1 Топологічні простори

В курсі математичного аналізу уже розглядалися поняття околу точки, відкритої і замкненої множин, точки дотику, граничної точки, границі послідовності в просторі $\mathbb{R}$ тощо. Всі ці поняття визначалися за допомогою метрики простору $\mathbb{R}$ і відбивали певні властивості, притаманні множинам, за допомогою яких ми могли описувати основну концепцію цієї теорії — близькість між точками. Адже саме поняття близькості між точками (в розумінні малої відстані) є базовим для таких головних понять математичного аналізу як збіжність послідовностей і неперервність функцій.

Відносним недоліком цього підходу є очевидна залежність від метрики, уведеної в просторі. Тому постало питання, чи не можна побудувати більш абстрактну конструкцію, за допомогою якої можна було б описати ідеї, згадані вище. Серед дослідників цієї проблеми слід відзначити французьких математиків М. Фреше (1906), М. Рісса (1907–1908), німецького математика Ф. Хаусдорфа (1914), польського математика К. Куратовського (1922) і радянського математика П. Александрова (1924). В результаті досліджень цих та багатьох інших математиків виникла нова математична дисципліна — загальна топологія, предметом якої є вивчення ідеї про неперервність на максимально абстрактному рівні.

В цій та наступній лекціях ми введемо в розгляд ряд важливих топологічних понять. Це дозволить нам вийти на більш високий рівень абстракції і опанувати ідеї, що пронизують майже всі розділи математики. Не буде великим перебільшенням сказати, що в певному розумінні топологія разом з алгеброю є скелетом сучасної математики, а *функціональний аналіз* — це розділ математики, головною задачею якого є дослідження нескінченновимірних просторів та їх відображень.

Визначення 1.1. Нехай X — множина елементів, яку ми будемо називати носієм. *Топологією* в X називається довільна система τ його підмножин, яка задовольняє таким умовам (*аксіомам Александрова*):

A1. $\varnothing, X \in \tau$;

A2. $G_\alpha \in \tau$, $\alpha \in A \implies \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \in \tau$, де A — довільна множина.

A3. $G_\alpha \in \tau$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n \implies \bigcap_{\alpha=1}^{n} G_\alpha \in \tau$.

Інакше кажучи, топологічною структурою називається система множин, замкнена відносно довільного об'єднання і скінченого перетину.

Визначення 1.2. Пара $T = (X, \tau)$ називається *топологічним простором.*

Приклад 1.3

Нехай X — довільна множина, $\tau = 2^X$ — множина всіх підмножин X. Пара (X, τ) називається простором з *дискретною (максимальною) топологією.*

Приклад 1.4

Нехай X — довільна множина, $\tau = \{\varnothing, X\}$. Пара (X, τ) називається простором з *тривіальною (мінімальною, або антидискретною) топологією.*

Зрозуміло, що на одній і тій же множині X можна ввести різні топології, утворюючи різні топологічні простори. Припустимо, що на носії X введено дві топології — τ_1 і τ_2. Вони визначають два топологічні простори: $T_1 = (X, \tau_1)$ і $T_2 = (X, \tau_2)$.

Говорять, що топологія τ_1 є *сильнішою*, або *тонкішою*, ніж топологія τ_2, якщо $\tau_2 \subset \tau_1$. Відповідно, топологія τ_2 є *слабкішою*, або *грубішою*, ніж топологія τ_1. Легко бачити, що найслабкішою є тривіальна топологія, а найсильнішою — дискретна.

Зауваження 1.5 — Множина *всіх* топологій не є цілком упорядкованою, тобто не всі топології можна порівнювати одну з одною. Наприклад, наступні топології (зв'язні двокрапки) порівнювати не можна: $X = \{a, b\}$, $\tau_1 = \{\varnothing, X, \{a\}\}$, $\tau_2 = \{\varnothing, X, \{b\}\}$.

Визначення 1.6. Множини, що належать топології τ, називаються *відкритими.* Множини, які є доповненням до відкритих множин, називаються *замкненими.*

Наприклад, множина всіх цілих чисел $\mathbb{Z}$ замкнена в $\mathbb{R}^1$.

Зауваження 1.7 — Топологія включає в себе всі відкриті множини. Водночас, треба зауважити, що поняття відкритих і замкнених множин не є взаємовиключними. Одна і та ж множина може бути одночасно і відкритою і замкненою (наприклад, $\varnothing$ або X), або ані відкритою, ані замкненою (множини раціональних та ірраціональних чисел в $\mathbb{R}^1$). Отже, топологія може містити і замкнені множини, якщо вони одночасно є відкритими.

Як бачимо, поняття відкритої множини в топологічному просторі *постулюється* — для того щоб довести, що деяка множина M в топологічному просторі T є відкритою, треба довести, що вона належить його топології.

Визначення 1.8. Нехай (X, τ) — топологічний простір, $M \subset X$. Топологія (M, τ_M), де $\tau_M = \{U_M^{(\alpha)} = U_\alpha \cap M, U_\alpha \in \tau\}$, називається *індукованою.*

Визначення 1.9. Топологічний простір (X, τ) називається *зв'язним*, якщо лише множини X і $\varnothing$ є замкненими й відкритими одночасно.

Визначення 1.10. Множина M топологічного простору (X, τ) називається *зв'язною*, якщо топологічний простір (M, τ_M) є зв'язним.

Приклад 1.11

Тривіальний (антидискретний) простір і зв'язна двокрапка є зв'язними просторами.

Визначення 1.12. Довільна відкрита множина $G \subset T$, що містить точку $x \in T$, називається її *околом.*

Визначення 1.13. Точка $x \in T$ називається *точкою дотику* множини $M \subset T$, якщо кожний окіл $O(x)$ точки x містить хоча б одну точку із M:

$$\forall O(x) \in \tau : O(x) \cap M \neq \varnothing.$$

Визначення 1.14. Точка $x \in T$ називається *граничною точкою* множини $M \subset T$, якщо кожний окіл точки x містить хоча б одну точку із M, що не збігається з x:

$$\forall O(x) \in \tau : O(x) \cap (M \setminus \{x\}) \neq \varnothing.$$

Визначення 1.15. Сукупність точок дотику множини $M \subset T$ називається *замиканням* множини M і позначається $\overline{M}$.

Визначення 1.16. Сукупність граничних точок множини $M \subset T$ називається *похідною* множини M і позначається M'.

Теорема 1.17 (про властивості замикання)
Замикання задовольняє наступним умовам:

1. $M \subset \overline{M}$;
2. $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$ (ідемпотентність);
3. $M \subset N \implies \overline{M} \subset \overline{N}$ (монотонність);
4. $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$ (адитивність);
5. $\overline{\varnothing} = \varnothing$.

Доведення.

1. $M \subset \overline{M}$.

   Нехай $x \in M$. Тоді x — точка дотику множини M. Отже, $x \in \overline{M}$.

2. $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$.

   Внаслідок твердження 1) $\overline{M} \subset \overline{\overline{M}}$. Отже достатньо довести, що $\overline{\overline{M}} \subset \overline{M}$. Нехай $x_0 \in \overline{\overline{M}}$ і U_0 — довільний окіл точки x_0. Оскільки $U_0 \cap \overline{M} \neq \varnothing$ (за означенням точки дотику), то існує точка $y_0 \in U_0 \cap \overline{M}$. Отже, множину U_0 можна вважати околом точки y_0. Оскільки $y_0 \in \overline{M}$, то $U_0 \cap M \neq \varnothing$. Значить, точка x_0 є точкою дотику множини M, тобто $x_0 \in \overline{M}$.

3. $M \subset N \implies \overline{M} \subset \overline{N}$.

   Нехай $x_0 \in \overline{M}$ і U_0 — довільний окіл точки x_0. Оскільки $U_0 \cap M \neq \varnothing$ (за означенням точки дотику) і $M \subset N$ (за умовою), то $U_0 \cap N \neq \varnothing$. Отже, x_0 — точка дотику множини N, тобто $x_0 \in \overline{N}$. Таким чином, $\overline{M} \subset \overline{N}$.

4. $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$.

   Із очевидних включень $M \subset M \cup N$ і $N \subset M \cup N$ внаслідок монотонності операції замикання випливає, що $\overline{M} \subset \overline{M \cup N}$ і $\overline{N} \subset \overline{M \cup N}$. Отже, $\overline{M} \cup \overline{N} \subset \overline{M \cup N}$. З іншого боку, припустимо, що $x \notin \overline{M} \cup \overline{N}$, тоді $x \notin \overline{M}$ і $x \notin \overline{N}$. Отже, існує такий окіл точки x, у якому немає точок з множини $M \cup N$, тобто $x \notin \overline{M \cup N}$. Таким чином, за законом заперечення, $x \in \overline{M \cup N} \implies x \in \overline{M} \cup \overline{N}$, тобто $\overline{M \cup N} \subset \overline{M} \cup \overline{N}$.

5. $\overline{\varnothing} = \varnothing$. Припустимо, що замикання порожньої множини не є порожньою множиною: $x \in \overline{\varnothing} \implies \forall O(x) : O(x) \cap \varnothing \neq \varnothing$. Але $\forall N \subset X : N \cap \varnothing = \varnothing$. Отже, $\overline{\varnothing} = \varnothing$.

□

Теорема 1.18 (критерій замкненості)

Множина M топологічного простору X є замкненою тоді і лише тоді, коли $\overline{M} = M$, тобто коли вона містить всі свої точки дотику.

Доведення. Необхідність. Припустимо, що M — замкнена множина, тобто $G = X \setminus M$ — відкрита множина. Оскільки, $M \subset \overline{M}$, достатньо довести, що $\overline{M} \subset M$. Дійсно, оскільки G — відкрита множина, вона є околом кожної своєї точки. До того ж $G \cap M = \varnothing$. Звідси випливає, то жодна точка $x \in G$ не може бути точкою дотику для множини M, отже всі точки дотику належать множині M, тобто $\overline{M} \subset M$.

$$G = X \setminus M \in \tau \implies G \cap M = \varnothing \implies \overline{M} \subset M.$$

Достатність. Припустимо, що $\overline{M} = M$. Доведемо, що $G = X \setminus M$ — відкрита множина (звідси випливатиме замкненість множини M). Нехай $x_0 \in G$. З цього випливає, що $x_0 \notin M$, а значить $x_0 \notin \overline{M}$. Тоді за означенням точки дотику існує окіл U_{x_0} такий, що $U_{x_0} \cap M = \varnothing$. Значить, $U_{x_0} \subset X \setminus M = G$, тобто $G = \bigcup_{x \in G} U_x \in \tau$. □

Наслідок 1.19

Замикання M довільної множини M із простору X є замкненою множиною в X.

Теорема 1.20

Замикання довільної множини M простору (X, τ) збігається із перетином всіх замкнених множин, що містять множину M.

$$\forall M \in (X, \tau) : \quad \overline{M} = \bigcup_{\alpha} F_\alpha, \quad F_\alpha = \overline{F_\alpha}, \quad M \subset F_\alpha.$$

Доведення. Нехай M — довільна множина із (X, τ) і $N = \bigcap_\alpha F_\alpha$, де $F_\alpha = \overline{F_\alpha}$, $M \subset F_\alpha$.

Покажемо включення $N \subseteq \overline{M}$:

$$N = \bigcap_\alpha F_\alpha \implies (N \subseteq F_\alpha)\forall\alpha \implies (N \subseteq \overline{F_\alpha})\forall\alpha.$$

Оскільки $\{F_\alpha\}$ — множина усіх замкнених множин, серед них є множина $\overline{M}$: $\exists\alpha_0 : F_{\alpha_0} = \overline{M}$. Отже,

$$N \subseteq \overline{F_\alpha} \implies N \subseteq F_{\alpha_0} = \overline{M} \implies N \subseteq \overline{M}.$$

Тепер покажемо включення $\overline{M} \subseteq N$. Розглянемо довільну замкнену множину F, що містить M: $\overline{F} = F$, $M \subset F$. Внаслідок монотонності замикання маємо:

$$\overline{F} = F \supset M \implies \overline{M} \subset \overline{F} = F \implies (\overline{M} \subset F_\alpha, F_\alpha = \overline{F_\alpha})\forall\alpha \implies \overline{M} \subset N.$$

Порівнюючи обидва включення, маємо

$$\overline{M} = \bigcap_\alpha F_\alpha.$$

□

Наслідок 1.21

Замикання довільної множини M простору X є найменшою замкненою множиною, що містить множину M.

Визначення 1.22. Нехай A і B — дві множини в топологічному просторі T. Множина A називається *щільною* в B, якщо $\overline{A} \supset B$.

Зауваження 1.23 — Множина A не обов'язково міститься в B: множина раціональних чисел є щільною в множині ірраціональних чисел і навпаки.

Визначення 1.24. Якщо $\overline{A} = X$, множина A називається *скрізь щільною*.

Визначення 1.25. Множина A називається *ніде не щільною*, якщо вона не є щільною в жодній непорожній відкритій підмножині множини X.

Множина A є щільною в кожній непорожній відкритій множині, якщо $\forall U \in \tau, U \neq \varnothing : \overline{A} \supset U$, тобто кожна точка множини U є точкою дотику множини A. Отже, $\forall x \in U : \forall O(x) \in \tau : O(x) \cap A \neq \varnothing$. Заперечення цього твердження збігається з означенням ніде не щільної множини. Формальний запис означення має такий вигляд.

$$\exists U_0 \in \tau, U_0 \neq \varnothing : \overline{A} \not\supset U_0 \implies \exists x_0 \in U_0 : \exists O(x_0) \in \tau : O(x) \cap A = \varnothing.$$

Визначення 1.26. Простір T, що містить скрізь щільну зліченну множину, називається *сепарабельним*.

Приклад 1.27

В топології числової прямої множина всіх раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є щільною в множині всіх ірраціональних чисел $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, і навпаки.

Приклад 1.28

Найпростішими прикладами ніде не щільних множин є цілі числа просторі $\mathbb{R}$ і пряма в просторі $\mathbb{R}^2$.

Приклад 1.29

Зліченна множина всіх раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є скрізь щільною у просторі $\mathbb{R}$, отже простір $\mathbb{R}$ є сепарабельним.

З того, що $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ і $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, зокрема, випливає, що $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ є ані відкритими, ані замкненими множинами.

Приклад 1.30

Зліченна множина всіх поліномів з раціональними коефіцієнтами за теоремою Вєйєрштрасса є скрізь щільною в просторі неперервних функцій $C([a, b])$. Отже, простір $C([a, b])$ є сепарабельним.