LQRi Attitude Control for Quadcopter UAV: System Overview and Dynamics

1 Overview of the Project

Lab นี้เป็นการประยุกต์ใช้และพัฒนาระบบควบคุมสำหรับโดรน Quadcopter ภายใต้สภาวะจำลองด้วย ROS 2 โดยใช้แพ็กเกจ `quad_description` เป็นหลัก วัตถุประสงค์เพื่อควบคุมพฤติกรรมการบินของโดรน ทั้งการบินอยู่กับที่ (Hover) และการบินตามเส้นทาง (Trajectory Tracking) โดยใช้ตัวควบคุมแบบ LQRi (Linear Quadratic Integral Regulator) ในการควบคุมการทรงตัว (วงใน) ร่วมกับ PID Controller สำหรับควบคุมตำแหน่ง (วงนอก)

เพื่อทดสอบ Robustness ของระบบควบคุม โดรนจะถูกทดสอบใน 2 สภาพแวดล้อมจำลอง ได้แก่:

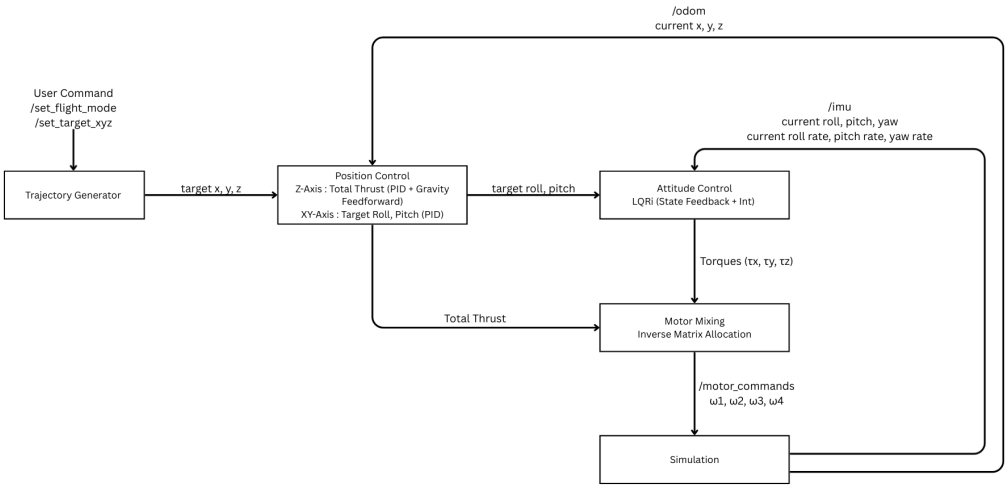
- สภาพแวดล้อมปกติที่ไม่มีกระแสลม (`empty.sdf`)
- สภาพแวดล้อมที่มีกระแสลมพัดรุนแรงความเร็ว 4 m/s ในทิศทาง -y (`wind.sdf`)

การทดสอบแบ่งออกเป็น 3 ส่วนหลัก ได้แก่ 1) การควบคุมให้โดรนรักษาระดับความสูงและทิศทางอยู่กับที่ (Hover Behavior) 2) การควบคุมให้บินตามเส้นทาง 2 มิติ (2D Trajectory) ได้แก่ การบินเส้นตรง (Straight Line), Sine Wave และ Ramp Wave และ 3) การควบคุมให้บินตามเส้นทาง 3 มิติ (3D Trajectory) ได้แก่ การบินเส้นตรง 3 มิติ, Helix Spiral และการบินรูปเลขแปด (Figure-8) โดยโดรนจะต้องเริ่มจากการ Hover บินตามเส้นทางที่กำหนด และกลับมาสู่สภาวะ Hover ได้อย่างสมบูรณ์

2 System Architecture

โครงสร้างของระบบควบคุมโดรนถูกออกแบบเป็นสองระดับ ได้แก่

- Outer Loop : Position Controller (PID)
- Inner Loop : Attitude Controller (LQRi)



รูปที่ 1: Overall Control Architecture of the Quadrotor System

3 Kinematics/Dynamics Equations and Assumptions

ในการออกแบบตัวควบคุม LQRi ได้ตั้งสมมติฐานและใช้สมการจลนศาสตร์และพลศาสตร์ที่สำคัญดังนี้:

3.1 Assumptions (สมมติฐาน)

- โดรนถูกมองว่าเป็นวัตถุแข็งเกร็ง (Rigid-body) ซึ่งสามารถอธิบายได้ด้วยสมการการเคลื่อนที่แบบ Newton-Euler
- ทิศทางและการหมุน (Attitude) ของโดรนจะถูกนำเสนอโดยใช้ Quaternions เพื่อป้องกันปัญหา Gimbal lock ที่มักพบใน Euler angles หรือ Rotation matrices
- สำหรับการสร้าง State-space ของ LQR ระบบพลศาสตร์จะถูกทำให้อยู่ในรูปแบบเชิงเส้น (Linearized) รอบๆ สภาวะการบินนิ่ง (Hover conditions) ที่ $x = 0_{1\times 6}$

3.2 Quaternion Mathematics and Angle-Axis Representation

ถึงแม้ทิศทางของโดรนจะถูกแทนค่าด้วย Quaternion ($q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$) เพื่อหลีกเลี่ยงปัญหา Gimbal lock แต่เพื่อให้สามารถนำไปใช้สร้าง State-space สำหรับ LQR ได้ จะต้องมีการแปลงให้อยู่ในรูปแบบ Angle-axis representation ($\vec{Q}_a$) โดยมีความสัมพันธ์ดังสมการต่อไปนี้:

$$\theta = 2\arccos(q_0)$$

$$\vec{Q}_a = \frac{\theta}{\sqrt{1-q_0^2}}(q_1 i + q_2 j + q_3 k)$$

$$\dot{\vec{Q}}_a = \vec{\omega}_B$$

โดยที่ θ คือมุมของการหมุน, $\vec{Q}_a$ คือเวกเตอร์ตามแกนหมุน และ $\vec{\omega}_B$ คือความเร็วเชิงมุมในกรอบอ้างอิง Body Frame ความสัมพันธ์นี้ช่วยให้สามารถลดรูปตัวแปรสถานะเพื่อนำไปใช้ในสมการพลศาสตร์ต่อไปได้

3.3 Kinematics and Dynamics Equations

สมการการเคลื่อนที่เชิงเส้น (Translational dynamics) สามารถอธิบายความสัมพันธ์ของความเร่งในกรอบอ้างอิงเฉื่อย (Inertial Frame) ได้ดังนี้:

$$\dot{r}_I = \vec{a}_I$$

$$\vec{a}_I = q * \frac{F_B}{m} * q^* + \vec{g}$$

สมการการหมุน (Rotational dynamics) สำหรับหาค่าความเร่งเชิงมุมในกรอบอ้างอิงของตัวโดรน (Body Frame) คือ:

$$\dot{\omega}_B = J^{-1}(\tau_B - \omega_B \times J\omega_B)$$

เมื่อลดรูประบบเพื่อควบคุมทิศทาง (Attitude control) จะได้สถานะคือ $x = [Q_a, \omega_B]$ และเมื่อทำให้เป็นเชิงเส้น จะได้สมการ State-space ดังนี้:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

3.4 LQRi Augmentation

เพื่อเพิ่ม Integral action ให้กับตัวควบคุม State-space model จะถูกขยายเพื่อรวมค่าความผิดพลาดสะสมเข้าไว้ด้วย:

$$\dot{x}_{aug} = A_{aug}x_{aug} + B_{aug}u$$

โดยที่สถานะที่ถูกขยายคือ $x_{aug} = [z, x]^T$ ซึ่ง z คือปริพันธ์ (Integral) ของค่าความผิดพลาดทิศทาง

ฟังก์ชันต้นทุนสมการกำลังสอง (Quadratic cost function) ที่ LQR ต้องการทำให้มีค่าน้อยที่สุดคือ:

$$J_{cost} = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt$$

โดยที่กฎการควบคุมที่เหมาะสมที่สุด (Optimal control law) จะอยู่ในรูปแบบ:

$$u = -K(x - x_{ref})$$

4 Results

ในการประเมินประสิทธิภาพของระบบควบคุม จะเลือกใช้ Mean Squared Error: MSE และ Root Mean Square Error: RMSE ของตำแหน่ง (X, Y, Z) และมุมทิศทาง (Roll, Pitch, Yaw) เป็นมาตรวัดหลัก

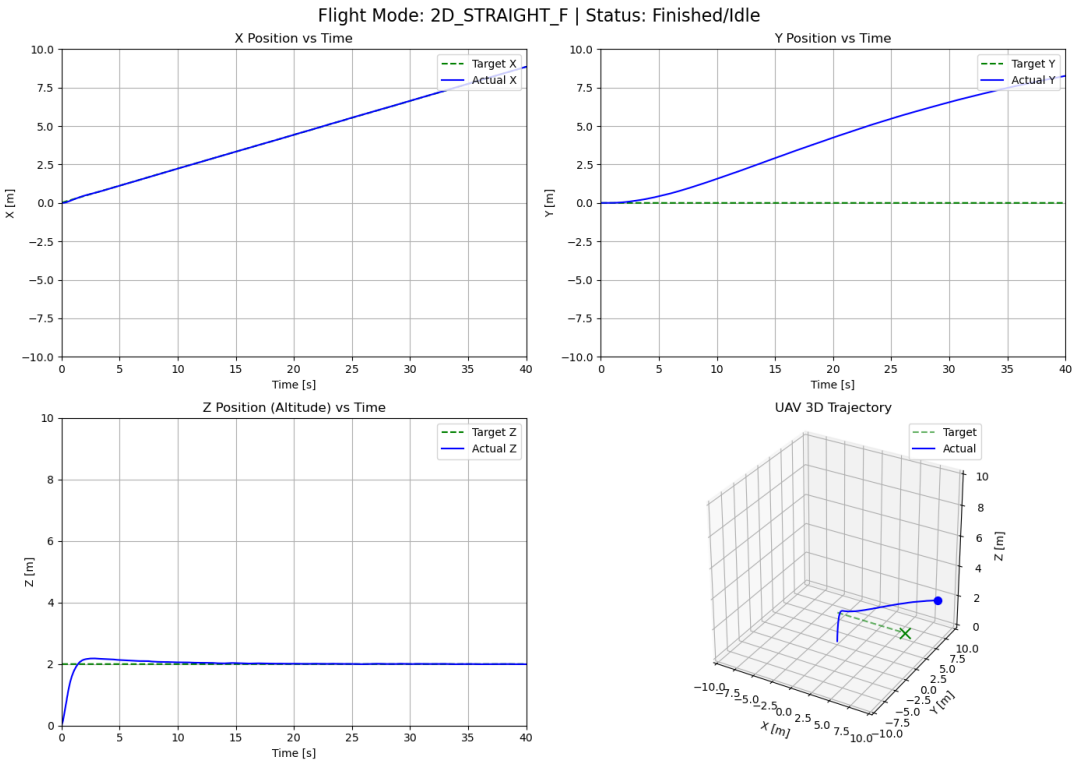
เหตุผลที่เลือกใช้ Error Metrics เป็นเพราะการทดสอบส่วนใหญ่เป็นการเคลื่อนที่แบบต่อเนื่อง (Continuous Trajectory Tracking) เช่น Sine Wave, Helix และรูปเลขแปด (Figure-8) ซึ่งจุดอ้างอิง (Setpoint) มีการเปลี่ยนแปลงตลอดเวลาตามฟังก์ชันของเวลา ทำให้ Time-domain specifications เช่น Settling Time หรือ %Overshoot ไม่สามารถนำมาใช้วัดผลได้อย่างมีความหมายในเชิงพลศาสตร์ ด้วยเหตุนี้ ค่า RMSE จึงสะท้อนถึงระยะห่างเฉลี่ยระหว่างตำแหน่งจริงของโดรนกับเส้นทางอ้างอิงได้อย่างชัดเจนที่สุด

4.1 No Wind (2D Trajectory)

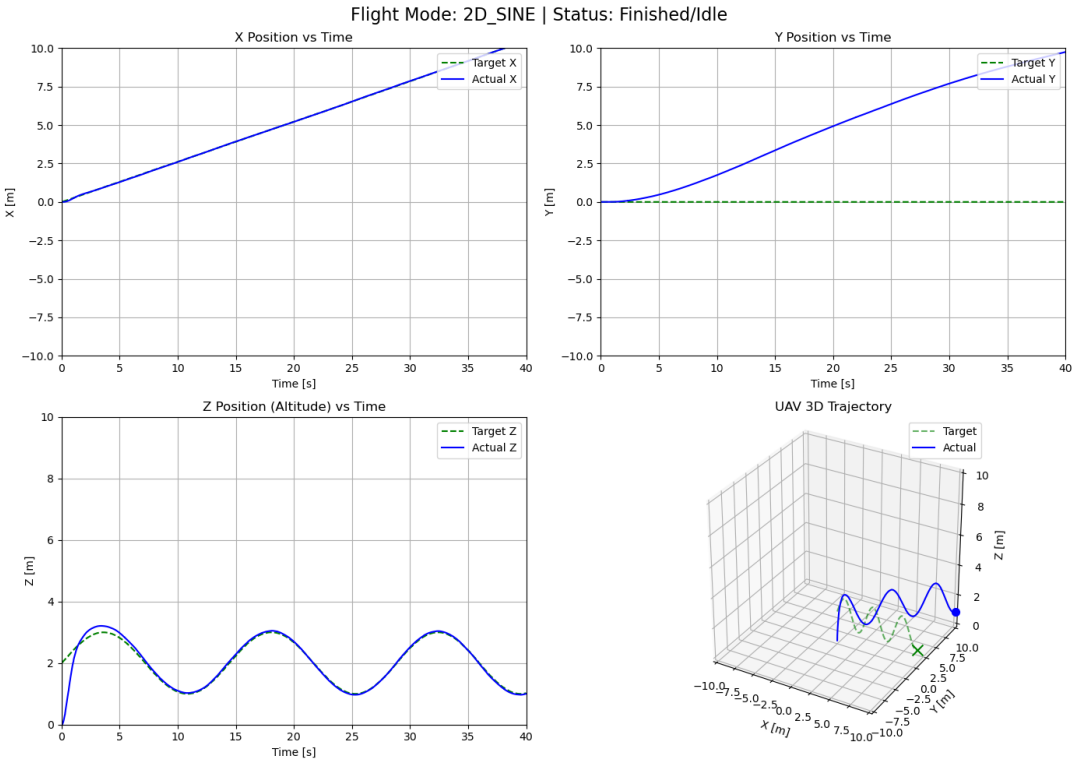
ในโหมดการทดสอบ 2 มิติ Outer Loop สำหรับแกน Y ถูกปิดการทำงานไว้ เพื่อจำลองการเคลื่อนที่ในระนาบ X-Z ตามทฤษฎี

ตารางที่ 1: Performance Metrics (MSE and RMSE) for 2D Trajectories

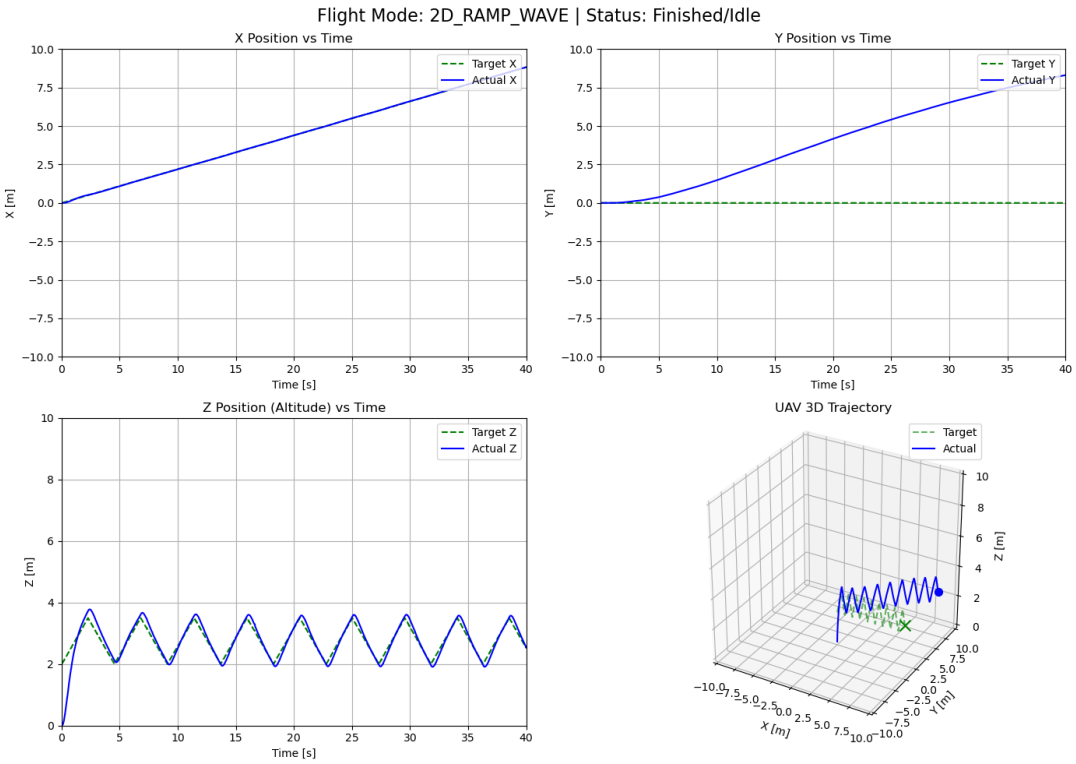
State	2D Straight		2D Sine Wave		2D Ramp Wave	
	MSE	**RMSE**	**MSE**	**RMSE**	**MSE**	**RMSE**
X-Position (m)	0.000098	0.0099	0.000200	0.0141	0.000114	0.0107
Y-Position (m)	23.747658	4.8732	32.728307	5.7209	23.609334	4.8589
Z-Position (m)	0.046966	0.2167	0.054522	0.2335	0.071544	0.2675
Roll (rad)	0.000018	0.0042	0.000026	0.0051	0.000018	0.0043
Pitch (rad)	0.001049	0.0324	0.001461	0.0382	0.001025	0.0320
Yaw (rad)	0.000000	0.0000	0.000000	0.0001	0.000000	0.0001



รูปที่ 2: Trajectory tracking performance for 2D Straight



รูปที่ 3: Trajectory tracking performance for 2D Sine Wave



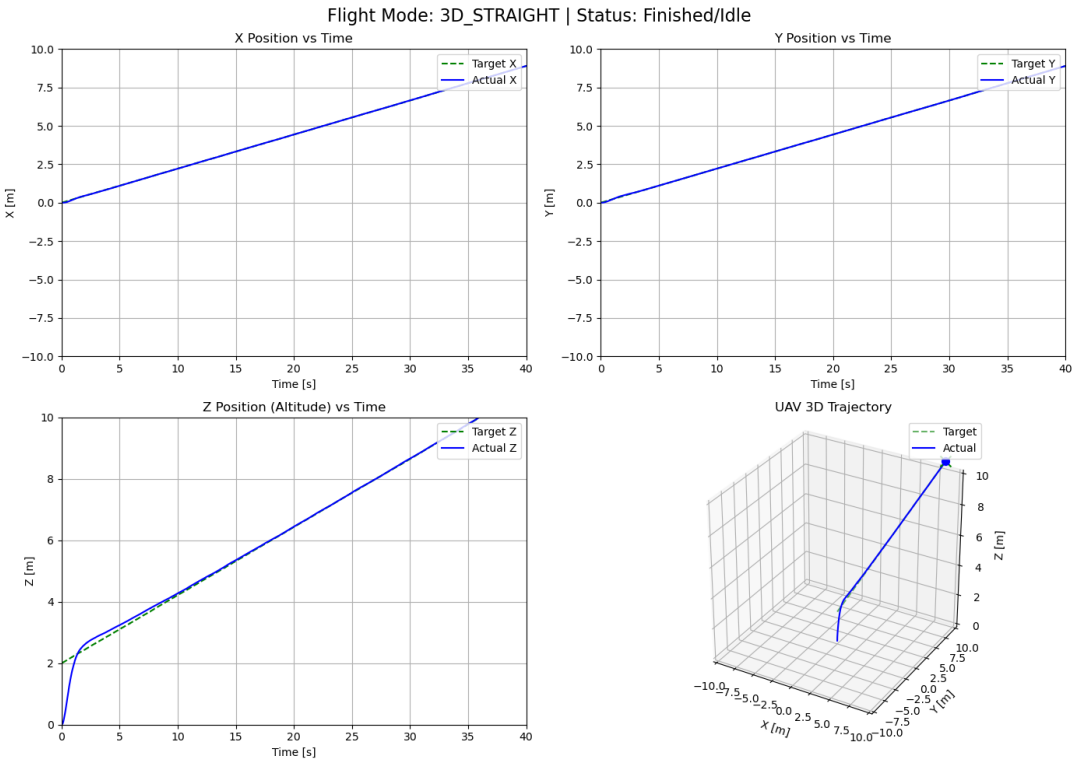
รูปที่ 4: Trajectory tracking performance for 2D Ramp Wave

4.2 No Wind (3D Trajectory)

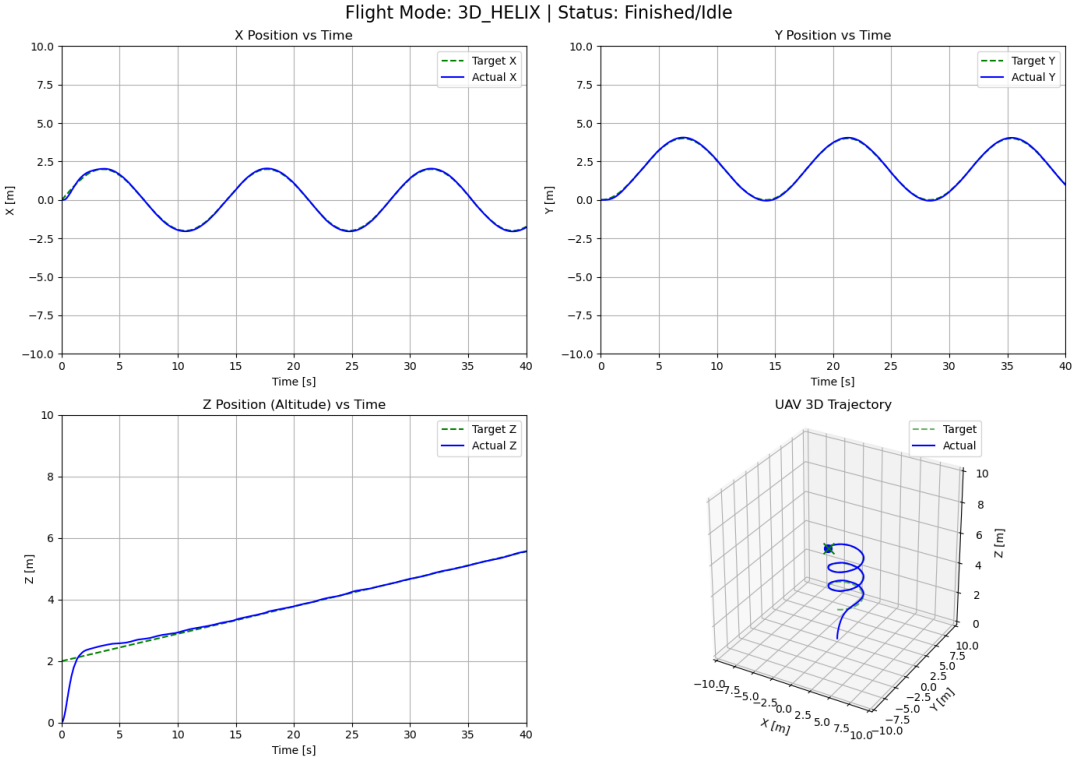
ในโหมด 3 มิติ ระบบควบคุมตำแหน่งวงนอก (PID) จะทำงานครบทั้ง 3 แกน เพื่อรักษาระนาบและบังคับทิศทางตามสมการอ้างอิง

ตารางที่ 2: Performance Metrics (MSE and RMSE) for 3D Trajectories

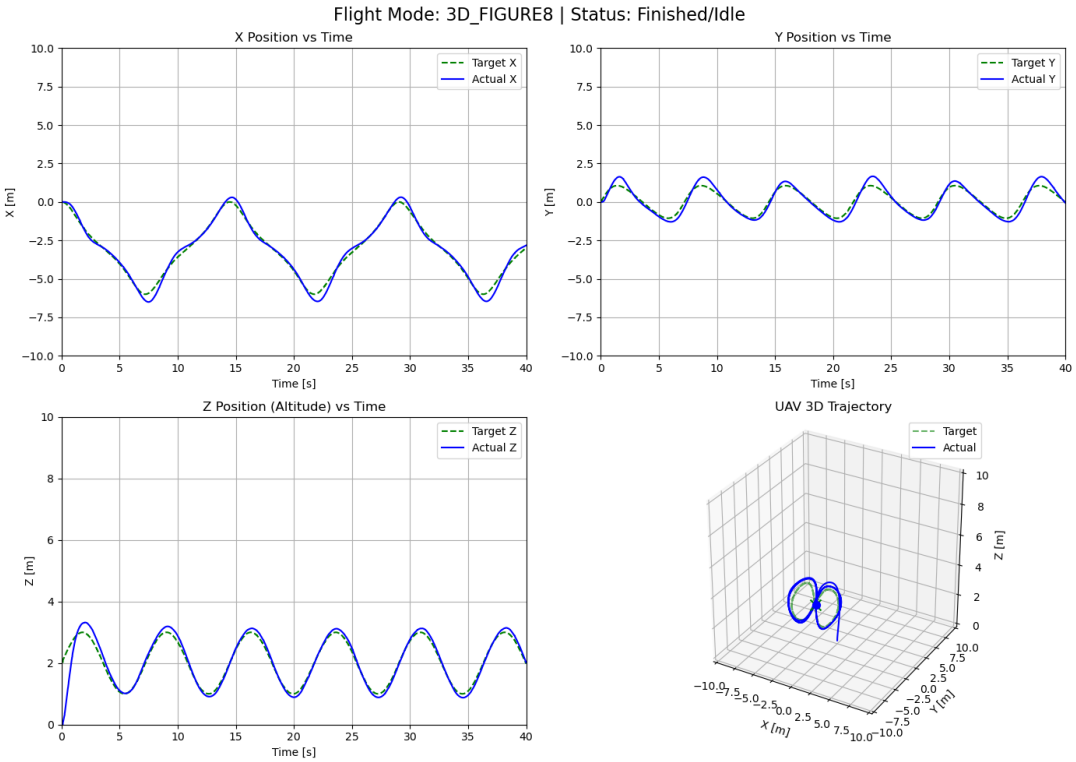
State	3D Straight		3D Helix		3D Figure-8	
	MSE	RMSE	MSE	RMSE	MSE	RMSE
X-Position (m)	0.000069	0.0083	0.002287	0.0478	0.055951	0.2365
Y-Position (m)	0.000088	0.0094	0.001132	0.0336	0.067018	0.2589
Z-Position (m)	0.049337	0.2221	0.050661	0.2251	0.066043	0.2570
Roll (rad)	0.000988	0.0314	0.007846	0.0886	0.015576	0.1248
Pitch (rad)	0.001044	0.0323	0.007997	0.0894	0.021080	0.1452
Yaw (rad)	0.000001	0.0008	0.000002	0.0016	0.000100	0.0100



รูปที่ 5: Trajectory tracking performance for 3D Straight



รูปที่ 6: Trajectory tracking performance for 3D Helix



รูปที่ 7: Trajectory tracking performance for 3D Figure8

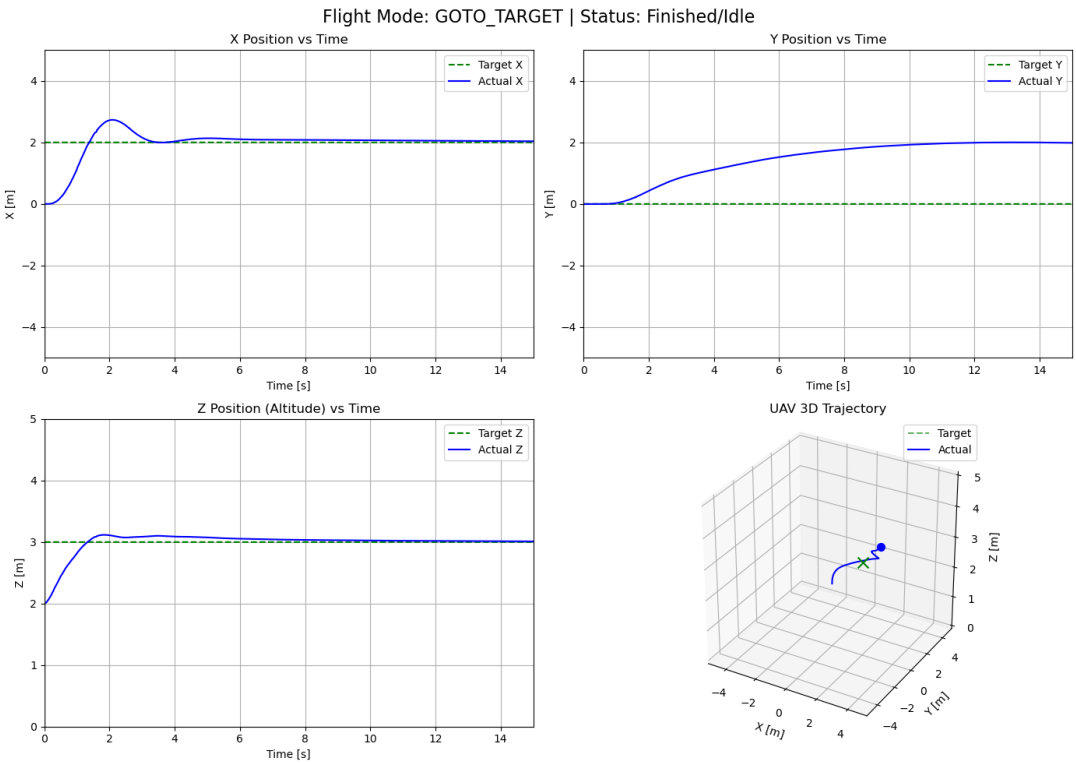
4.3 Step Response and Transient Analysis (Target Mode)

นอกเหนือจากการทดสอบบินตามเส้นทางแบบต่อเนื่อง (Continuous Trajectory) แล้ว ยังได้ประเมิน Transient Response ของระบบควบคุมด้วย Step Input ผ่านโหมด Target (GOTO_XYZ)

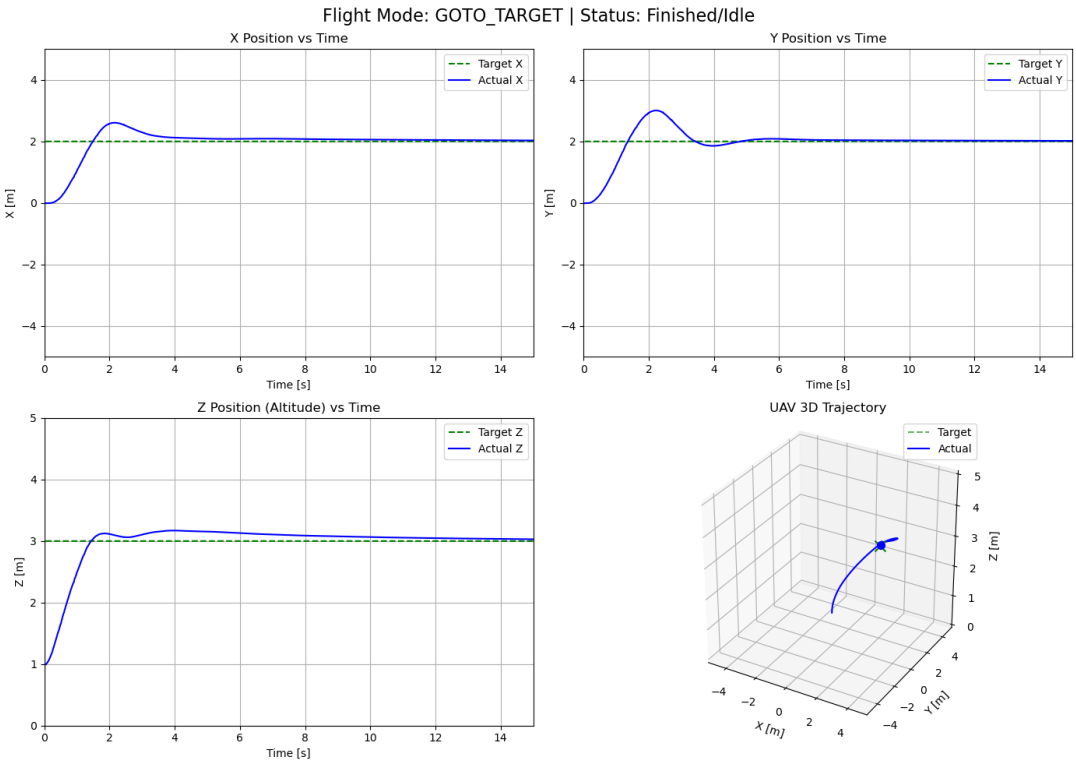
การทดสอบนี้จำลองสถานการณ์ที่โดรนได้รับคำสั่งให้เปลี่ยนตำแหน่งไปยังพิกัดเป้าหมายใหม่แบบทันทีทันใด เพื่อประเมินพฤติกรรมการเข้าสู่สมดุล โดยพิจารณาจาก Time-domain specifications ได้แก่ %Overshoot, Settling Time และ Steady-State Error

ตารางที่ 3: Transient Response Characteristics in Target Mode (No Wind)

State	2D Target Mode			3D Target Mode		
	OS (%)	Ts (s)	SS-Error (m)	OS (%)	Ts (s)	SS-Error (m)
X-Position	36.69%	3.76	-0.0024	30.24%	11.88	-0.0468
Y-Position	-	-	-	50.09%	5.06	-0.0428
Z-Position	11.77%	6.86	-0.0439	8.49%	12.10	-0.0460



รูปที่ 8: Step response of the quadcopter in 2D Target Mode



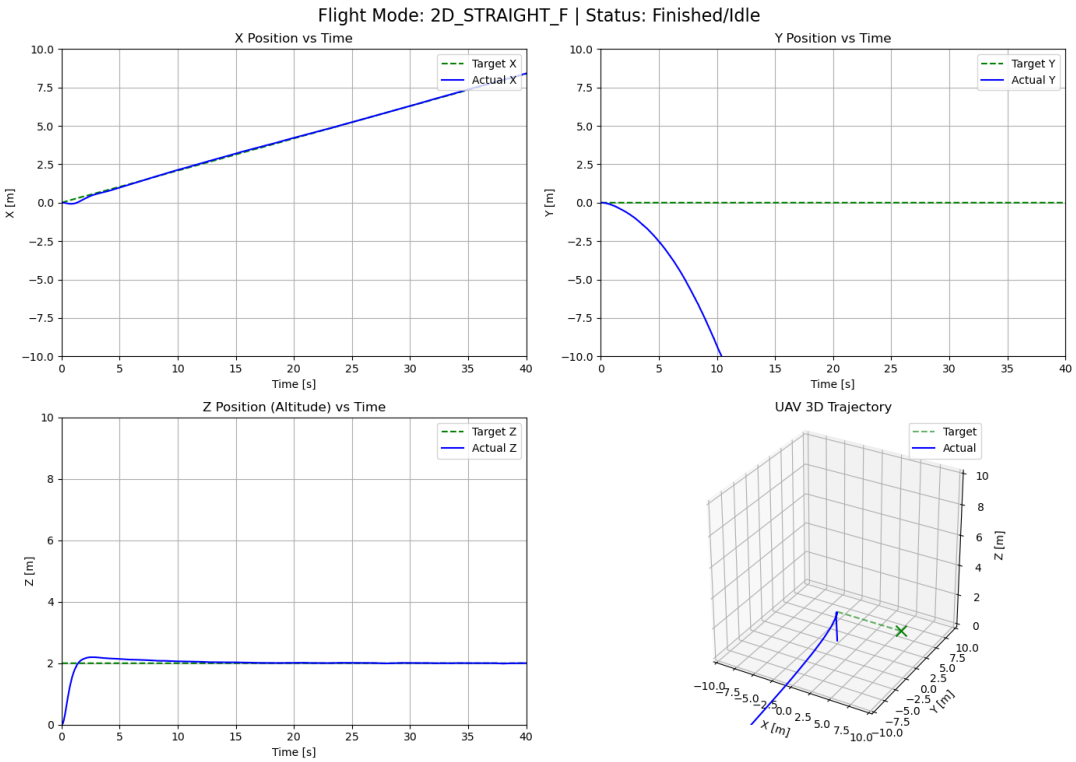
รูปที่ 9: Step response of the quadcopter in 3D Target Mode

4.4 With Wind (2D Trajectory)

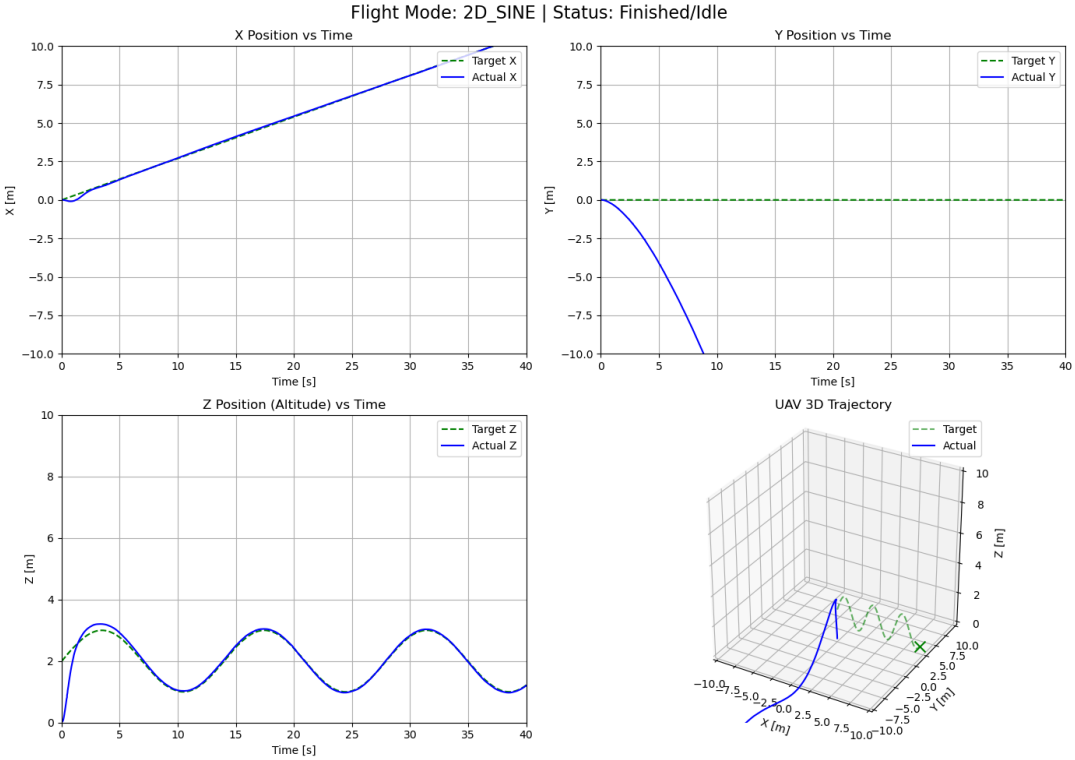
เพื่อทดสอบความทนทานต่อการรบกวน (Robustness) โดรนถูกทดสอบในสภาพแวดล้อมที่มีกระแสลมพัดคงที่ด้วยความเร็ว 4 m/s ในทิศทาง -y

ตารางที่ 4: Performance Metrics (MSE and RMSE) for 2D Trajectories With Wind (4 m/s in -y)

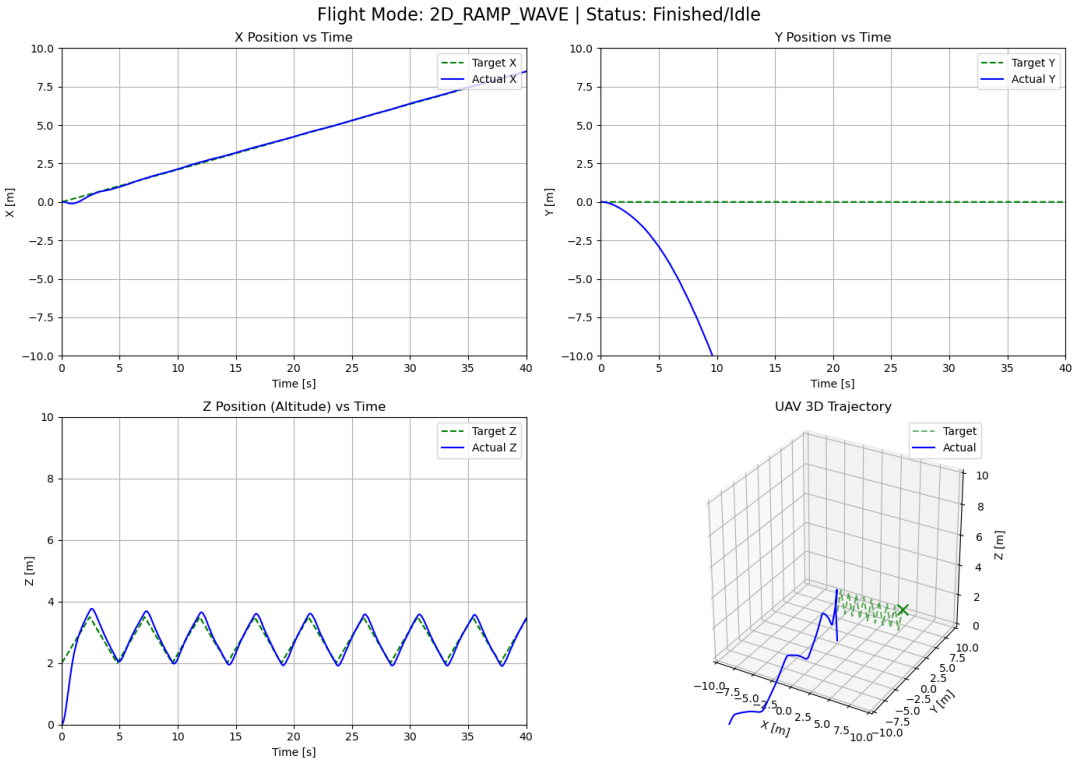
State	2D Straight		2D Sine Wave		2D Ramp Wave	
	MSE	RMSE	MSE	RMSE	MSE	RMSE
X-Position (m)	0.003908	0.0625	0.004582	0.0677	0.004051	0.0636
Y-Position (m)	2080.434006	45.6118	2565.914432	50.6549	2256.252078	47.5000
Z-Position (m)	0.048281	0.2197	0.052013	0.2281	0.072680	0.2696
Roll (rad)	0.000067	0.0082	0.000089	0.0094	0.000054	0.0074
Pitch (rad)	0.002085	0.0457	0.002567	0.0507	0.002180	0.0467
Yaw (rad)	0.000000	0.0006	0.000001	0.0008	0.000000	0.0006



รูปที่ 10: Trajectory tracking performance for 2D Straight with wind



รูปที่ 11: Trajectory tracking performance for 2D Sine Wave with wind

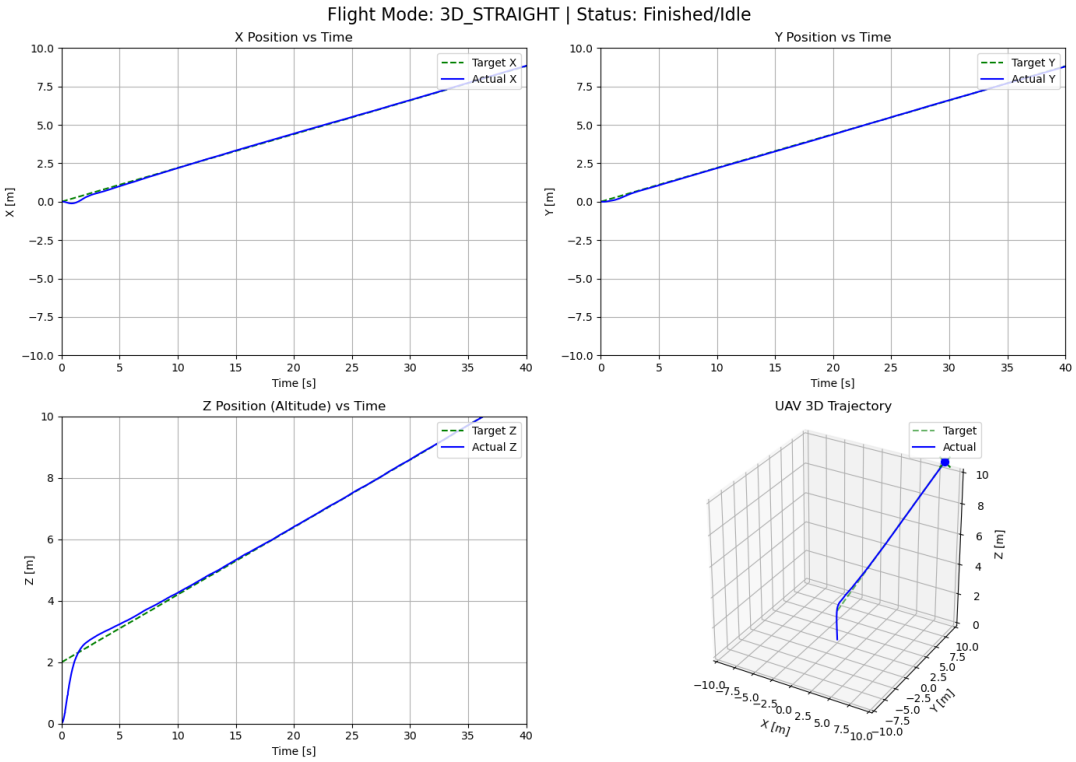


รูปที่ 12: Trajectory tracking performance for 2D Ramp Wave with wind

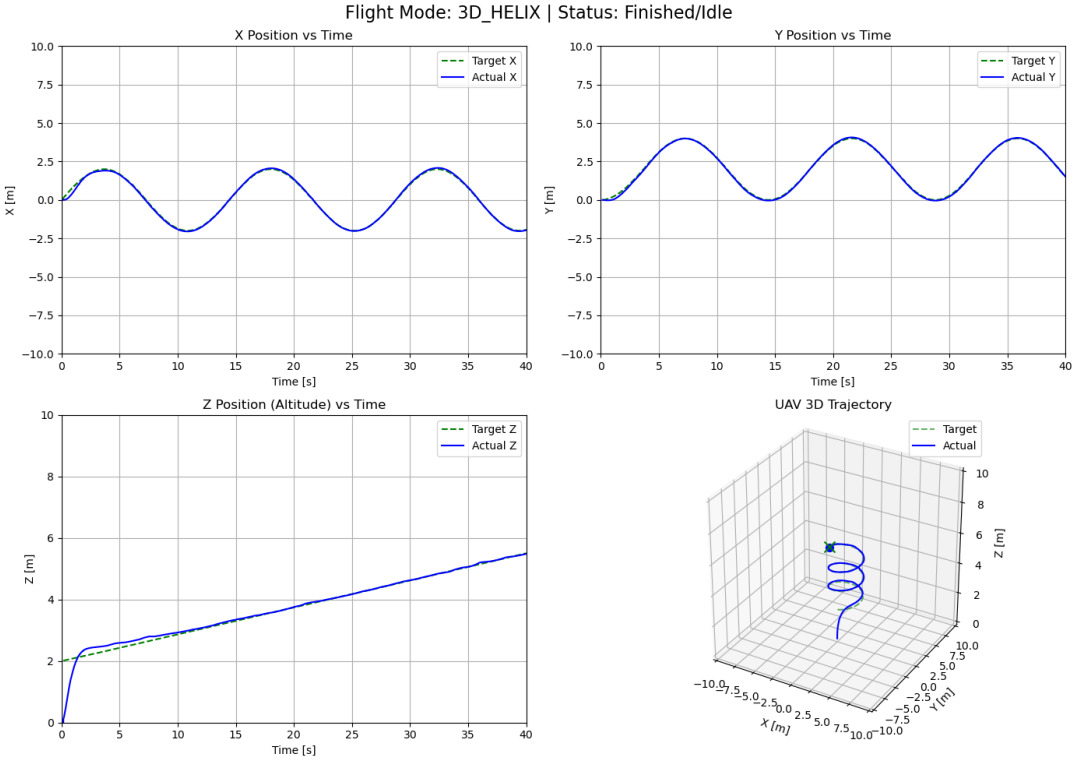
4.5 With Wind (3D Trajectory)

ตารางที่ 5: Performance Metrics (MSE and RMSE) for 3D Trajectories With Wind (4 m/s in -y)

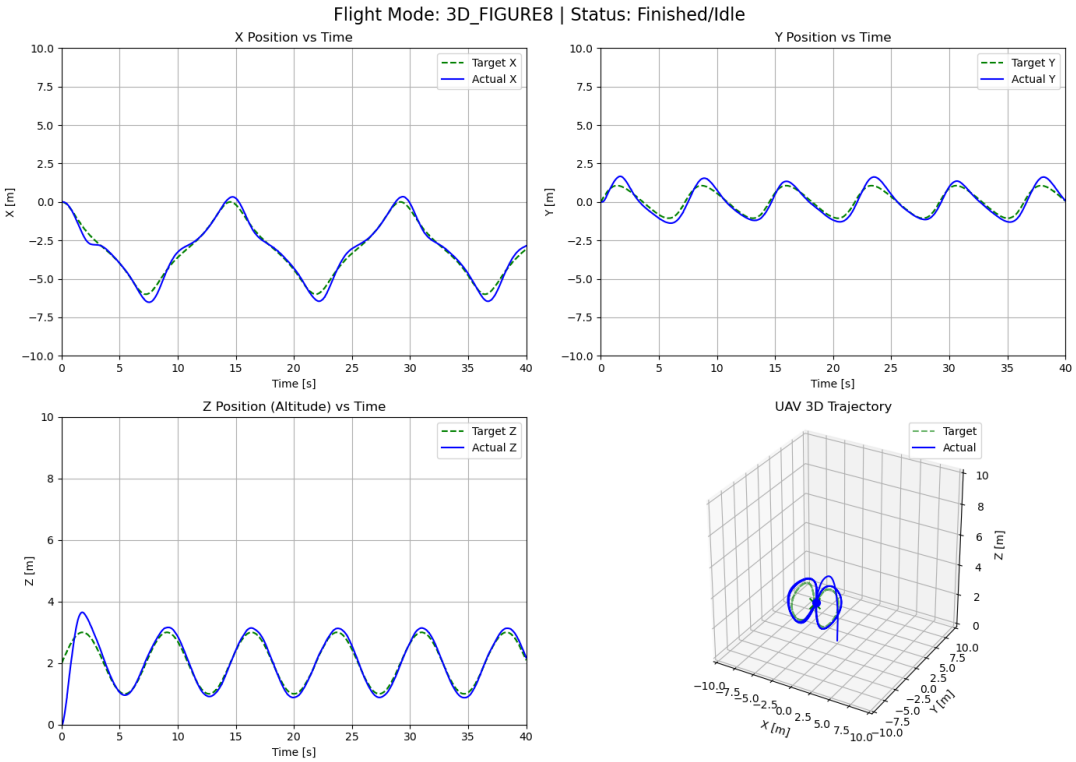
State	3D Straight		3D Helix		3D Figure-8	
	MSE	RMSE	MSE	RMSE	MSE	RMSE
X-Position (m)	0.005075	0.0712	0.005154	0.0718	0.065911	0.2567
Y-Position (m)	0.001320	0.0363	0.002857	0.0535	0.071755	0.2679
Z-Position (m)	0.049176	0.2218	0.058910	0.2427	0.069436	0.2635
Roll (rad)	0.001087	0.0330	0.009708	0.0985	0.015834	0.1258
Pitch (rad)	0.004638	0.0681	0.011950	0.1093	0.023563	0.1535
Yaw (rad)	0.000008	0.0028	0.000018	0.0043	0.000186	0.0136



รูปที่ 13: Trajectory tracking performance for 3D Straight with wind



รูปที่ 14: Trajectory tracking performance for 3D Helix with wind



รูปที่ 15: Trajectory tracking performance for 3D Figure8 with wind

5 Discussion and Analysis of the Performance

จากผลการทดลองและการจำลองพฤติกรรมใน Gazebo สามารถวิเคราะห์ประสิทธิภาพของตัวควบคุม LQRi และ PID ได้ดังนี้:

5.1 Inner Loop Performance: เสถียรภาพจากการใช้ LQRi

จากตารางเมตริกซ์ประสิทธิภาพ จะเห็นได้ชัดเจนว่าค่า MSE ของมุม Roll, Pitch และ Yaw มีค่าน้อยมาก (เข้าใกล้ศูนย์) ในทุกรูปแบบการบิน ทั้ง 2D และ 3D สิ่งนี้เป็นเครื่องยืนยันว่าการออกแบบตัวควบคุมแบบ LQRi (Linear Quadratic Integral Regulator) มีประสิทธิภาพสูงมากในการทรงตัว การเพิ่มพจน์ Integral (Augmented states) เข้าไปใน State-space model ตามหลักการในงานวิจัยอ้างอิง ช่วยกำจัดค่า Steady-state error ได้อย่างหมดจด ส่งผลให้ตัวควบคุมวงในสามารถรับคำสั่งมุมอ้างอิงจากตัวควบคุมวงนอกและปฏิบัติตามได้อย่างแม่นยำ แม้ในเส้นทางที่ซับซ้อนอย่าง Figure-8 มุม Yaw ก็ยังรักษาค่าไว้ที่ศูนย์ได้อย่างยอดเยี่ยม (MSE = 0.0001)

5.2 Outer Loop Performance: ความแม่นยำในการตามเส้นทางและ Phase Lag

สำหรับการควบคุมพิกัดในแกน X และ Y ระบบ PID สามารถควบคุมให้โดรนบินตามเป้าหมายได้เป็นอย่างดี โดยในโหมด 3D Straight และ 3D Helix พบว่าค่าความคลาดเคลื่อนมีเพียงหลักเซนติเมตรเท่านั้น (RMSE $\approx$ 0.008 - 0.04 เมตร)

อย่างไรก็ตาม ในเส้นทางที่มีการเปลี่ยนแปลงความเร่งและการหักเลี้ยวแบบไดนามิกสูง เช่น กราฟ 3D Figure-8 จะสังเกตเห็นปรากฏการณ์ Phase Lag (การตอบสนองที่ล่าช้ากว่าเป้าหมายเล็กน้อย) และจุดยอดของ 2D Ramp Wave จะมีความโค้งมนแทนที่จะเป็นมุมแหลม ซึ่งส่งผลให้ค่า MSE ของแกน Z และแกนพิกัดอื่นๆ เพิ่มสูงขึ้นเล็กน้อย สาเหตุของปรากฏการณ์นี้เกิดจากธรรมชาติของ PID Controller ที่เป็นระบบควบคุมแบบป้อนกลับ (Feedback Control) ซึ่งต้องรอให้เกิดค่า Error ขึ้นก่อนจึงจะเริ่มออกแรงชดเชย ประกอบกับโดรนมีมวล (Inertia) จึงไม่สามารถเปลี่ยนทิศทางในแนวดิ่งและแนวราบได้อย่างฉับพลันที่จุดหักมุม

5.3 Transient Analysis ใน Target Mode

จากการทดสอบป้อนสัญญาณพิกัดเป้าหมายแบบ Step Input (Target Mode) พบว่า Settling Time ได้สำเร็จครบทุกแกนการควบคุม โดยจุดที่สำคัญที่สุดคือ Steady-State Error ที่เข้าใกล้ศูนย์มาก (อยู่ในระดับเพียง 0.002 ถึง 0.047 เมตร หรือไม่เกิน 5 เซนติเมตร) ซึ่งเป็นผลมาจากพจน์ Integral ใน LQRi ที่ทำงานในการหักล้าง Error สะสม

ในส่วนของ Time response พบว่าการควบคุมระดับความสูง (Z-Axis) มีความนุ่มนวลและมีเสถียรภาพสูง โดยมีปริมาณการพุ่งเกิน (Overshoot) ต่ำเพียง 8.49% ในโหมด 3D และใช้เวลาเข้าสู่สมดุล (Settling Time) ประมาณ 12.10 วินาที ในขณะที่แกน X และ Y มีลักษณะการตอบสนองที่เร็วและแรง ส่งผลให้เกิดค่า Overshoot ที่สูงขึ้นในระดับ 30.24% - 50.09% อย่างไรก็ตาม

ระบบ PID วงนอกก็ยังสามารถมี Damping ที่เพียงพอในการดึงโดรนกลับมาและลู่เข้าสู่พิกัดเป้าหมาย (Settling Time ประมาณ 5.06 - 11.88 วินาที) ได้

5.4 ปรากฏการณ์ Y-Axis Drift ในโหมด 2D เทียบกับ 3D

จุดที่น่าสนใจที่สุดจากผลการทดลองคือข้อเปรียบเทียบระหว่างโหมด 2D และ 3D ในกรณีของ 2D แม้จะไม่มีการเป่าลมเข้าปะทะ แต่กราฟ Actual Y กลับแสดงการไถล (Drift) ออกจากจุดศูนย์กลางเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ ตามเวลา (ค่า MSE สูงถึง 23 - 32)

ปรากฏการณ์นี้ได้รับการแก้ไขและพิสูจน์แล้วในโหมด 3D ที่ค่า MSE ของแกน Y กลับมาสมบูรณ์แบบ (ลดลงเหลือระดับ 0.000088 ในโหมด 3D Straight) สิ่งนี้อาจจะเป็นความสมจริงของ Gazebo Physics Engine เนื่องจากในโหมด 2 มิติ ระบบ PID ของแกน Y ถูกตั้งใจปิดไว้ เมื่อโดรนก้มหน้า (Pitch) มอเตอร์ทั้ง 4 ตัวจะมีความเร็วรอบไม่เท่ากัน ทำให้เกิดแรงไจโรสโคปิก (Gyroscopic Effect) และ Reactive Torque ซึ่งผลักโดรนให้ไถลออกด้านข้าง การทดลองโหมด 3D ได้พิสูจน์ให้เห็นว่าเมื่อเราเปิดใช้งานระบบควบคุมแบบ Full-cascade 3 มิติอย่างเต็มรูปแบบ คอนโทรลเลอร์จะสามารถหักล้างผลกระทบเชิงพลศาสตร์เหล่านี้และรักษาเสถียรภาพของโดรนได้อย่างมีประสิทธิภาพ

5.5 การทดสอบความทนทานต่อกระแสลม (Disturbance Rejection) ในโหมด 2D

เมื่อทดสอบนำโดรนเข้าสู่สภาวะที่มีกระแสลมพัด 4 m/s ในทิศทาง -y ขณะที่อยู่ในโหมดควบคุมแบบ 2D (ซึ่งปิดการควบคุมพิกัดแกน Y ไว้) ผลปรากฏว่าโดรนถูกลมพัดปลิวออกนอกเส้นทางไปไกลกว่า 40-50 เมตร (ค่า MSE ของแกน Y พุ่งสูงระดับ 2080 ถึง 2565) เนื่องจากโดรนรักษาสมดุลให้ตั้งตรงขนานกับพื้นเพียงอย่างเดียว ทำให้โครงสร้างของโดรนเปรียบเสมือนใบเรือที่รับแรงลมและลอยไปตามลมแบบเต็มๆ

อย่างไรก็ตาม แม้ว่าโดรนจะถูกพัดปลิวไปไกลในแกน Y แต่กราฟเส้นทางแกน X และ Z กลับยังคงรักษาเส้นทางอ้างอิงได้อย่างแม่นยำ และกราฟมุม Roll, Pitch, Yaw ยังคงเสถียรมาก (MSE แทบไม่เปลี่ยนแปลงจากสภาวะไม่มีลม) ผลลัพธ์นี้นับเป็นข้อพิสูจน์ให้เห็นว่า สถาปัตยกรรมแบบ Decoupled Cascade Control และ LQRi สามารถจัดการกับการรบกวนภายนอก (Disturbance Rejection) ได้ การผสานเทอม Integral เข้ากับ LQR ช่วยลดผลกระทบจากความไม่แน่นอนและแรงรบกวนภายนอกได้อย่างมีประสิทธิภาพ แม้แกนหนึ่งจะถูกปิดการควบคุมไป คอนโทรลเลอร์วงใน (Inner Loop) ก็ยังสามารถแยกแยะ ต้านทานแรงลม และรักษาเสถียรภาพในแกนพิกัดอื่นๆ ที่เหลือให้ทำงานตามเป้าหมายได้อย่างเป็นอิสระ