

# Дельта-хеджирование американских опционов на основе алгоритма прайсинга Longstaff-Schwartz'a

Студент: Новиков В.В

Научный руководитель: Куликов А.В

# Актуальность

- Стабилизация портфеля и управление рисками
- Поддержание нейтральной позиции к изменениям цен на базовые активы
- Уменьшение влияния волатильности на портфель
- Эффективное управление позицией маркетмейкерами
- Снижение вероятности крупных убытков
- Оптимизация использования капитала и ликвидности

# Пайплайн действий

## 1 Семестр

- Реализация Монте-Карло симуляций с использованием antithetic variates
- Реализация алгоритма LongStaffSchwartz'a

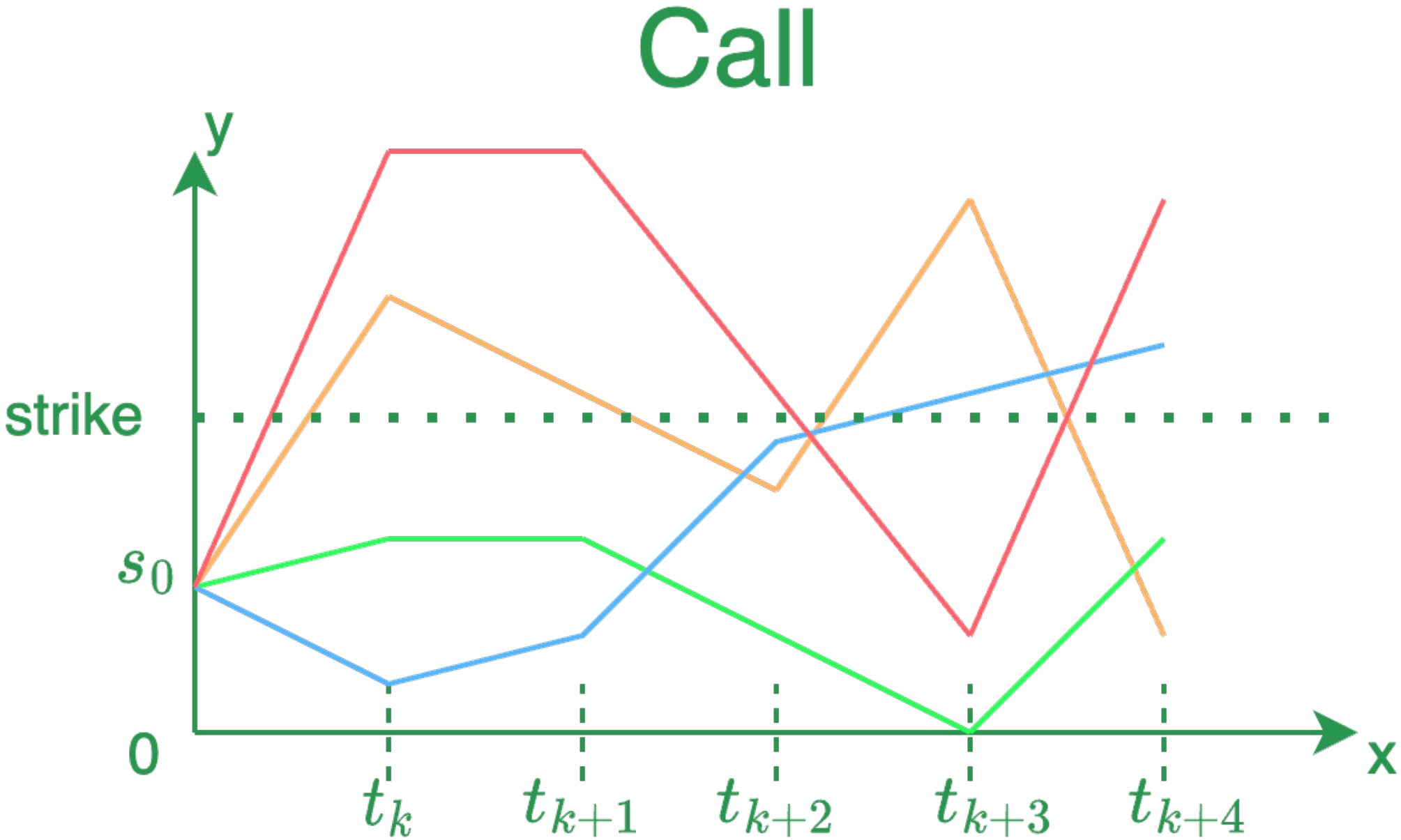
## 2 Семестр

- Подсчет Implied Volatility
- Оценка американского пут опциона на основе модели LongStaffSchwartz'a
- Подсчет дельты опциона
- Реализация динамического дельта-хеджирования данного опциона
- Проверка результатов хеджирования

# Прайсинг американского пут опциона

- Зная IV полученную оцениваем цену американского пута алгоритмом LongStaffSchwartz

$- C_{T,i} = \max(0, S \exp(v\Delta T + \sigma\sqrt{T}(\epsilon_i)) - K)$   
 $- \bar{C}_{T,i} = \max(0, S \exp(v\Delta T + \sigma\sqrt{T}(-\epsilon_i)) - K)$



Stock price paths				
Path	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	1.00	1.09	<u>1.08</u>	1.34
2	1.00	1.16	1.26	1.54
3	1.00	1.22	<u>1.07</u>	1.03
4	1.00	.93	<u>.97</u>	.92
5	1.00	1.11	1.56	1.52
6	1.00	.76	<u>.77</u>	.90
7	1.00	.92	<u>.84</u>	1.01
8	1.00	.88	1.22	1.34

Regression at time 2		
Path	Y	X
1	$.00 \times .94176$	1.08
2	—	—
3	$.07 \times .94176$	1.07
4	$.18 \times .94176$	.97
5	—	—
6	$.20 \times .94176$	.77
7	$.09 \times .94176$	.84
8	—	—

Optimal early exercise decision at time 2		
Path	Exercise	Continuation
1	.02	<u>.0369</u>
2	—	—
3	.03	<u>.0461</u>
4	<u>.13</u>	.1176
5	—	—
6	<u>.33</u>	.1520
7	<u>.26</u>	.1565
8	—	—

Option cash flow matrix			
Path	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	.00	.00	.00
2	.00	.00	.00
3	.00	.00	.07
4	.17	.00	.00
5	.00	.00	.00
6	.34	.00	.00
7	.18	.00	.00
8	.22	.00	.00



# Implied Volatility

## Подразумеваемая волатильность

Цена опциона *call*:

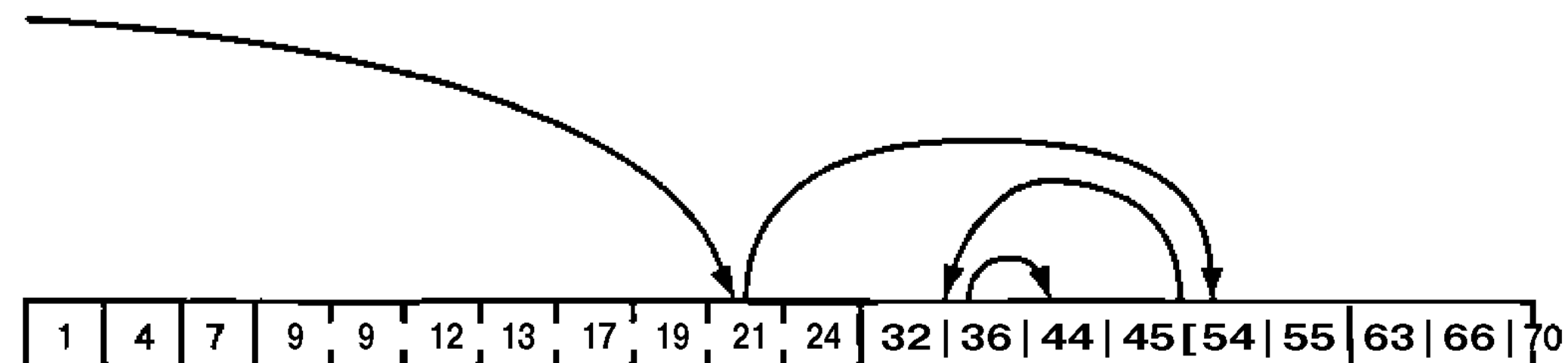
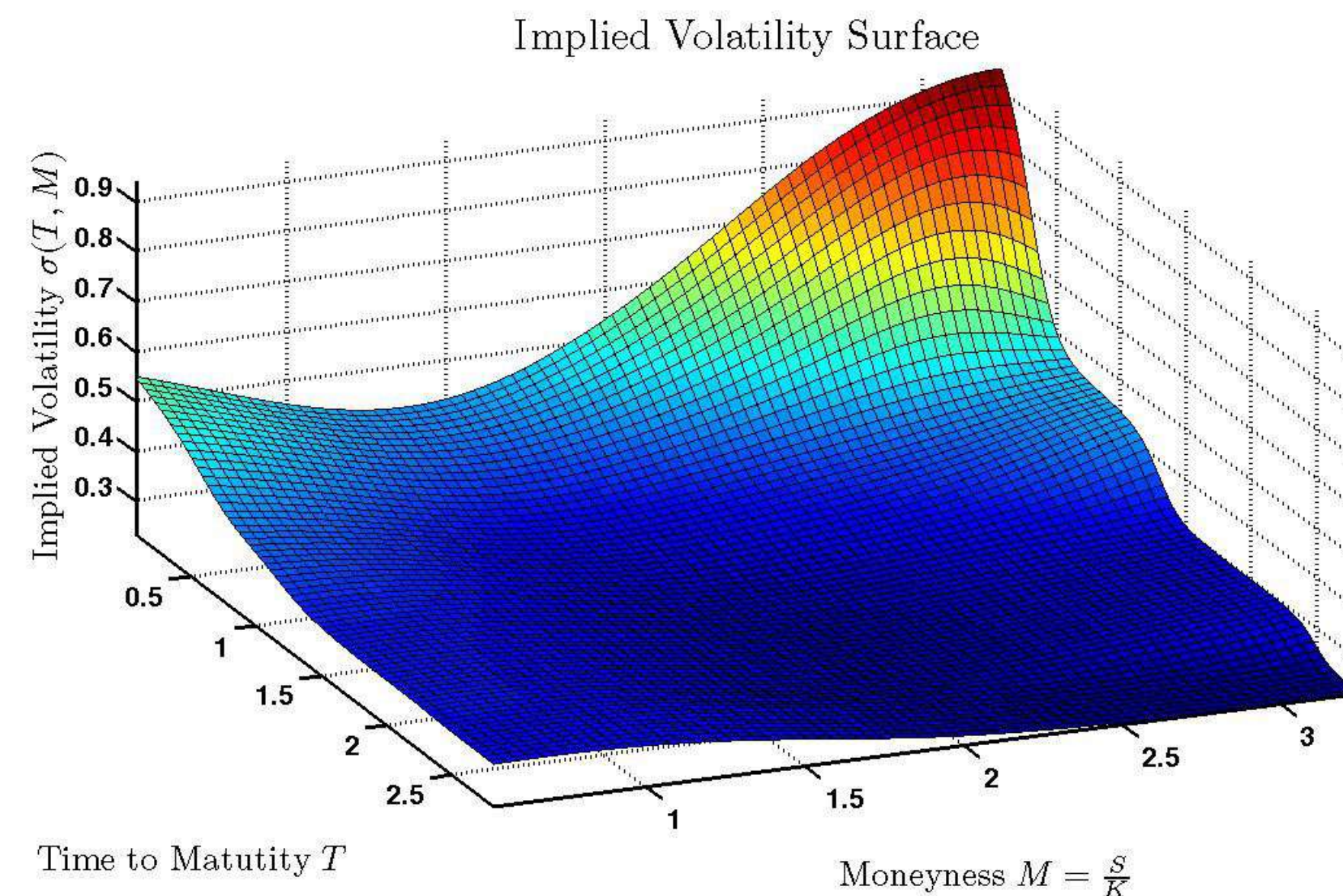
$$C = SN(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2), \text{ где}$$

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{X}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Цена опциона *put*:

$$P = Xe^{-rT}N(-d_2) - SN(-d_1).$$



# Подсчет дельты

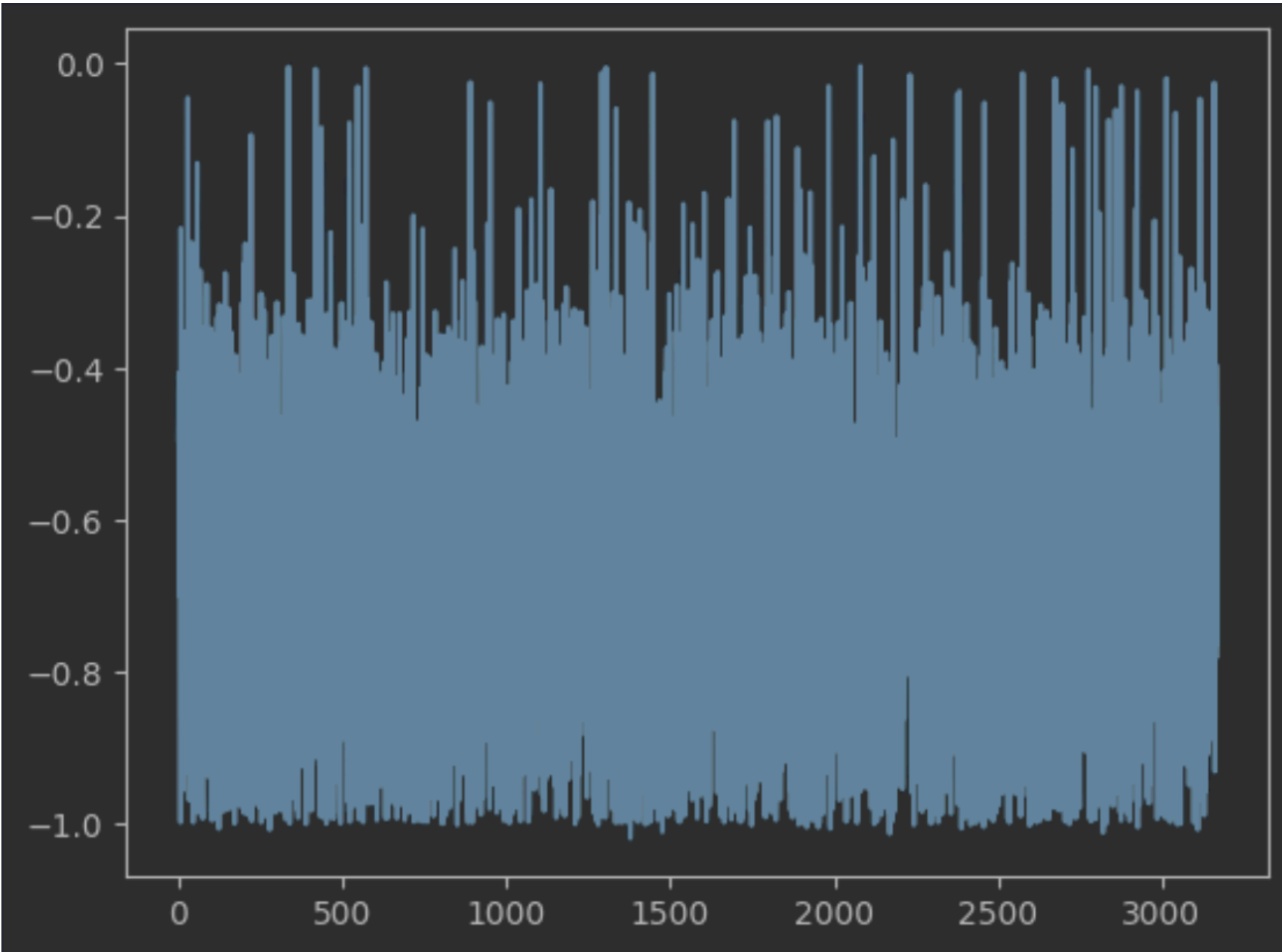
$MK$  – Монте-Карло симуляции, матрица размерности  $(N, M)$   
N - кол-во симуляций, M - дней до экспирации

$LSS$  – Функция алгоритма LongStaffSchwartza

$S$  – Цена базового актива

$$\delta_i = \frac{LSS_i(MK \cdot \frac{S_i + \epsilon}{S_i}) - LSS_i(MK \cdot \frac{S_i - \epsilon}{S_i})}{2\epsilon}$$

«Грек»	Что
дельта	$\frac{\partial c}{\partial S}$
гамма	$\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}$
вега	$\frac{\partial c}{\partial \sigma}$
тета	$-\frac{\partial c}{\partial T}$
ро	$\frac{\partial c}{\partial r}$



# Подсчет хеджа

$H$  – Хедж

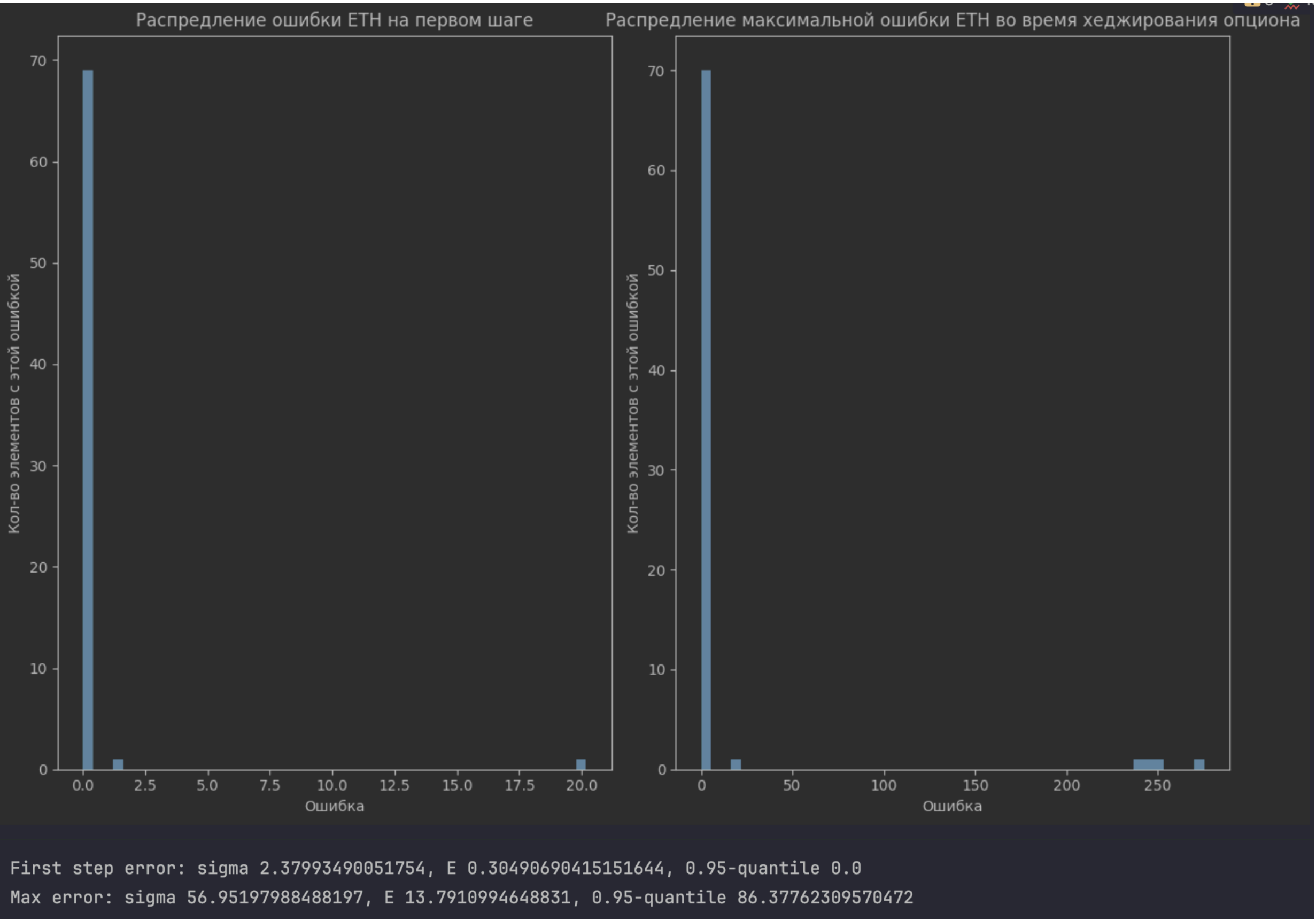
$\delta$  – Дельта подсчитанная на основе американского пута

$S$  – Цена базового актива

$r$  – Безрисковая процентная ставка

$$H_0 = American\_put\_price$$

$$H_i = \delta_{i-1} \cdot S_i + (H_{i-1} - \delta_{i-1} \cdot S_{i-1}) \cdot e^{r/365},$$





# Проблемы

## Проблемы с датасетом

- В датасете не было цен базовых активов в моменты сбора цен опционов, поэтому приходилось брать дневную цену открытия BTC/ETH что привело к арбитражным возможностям, каких быть не должно
- Цены опционов бывают равны 0
- Повторяющиеся даты

```
ex = pd.read_csv('../data/server_data/crypto_option_candles_days.csv')  ex: pandas DataFrame (6.
print(f"Кол-во строчек с нулевыми ценами опционов в датасете: {len(ex[ex['close'] == 0])}\nПроце
Executed at 2024.05.14 01:02:25 in 291ms

Кол-во строчек с нулевыми ценами опционов в датасете: 2607
Процент нулевых цен опционов в датасете 0.41%
```

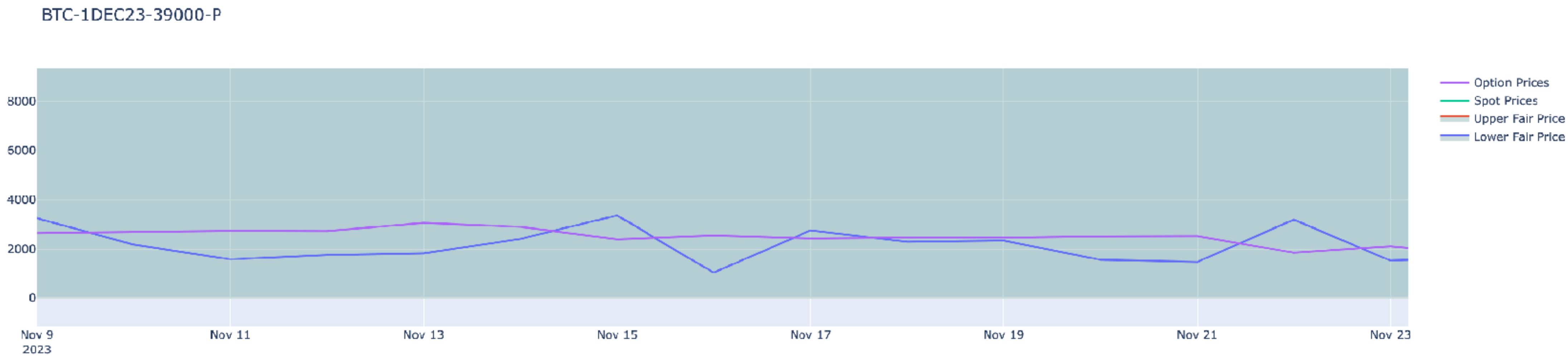
```
quantity, percent = check_for_duplicate_dates(data)
print(f"Кол-во строчек с повторяющимися датами : {quantity}\nПроцент таких строчек по отноше
Executed at 2024.05.07 16:34:44 in 14s 75ms

Кол-во строчек с повторяющимися датами : 15242
Процент таких строчек по отношению ко всему датасету: 2.41
```



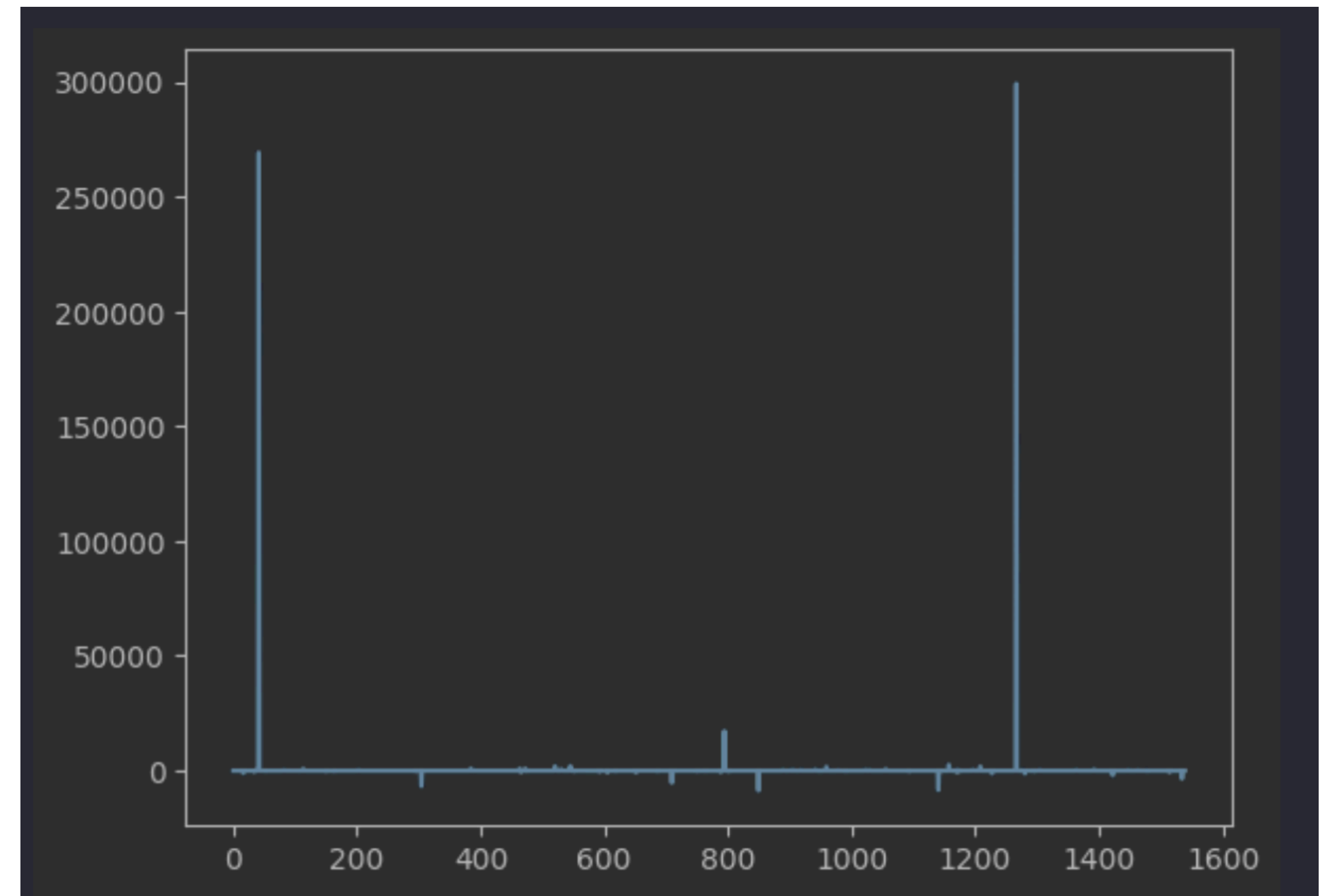
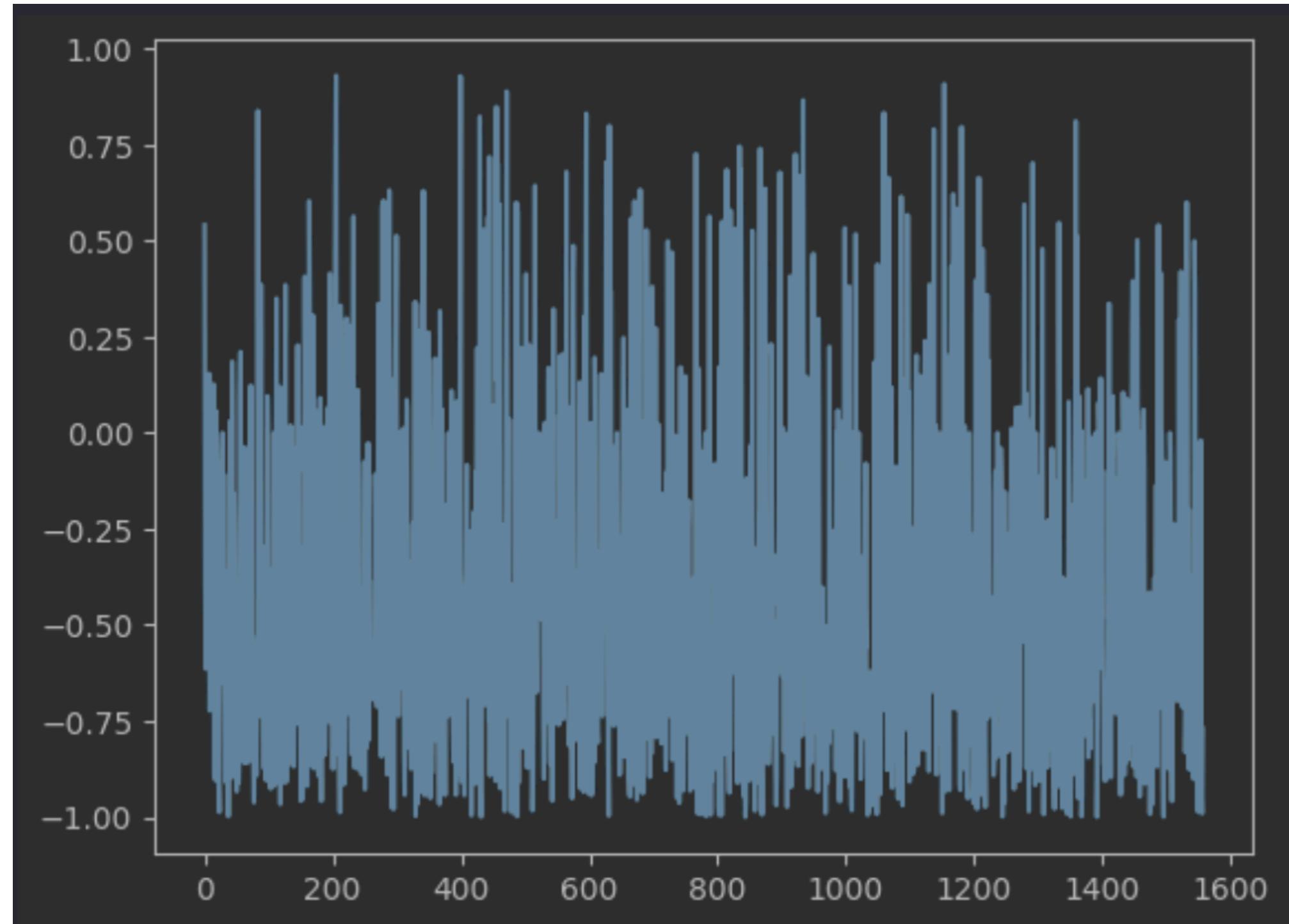
# Проблемы

## Проблемы с датасетом



# Проблемы

- Проблема с подсчетом дельты через взятие производной из регрессий (не хватает симуляций, плохие регрессии)



# Результаты

- Реализован бейзлайн оценки и дельта-хеджирования американского опциона пут с помощью Монте Карло симуляций с неточностями в расчетах и пока что существенной ошибкой

# Выводы

Дальнейшие этапы будут заключать в себе:

- 1) Доработка алгоритма Longstaff-Schwartz'а посредством изменения методов расчета continuation value
- 2) Повышение качества Монте-Карло симуляций, используя importance sampling и оптимизацию количества симуляций
- 3) Доработка алгоритма динамического дельта-хеджирования с повышением отказоустойчивости



# Литература

- Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach (Francis A Longstaff, Eduardo S. Schwartz)
- Stochastic Calculus for Finance (Steven E. Shreve)
- Black. F.. and M.Scholes, 1973 "The Pricing of Options and Corporate Liabilities." Journal of Political Economy. XI. 637-654.
- Options, Futures and Other Derivatives John C. Hull

**Спасибо за внимание!**