Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Информатики и систем управления

КАФЕДРА Теоретической информатики и компьютерных технологий

Отчет по лабораторной работе № 2
«Сравнительный анализ методов численного интегрирования»

по курсу «Численные методы»

Выполнил:

студент группы ИУ9-61Б

Баев Д. А.

Проверила:

Домрачева А. Б

Москва, 2023

1. **Цель**

Сравнить следующие методы численного интегрирования:

1. Метод центральных прямоугольников
2. Метод трапеций
3. Метод Симпсона

(Нужно посчитать количество шагов при заданном ε)

2. **Постановка задачи**

Дано: Интеграл

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Найти: Значение интеграла

$$I^* \approx I$$

При заданной точности $\varepsilon = 0.001$.

Индивидуальный вариант: $f(x) = x * \sqrt{x^2 + 16}$, $a = 0$, $b = 3$

3. **Основные теоретические сведения**

3.1 Метод центральных прямоугольников

Этот метод заключается в приближенном вычислении площади под кривой, которая описывает график подынтегральной функции. Для этого площадь под кривой разбивается на прямоугольники фиксированной ширины, а высота каждого прямоугольника определяется значением функции в соответствующей точке разбиения.

Допустим, необходимо вычислить интеграл функции f(x) на отрезке [a, b]. Для этого данный отрезок разбивается на n равных частей с помощью отрезков длиной $h = \frac{b-a}{n}$. Это позволяет получить набор точек, которые разбивают данный отрезок.

$$x_{i-0.5} = a + (i - 0.5)h \quad i = \overline{1, n}$$

Тогда приближенное значение интеграла на всем отрезке будет равно:

$$I^* = h\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-0.5}\right) = h\sum_{i=1}^{n} f(a + (i - 0.5)h)$$

3.2 Метод трапеций

Этот метод заключается в приближенном вычислении площади под кривой, описывающей график подынтегральной функции. Для этого используется метод трапеций, который заключается в разбиении площади под кривой на трапеции с помощью отрезков фиксированной ширины, а высота каждой трапеции определяется значением функции в соответствующей точке разбиения.

Допустим, необходимо вычислить интеграл функции f(x) на отрезке [a, b]. Для этого данный отрезок разбивается на n равных частей с помощью отрезков длиной $h = \frac{b-a}{n}$. Это позволяет получить набор точек, которые разбивают данный отрезок.

$$x_i = a + ih \quad i = \overline{1, n}$$

Тогда приближенное значение интеграла на всем отрезке будет равно:

$$I^* = h\left(\frac{f(a)+f(x_1)}{2} + \frac{f\left(x_1\right)+f(x_2)}{2} + \dots + \frac{f\left(x_{n-1}\right)+f(b)}{2}\right) =$$

$$h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f\left(x_i\right)\right)$$

3.3 Метод Симпсона

Метод заключается в приближении функции на отрезке $[a, b]$ интерполяционным многочленом 2 степени функции $P_2(x)$

$$P_2(x) = f_{i-0.5} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h}\left(x_i - x_{i-0.5}\right) + \frac{f_i - 2f_{i-0.5} + f_{i-1}}{\frac{h^2}{2}}\left(x_i - x_{i-0.5}\right)^2$$

Тогда приближенное значение интеграла на всем отрезке будет равно:

$$I^* = \frac{h}{6}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-0.5}\right) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

3.4 Уточнение значения интеграла по Ричардсону

$I \approx I_h^* + O\left(h^k\right)$, где k – порядок точности метода, I_h^* – приближенное значение интеграла, вычисленного с помощью метода с шагом разбиения h

Для метода средних прямоугольников и метода трапеций $k = 2$.

Для метода Симпсона $k = 4$.

$O(h^k) \approx ch^k$, где c – некоторая константа, h – шаг разбиения.

Считая, что вычисления проводятся без вычислительной погрешности, можно записать строгое равенство $I = I_h^* + ch^k$ для шага разбиения h и $I = I_{\frac{h}{2}}^* + c\left(\frac{h}{2}\right)^k$ для шага разбиения $\frac{h}{2}$.

Из равенств получается уточненное значение интеграла:

$$I = I_{\frac{h}{2}}^* + \frac{I_{\frac{h}{2}}^* - I_h^*}{2^k - 1}$$

Где значение R – уточнение по Ричардсону:

$$R = \frac{I_{\frac{h}{2}}^* - I_h^*}{2^k - 1}$$

Эта величина используется для корректировки методологических ошибок численных методов интегрирования.

С помощью правила Рунге правило остановки счета формулируется следующим образом:

$$|R| \leq \varepsilon$$

4. Реализация

Листинг 1. Реализация методов численного интегрирования

```
import math
import pandas as pd


def func(x):
    return x * math.sqrt(x) ** 2 + 16


def rectangles_step(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    return h * sum(f(a + i * h - h / 2) for i in range(1, n + 1))


def trapeze_step(f, a, b, n):
```

```
    h = (b - a) / n
    return h * (((f(a) + f(b)) / 2) + sum(f(a + i * h) for i in range(1, n)))


def simpson_step(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
     return h / 6 * (f(a) + f(b) + 4 * sum(f(a + i * h - h / 2) for i in
range(1, n + 1)) +
                       2 * sum(f(a + i * h) for i in range(1, n)))


def check_method(eps, method, a, b, k, f):
    r = eps + 1
    n = 1
    i = 0
    integral = 0
    while abs(r) > eps:
        n *= 2
        integral_past = integral
        integral = method(f, a, b, n)
        r = (integral - integral_past) / (2 ** k - 1)
        i += 1
    return integral, i, integral + r, r


if __name__ == "__main__":
    a = 0
    b = 3
    eps = 0.001

         result_rec,   i_rec,   result_r_rec,   r_rec   =   check_method(eps,
rectangles_step, a, b, 2, func)
          result_trapeze,   i_trapeze,   result_r_trapeze,   r_trapeze   =
check_method(eps, trapeze_step, a, b, 2, func)
        result_simp,   i_simp,   result_r_simp,   r_simp   =   check_method(eps,
simpson_step, a, b, 4, func)

    pd.options.display.float_format = '{:,.13f}'.format
    answer = pd.DataFrame({
        "n": [i_rec, i_trapeze, i_simp],
        "I": [result_rec, result_trapeze, result_simp],
        "I + R": [result_r_rec, result_r_trapeze, result_r_simp],
        "R": [r_rec, r_trapeze, r_simp]
    })
    pd.set_option('display.max_columns', None)
     answer.index  =  ["Метод  ср.  прямоугольников",  "Метод  трапеций",  "Метод
Симпсона"]
```

```
    print(eps)
    print(answer)
```

5. Результаты

Таблица 1 – Результаты выполнения программы (см. листинг 1)

$\varepsilon = 0.001$

Метод	Значение интеграла	Значение интеграла с уточнением по Ричардсону	Количество итераций
Метод центральных прямоугольников	56.9994506835938	57.0000000000000	6
Метод трапеций	57.0002746582031	57.0000000000000	7
Метод Симпсона	57.0000000000000	57.0000000000000	2

6. Вывод

В процессе выполнения лабораторной работы были исследованы и реализованы три метода численного интегрирования: метод центральных прямоугольников, метод трапеций и метод Симпсона.

В результате исследования было установлено, что наиболее точным методом является метод Симпсона, за ним следует метод трапеций, а метод центральных прямоугольников оказался наименее точным. В отношении скорости выполнения, метод Симпсона требует наименьшего числа итераций по сравнению с другими методами, методы трапеций и центральных прямоугольников имеют примерно одинаковое число итераций, но метод трапеций требует чуть большего числа итераций, чем метод центральных прямоугольников.

Из результатов исследования следует, что наиболее оптимальным методом является метод Симпсона, который обеспечивает высокую точность вычислений и требует наименьшего количества шагов.