The Closest Planet from us

How does CGP Grey know?

PureCosmos

Bilibili哔哩哔哩
GitHub: coming soon

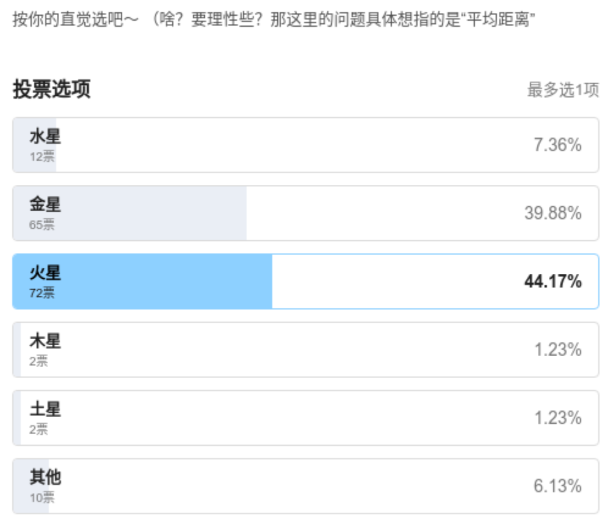
November 2, 2019

提问：离我们（地球）最近的行星是?

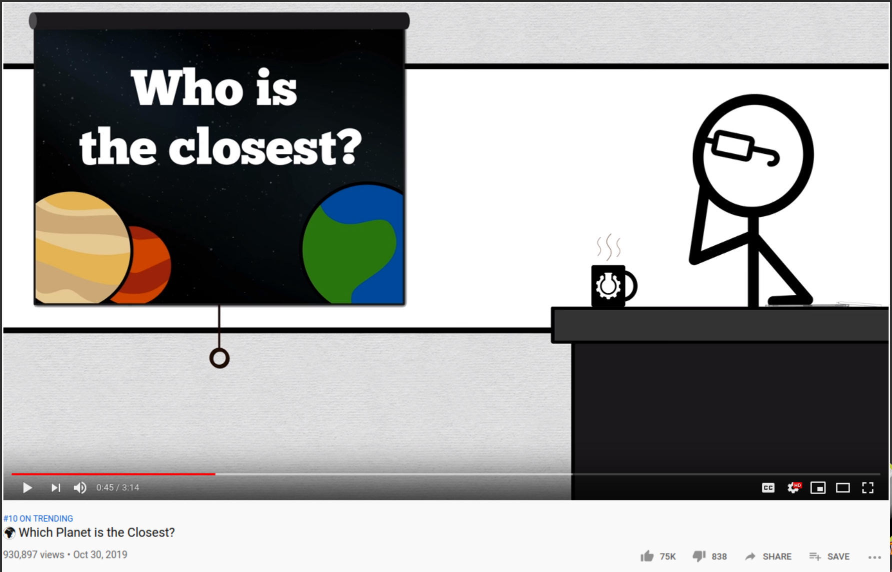
我在B站上的提问


PureCosmos
昨天 05:49
我发起了一个投票 离我们（地球）最近的行星是？
离我们（地球）最近的行星是？
163人参与
投票
73
10
10

你们的回答（33小时后）


按你的直觉选吧～ （啥？要理性些？那这里的问题具体想指的是"平均距离"
投票选项
最多选1项
水星
12票
7.36%
金星
65票
39.88%
火星
72票
44.17%
木星
2票
1.23%
土星
2票
1.23%
其他
10票
6.13%

万恶之源：CGP Grey的发问

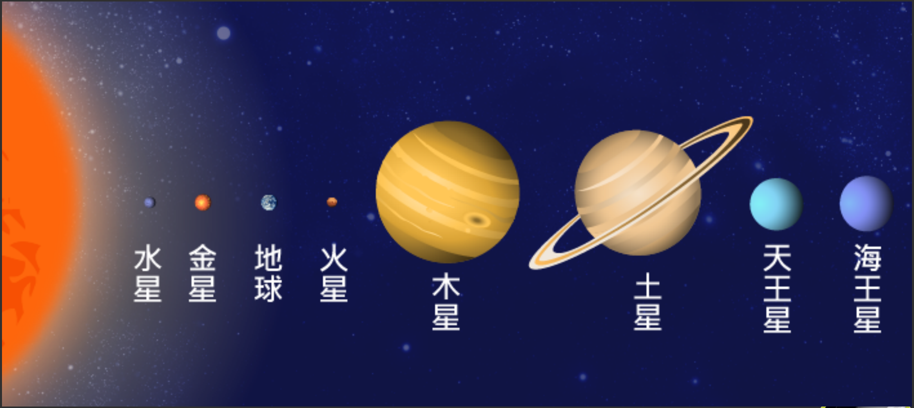


Summary

1. 提问：离我们（地球）最近的行星是?
2. 让我们先回顾下太阳系的行星成员吧
3. 然而问题并不简单
4. 你以为是常识，结果......
   - 我们开始了物理课
   - 我们又开始了数学课
5. 然而以上的分析并不正确......
6. 这玩意儿怎么积嘛！？
   - 于是我们又开始了编程课......

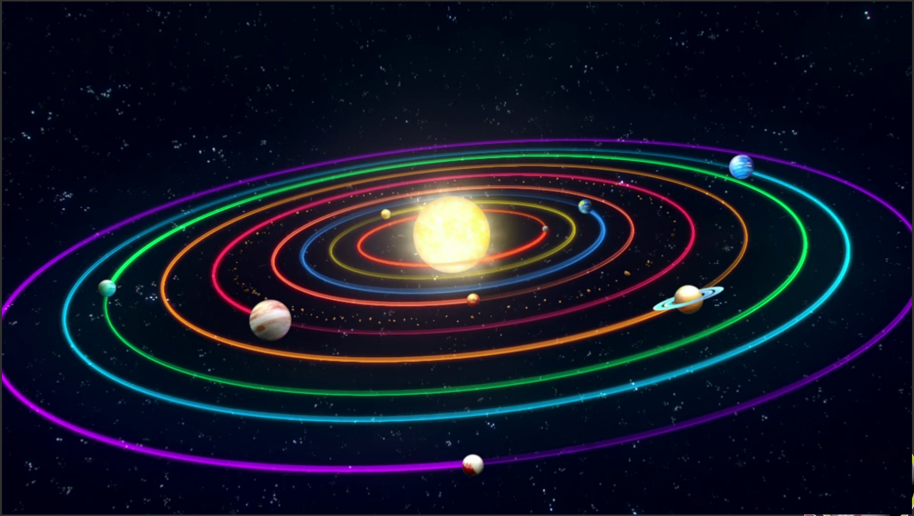
让我们先回顾下太阳系的行星成员吧

九……八大行星



然而问题并不简单

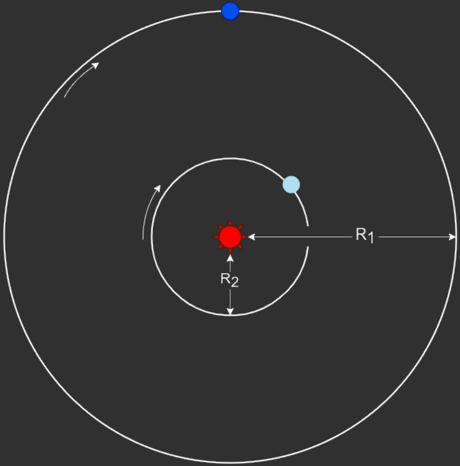
行星不排队



你以为是常识，结果......

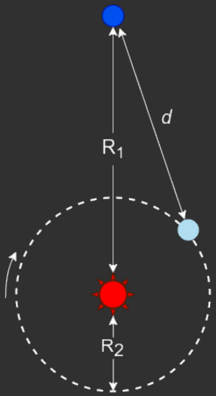
我们开始了物理课——轨道模型

这里用圆轨道近似

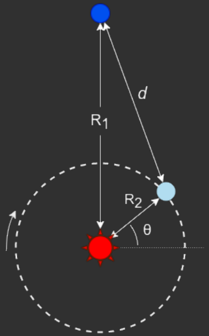


简化模型

转换参考系，固定日-地连线：



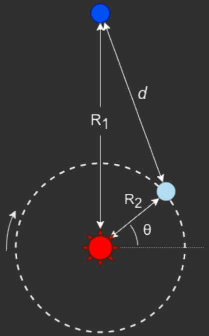
距离函数（以角度为变量）



$$
\begin{aligned}
d^2(\theta) &= R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\
&= R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\sin\theta
\end{aligned}
$$

$$
\overline{d^2} = \frac{\int_0^{2\pi} d^2(\theta)d\theta}{\int_0^{2\pi} d\theta} = \frac{\int_0^{2\pi} d^2(\theta)d\theta}{2\pi}
$$

距离函数（以角度为变量）



$$
\begin{aligned}
d^2(\theta) &= R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\
&= R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\sin\theta
\end{aligned}
$$

$$
\overline{d^2} = \frac{\int_0^{2\pi} d^2(\theta)d\theta}{\int_0^{2\pi} d\theta} = \frac{\int_0^{2\pi} d^2(\theta)d\theta}{2\pi}
$$

PureCosmos

Frame Title

$$
\begin{aligned}
\overline{d^2} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\sin\theta\right)d\theta \\
&= \frac{R_1^2 + R_2^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta + \frac{2R_1R_2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta \\
&= R_1^2 + R_2^2
\end{aligned}
$$

R_2 越大，显然$\overline{d^2}$ 也就越大
所以离我们平均距离最近的行星邻居居然是——
公转半径最小的水星！

PureCosmos

Frame Title

$$
\begin{aligned}
\overline{d^2} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\sin\theta\right)d\theta \\
&= \frac{R_1^2 + R_2^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta + \frac{2R_1R_2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta \\
&= R_1^2 + R_2^2
\end{aligned}
$$

R_2 越大，显然$\overline{d^2}$ 也就越大

所以离我们平均距离最近的行星邻居居然是——公转半径最小的水星！

Frame Title

$$
\begin{aligned}
\overline{d^2} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\sin\theta\right)d\theta \\
&= \frac{R_1^2 + R_2^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta + \frac{2R_1R_2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta \\
&= R_1^2 + R_2^2
\end{aligned}
$$

R_2 越大，显然$\overline{d^2}$ 也就越大

所以离我们平均距离最近的行星邻居居然是——

公转半径最小的**水星**！

然而以上的分析并不正确......

问题在于:

我们所希望知道的，是距离的平均值$\bar{d}$，而并非距离平方的平均值$\overline{d^2}$.
而且:

$$\overline{d^2} > \bar{d}^2$$

飞速证明下：（为显示清晰，这里同时用<>来表平均运算：）

$$\left\langle (d-\bar{d})^2 \right\rangle = \left\langle d^2 - 2d\bar{d} + \bar{d}^2 \right\rangle = \overline{d^2} - \bar{d}^2 > 0$$

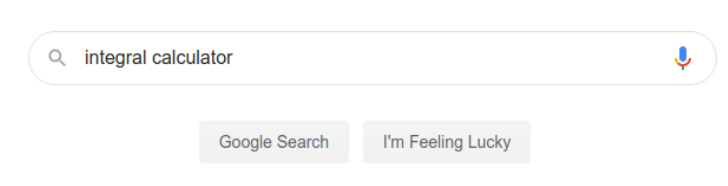
我们应当做的积分是:

$$\bar{d} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\sin\theta}\;d\theta$$

"Hmmm... ..."

这玩意儿怎么积嘛！？

开始求助于工具



于是我们又开始了编程课……

确定了没有解析解
只好默默地开了个Notebook……