Университет ИТМО
Кафедра ВТ

Алгоритм Краскала

Алгоритмы и Структуры Данных

Выполнил: Федоров Сергей
Группа: P3212

Санкт-Петербург
2020 г.

Алгоритм Краскала

Алгоритм Краскала - алгоритм построения минимального остовного дерева по заданному взвешенному неориентированному графу.

```
Сложность алгоритма по времени: O(|E| * log|E|)
Сложность алгоритма по памяти:  O(|E|)
```

Суть алгоритма:

Отсортируем ребра графа по возрастанию. Затем повторяем следующую операцию, пока ребра не закончатся:
1. Берем ребро и добавляем в множество ребер MST
2.1 Если добавление нового ребра не образует цикла, то оставляем ребро
2.2 Если добавление нового ребра порождает цикл, пропускаем данное ребро.

Доказательство корректности:

Нужно доказать два пункта:

1. Алгоритм Краскала строит остовное дерево
2. Получившееся дерево является минимальным

Первое. Пусть имеется связанный взвешенный граф **G**, и имеется подграф **Y** полученный в результате выполнения алгоритма. **Y** не имеет циклов, так как при построение **Y** ребра порождающие цикл не добавляются. **Y** - связанный, так как если предположить что это не так, то есть две или больше компоненты связанности, тогда принимая во внимание то что **G** - связанный граф, получается что существовало ребро между двумя компонентами связанности **Y**, которое порождало цикл, однако это не так. Из этих двух утверждений следует то что **Y** это остовное дерево **G**.

Второе. Докажем по индукции:

Предположение:

Пусть **F** - множество ребер выбранных на некотором этапе алгоритма, тогда существует MST, содержащее все ребра из **F** и не содержащее ребра отброшенные алгоритмом (иначе будет присутствовать цикл).

База:

В начале **F** пусто, и любое MST подойдет (в любом связанном взвешенном графе присутствует хотя бы одно такое).

Док-во:

Пусть наше индукционное предположение верно для некоторого промежуточного **F** и существует MST **T**, содержащее **F**. Выбирается новое ребро **E**, возможны два исхода:

1. Новое ребро находится в **T**, тогда индукционное предположение верно для **F + E**
2. Новое ребро не находится в **T**, тогда **T + E** имеет цикл **C**. Более того, **C** содержит ребро не присутствующее в **F**, так как ребро **E** не порождает цикл в **F** при добавлении в **F**, а при добавлении в **T** порождает. Назовем такое ребро $f : f \notin (F + E), f \in C$. Заметим что ***f*** принадлежит **T**, и по индукционному предположению не было рассмотрено алгоритмом, тогда весь ребра ***f*** больше или равен весу ребра **E**, тогда **T - *f* + E** имеет не больший вес по сравнению с **T**. Получаем противоречие, так как **T** уже минимальное остовное дерево.