Pseudokonečné struktury a limity

Ondřej Ježil

9. června 2022

Úvod – kontext

- Práce se pohybuje na rozmezí matematické logiky a teorie složitosti

Úvod – kontext

- Práce se pohybuje na rozmezí matematické logiky a teorie složitosti
- **Limita struktur:** posloupnost konečných grafů $\rightarrow$ nekonečný „graf“, zachycuje vlastnosti dané posloupnosti

Úvod – kontext

- Práce se pohybuje na rozmezí matematické logiky a teorie složitosti
- **Limita struktur:** posloupnost konečných grafů → nekonečný „graf“, zachycuje vlastnosti dané posloupnosti
- Mnoho konstrukcí (ultraprodukt, věta o kompaktnosti, grafony, ...)

Úvod – kontext

- Práce se pohybuje na rozmezí matematické logiky a teorie složitosti
- **Limita struktur:** posloupnost konečných grafů $\rightarrow$ nekonečný „graf“, zachycuje vlastnosti dané posloupnosti
- Mnoho konstrukcí (ultraprodukt, věta o kompaktnosti, grafony, . . .)
- Využití (0-1 zákony, extremální kombinatorika, . . .)

Cíl práce

- V práci definuji nový pojem tzv. široké limity

Cíl práce

- V práci definuji nový pojem tzv. široké limity
- **Intuice**: třída vstupů výpočetního problému $\rightarrow$ limitní objekt, vlastnosti $\approx$ jak algoritmy dané složitosti „vidí obecný vstup“

Cíl práce

- V práci definuji nový pojem tzv. široké limity
- **Intuice**: třída vstupů výpočetního problému $\rightarrow$ limitní objekt, vlastnosti $\approx$ jak algoritmy dané složitosti „vidí obecný vstup“
- Klíčová metoda: Forsing s náhodnými proměnnými

Cíl práce

- V práci definuji nový pojem tzv. široké limity
- **Intuice**: třída vstupů výpočetního problému $\rightarrow$ limitní objekt, vlastnosti $\approx$ jak algoritmy dané složitosti „vidí obecný vstup“
- Klíčová metoda: Forsing s náhodnými proměnnými
- Cíl práce:

Cíl práce

- V práci definuji nový pojem tzv. široké limity
- **Intuice**: třída vstupů výpočetního problému $\rightarrow$ limitní objekt, vlastnosti $\approx$ jak algoritmy dané složitosti „vidí obecný vstup“
- Klíčová metoda: Forsing s náhodnými proměnnými
- Cíl práce:
  - Vyvinout základní teorii

Cíl práce

- V práci definuji nový pojem tzv. široké limity
- **Intuice**: třída vstupů výpočetního problému $\rightarrow$ limitní objekt, vlastnosti $\approx$ jak algoritmy dané složitosti „vidí obecný vstup“
- Klíčová metoda: Forsing s náhodnými proměnnými
- Cíl práce:
    - Vyvinout základní teorii
    - Předvést příklady

Cíl práce

- V práci definuji nový pojem tzv. široké limity
- **Intuice**: třída vstupů výpočetního problému $\rightarrow$ limitní objekt, vlastnosti $\approx$ jak algoritmy dané složitosti „vidí obecný vstup“
- Klíčová metoda: Forsing s náhodnými proměnnými
- Cíl práce:
  - Vyvinout základní teorii
  - Předvést příklady
  - **Svázat vlastnosti těchto limit s teorií složitosti**

Cíl práce

- V práci definuji nový pojem tzv. široké limity
- **Intuice**: třída vstupů výpočetního problému $\to$ limitní objekt, vlastnosti $\approx$ jak algoritmy dané složitosti „vidí obecný vstup“
- Klíčová metoda: Forsing s náhodnými proměnnými
- Cíl práce:
  - Vyvinout základní teorii
  - Předvést příklady
  - **Svázat vlastnosti těchto limit s teorií složitosti**
- Následuje neformální popis široké limity

Výchozí situace – široká posloupnost

Definice

Posloupnost konečných množin konečných (ne)orientovaných grafů $\{\mathcal{G}_k\}_{k>0}$ *se nazývá* **široká posloupnost**, *pokud platí, že*

- *existuje rostoucí posloupnost* $\{g_k\}_{k>0}$ *tak, že pro každé* $G \in \mathcal{G}_k$ *je množina vrcholů* $V_G = \{0, \ldots, g_k - 1\}$,
- $\lim_{k\to\infty} |\mathcal{G}_k| = \infty$.

Výchozí situace – široká posloupnost

Definice

Posloupnost konečných množin konečných (ne)orientovaných grafů $\{\mathcal{G}_k\}_{k>0}$ *se nazývá* **široká posloupnost**, *pokud platí, že*

- *existuje rostoucí posloupnost* $\{g_k\}_{k>0}$ *tak, že pro každé* $G \in \mathcal{G}_k$ *je množina vrcholů* $V_G = \{0, \dots, g_k - 1\}$,
- $\lim_{k\to\infty} |\mathcal{G}_k| = \infty$.

- $\mathcal{G}_k$: grafy velikosti g_k

Výchozí situace – široká posloupnost

Definice

Posloupnost konečných množin konečných (ne)orientovaných grafů $\{\mathcal{G}_k\}_{k>0}$ se nazývá **široká posloupnost**, *pokud platí, že*

- *existuje rostoucí posloupnost $\{g_k\}_{k>0}$ tak, že pro každé $G \in \mathcal{G}_k$ je množina vrcholů $V_G = \{0, \dots, g_k - 1\}$,*
- $\lim_{k\to\infty} |\mathcal{G}_k| = \infty$.

- $\mathcal{G}_k$: grafy velikosti g_k
- Třída grafů $\rightleftharpoons$ široká posloupnost

Výchozí situace – široká posloupnost

Definice

Posloupnost konečných množin konečných (ne)orientovaných grafů $\{\mathcal{G}_k\}_{k>0}$ *se nazývá* **široká posloupnost**, *pokud platí, že*

- *existuje rostoucí posloupnost* $\{g_k\}_{k>0}$ *tak, že pro každé* $G \in \mathcal{G}_k$ *je množina vrcholů* $V_G = \{0, \ldots, g_k - 1\}$,
- $\lim_{k\to\infty}|\mathcal{G}_k| = \infty$.

- $\mathcal{G}_k$: grafy velikosti g_k
- Třída grafů $\rightleftharpoons$ široká posloupnost
- Příklady: grafy s právě jednou hranou, grafy s přesně jednou velkou klikou, grafy obsahující trojúhelník, . . .

Nestandardní model(y) aritmetiky

- Matematická logika: $\exists \mathcal{M} \models \mathrm{Th}(\mathbb{N})$, $\mathcal{M} \ncong \mathbb{N}$

Nestandardní model(y) aritmetiky

- Matematická logika: $\exists \mathcal{M} \models \mathrm{Th}(\mathbb{N})$, $\mathcal{M} \ncong \mathbb{N}$
- Fixujeme nestandardní model $\mathcal{M}$ (splňující tech. podmínkou)

Nestandardní model(y) aritmetiky

- Matematická logika: $\exists \mathcal{M} \models \mathrm{Th}(\mathbb{N})$, $\mathcal{M} \ncong \mathbb{N}$
- Fixujeme nestandardní model $\mathcal{M}$ (splňující tech. podmínkou)
- $\mathcal{M}$ je tedy polookruh, vlastnosti prvního řádu se shodují s $\mathbb{N}$ (axiomy polookruhů, indukce, Velká Fermatova věta, ...)

Nestandardní model(y) aritmetiky

- Matematická logika: $\exists \mathcal{M} \models \mathrm{Th}(\mathbb{N})$, $\mathcal{M} \ncong \mathbb{N}$
- Fixujeme nestandardní model $\mathcal{M}$ (splňující tech. podmínkou)
- $\mathcal{M}$ je tedy polookruh, vlastnosti prvního řádu se shodují s $\mathbb{N}$ (axiomy polookruhů, indukce, Velká Fermatova věta, ...)
- Prvky $\mathcal{M}$ můžeme: sčítat, násobit, $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor$, $\lfloor \log(x) \rfloor$, ...

Nestandardní model(y) aritmetiky

- Matematická logika: $\exists \mathcal{M} \models \mathrm{Th}(\mathbb{N})$, $\mathcal{M} \ncong \mathbb{N}$
- Fixujeme nestandardní model $\mathcal{M}$ (splňující tech. podmínkou)
- $\mathcal{M}$ je tedy polookruh, vlastnosti prvního řádu se shodují s $\mathbb{N}$ (axiomy polookruhů, indukce, Velká Fermatova věta, ...)
- Prvky $\mathcal{M}$ můžeme: sčítat, násobit, $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor$, $\lfloor \log(x) \rfloor$, ...
- Dosadit jako index v široké posloupnosti: $\mathcal{G}_n$

Nestandardní model(y) aritmetiky

- Matematická logika: $\exists \mathcal{M} \models \mathrm{Th}(\mathbb{N})$, $\mathcal{M} \ncong \mathbb{N}$
- Fixujeme nestandardní model $\mathcal{M}$ (splňující tech. podmínkou)
- $\mathcal{M}$ je tedy polookruh, vlastnosti prvního řádu se shodují s $\mathbb{N}$ (axiomy polookruhů, indukce, Velká Fermatova věta, ...)
- Prvky $\mathcal{M}$ můžeme: sčítat, násobit, $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor$, $\lfloor \log(x) \rfloor$, ...
- Dosadit jako index v široké posloupnosti: $\mathcal{G}_n$
- Získáme nekonečnou množinu pseudokončených grafů

Idea definice široké limity

- Třída funkcí F: vstupy jsou grafy, výstupy jsou vrcholy

Idea definice široké limity

- Třída funkcí F: vstupy jsou grafy, výstupy jsou vrcholy
- F – náhodné vrcholy v $\{0, \ldots, g_n - 1\}$

Idea definice široké limity

- Třída funkcí F: vstupy jsou grafy, výstupy jsou vrcholy
- F – náhodné vrcholy v $\{0, \ldots, g_n - 1\}$
- Na F definujeme (Booleovsky ohodnocený) graf $\lim_F \mathcal{G}_n$.

Idea definice široké limity

- Třída funkcí F: vstupy jsou grafy, výstupy jsou vrcholy
- F – náhodné vrcholy v $\{0, \ldots, g_n - 1\}$
- Na F definujeme (Booleovsky ohodnocený) graf $\lim_F \mathcal{G}_n$.
- Pro $\alpha, \beta \in F$ máme pravdivostní hodnotu $[\![E(\alpha, \beta)]\!]$.

Idea definice široké limity

- Třída funkcí F: vstupy jsou grafy, výstupy jsou vrcholy
- F – náhodné vrcholy v $\{0, \ldots, g_n - 1\}$
- Na F definujeme (Booleovsky ohodnocený) graf $\lim_F \mathcal{G}_n$.
- Pro $\alpha, \beta \in F$ máme pravdivostní hodnotu $[\![E(\alpha, \beta)]\!]$.
- Tato hodnota může být buď $\mathbf{1}$ (pravda), $\mathbf{0}$ (nepravda) nebo někde „mezi“.

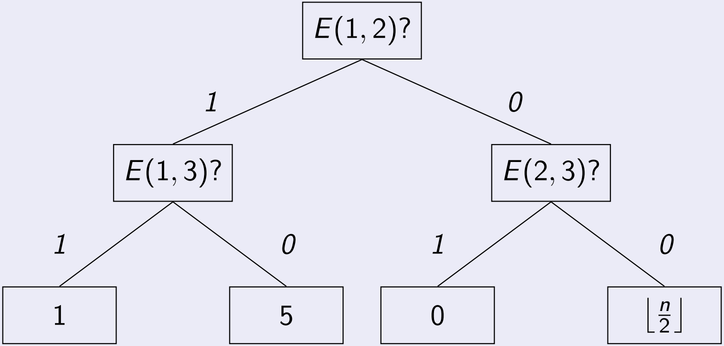
Idea definice široké limity

- Třída funkcí F: vstupy jsou grafy, výstupy jsou vrcholy
- F – náhodné vrcholy v $\{0, \dots, g_n - 1\}$
- Na F definujeme (Booleovsky ohodnocený) graf $\lim_F \mathcal{G}_n$.
- Pro $\alpha, \beta \in F$ máme pravdivostní hodnotu $[\![E(\alpha, \beta)]\!]$.
- Tato hodnota může být buď $\mathbf{1}$ (pravda), $\mathbf{0}$ (nepravda) nebo někde „mezi“.
- Pravdivé sentence v $\lim_F \mathcal{G}_n \rightleftharpoons$ vlastnosti které umí F dosvědčit

Třída funkcí F_{rud}

Definice

F_{rud} sestává ze všech náhodných vrcholů počítáných rozhodovacími stromy hloubky nejvýše $n^{1/t}$, pro nějaké nestandardní t, následujícího tvaru.



Výsledky – kapitola 2

Příklad

Ať $EDGE_k$ je široká posloupnost sestávající z grafů s právě jednou hranou, potom

$$\lim_{F_{rud}} EDGE_n[\![(\exists x)(\exists y)E(x,y)]\!] = \mathbf{0}.$$

Výsledky – kapitola 2

Příklad

Ať $EDGE_k$ je široká posloupnost sestávající z grafů s právě jednou hranou, potom

$$\lim_{F_{rud}} EDGE_n[\![(\exists x)(\exists y)E(x,y)]\!] = \mathbf{0}.$$

- Další výsledky:
  - Postačující podmínka na hustotu hran v $\mathcal{G}_n$ vedoucí k limitě bez hran

Výsledky – kapitola 2

Příklad

Ať $EDGE_k$ je široká posloupnost sestávající z grafů s právě jednou hranou, potom

$$\lim_{F_{rud}} EDGE_n[\![(\exists x)(\exists y)E(x,y)]\!] = \mathbf{0}.$$

- Další výsledky:
  - Postačující podmínka na hustotu hran v $\mathcal{G}_n$ vedoucí k limitě bez hran
  - Grafy co obsahují právě trojuhelník, čtverec, konstatní podgraf, $\ldots \rightarrow$ prázdná limita

Výsledky – kapitola 2

Příklad

Ať $EDGE_k$ je široká posloupnost sestávající z grafů s právě jednou hranou, potom

$$\lim_{F_{rud}} EDGE_n[\![(\exists x)(\exists y)E(x,y)]\!] = \mathbf{0}.$$

- Další výsledky:
  - Postačující podmínka na hustotu hran v $\mathcal{G}_n$ vedoucí k limitě bez hran
  - Grafy co obsahují právě trojuhelník, čtverec, konstatní podgraf, $\ldots \to$ prázdná limita
  - $\exists$ posloupnost s hustotou hran $\to 0$, ale limita obsahuje hranu (Příklad 2.2.4, dotaz 3)

Výsledky – kapitola 3

- Široká posloupnost obsahující právě velkou kliku: $\mathrm{SK}_k^{1/2}$
- Široká posloupnost obsahující alespoň velkou kliku: $\mathrm{CK}_k^{1/2}$

Výsledky – kapitola 3

- Široká posloupnost obsahující právě velkou kliku: $\mathsf{SK}_k^{1/2}$
- Široká posloupnost obsahující alespoň velkou kliku: $\mathsf{CK}_k^{1/2}$
- Teorie složitosti
  - Pouze velká klika $\rightarrow$ polynomiální algoritmus ji najde
  - Alespoň velká klika $\rightarrow$ předpokládáme $\nexists$ polynomální algoritmus

Výsledky – kapitola 3

- Široká posloupnost obsahující právě velkou kliku: $\mathrm{SK}_k^{1/2}$
- Široká posloupnost obsahující alespoň velkou kliku: $\mathrm{CK}_k^{1/2}$
- Teorie složitosti
  - Pouze velká klika $\rightarrow$ polynomiální algoritmus ji najde
  - Alespoň velká klika $\rightarrow$ předpokládáme $\nexists$ polynomální algoritmus
- G_{rud} – limita druhého řádu

Výsledky – kapitola 3

- Široká posloupnost obsahující právě velkou kliku: $\mathrm{SK}_k^{1/2}$
- Široká posloupnost obsahující alespoň velkou kliku: $\mathrm{CK}_k^{1/2}$
- Teorie složitosti
  - Pouze velká klika $\rightarrow$ polynomiální algoritmus ji najde
  - Alespoň velká klika $\rightarrow$ předpokládáme $\nexists$ polynomální algoritmus
- G_{rud} – limita druhého řádu
- Dokázal jsem
  - $\mathrm{SK}_k^{1/2} \rightarrow_{G_{rud}}$ limita obsahuje relativně velkou kliku
  - $\mathrm{CK}_k^{1/2} \rightarrow_{G_{rud}} [\![\exists \text{ konečná klika}]\!] \neq \mathbf{0}$

Výsledky – kapitola 3

- Široká posloupnost obsahující právě velkou kliku: $\mathrm{SK}_k^{1/2}$
- Široká posloupnost obsahující alespoň velkou kliku: $\mathrm{CK}_k^{1/2}$
- Teorie složitosti
  - Pouze velká klika $\rightarrow$ polynomiální algoritmus ji najde
  - Alespoň velká klika $\rightarrow$ předpokládáme $\nexists$ polynomální algoritmus
- G_{rud} – limita druhého řádu
- Dokázal jsem
  - $\mathrm{SK}_k^{1/2} \rightarrow_{G_{rud}}$ limita obsahuje relativně velkou kliku
  - $\mathrm{CK}_k^{1/2} \rightarrow_{G_{rud}} [\![\exists \text{ konečná klika}]\!] \neq \mathbf{0}$
- Domněnka: $\lim \mathrm{CK}_n^{1/2}$ neobsahuje kliku velikosti $\lfloor n/(c \ln n) \rfloor$

Výsledky – kapitola 4

- Široká posloupnost cest s počátkem ve vrcholu 0: $*\mathrm{PATH}_k$
- $*\mathrm{PATH}_k \rightarrow_{F_{rud}}$ limita bez hran

Výsledky – kapitola 4

- Široká posloupnost cest s počátkem ve vrcholu 0: $*\mathrm{PATH}_k$
- $*\mathrm{PATH}_k \to_{F_{rud}}$ limita bez hran
- Třída funkcí F_{nbtree}

Výsledky – kapitola 4

- Široká posloupnost cest s počátkem ve vrcholu 0: $*\mathrm{PATH}_k$
- $*\mathrm{PATH}_k \to_{F_{rud}}$ limita bez hran
- Třída funkcí F_{nbtree}
- Složitost **TFNP**

Výsledky – kapitola 4

- Široká posloupnost cest s počátkem ve vrcholu 0: $*\mathrm{PATH}_k$
- $*\mathrm{PATH}_k \to_{F_{rud}}$ limita bez hran
- Třída funkcí F_{nbtree}
- Složitost **TFNP**
- Výsledky:
  - $\lim_{F_{nbtree}} *\mathrm{PATH}_n$ je cesta s počátkem, ale bez konce
  - $\Leftrightarrow$ funkce z F_{nbtree} neumí najít konec cesty
  - to odpovídá tomu, že **PPA** je ostrou nadmnožinou **FP** (oracle svět)

Shrnutí

- Výsledky z předchozích slidů $\approx$ analýza pravdivých sentencí

Shrnutí

- Výsledky z předchozích slidů $\approx$ analýza pravdivých sentencí
- V práci kombinuji metody teorie složitosti, kombinatoriky a teorie modelů

Shrnutí

- Výsledky z předchozích slidů $\approx$ analýza pravdivých sentencí
- V práci kombinuji metody teorie složitosti, kombinatoriky a teorie modelů
- Kromě úvodu, Preliminaries a části kapitoly 1, jsou všechny výsledky vlastní

Shrnutí

- Výsledky z předchozích slidů $\approx$ analýza pravdivých sentencí
- V práci kombinuji metody teorie složitosti, kombinatoriky a teorie modelů
- Kromě úvodu, Preliminaries a části kapitoly 1, jsou všechny výsledky vlastní
- Formuluji několik problémů navazujících na mé výsledky

Nedostatky práce

- Námitky oponenta

Nedostatky práce

- Námitky oponenta
- Zřetelněji vyznačit autorství při prezentaci Forsingu v kapitole 1

Nedostatky práce

- Námitky oponenta
- Zřetelněji vyznačit autorství při prezentaci Forsingu v kapitole 1
- Ovšem: Chyby nemají za následek neplatnost nějakého tvrzení

Nedostatky práce

- Námitky oponenta
- Zřetelněji vyznačit autorství při prezentaci Forsingu v kapitole 1
- Ovšem: Chyby nemají za následek neplatnost nějakého tvrzení
- V erratě nepřesnosti a překlepy objasňuji

Odpověď na otázku oponenta

Otázka

Mohl byste podrobněji ukázat, jak plyne nerovnost mezi (4.26) a (4.27)?

Odpověď na otázku oponenta

Otázka

Mohl byste podrobněji ukázat, jak plyne nerovnost mezi (4.26) a (4.27)?

$$
\begin{aligned}
\prod_{i=0}^{n^{1/t}} \left(1 - \frac{2}{n - 2i - c - 2}\right) &\geq \prod_{i=0}^{n^{1/t}} \left(1 - \frac{2}{n - 2n^{1/t} - c - 2}\right) \\
&= \left(1 - \frac{2}{n - 2n^{1/t} - c - 2}\right)^{n^{1/t} + \mathbf{1}} \\
&\geq \left(1 - \frac{2(n^{1/t} + \mathbf{1})}{n - 2n^{1/t} - c - 2}\right)
\end{aligned}
$$

Odpověď na otázku oponenta

Otázka

Mohl byste podrobněji ukázat, jak plyne nerovnost mezi (4.26) a (4.27)?

$$\prod_{i=0}^{n^{1/t}} \left(1 - \frac{2}{n - 2i - c - 2}\right) \geq \prod_{i=0}^{n^{1/t}} \left(1 - \frac{2}{n - 2n^{1/t} - c - 2}\right)$$
$$= \left(1 - \frac{2}{n - 2n^{1/t} - c - 2}\right)^{n^{1/t}\mathbf{+1}}$$
$$\geq \left(1 - \frac{2(n^{1/t}\mathbf{+1})}{n - 2n^{1/t} - c - 2}\right)$$

- Argument není ovlivněn

Odpověď na otázku oponenta

Otázka

Mohl byste podrobněji ukázat, jak plyne nerovnost mezi (4.26) a (4.27)?

$$
\begin{aligned}
\prod_{i=0}^{n^{1/t}} \left(1 - \frac{2}{n - 2i - c - 2}\right) &\geq \prod_{i=0}^{n^{1/t}} \left(1 - \frac{2}{n - 2n^{1/t} - c - 2}\right) \\
&= \left(1 - \frac{2}{n - 2n^{1/t} - c - 2}\right)^{n^{1/t}\mathbf{+1}} \\
&\geq \left(1 - \frac{2(n^{1/t}\mathbf{+1})}{n - 2n^{1/t} - c - 2}\right)
\end{aligned}
$$

- Argument není ovlivněn
- BÚNO lze zvolit T aby původní nerovnost platila

Děkuji za pozornost