



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ _____ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА _____ «Теоретическая информатика и компьютерные технологии»

Лабораторная работа № 3
по курсу «Численные методы линейной алгебры»
«Реализация метода Гаусса с перестановками»

Студент группы ИУ9-71Б Баев Д.А

Преподаватель Посевин Д. П.

Москва 2023

1 Задание

1. Реализовать метод Гаусса с перестановками по столбцам, по строкам, по столбцам и строкам одновременно для действительных квадратных матриц произвольной размерности n .

2. Для проверки работоспособности алгоритмов необходимо использовать алгоритм тестирования задачи написанный в лабораторной работе №2 «Реализация метода Гаусса».

3. Результат работы должен быть представлен в виде графиков зависимости абсолютной погрешности вычислений классическим методом Гаусса, методом Гаусса с перестановками по строкам, методом Гаусса с перестановками по столбцам, методом Гаусса с перестановками по столбцам и строкам, библиотечным методом от степени диагонального преобладания. Все графики должны быть построены на одной координатной плоскости. Напомним, что погрешность вычисления вектора x системы линейных алгебраических уравнений $A \cdot x = b$ тем или иным способом рассчитывается по Евклидовой норме разности точного решения и решения полученного соответствующим методом. Степень диагонального преобладания вычисляется, как максимальная разность по i между модулем диагонального элемента и суммы модулей вне диагональных элементов. Очевидно, что если значение степени диагонального преобладания положительна, то условие диагонального преобладания выполняется, в противном случае — не выполняется. Поэтому график должен быть построен как для отрицательных значений степени диагонального преобладания, так и для положительных.

2 Исходный код

Исходный код программы представлен в листингах 1–4.

Листинг 1 — Метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу

```
1 def gauss_column(A, b):
2     n = len(A)
3     A = deepcopy(A)
4     b = deepcopy(b)
5
6     for i in range(n - 1):
7         max_index = np.argmax(np.abs(A[i:, i])) + i
8         A[[i, max_index]] = A[[max_index, i]]
9         b[i], b[max_index] = b[max_index], b[i]
10        for j in range(i + 1, n):
11            f = A[j][i] / A[i][i]
12            A[j] -= f * A[i]
13            b[j] -= f * b[i]
14
15    x = np.zeros(shape=(n, ))
16
17    for i in range(n - 1, -1, -1):
18        x[i] = b[i] / A[i][i]
19        for j in range(i - 1, -1, -1):
20            b[j] -= A[j][i] * x[i]
21
22    return np.array(x)
```

Листинг 2 — Метод Гаусса с выбором главного элемента по строке

```
1 def gauss_row(A, b):
2     n = len(A)
3     A = deepcopy(A)
4     b = deepcopy(b)
5     x_i = [i for i in range(n)]
6
7     for i in range(n - 1):
8         max_index = np.argmax(np.abs(A[i, i:])) + i
9         x_i[i], x_i[max_index] = x_i[max_index], x_i[i]
10        for j in range(n):
11            A[j][i], A[j][max_index] = A[j][max_index], A[j][i]
12        for j in range(i + 1, n):
13            f = A[j][i] / A[i][i]
14            A[j] -= f * A[i]
15            b[j] -= f * b[i]
16
17    x = np.zeros(shape=(n, ))
18
19    for i in range(n - 1, -1, -1):
20        x[i] = b[i] / A[i][i]
21        for j in range(i - 1, -1, -1):
22            b[j] -= A[j][i] * x[i]
23
24    x_copy = deepcopy(x)
25
26    for i, order in enumerate(x_i):
27        x[order] = x_copy[i]
28
29    return np.array(x)
```

Листинг 3 — Метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу и по строке

```
1 def gauss_row_and_column(A, b):
2     n = len(A)
3     A = deepcopy(A)
4     b = deepcopy(b)
5     x_i = [i for i in range(n)]
6
7     for i in range(n - 1):
8         max_index_col = np.argmax(np.abs(A[i:, i])) + i
9         max_index_row = np.argmax(np.abs(A[i, i:])) + i
10        if A[max_index_col][i] > A[i][max_index_row]:
11            A[[i, max_index_col]] = A[[max_index_col, i]]
12            b[i], b[max_index_col] = b[max_index_col], b[i]
13        else:
14            x_i[i], x_i[max_index_row] = x_i[max_index_row], x_i[i]
15            for j in range(n):
16                A[j][i], A[j][max_index_row] = A[j][max_index_row], A[j]
17                ][i]
18
19        for j in range(i + 1, n):
20            f = A[j][i] / A[i][i]
21            A[j] -= f * A[i]
22            b[j] -= f * b[i]
23
24    x = np.zeros(shape=(n, ))
25
26    for i in range(n - 1, -1, -1):
27        x[i] = b[i] / A[i][i]
28        for j in range(i - 1, -1, -1):
29            b[j] -= A[j][i] * x[i]
30
31    x_copy = deepcopy(x)
32
33    for i, order in enumerate(x_i):
34        x[order] = x_copy[i]
35
36    return np.array(x)
```

Листинг 4 — Построение графика

```
1 dims = [10, 100, 300]
2 coofs = [i * 0.1 for i in range(1, 22, 3)]
3
4 for dim in dims:
5     x = []
6     y_classic = []
7     y_rows = []
8     y_columns = []
9     y_both = []
10    y_np = []
11    for coof in coofs:
12        A = generate_matrix(-10, 10, dim, diag=coof)
13        x_vec = np.random.uniform(-10, 10, dim)
14        x.append(get_diag_dom(A))
15        y_classic.append(test_method(gauss, A=A, x=x_vec, debug=False))
16        y_rows.append(test_method(gauss_row, A=A, x=x_vec, debug=False))
17        y_columns.append(test_method(gauss_column, A=A, x=x_vec, debug=
18        False))
19        y_both.append(test_method(gauss_row_and_column, A=A, x=x_vec,
20        debug=False))
21        y_np.append(test_method(np.linalg.solve, A=A, x=x_vec, debug=
22        False))
23    plt.figure(figsize=(8, 4))
24    plt.title(f'Dim: {dim}')
25    plt.xlabel("diag_dom")
26    plt.ylabel("Absolute error")
27    plt.plot(x, y_classic, label='Classic')
28    plt.plot(x, y_rows, label='Rows', color='red')
29    plt.plot(x, y_columns, label='Columns', color='yellow')
30    plt.plot(x, y_both, label='Both', color='green')
31    plt.plot(x, y_np, label='Lib', color='black')
32    plt.legend()
33    plt.show()
```

3 Результаты

Результат построения графика на матрице размерности 10x10 представлен на рисунке 1.

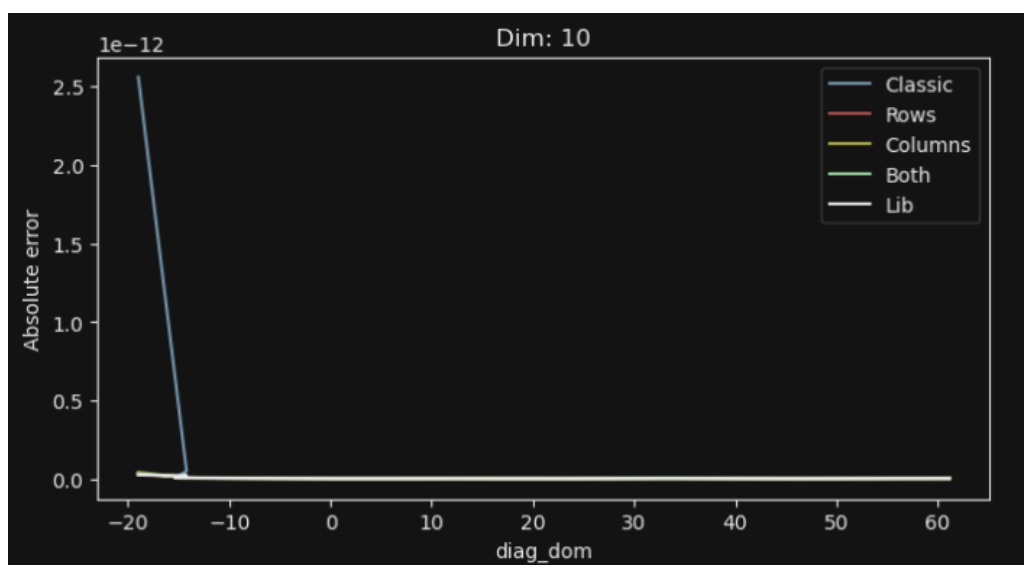


Рис. 1 — Результат построения графика на матрице размерности 10x10

Результат построения графика на матрице размерности 100x100 представлен на рисунке 2.

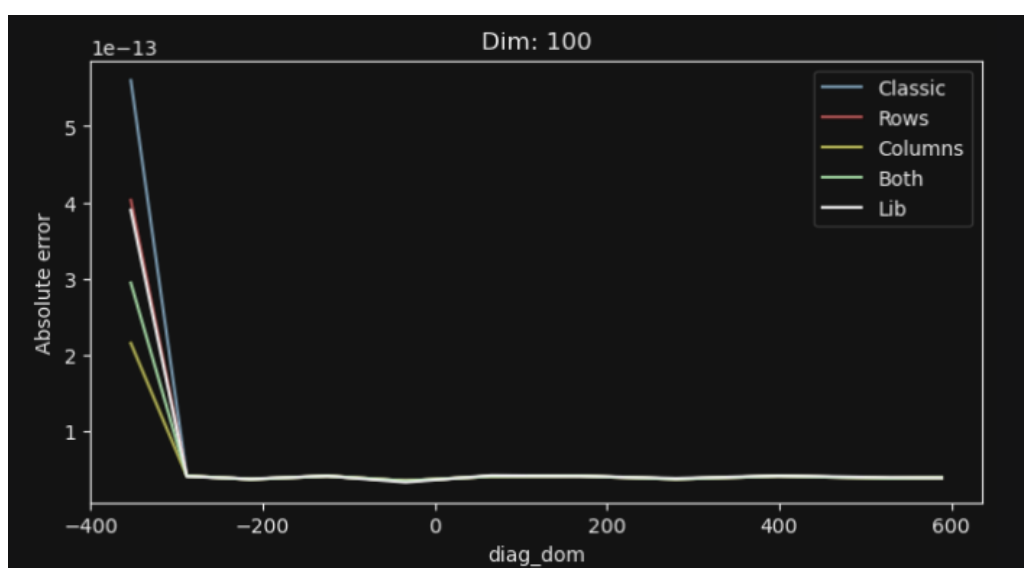


Рис. 2 — Результат построения графика на матрице размерности 100x100

Результат построения графика на матрице размерности 300x300 представлен на рисунке 3.

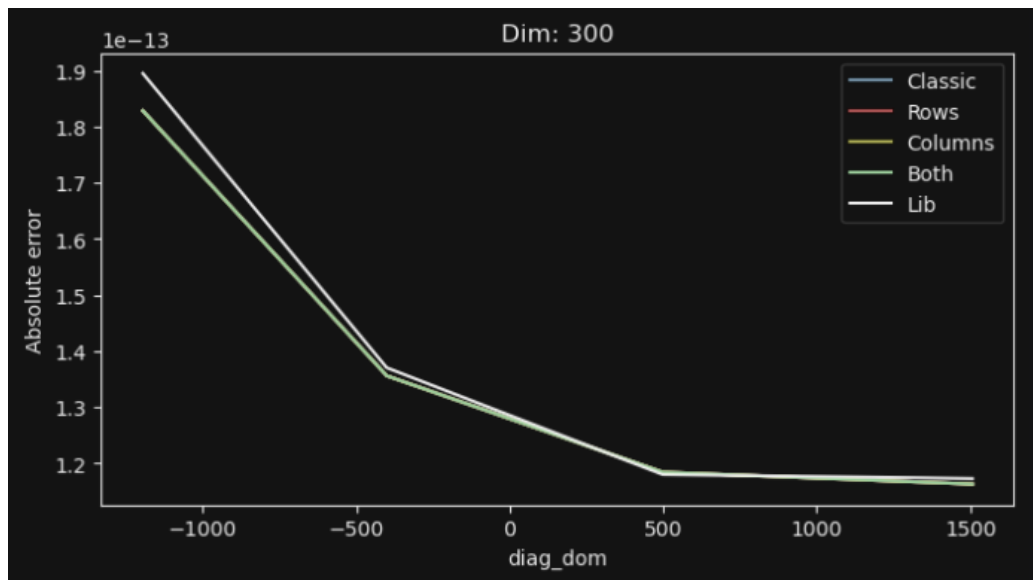


Рис. 3 — Результат построения графика на матрице размерности 300x300

4 Выводы

В результате выполнения лабораторной работы были реализованы модификации метода Гаусса: с перестановками по столбцам, строкам или по столбцам и строкам одновременно.

Также была исследована зависимость абсолютной погрешности в результате работы классического метода Гаусса, его модификаций и библиотечного метода из NumPy от степени диагонального преобладания матрицы. Было обнаружено, что с появлением и ростом диагонального преобладания эти методы, особенно классический метод Гаусса, начинают выдавать все более точный ответ.