

Решение задачи оптимальной остановки в рамках реализации алгоритма LongStaffShwartz

Мотивация

- Научиться принимать решения о времени исполнения американских опционов. Чтобы решить задачу ценообразования
- Пример: делать правильное хеджирование.

Как принимать решение

В день экспирации оптимальной стратегией будет исполнить опцион, если он находится в деньгах.

В любые дни ранее, оптимальная стратегия заключается в сравнении сегодняшней стоимости опциона с ожидаемыми стоимостями опциона если мы не будем исполнять опцион и если сегодня лучший вариант исполнения, то мы исполним опцион.

Таким образом, требуется определить, стоит ли исполнять опцион сразу (если он находится в деньгах) или лучше продолжить держать его (в надежде на увеличение стоимости актива и, соответственно, стоимости опциона).

Для этого сравнивают текущее значение опциона с ожидаемой будущей стоимостью, которая будет получена при продолжении его действия.

Пример принятия решений (in sample)

Stock price paths

| Path | $t = 0$ | $t = 1$ | $t = 2$ | $t = 3$ |
|------|---------|---------|---------|---------|
| 1 | 1.00 | 1.09 | 1.08 | 1.34 |
| 2 | 1.00 | 1.16 | 1.26 | 1.54 |
| 3 | 1.00 | 1.22 | 1.07 | 1.03 |
| 4 | 1.00 | .93 | .97 | .92 |
| 5 | 1.00 | 1.11 | 1.56 | 1.52 |
| 6 | 1.00 | .76 | .77 | .90 |
| 7 | 1.00 | .92 | .84 | 1.01 |
| 8 | 1.00 | .88 | 1.22 | 1.34 |

Stock price paths

| Path | $t = 0$ | $t = 1$ | $t = 2$ | $t = 3$ |
|------|---------|---------|-------------|---------|
| 1 | 1.00 | 1.09 | <u>1.08</u> | 1.34 |
| 2 | 1.00 | 1.16 | 1.26 | 1.54 |
| 3 | 1.00 | 1.22 | <u>1.07</u> | 1.03 |
| 4 | 1.00 | .93 | <u>.97</u> | .92 |
| 5 | 1.00 | 1.11 | 1.56 | 1.52 |
| 6 | 1.00 | .76 | <u>.77</u> | .90 |
| 7 | 1.00 | .92 | <u>.84</u> | 1.01 |
| 8 | 1.00 | .88 | 1.22 | 1.34 |

$$E[Y|X] = -1,07 + 2,983X - 1,813X^2.$$

Cash-flow matrix at time 3

| Path | $t = 1$ | $t = 2$ | $t = 3$ |
|------|---------|---------|---------|
| 1 | — | — | .00 |
| 2 | — | — | .00 |
| 3 | — | — | .07 |
| 4 | — | — | .18 |
| 5 | — | — | .00 |
| 6 | — | — | .20 |
| 7 | — | — | .09 |
| 8 | — | — | .00 |

Regression at time 2

| Path | Y | X |
|------|--------------|------|
| 1 | .00 × .94176 | 1.08 |
| 2 | — | — |
| 3 | .07 × .94176 | 1.07 |
| 4 | .18 × .94176 | .97 |
| 5 | — | — |
| 6 | .20 × .94176 | .77 |
| 7 | .09 × .94176 | .84 |
| 8 | — | — |

Optimal early exercise decision at time 2

| Path | Exercise | Continuation |
|------|------------|--------------|
| 1 | .02 | <u>.0369</u> |
| 2 | — | — |
| 3 | .03 | <u>.0461</u> |
| 4 | <u>.13</u> | .1176 |
| 5 | — | — |
| 6 | <u>.33</u> | .1520 |
| 7 | <u>.26</u> | .1565 |
| 8 | — | — |

Пример принятия решений (in sample)

Optimal early exercise decision at time 2

| Path | Exercise | Continuation |
|------|------------|--------------|
| 1 | .02 | <u>.0369</u> |
| 2 | — | — |
| 3 | .03 | <u>.0461</u> |
| 4 | <u>.13</u> | .1176 |
| 5 | — | — |
| 6 | <u>.33</u> | .1520 |
| 7 | <u>.26</u> | .1565 |
| 8 | — | — |

| Option cash flow matrix | | | | Stopping rule | | | |
|-------------------------|-------|-------|-------|---------------|-------|-------|-------|
| Path | t = 1 | t = 2 | t = 3 | Path | t = 1 | t = 2 | t = 3 |
| 1 | .00 | .00 | .00 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | .00 | .00 | .00 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | .00 | .00 | .07 | 3 | 0 | 0 | 1 |
| 4 | .17 | .00 | .00 | 4 | 1 | 0 | 0 |
| 5 | .00 | .00 | .00 | 5 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | .34 | .00 | .00 | 6 | 1 | 0 | 0 |
| 7 | .18 | .00 | .00 | 7 | 1 | 0 | 0 |
| 8 | .22 | .00 | .00 | 8 | 1 | 0 | 0 |

Повторим так еще 2 раза
И получим матрицу денежных потоков

Cash-flow matrix at time 2

| Path | t = 1 | t = 2 | t = 3 |
|------|-------|-------|-------|
| 1 | — | .00 | .00 |
| 2 | — | .00 | .00 |
| 3 | — | .00 | .07 |
| 4 | — | .13 | .00 |
| 5 | — | .00 | .00 |
| 6 | — | .33 | .00 |
| 7 | — | .26 | .00 |
| 8 | — | .00 | .00 |

Американский $\frac{((.17 + .34 + .18 + .22) \cdot 0.94 + .00 \cdot 0.94^2 + .07 \cdot 0.94^3)}{8} = \0.114

$$OP = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N p_i \cdot (1 - r)^t$$

Европейский $\frac{(.07 + .18 + .2 + .09) \cdot 0.94^3}{8} = \0.0564

Самоконтроль (out of sample)

- Чтобы проверить точность оценки опциона надо применить полученные регрессии на новых сгенерированный Монте-Карло путях (out of sample)
 1. Обучив на in-sample мы получаем модель регрессии
 2. На S_0 получаем значение актива
 3. Строим N траекторий
 4. Регрессируем их еще дальше и принимаем решение останавливаться нам завтра или нет
 5. Наступает следующий день убираем те траектории на которых остановились
 6. Повторяем с шага 4 столько раз сколько было регрессий
 7. Получив матрицу денежных потоков считаем цену европейского и американского опционов

Результаты

- В ходе реализации статьи были получены результаты аналогичные результатам статьи используя те же пути которые были в примере. И на собственных синтетических примерах.
- Был реализован алгоритм самопроверки правильности оценки опциона(out of sample).
- Было проверено, что функция цен опциона убывает и выпукла к низу.

Результаты

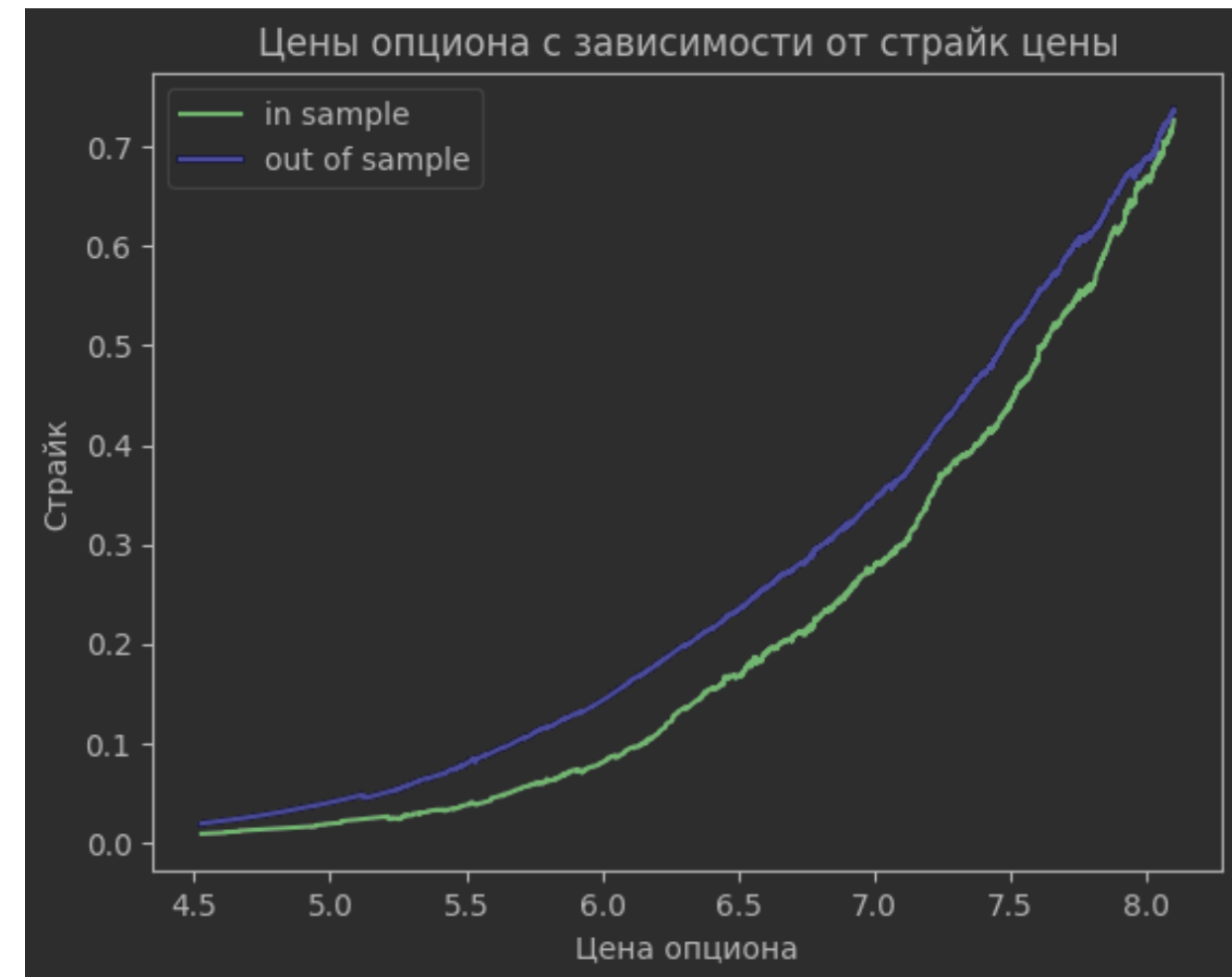
Количество траекторий = 1000
Длина траектории = 4
Страйк цена = 1.1
Реальная начальная цена = 1
Безрисковая процентная ставка = 5.8239
Волатильность = 1.2129
Тип опциона = "put"

In sample цены опционов

Цена американского опциона: 0.08206828218233461
Цена европейского опциона: 0.06151452978267553

Out of sample цены опционов

Цена американского опциона: 0.08471599369649761
Цена европейского опциона: 0.0609986885736957



Выводы

- В этой статье представлен простой новый метод аппроксимации стоимости опционов в американском стиле путем моделирования. Этот подход интуитивно понятен, точен, прост в применении и эффективен в вычислительном отношении.
- Дальнейшее развитие: Новые регрессии, другие виды опционов,