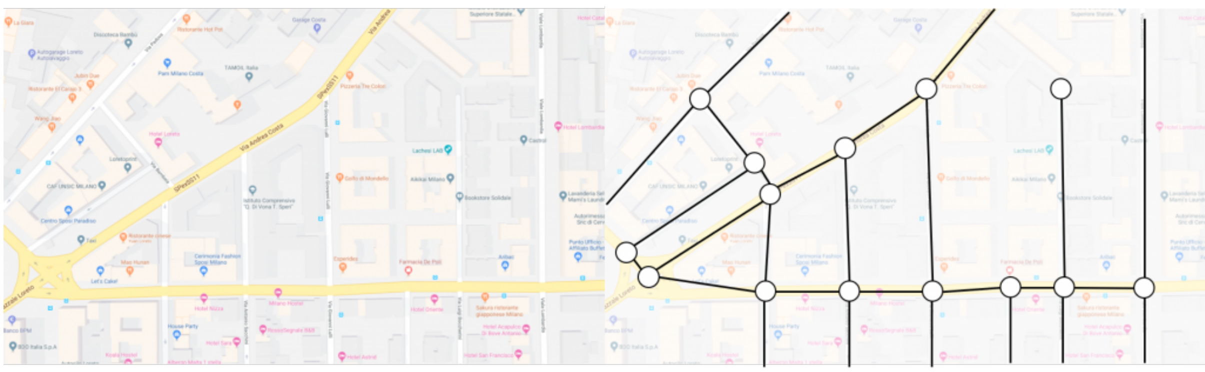
- Hiểu được khái niệm đồ thị và các thuật ngữ liên quan;
- Phân loại các dạng đồ thị;
- Nhận biết được các dạng đồ thị đặc biệt: *đồ thị đầy đủ, đồ thị phân đôi,…*

1. Định nghĩa đồ thị

Đồ thị là một mô hình toán học dùng để mô tả một **tập hữu hạn các đối tượng** (*đỉnh*) và **mối quan hệ giữa các đối tượng** (*cạnh*).



Hình 1. Biểu diễn bài toán "Bảy cây cầu ở Königsberg" bằng đồ thị: đỉnh là các vùng đất, cạnh là các cây cầu



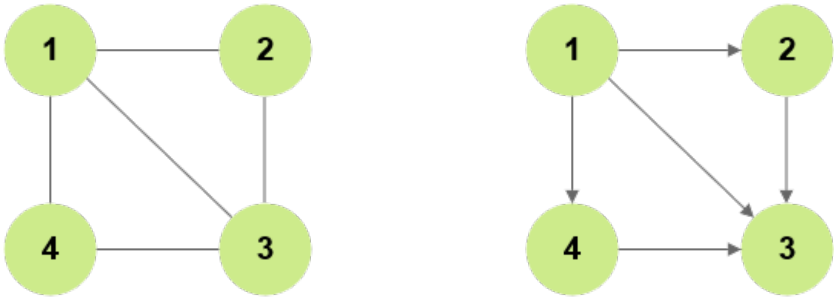
Hình 2. Biểu diễn bản đồ đường đi bằng đồ thị: đỉnh là các giao lộ, cạnh là các con đường

Đồ thị G được biểu diễn bởi tập hợp $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$, trong đó:

- $\boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$: tập hữu hạn các đỉnh (*vertices/nodes*);
- $\boldsymbol{E} \subseteq \{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) | \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}\}$: tập các cặp đỉnh (u, v) có thứ tự/không có thứ tự mô tả cạnh/cung nối giữa các đỉnh (*edges/arcs*).

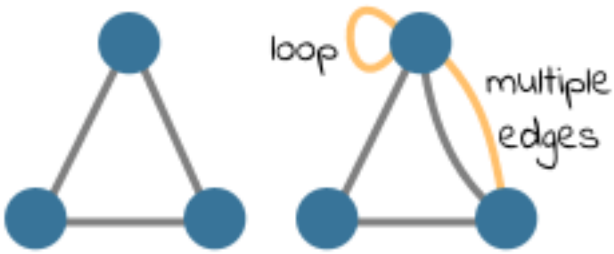
2. Phân loại đồ thị

- Dựa vào hướng của cạnh:
  - **Đồ thị vô hướng** (*Undirected graph*): các cạnh là những cặp đỉnh (u, v) **không phân biệt thứ tự**, tức là $(u, v) \equiv (v, u)$. Khi đó, cạnh (u, v) có thể được viết gọn là uv.
  - **Đồ thị có hướng** (*Directed Graph*): các cạnh là những cặp đỉnh (u, v) **có phân biệt thứ tự**, tức là $(u, v) \neq (v, u)$. Khi đó, cung (u, v) có thể được viết gọn là $u \rightarrow v$.



Hình 3. Đồ thị vô hướng (trái) và đồ thị có hướng (phải)

- Dựa vào số cạnh nối giữa 2 đỉnh:
  - **Đơn đồ thị** (*Simple Graph*): đồ thị không chứa khuyên (*loop*) và cạnh song song (*parallel edge*);
  - **Đa đồ thị** (*Multigraph*): là các đồ thị không phải đơn đồ thị.



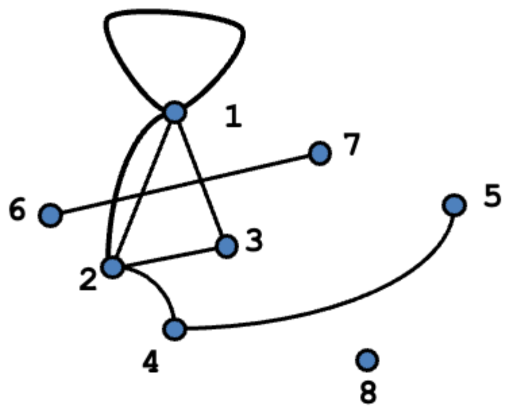
Hình 4. Đơn đồ thị (trái) và đa đồ thị (phải)

- Ngoài ra, có thể phân loại đồ thị dựa trên đặc điểm các cạnh **có trọng số** (*Unweighted Graph*) hoặc **không có trọng số** (*Weighted Graph*):

Hình 5. Đồ thị có trọng số (trái) và đồ thị không có trọng số (phải)

3. Một số khái niệm trên đồ thị

- Nếu (u, v) là một cạnh của đồ thị, ta nói:
  - u và v **kề nhau** (*adjacent*) (*trong **Hình 6** đỉnh 2 kề với các đỉnh 1, 3, 4 và ngược lại*);
  - Cạnh (u, v) **liên thuộc** (*incident*) với hai đỉnh u và v. Đồng thời, u và v là hai **đỉnh đầu mút** (*endpoint*) của cạnh (u, v), trong trường hợp cạnh có hướng $u \rightarrow v$ thì có thể phân biệt rõ u là **đỉnh đuôi** (*tail*) và v là **đỉnh đầu** (*head*) (*trong **Hình 6** đỉnh 3 liên thuộc với các cạnh (1,3) và (2,3)*).
- **Đỉnh treo** (*Leaf/Pendant Vertex*) là đỉnh chỉ có duy nhất một cạnh liên thuộc với nó (*trong **Hình 6** đỉnh 5, 6 và 7 là các đỉnh treo*).
- **Đỉnh cô lập** (*Isolated Vertex*)là đỉnh không có cạnh nào liên thuộc với nó (*trong **Hình 6** đỉnh 8 là các đỉnh cô lập*).



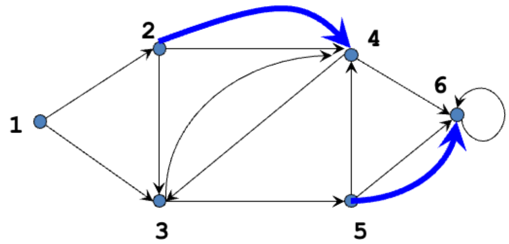
Hình 6. Một đồ đồ thị ví dụ

- **Bậc của đỉnh**:
  - Đồ thị vô hướng: bậc của một đỉnh u là số cạnh liên thuộc với đỉnh đó (*Lưu ý: mỗi khuyên được tính 2 lần*). Kí hiệu: $deg(u)$
  - Đồ thị có hướng:
    - **Bậc vào**: bậc vào của một đỉnh u là **số cung đi vào** đỉnh đó (*cung có đỉnh đầu là u*). Kí hiệu: $deg^{-}(u)$
    - **Bậc ra**: bậc vào của một đỉnh u là **số cung đi ra** khỏi đó (*cung có đỉnh đuôi là u*). Kí hiệu: $deg^{+}(u)$
    - *Lưu ý: mỗi khuyên được tính 1 lần bậc vào và 1 lần bậc ra*

Bài tập 1. Cho đồ thị $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ như **Hình 6**. Xác định bậc của các đỉnh?

u	1	2	3	4	5	6	7	8
deg(u)	**5**							

Bài tập 2. Cho đồ thị có hướng $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ như hình vẽ sau. Xác định bậc vào và bậc ra của các đỉnh?



u	1	2	3	4	5	6
deg⁻(u)		**1**				
deg⁺(u)		**3**				

- **Định lý bắt tay** (*Handshaking lemma*):
  - Trong **đồ thị vô hướng** $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$, tổng bậc của tất cả các đỉnh bằng 2 lần số cạnh:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

  - Trong **đồ thị có hướng** $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$, tổng bậc vào của tất cả các đỉnh bằng tổng bậc ra của tất cả các đỉnh và bằng số cạnh:

$$\sum_{v \in V} deg^{-}(v) = \sum_{v \in V} deg^{+}(v) = |E|$$

- **Hệ quả của định lý bắt tay**: Trong mọi đồ thị vô hướng thì số lượng đỉnh bậc lẻ phải luôn là một số chẵn.

Bài tập 3. Hãy trả lời các câu hỏi sau đây:

a) Trong một đồ thị vô hướng có 5 đỉnh với bậc của các đỉnh lần lượt là 2, 3, 2, 1 và 2. Hỏi đồ thị có bao nhiêu cạnh?

Đáp án:

b) Trong một đồ thị vô hướng có 6 đỉnh và 8 cạnh. Hỏi tổng bậc của tất cả các đỉnh của đồ thị là bao nhiêu?

Đáp án:

c) Cho một đồ thị vô hướng có 5 đỉnh và 6 cạnh. Bậc của các đỉnh lần lượt là 2, 2, 1, 2 và x. Hỏi x bằng bao nhiêu?

Đáp án:

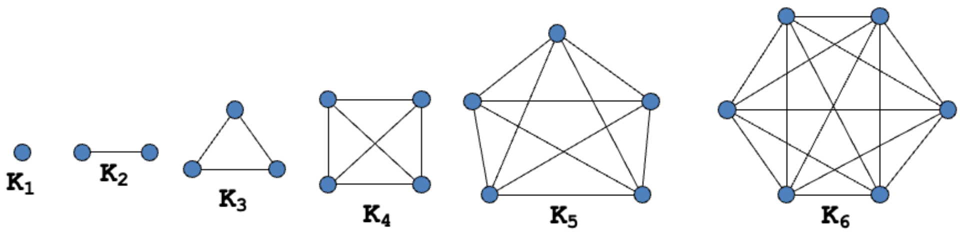
d) Trong một buổi tiệc, nếu mỗi người bắt tay với những người còn lại đúng một lần duy nhất và tổng cộng có 28 cái bắt tay thì buổi tiệc đó có bao nhiêu người tham dự?

Đáp án:

e) Trên một lớp học có 25 sinh viên. Nếu mỗi sinh viên bắt tay với đúng 4 sinh viên khác thì có tổng cộng bao nhiêu cái bắt tay?
Đáp án:

4. Một số dạng đồ thị đặc biệt

- **Đồ thị đầy đủ** (*Complete graph*): là đồ thị vô hướng mà mỗi cặp đỉnh phân biệt đều được nối với nhau bởi đúng một cạnh. Kí hiệu: K_n (*với n là số đỉnh*).

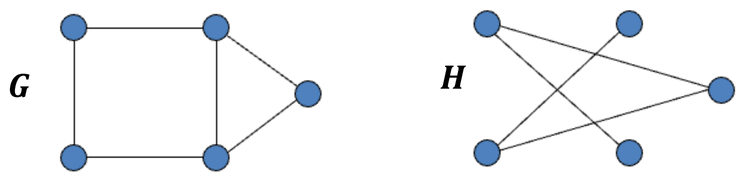


Hình 7. Đồ thị đầy đủ

Mối liên hệ giữa số đỉnh (n) và số cạnh (m): ?

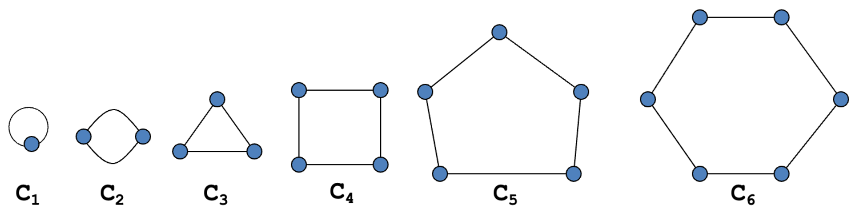
- **Đồ thị bù** (*Complement graph*): Cho đồ thị $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$, đồ thị $\boldsymbol{H}$ được gọi là đồ thị bù của đồ thị $\boldsymbol{G}$ nếu:
  - $\boldsymbol{H}$ có cùng tập đỉnh với $\boldsymbol{G}$;
  - $\boldsymbol{H}$ chứa những cạnh cần thêm vào $\boldsymbol{G}$ để $\boldsymbol{G}$ trở thành đồ thị đầy đủ.

$\boldsymbol{H} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{K} \backslash \boldsymbol{E})$ (*với K là các tập có 2 phần tử phân biệt của V*)



Hình 8. Đồ thị H là đồ thị bù của đồ thị G

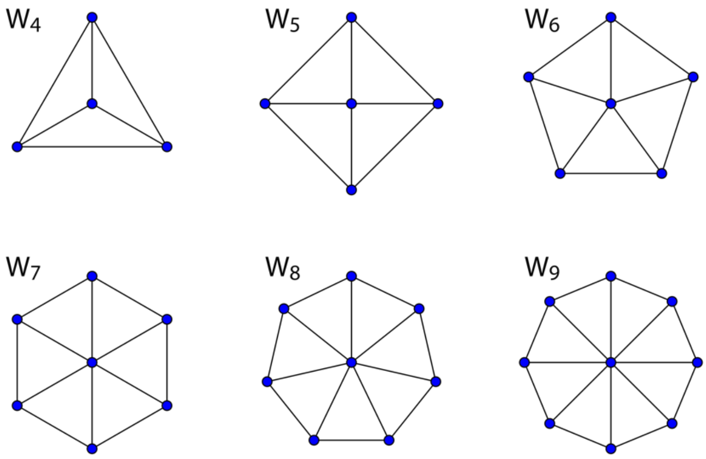
- **Đồ thị vòng** (*Cycle Graph*): là đồ thị vô hướng có một chu trình duy nhất đi qua tất cả các đỉnh. Kí hiệu: C_n (*với n là số đỉnh*)



Hình 9. Đồ thị vòng

Đơn đồ thị vô hướng là đồ thị vòng khi có tối thiểu bao nhiêu đỉnh: ?
Mối liên hệ giữa số đỉnh (n) và số cạnh (m): ?

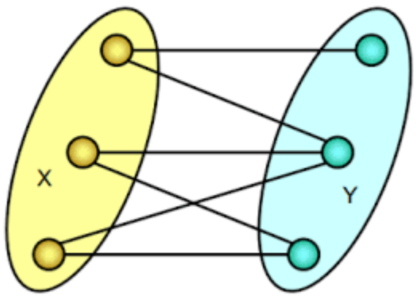
- **Đồ thị bánh xe** (*Wheel graph*): là một đồ thị vòng C_{n-1} và một đỉnh trung tâm kết nối với các đỉnh của vòng. Kí hiệu: W_n (*với n là số đỉnh và n* > *3*)



Hình 10. Đồ thị bánh xe

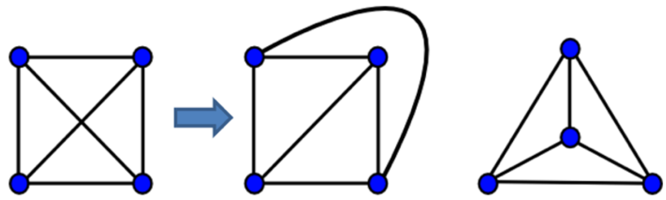
Mối liên hệ giữa số đỉnh (*n*) và số cạnh (*m*): **?**

- **Đồ thị hai phía** (*Bipartite graph*): Đồ thị vô hướng $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ được gọi là đồ thị hai phía nếu có thể phân tập đỉnh $\boldsymbol{V}$ thành 2 tập đỉnh $\boldsymbol{X}$ và $\boldsymbol{Y}$, sao cho:
  - $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \cup \boldsymbol{Y}$ $(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y} \neq \emptyset)$**;**
  - $\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\theta}$
  - Mỗi cạnh $(u, v) \in V$ thì $u \in X$ và $v \in Y$ hoặc ngược lại.



Hình 11. Đồ thị hai phía

- **Đồ thị phẳng** (*Planar graph*): là đồ thị có thể vẽ được trên một mặt phẳng sao cho các cạnh không cắt nhau.



Hình 12. Đồ thị phẳng

--- HẾT ---