Московский Физико-Технический
Институт

Отчет о проделанной работе

Решение задачи оптимальной остановки в рамках реализации алгоритма LongStaffShwarz

Автор:
Новиков Владимир , М05-311б

5 декабря 2023 г.

Вступление

В современной финансовой аналитике решение задачи оптимальной остановки является ключевым аспектом успешной реализации алгоритмов оценки стоимости финансовых инструментов. Одним из мощных инструментов, предназначенных для принятия решений в условиях стохастической неопределенности, является алгоритм Longstaff-Shorts. Этот метод, широко применяемый в финансовой индустрии, позволяет эффективно моделировать и оптимизировать стратегии остановки американских опционов в условиях неопределенности развития рынка.

Математическое описание алгоритма

Концептуальная основа оценочной схемы, лежащей в основе алгоритма LSM, основана на общей парадигме оценки производных, предложенной в работах Блэка и Шоулса (1973), Мертона (1973), Харрисона и Крепса (1979), Харрисона и Плиски (1981), Кокса, Ингерсолла и Росса (1985), Хита, Джарроу и Мортона (1992) и других. Мы также представляем несколько результатов сходимости для данного алгоритма.

Шаг 1. Введем нужные обозначения.

Мы предполагаем наличие полного вероятностного пространства $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ и ограниченный временной горизонт $[0, T]$, где

- Пространство состояний Ω - это множество всех возможных реализаций стохастической экономики между моментами времени 0 и T,
- Элементарное событие ω, представляющий собой один из возможных путей.
- $\mathcal{F}$ - это сигма-алгебра различимых событий в момент времени T,
- P - вероятностная мера, определенная на элементах $\mathcal{F}$.

Мы определяем $F = \{\mathcal{F}_t; t \in [0, T]\}$ как расширенную фильтрацию, созданную соответствующими процессами цен на ценные бумаги в экономике, и предполагаем, что $\mathcal{F}_t = F$. Согласно парадигме отсутствия арбитража, мы предполагаем наличие эквивалентной мартингальной меры Q для этой экономики.

Шаг 2. Поставим задачу.

Мы интересуемся оценкой американских деривативных ценных бумаг с случайными денежными потоками, которые могут возникнуть в период $[0, T]$. Мы ограничиваем наше внимание деривативами с выплатами, которые являются элементами пространства квадратично интегрируемых или функций с ограниченной дисперсией $L^2(\Omega, \mathcal{F}, Q)$. Стандартные результаты, такие как Bensoussan (1984) и Karatzas (1988), подразумевают, что стоимость американской опционной позиции может быть представлена в виде оболочки Снелла; стоимость американской опции равна максимизированной стоимости дисконтированных денежных потоков по опции, где максимум берется по всем моментам остановки относительно фильтрации F.

Мы используем обозначение $C(\omega, s; t, T)$, чтобы обозначить путь денежных потоков, сгенерированных опцией, при условии, что опция не была исполнена на момент времени t и что держатель опции следует оптимальной стратегии остановки для всех s таких, что $t < s \leq T$. Эта функция аналогична промежуточным матрицам денежных потоков, использованным в предыдущем разделе.

Цель алгоритма LSM - предоставить путь к приближению оптимальной стратегии остановки, максимизирующей стоимость американской опции. Для пояснения интуиции, лежащей в основе алгоритма LSM, мы сосредотачиваемся на случае, когда американская опция может быть исполнена только в K дискретных моментах времени $0 < t_1 < t_2 < ... < t_K = T$, и рассматриваем оптимальную стратегию остановки на каждой дате исполнения. На практике, конечно же, многие американские опции могут быть непрерывно исполнимыми; алгоритм LSM может быть использован для приближенной оценки стоимости таких опций, взяв K достаточно большим. На последний день истечения срока опции инвестор исполняет опцион, если он находится в деньгах, или дает ему истечь срок, если он находится вне денег. На момент времени исполнения t_k , перед окончательной датой истечения, держатель опциона должен выбрать, исполнять его немедленно или продолжать срок действия опции и пересмотреть решение об исполнении на следующей дате исполнения. Стоимость опции максимизируется по пути и, следовательно, безусловно, если инвестор исполняет опцион, как только немедленная стоимость исполнения больше или равна стоимости продолжения. На момент времени t_k, денежный поток от немедленного исполнения известен инвестору, и стоимость немедленного исполнения просто равна этому денежному потоку. Денежные потоки от продолжения, конечно же, неизвестны на момент времени t_k.

Теория оценки без арбитража, однако, подразумевает, что стоимость продолжения, или, что равносильно, стоимость опции, предполагая, что ее нельзя исполнить до t_k, определяется ожиданием оставшихся дисконтированных денежных потоков $C(\omega, s; t_k, T)$ относительно меры риска-нейтральной ценообразования Q. Конкретно, на момент времени t_k стоимость продолжения $F(\omega; t_k)$ может быть выражена как

$$F(\omega; t_k) = E_Q\left[\sum_{j=k+1}^{K} exp\left(-\int_{t_k}^{t_j} r(\omega, s)ds\right) C(\omega, t_j; t_k, T)|\mathcal{F}_{t_k}\right]$$

где $r(\omega, t)$ - это (возможно стохастическая) безрисковая ставка дисконта, и ожидание берется условно по информационному множеству $\mathcal{F}_{t_k}$ на момент времени t_k. С этим представлением задача оптимального исполнения сводится к сравнению немедленной стоимости исполнения с этим условным ожиданием, а затем к исполнению, как только немедленная стоимость исполнения положительна и больше или равна условному ожиданию.

Шаг 3. Опишем алгоритм.

Подход LSM (Least Squares Monte Carlo) использует метод наименьших квадратов для приближенного вычисления условной функции ожидания на момент времени $t_{K-1}, t_{K-2}, ..., t_1$.

Основной принцип заключается в том что мы работаем в обратном порядке так как последовательность денежных потоков $C(\omega, s; t, T)$ определяется рекурсивно.

Причина заключается в том что если оптимальный выход из сделки находится в моменте времени t_{k-1}, что в свою очередь значит что все потоки в будущем будут другими в соответствии с реализованным элементарным событием (путем) ω.

В частности, на момент времени t_{K-1} мы предполагаем, что неизвестная форма функции $F(\omega; t_{K-1})$ в уравнении (1) может быть представлена как линейная комбинация счетного набора $\mathcal{F}_{t_{K-1}}$ - измеримых базисных функций.

Это предположение может быть формально обосновано, например, когда условное ожидание является элементом пространства L^2 квадратично интегрируемых функций относительно некоторой меры (суть использования L^2 пространства заключается в том что сами функции и их квадраты интегрируемы и ограничены, что исключает бесконечную дисперсию в данных). Поскольку L^2 является гильбертовым пространством, оно имеет счетный ортонормированный базис, и условное ожидание может быть представлено как линейная функция элементов базиса. В качестве примера, предположим, что X - это значение актива, лежащего в основе опциона, и что X следует процессу Маркова. Один из возможных выборов базисных функций - это набор (взвешенных) многочленов Лагерра:

$$L_0(X) = exp(-X/2),$$

$$L_1(X) = exp(= X/2)(1 - X),$$

$$L_2(X) = exp(-X/2)(1 - 2X + X^2/2),$$

$$L_n(X) = exp(-X/2)\frac{e^X}{n!}\frac{d^n}{dX^n}(X^n e^{-X})$$

С этой спецификацией $F(\omega; t_{K-1})$ может быть представлено как

$$F(\omega; t_{K-1}) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j L_j(X),$$

где коэффициенты a_j - константы. Другие виды базисных функций включают эрмитовы, лежандревы, чебышевские, гегенбауэровы и якобианские многочлены.

Численные тесты показывают, что ряд Фурье или тригонометрический ряд и даже простые степени переменных состояния также дают точные результаты.

Для реализации метода LSM мы приближаем $F(\omega; t_{K-1})$ с использованием первых $M < \infty$ базисных функций и обозначаем это приближение $F_m(\omega; t_{K-1})$. После того как этот набор базисных функций был определен, $F_m(\omega; t_{K-1})$ оценивается путем проецирования или регрессии дисконтированных значений $C(\omega, s; t_{K-1}, T)$ на базисные функции для путей, где опцион в плюсе на момент времени t_{K-1}. Мы используем только пути в плюсе при оценке, так как решение об исполнении имеет смысл только тогда, когда опцион в плюсе. Фокусируясь на путях в плюсе, мы ограничиваем область, в которой необходимо оценивать условное ожидание, и для получения точного приближения функции условного ожидания требуется гораздо меньше базисных функций. Поскольку значения базисных функций независимы и одинаково распределены по путям, слабые предположения о существовании моментов позволяют нам использовать Теорему 3.5 Уайта (1984) для показа, что оцененное значение этой регрессии $\widehat{F}_M(\omega; t_{K-1},)$ сходится в среднем квадрате и по вероятности к $F_M(\omega; t_{K-1})$ по мере увеличения числа N (путей в плюсе) в симуляции к бесконечности. Кроме того, Теорема 1.2.1 Амемии (1985) утверждает, что $\widehat{F}_M(\omega; t_{K-1})$ является лучшим линейным несмещенным оценщиком $F_m(\omega; t_{K-1})$ на основе среднеквадратичной метрики.

После оценки функции условного ожидания на момент времени t_{K-1}, мы можем определить, является ли раннее исполнение на момент времени t_{K-1} оптимальным для пути в плюсе ω, сравнивая немедленное значение исполнения с $\widehat{F}_M(\omega; t_{K-1})$ и повторяя этот процесс для каждого пути в плюсе. После определения решения об исполнении можно приблизить денежные потоки опциона $C(\omega, s; t_{K-2}, T)$. Рекурсия продолжается, возвращаясь к моменту времени t_{K-2},

Результаты

Алгоритм LSM предоставляет простой и изящный способ приближения оптимальной стратегии раннего исполнения для американской опционной позиции. Несмотря на то, что окончательное тестирование алгоритма зависит от того, насколько хорошо он справляется с реалистичным количеством траекторий и базовых функций, также полезно рассмотреть, что можно сказать о теоретической сходимости алгоритма к истинному значению $V(X)$ американской опционной позиции. Первый результат сходимости касается смещения алгоритма LSM и применим даже в случае, когда американская опционная позиция может быть непрерывно исполнимой.

Предложение 1 Для любого конечного выбора M, K и вектора $\theta \in R^{M\times(K-1)}$, представляющего коэффициенты для M базовых функций на каждой из $K-1$ дат раннего исполнения, пусть $LSM(\omega; M, K)$ обозначает дисконтированный денежный поток, полученный при следовании правилу LSM о выполнении, когда немедленное значение выполнения положительное и больше или равно $\widehat{F}_M(\omega; t_k)$ как определено θ. Тогда следующее неравенство выполняется с вероятностью 1:

$$V(X) \geq \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} LSM(\omega_i; M, K)$$

Интуиция для этого результата легко понимается. Алгоритм LSM приводит к правилу остановки для американского опциона. Однако стоимость американского опциона зависит от правила остановки, которое максимизирует стоимость опциона; все остальные правила остановки, включая правило остановки, предполагаемое алгоритмом LSM, приводят к значениям, меньшим или равным тем, которые предполагает оптимальное правило остановки.

Этот результат особенно полезен, поскольку он предоставляет объективный критерий сходимости. Например, этот критерий помогает определить количество базовых функций, необходимых для получения точного приближения; просто увеличивайте M до тех пор, пока значение, предполагаемое алгоритмом LSM, не перестанет увеличиваться. Это полезное и важное свойство не разделяется алгоритмами, которые просто дисконтируют функции на основе оцененной стоимости продолжения.

По своей природе предоставление общего результата сходимости для алгоритма LSM сложно, поскольку нам нужно учитывать пределы при увеличении числа точек дискретизации K, числа базовых функций M и числа путей N, идущих к бесконечности. Кроме того, мы должны учитывать влияние обратного распространения оценивающего правила остановки во времени от t_{K-1} до t_1. В случае, когда американский опцион может быть выполнен только в $K = 2$ дискретных момента времени, сходимость алгоритма легче продемонстрировать. Как пример, рассмотрим следующее предложение.

Предложение 2 Предположим, что стоимость американского опциона зависит от одной переменной состояния X с носителем на $(0, \infty)$, которая следует процессу Маркова. Дополнительно предположим, что опцион может быть выполнен только в моменты времени t_0 и t_1, и что функция условного ожидания $F(\omega; t_1)$ абсолютно непрерывна и

$$\int_0^\infty e^{-X} F^2(\omega; t_1) dX < \infty \qquad \int_0^\infty e^{-X} F_X^2(\omega; t_1) dX < \infty$$

Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует $M < \infty$ такое, что

$$\lim_{N\to\infty} Pr\left[\left| V(X) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} LSM(\omega_i; M; K) \right| > \epsilon \right] = 0$$

В интуитивном смысле это означает, что, выбрав M достаточно большим и позволив $N \to \infty$, алгоритм LSM приводит к значению американского опциона в пределах ϵ от истинной стоимости. Таким образом, алгоритм LSM сходится с любой желаемой точностью, так как ϵ произвольно мал. Ключевым моментом этого результата является то, что сходимость $F_M(\omega; t_1)$ к $F(\omega; t_1)$ является равномерной на $(0, \infty)$, когда выполняются указанные условия интегрируемости. Это ограничивает максимальную ошибку при оценке условного ожидания, что, в свою очередь, ограничивает максимальную ошибку оценки цены. Важным следствием этого результата является то, что количество базовых функций, необходимых для достижения желаемого уровня точности, не обязательно должно стремиться к бесконечности при $N \to \infty$. Несмотря на то что это предложение ограничено одномерными настройками, мы предполагаем, что подобные результаты могут быть получены для многомерных проблем путем поиска условий, при которых достигается равномерная сходимость.

Пример работы алгоритма (in sample)

В день экспирации оптимальной стратегией будет исполнить опцион, если он находится в деньгах. В любые дни ранее, оптимальная стратегия заключается в сравнении сегодняшней стоимости акции с ожидаемыми стоимостями акции если мы не будем исполнять опцион и если сегодня лучший вариант исполнения, то мы исполним опцион. Таким образом, требуется определить, стоит ли исполнять опцион сразу (если он находится в деньгах) или лучше продолжить держать его (в надежде на увеличение стоимости актива и, соответственно, стоимости опциона). Для этого сравнивают текущее значение опциона с ожидаемой будущей стоимостью, которая будет получена при продолжении его действия.

Рассмотрим американский пут опцион на акции без выплат дивидендов. Опцион на продажу можно исполнить по цене страйка 1,1 в моменты времени 1, 2 и 3, где третье время - это окончательная дата истечения срока опциона. Безрисковая ставка составляет 6

Stock price paths

Path	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	1.00	1.09	1.08	1.34
2	1.00	1.16	1.26	1.54
3	1.00	1.22	1.07	1.03
4	1.00	.93	.97	.92
5	1.00	1.11	1.56	1.52
6	1.00	.76	.77	.90
7	1.00	.92	.84	1.01
8	1.00	.88	1.22	1.34

Цель алгоритма заключается в нахождении оптимального времени остановки, максимизирующего стоимость опциона на каждом этапе по каждому пути. Так как алгоритм рекурсивен во время обучения нам надо вычислить значения денежных потоков (столько денег сколько мы получим если выйдем из опциона в этот момент, то есть цена исполнения 1.1 выходим по цене 0.9 $\rightarrow$ получаем 0.2) в момент времени 3.

Cash-flow matrix at time 3

Path	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	—	—	.00
2	—	—	.00
3	—	—	.07
4	—	—	.18
5	—	—	.00
6	—	—	.20
7	—	—	.09
8	—	—	.00

Если путовой опцион находится в деньгах в момент 2, держатель опциона должен решить, следует ли немедленно исполнять опцион или продолжать срок действия опциона до окончательной даты истечения срока в момент 3. Из матрицы цен акций видно, что только пять путей находятся в деньгах в момент 2. Обозначим за X денежные потоки в момент 2 , а за Y дисконтированные денежные потоки в момент 3 (из прошлой таблицы). Мы используем только пути, находящиеся в деньгах. Векторы X и Y представлены в матрице ниже. Дисконтирование происходит как раз по 6% безрисковой ставке.

Stock price paths

Path	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
1	1.00	1.09	1.08	1.34
2	1.00	1.16	1.26	1.54
3	1.00	1.22	1.07	1.03
4	1.00	.93	.97	.92
5	1.00	1.11	1.56	1.52
6	1.00	.76	.77	.90
7	1.00	.92	.84	1.01
8	1.00	.88	1.22	1.34

Regression at time 2

Path	Y	X
1	$.00 \times .94176$	1.08
2	—	—
3	$.07 \times .94176$	1.07
4	$.18 \times .94176$	.97
5	—	—
6	$.20 \times .94176$	.77
7	$.09 \times .94176$	.84
8	—	—

Чтобы знать какое value мы получим с удержания до следующих моментов времени, мы будем регрессировать с денежного потока 2 на денежный поток 3 используя $X, X^2, const$

$$y_1 = a + b * x_1 + c * x_1^2 + \epsilon_1$$

$$\vdots$$

$$y_5 = a + b * x_5 + c * x_5^2 + \epsilon_5$$

$$\sum_{i=1}^{5} \epsilon_i^2 \to min, \text{ где } \epsilon \text{ ошибка модели}$$

Результирующая функция условного ожидания задается уравнением.

$$E[Y|X] = -1,07 + 2,983X - 1,813X^2.$$

*Проверим правильность вычисления на примере 1 потока:*** $-1.07+2.983 \cdot 1.08-1.813 \cdot (1.08)^2 = 0,0369$

Заключение: В момент времени 2 Вы не знаете ожидаемую выплату в момент 3 (всё дисконтируем к моменту 2), поэтому по Монте Карло строите линейную регрессию ожидаемой выплаты по цене актива в момент 2, т.е. $E(Y|X)$ - ожидаемая выплата в момент 3, X - цена актива в момент 2. Только, так как нам это важно только в случае, когда может быть потенциальная остановка, то регрессию строим только для $X <$ цены страйка (1.1).

Получив денежные потоки от условного продолжения и остановки в момент 2 сравниваем их друг с другом и выбираем те которые больше.

Optimal early exercise decision at time 2		
Path	Exercise	Continuation
1	.02	.0369
2	—	—
3	.03	.0461
4	.13	.1176
5	—	—
6	.33	.1520
7	.26	.1565
8	—	—

Дальше добавляем значения в матрицу потоков дополненной в момент 2. Если цена ожидаемая цена была больше то мы должны продолжать соответсвенно в этот момент мы ставим в матрицу потоков в момент два значение .00 так как мы хотим продолжить и меняем значение на денежный поток в момент 3. А те которые были .00 оставляем .00.

Например: У нас ожидаемая цена от продолжения на пути 1 больше чем денежный поток в момент 2 (см. таблицу выше) поэтому мы хотим продолжить и записываем в матрицу потоков значение .00 в $t = 2$ и смотрим денежный поток в момент три, а он в свою очередь тоже равен .00 если посмотреть на исходную матрицу путей. Так же может быть ситуация когда он не будет нулевым, например 3 путь.

Cash-flow matrix at time 2			
Path	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	—	.00	.00
2	—	.00	.00
3	—	.00	.07
4	—	.13	.00
5	—	.00	.00
6	—	.33	.00
7	—	.26	.00
8	—	.00	.00

Аналогично проделываем для временного шага 1.

Regression at time 1

Path	Y	X
1	$.00 \times .94176$	1.09
2	—	—
3	—	—
4	$.13 \times .94176$	.93
5	—	—
6	$.33 \times .94176$	.76
7	$.26 \times .94176$	.92
8	$.00 \times .94176$	.88

Результирующая функция условного ожидания задается уравнением.

$$E[Y|X] = 2,038 - 3,335X + 1,356X^2.$$

Optimal early exercise decision at time 1

Path	Exercise	Continuation
1	.01	.0139
2	—	—
3	—	—
4	.17	.1092
5	—	—
6	.34	.2866
7	.18	.1175
8	.22	.1533

Дальше добавляем нужные значения в матрица а другие зануляем.

Option cash flow matrix

Path	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	.00	.00	.00
2	.00	.00	.00
3	.00	.00	.07
4	.17	.00	.00
5	.00	.00	.00
6	.34	.00	.00
7	.18	.00	.00
8	.22	.00	.00

Из матрицы поток не нулевые значения заменяем на 1 и получаем матрицу правила остановки.

Stopping rule			
Path	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	1
4	1	0	0
5	0	0	0
6	1	0	0
7	1	0	0
8	1	0	0

Теперь чтобы оценить цену опциона должны найти дисконтированное среднее по каждому дню и сложить их

Интуитивная формула:

$$OP = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N} p_i \cdot (1-r)^t$$

где N - количество путей, t - номер дня начиная с 1, p_i - номер пути, r - безрисковая ставка.

В нашем примере получим

$$\frac{((.17 + .34 + .18 + .22) \cdot 0.94 + .00 \cdot 0.94^2 + .07 \cdot 0.94^3)}{8} = \$0.114$$

Что в свою очередь примерно в два раза больше значения $0.0564 для европейского пут опциона.

$$\frac{(.07 + .18 + .2 + .09) \cdot 0.94^3}{8} = \$0.0564$$

Как показывает этот пример, подход LSM легко реализуется, так как для этого требуется только простая регрессия.

Пример работы алгоритма (out of sample)

			LSM in sample		LSM out of sample	
S	σ	T	Value	(s.e)	Value	(s.e.)
36	.20	1	4.472	(.010)	4.476	(.010)
			4.463	(.010)	4.474	(.010)
			4.467	(.010)	4.480	(.010)
			4.480	(.010)	4.476	(.010)
			4.468	(.010)	4.469	(.010)
36	.40	1	7.091	(.020)	7.102	(.020)
			7.095	(.020)	7.094	(.020)
			7.087	(.020)	7.087	(.020)
			7.097	(.020)	7.095	(.020)
			7.097	(.020)	7.101	(.020)
36	.20	2	4.821	(.012)	4.818	(.012)
			4.819	(.012)	4.833	(.012)
			4.820	(.012)	4.829	(.012)
			4.827	(.012)	4.825	(.012)
			4.827	(.012)	4.829	(.012)
36	.40	2	8.488	(.024)	8.487	(.024)
			8.485	(.024)	8.478	(.024)
			8.483	(.024)	8.483	(.024)
			8.495	(.023)	8.498	(.024)
			8.493	(.024)	8.491	(.024)
Mean						
44	.20	1	1.118	(.007)	1.102	(.007)
			1.108	(.007)	1.114	(.007)
			1.115	(.007)	1.099	(.007)
			1.108	(.007)	1.097	(.007)
			1.114	(.007)	1.107	(.007)
44	.40	1	3.957	(.017)	3.927	(.017)
			3.941	(.017)	3.976	(.017)
			3.953	(.017)	3.924	(.017)
			3.939	(.017)	3.924	(.017)
			3.953	(.017)	3.945	(.017)
44	.20	2	1.675	(.009)	1.691	(.009)
			1.673	(.009)	1.682	(.009)
			1.687	(.009)	1.702	(.009)
			1.671	(.009)	1.674	(.009)
			1.696	(.009)	1.688	(.009)
44	.40	2	5.622	(.021)	5.644	(.021)
			5.637	(.021)	5.637	(.021)
			5.628	(.021)	5.652	(.021)
			5.615	(.021)	5.632	(.021)
			5.649	(.021)	5.628	(.021)

Сравнение внутренних и внешних оценок LSM стоимости американского стиля опциона на продажу акции, где опцион может быть исполнен 50 раз в год. В этом сравнении страйк-цена опциона составляет 40, а краткосрочная процентная ставка равна 0,06. Базовая цена акции S, волатильность доходности σ и количество лет до окончания срока действия опциона T указаны в таблице. Оценки LSM для каждого из указанных опционов повторяются пять раз с разными начальными значениями для генератора случайных чисел; каждая из пяти строк для каждого опциона основана на разных начальных значениях. Внутренние и внешние сравнения основаны на 100 000 (50 000 плюс 50 000 антитетических) путях процесса цен на акции. Стандартные ошибки оценок симуляции приведены в скобках.

Как будет выглядит работа алгоритма

- Обучив на in-sample мы получаем модель регрессии
- На S_0 получаем значение актива
- Строим N траекторий на следующий день
- Регрессируем их еще дальше и принимаем решение останавливаться нам завтра или нет
- Наступает следующий день убираем те траектории на которых остановились
- Повторяем с шага 4 столько раз сколько было регрессий

Полученные результаты

В ходе работы мной был реализован алгоритм описанный в статье LongstaffSchwartzAmericanOptionsL
Так же помимо обычного метода генерации Монте-Карло путей, были внедрены Antithetic Variates с целью снижения дисперсии.

Результаты полученные мной in sample используя пути из примера

```
Evolute the option price:  0.1144338458324451
European option price:  0.05638010463600487
```

Полностью совпадаютс с результатами из примера

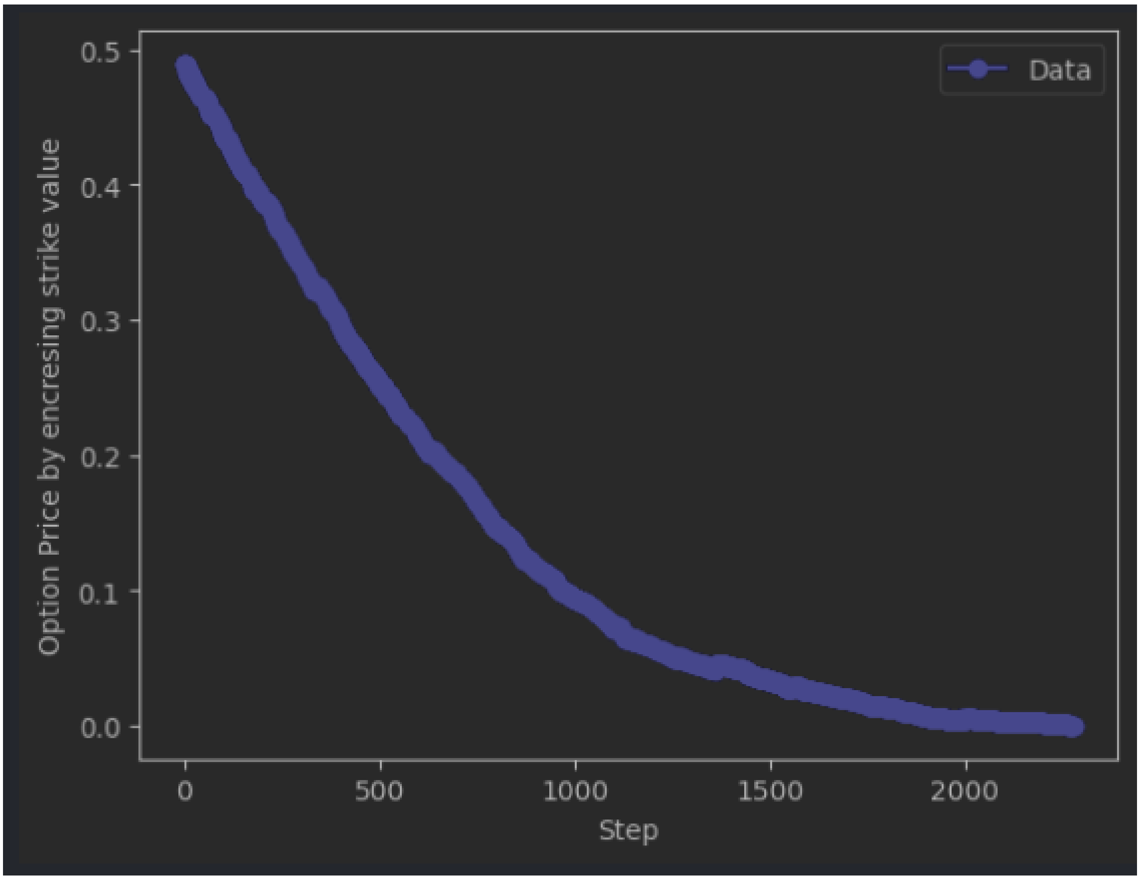
Помимо этого была реализована часть алгоритма out of sample результаты цены опциона с теми же путями приведены ниже

```
__________In Sample Implementation__________
Evolute the option price:  0.1144338458324451
European option price:  0.05638010463600487
__________Out Of Sample Implementation__________
Evolute the option price:  0.1144338458324451
European option price:  0.05638010463600487
```

Так же был проведен эксперимент с сгенерированными траекториями

```
Количество траекторий = 1000
Длина траектории = 4
Страйк цена = 1.1
Реальная начальная цена = 1
Безпроцентная процентная ставка = 5.8239
Волатильность = 1.2129
Тип опциона = “put”

In sample цены опционов
________________________________________

Цена американского опциона: 0.08206828218233461
Цена американского опциона: 0.06151452978267553

Out of sample цены опционов
________________________________________

Цена американского опциона: 0.08471599369649761
Цена американского опциона: 0.0609986885736957
```

Результаты совпадают. Так же проверил то что функция выплат по опциону будет убывающей и выпуклой к низу в зависимости от изменения цены страйка



Литература:

- https://people.math.ethz.ch/~hjfurrer/teaching/LongstaffSchwartzAmericanOptionsLeastSc
pdf

- https://arxiv.org/abs/1804.05394