Московский Физико-Технический
Институт

Отчет о проделанной работе

Решение задачи динамического хеджирования короткой позиции по американским опционам

Автор:
Новиков Владимир , М05-311б

14 мая 2024 г.

Вступление

В мире финансовых инструментов и деривативов одним из наиболее сложных и актуальных направлений является управление рисками, связанными с опционными контрактами. Опционы, как производные финансовые инструменты, предоставляют их держателям право, но не обязательство, купить или продать базовый актив по заранее установленной цене в определенный момент времени. В этом контексте американские опционы представляют особый интерес, поскольку они могут быть исполнены в любой момент до истечения срока их действия. Это свойство добавляет дополнительные сложности в процесс хеджирования и оценки стоимости опционов.

Динамическое хеджирование представляет собой стратегию управления рисками, при которой портфель пересчитывается и ребалансируется на регулярной основе для минимизации риска, связанного с изменениями цен базового актива. В случае короткой позиции по американским опционам, задача хеджирования становится еще более сложной из-за возможности досрочного исполнения опциона. Это требует применения более сложных моделей и методов для эффективного управления рисками.

Описание выполненных действий в процессе работы

- Подсчет Implied Volatility криптовалютных опционов на основе модели Блека-Шоулза
- Оценка американского пут опциона на основе модели LongStaffSchwartza (прошлый семестр)
- Реалзиация динамического дельта-хеджирование данного опциона до даты экспирации
- Сравнение результатов хеджирования по итогу

Подсчет Implied Volatility криптовалютных опционов на основе модели Блека-Шоулза

Implied Volatility (IV) представляет собой волатильность, подразумеваемую текущей рыночной ценой опциона, и играет ключевую роль в оценке и торговле опционами. Подсчет implied volatility для криптовалютных опционов на основе модели Блека-Шоулза включает несколько шагов:

- Данные: данные были собраны за меня другими студентами
- Модель Блека-Шоулза: Используя модель Блека-Шоулза, вычислить теоретическую цену опциона на основе заданной волатильности.
- Обратное вычисление волатильности: Используя метод двоичного поиска, найти такое значение волатильности, при котором теоретическая цена, рассчитанная по модели Блека-Шоулза, совпадет с рыночной ценой опциона. Это значение и будет implied volatility.

Оценка волатильности производится через метод бинарного поиска сдвигая границы цен каждую итерацию в сторону реальной цены опциона

Цена опциона *call:*

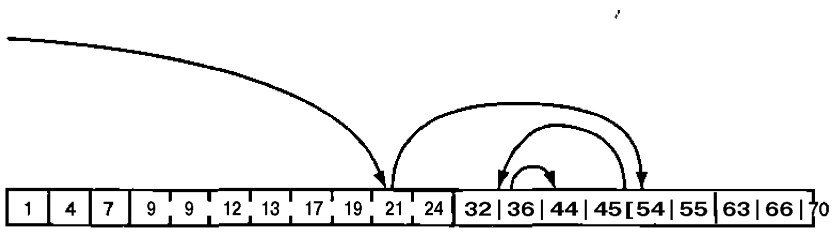
$$C = SN(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2), \text{ где}$$

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{X}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Цена опциона *put:*

$$P = Xe^{-rT}N(-d_2) - SN(-d_1).$$



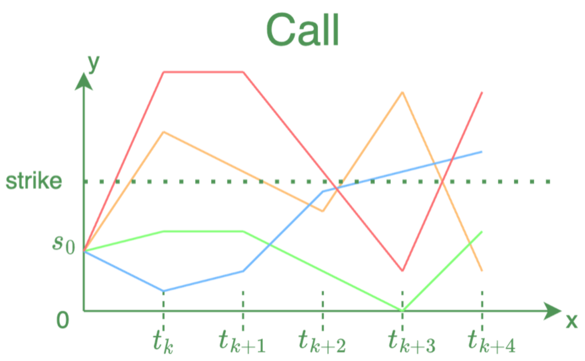
Оценка американского пут опциона на основе модели Longstaff-Schwartz (прошлый семестр)

Модель Longstaff-Schwartz предназначена для оценки американских опционов, учитывая возможность досрочного исполнения. Она основывается на методе Монте-Карло и аппроксимации условного математического ожидания. Основные этапы оценки американского пут опциона включают:

- Генерация сценариев: Используя метод Монте-Карло, сгенерировать множество возможных траекторий цен базового актива до даты истечения опциона.

- Регрессия и аппроксимация: На каждом шаге времени, используя регрессионный анализ, оценить условное математическое ожидание будущих выплат, чтобы определить оптимальную стратегию исполнения опциона.

- Обратная индукция: Применить метод обратной индукции для оценки стоимости опциона, начиная с даты истечения и двигаясь назад ко времени t=0, принимая во внимание возможность досрочного исполнения.



Stock price paths

Path	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$
1	1.00	1.09	1.08	1.34
2	1.00	1.16	1.26	1.54
3	1.00	1.22	1.07	1.03
4	1.00	.93	.97	.92
5	1.00	1.11	1.56	1.52
6	1.00	.76	.77	.90
7	1.00	.92	.84	1.01
8	1.00	.88	1.22	1.34

Regression at time 2

Path	Y	X
1	.00 × .94176	1.08
2	—	—
3	.07 × .94176	1.07
4	.18 × .94176	.97
5	—	—
6	.20 × .94176	.77
7	.09 × .94176	.84
8	—	—

Optimal early exercise decision at time 2

Path	Exercise	Continuation
1	.02	.0369
2	—	—
3	.03	.0461
4	.13	.1176
5	—	—
6	.33	.1520
7	.26	.1565
8	—	—

Option cash flow matrix

Path	$t=1$	$t=2$	$t=3$
1	.00	.00	.00
2	.00	.00	.00
3	.00	.00	.07
4	.17	.00	.00
5	.00	.00	.00
6	.34	.00	.00
7	.18	.00	.00
8	.22	.00	.00

Реализация динамического дельта-хеджирования данного опциона до даты экспирации

Динамическое хеджирование американского пут опциона включает в себя регулярное пересчитывание и ребалансировку позиций, чтобы минимизировать риск изменений стоимости базового актива. Основные шаги включают:

- Рассчет дельты: На регулярной основе вычислять дельту опциона, которая показывает, как изменяется стоимость опциона при изменении стоимости базового актива.

- Ребалансировка портфеля: В зависимости от изменения дельты, корректировать позиции в базовом активе, чтобы поддерживать нейтральность портфеля по отношению к изменениям цены базового актива.

$$MK - \text{Монте-Карло симуляции, матрица размерности}(N, M)$$

N - кол-во симуляций, M - дней до экспирации

$$LSS - \text{Функция алгоритма LongStaffSchwartza}$$

$$S - \text{Цена базового актива}$$

$$\delta_i = \frac{LSS_i(MK \cdot \frac{S_i+\epsilon}{S_i}) - LSS_i(MK \cdot \frac{S_i-\epsilon}{S_i})}{2\epsilon}$$

$$H - \text{Хедж}$$
$$\delta - \text{Дельта подсчитанная на основе американского пута}$$

$$S - \text{Цена базового актива}$$
$$r - \text{Безрисковая процентная ставка}$$
$$H_0 - American\_put\_price$$
$$H_i = \delta_{i-1} \cdot S_i + (H_{i-1} - \delta_{i-1} \cdot S_{i-1}) \cdot e^{r/365}$$

Результаты

- Исправлен алгоритма прайсинга американских опционов
- Внедрен расчет подразумеваемой волатильности по модели Блека-Шоулза позволило лучше понять текущие рыночные условия и ожидания участников рынка относительно будущих цен на опционы
- Внедрено динамическое дельта-хеджирования, позволившее минимизировать риск, связанный с возможными колебаниями цен на базовый актив

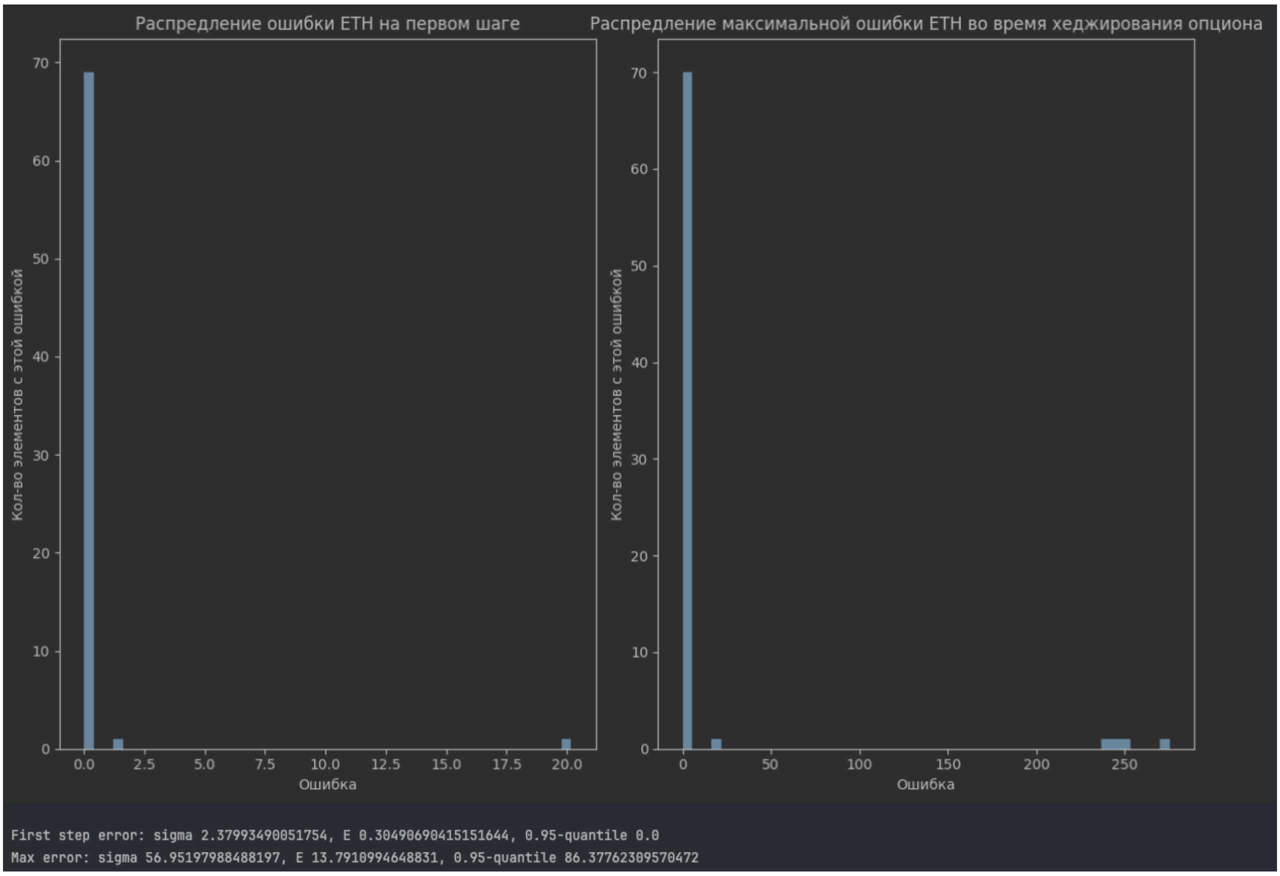


Рис. 1: Значения ошибок хеджирования $max((\overline{K}_0 - S_i) - H_i, 0)$