Reaaliaikagrafiikan ohjelmointi – TTV14SP

Janne Koponen

3. marraskuuta 2015

Kurssin sisältö

1. Vektorit
2. Matriisit
3. Lineaarikuvaukset
4. Kvaterniot
5. Koordinaatistomuunnokset
6. 3D-objektit
7. Tekstuurit
8. Valaistusmallit
9. Shading
10. Cell shading

Aikataulu

- vko 44 Johdanto ja matriisien, vektoreiden ja kvaternioiden perusteita
- vko 45 Koordinaatistomuunnokset
- vko 46 3D-objektit, mallien lataaminen tiedostosta
- vko 47 3D-liukuhihna
- vko 48 Tekstuurit, valaistusmallit (ambient, distance falloff, Lambert, Oren-Nayar, Phong, Blinn-Phong), varjostimet
- vko 49 Gouraud shading, Phong shading, bumb-mapping, normal-mapping, materiaalit
- vko 50 Harjoitustyö / Kurssin aikana tulleita toiveita (esim. cell shading)

Kurssin suorittaminen

- Harjoitustyö – Projektiopintojen aikana

Arviointi

- Kiitettävä (5): Opiskelija osaa määritellä, suunnitella, toteuttaa ja testata itsenäisesti kompleksisen 3D-grafiikkamoottorin käyttäen OpenGL-grafiikkarajapintaa. Opiskelija osoittaa asiantuntijuutta ja pystyy soveltamaan oppimaansa sekä kehittämään uutta tavoitteellisesti.
- Hyvä (3-4): Opiskelija osaa määritellä, suunnitella, toteuttaa ja testata itsenäisesti yksinkertaisen 3D-grafiikkamoottorin käyttäen OpenGL-grafiikkarajapintaa. Opiskelija toimii aloitteellisesti ja tavoitteellisesti annetuissa tehtävissä.
- Tyydyttävä (1-2): Opiskelija osaa määritellä, suunnitella, toteuttaa ja testata ohjatusti yksinkertaisen 3D-grafiikkamoottorin käyttäen OpenGL-grafiikkarajapintaa.

Lähteitä

- Sheiner et al.: OpenGL Programming guide
- https://en.wikibooks.org/wiki/OpenGL_Programming
- http://www.realtimerendering.com/
- https://open.gl, http://www.opengl-tutorial.org/ jne.

Määritelmä

- Olkoon $A, B \in \mathbb{R}^n$. Tällöin voidaan piirtää suuntajana $\overrightarrow{AB}$.
    - Suuntajanan alkupiste on A ja loppupiste B.
    - Huomaa, että $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$.
    - Määritelmästä saadaan suuntajanalle pituus ja suunta.
- Määritellään vektori siten, että se edustaa kaikkien samansuuntaisten ja -suuruisten suuntajanojen joukkoa.
- Vektorilla on siis suunta ja suuruus, mutta ei tiettyä sijaintia.
    - Vektoreista voidaan tämän vuoksi valita kulloiseenkin tilanteeseen parhaiten sopiva kyseisestä joukosta.
- Vektoria merkitään yleensä $\bar{a}$ tai $\overrightarrow{a}$ tai $\mathbf{a}$.
    - Käytetään jatkossa viimeistä notaatiota, eli vektoreita merkitään pienillä lihavoiduilla kirjaimilla.

Vektorit koordinaatistossa

- Vektoreiden käsittely määritelmän mukaan voi olla hankalaa.
- Valitaan vektorille, eli vektoriluokalle, sellainen edustaja joka alkaa origosta O.
- Tällöin vektorijoukon edustaja on vektori $\overrightarrow{Ox}$.
  - Piste x kiinnittä tällöin yksikäsitteisesti kyseisen luokan vektoreiden edustajan.
  - Nyt voimme samaistaa avaruuden $\mathbb{R}^n$ pisteen x (n-jonon) ja vektorin $\mathbf{x}$.

Vektorin suunta ja suuruus

Olkoon annettu kaksi $\mathbb{R}^n$:n pistettä x ja y. Tällöin suuntajanan komponenttiesitykseksi saadaan

$$\overrightarrow{xy} = (y_1 - x_1 \ y_2 - x_2 \ \ldots \ y_n - x_n) \ .$$

Koska origon komponenttiesitys on $(0 \ 0 \ \ldots \ 0)$, niin vektorin $\mathbf{x}$ komponenttiesitykseksi saadaan

$$\mathbf{x} = (x_1 - 0 \ x_2 - 0 \ \ldots \ x_n - 0) = (x_1 \ x_2 \ \ldots \ x_n).$$

Vektorioperaatiot

- Kaikki jatkossa esitetyt operaatiot määritellään yleisesti $\mathbb{R}^n$ vektoreille, lukuunottamatta ristituloa.
- Ristitulo määritellään ainoastaan $\mathbb{R}^3$ vektoreille.

Määritellään nollavektori $\mathbf{0} = (0\ 0\ \ldots\ 0)$. Huomaa, että $\mathbf{0}$ on ainoa vektori, jolla ei ole suuntaa.
Vektorin $\mathbf{x}$ pituus, eli normi

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \tag{1}$$

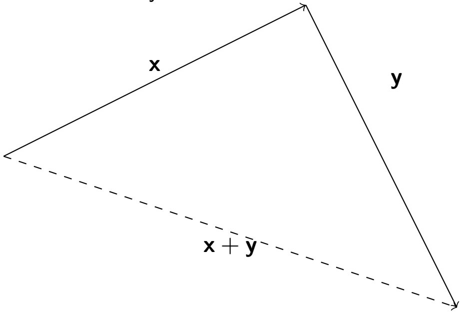
Määritellään lisäksi, että pisteiden x ja y välinen etäisyys on $\|\overrightarrow{x-y}\| = \sqrt{y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_n - x_n}$.

Yhteenlasku

Määritellään $\mathbb{R}^n$ vektoreiden $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ väliset operaatiot:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1 \;\; x_2 + y_2 \;\; \ldots \;\; x_n + y_n) \; . \tag{2}$$

Geometrisesti yhteenlasku tarkoittaa "kahden vektorin peräkkäin asettamista".



Skalaarilla kertominen

Skalaarilla tarkoitetaan $\mathbb{R}$:n lukua. Olkoon annettu skalaari $a \in \mathbb{R}$ ja vektori $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Määritellään näiden tulo

$$a\mathbf{x} = (ax_1 \ ax_2 \ \dots \ ax_n) \tag{3}$$

Geometrisesti tämä tarkoittaa vektorin pituuden kertomista sen suunnan säilyttäen.
Määritellään vektorin $\mathbf{x}$ vastavektori $-\mathbf{x} = -1\mathbf{x}$.

Vähennyslasku

Määritellään vektoreiden vähennyslasku käyttäen yhteenlaskua ja vektorin vastavektoria. Olkoon annettu kaksi vektoria $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Tällöin

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-\mathbf{y}) = (x_1 - y_1 \ x_2 - y_2 \ \dots \ x_n - y_n) \ . \tag{4}$$

Harjoitukset VEKT.1

1. Osoita, että $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$.
2. Osoita, että määritelmän (4) askel $\mathbf{x} + (-\mathbf{y}) = (x_1 - y_1 \;\; x_2 - y_2 \;\; \ldots \;\; x_n - y_n)$ on oikein.
3. Osoita, että jos $a \in \mathbb{R}$ ja $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, niin $\|a\mathbf{x}\| = |a|\|\mathbf{x}\|$.
4. Toteuta luokkamalli `vector_t<class T>`.
    - Toteuta kaikki edellä esitetyt laskuoperaatiot sopivilla operaattoreilla.

Yksikkövektori

- Vektori $\mathbf{x}$ on yksikkövektori, mikäli sen pituus $\|\mathbf{x}\| = 1$.
- Jokaisesta vektorista $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ voidaan muodostaa yksikkövektori kertomalla se skalaarilla $\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}$. Tätä toimenpidettä kutsutaan normalisoinniksi.
- Normalisoinnissa vektorin suunta säilyy, mutta pituus voi muuttua.
- Yksikkövektori erotellaan tavallisesta vektorista asettamalla sen päälle merkintä ˆ.
- Voidaan siis kirjoittaa

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x}.$$

$\sum$-merkintä

Otetaan käyttöön summamerkintä $\sum$. Määritellään

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \dots a_n \ .$$

Esimerkkejä:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i &= 1 + 2 + 3 + \cdots + n \ , \\
\sum_{i=1}^{n} i^2 &= 1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 \quad \text{ja} \\
\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} &= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \ .
\end{aligned}$$

$\sum$-merkinnän ominaisuuksia

$\sum$-merkinnälle pätee

$$\begin{aligned} c\sum_{i=1}^{n} a_i &= \sum_{i=1}^{n} ca_i \text{ ja} \\ \sum_{i=1}^{n} b_i + \sum_{i=1}^{n} a_i &= \sum_{i=1}^{n} (b_i + a_i) \ . \end{aligned}$$

Huomaa erityisesti, että

$$\begin{aligned} (\sum_{i=1}^{n} b_i)(\sum_{i=1}^{n} a_i) &= \sum_{i=1}^{n} \left((\sum_{j=1}^{n} b_j) a_i \right) \text{ , mutta yleensä} \\ (\sum_{j=1}^{n} b_i)(\sum_{i=1}^{n} a_i) &\neq \sum_{i=1}^{n} (b_i a_i) \ . \end{aligned}$$

Harjoituksia VEKT.2

1. Laske $\sum_{i=1}^{5} i$.
2. Laske $\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{i}$.
3. Laske $\sum_{i=1}^{5}(i + \frac{1}{i})$.
4. Olkoon annettu kaksi $\mathbb{R}^3$-vektoria $\mathbf{x} = (1, 2, 3)$ ja $\mathbf{y} = (3, 1, 0)$. Laske $\sum_{i=1}^{3}(x_i y_i)$.

Pistetulo

Määritellään kahden vektorin $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ pistetulo

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \;= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n. \tag{5}$$

Olkoon $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ja $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ sekä $a \in \mathbb{R}$. Tällöin pistetulolle pätee

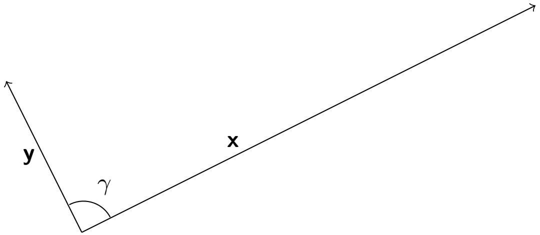
$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} \,, \\ \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} \,, \\ (a\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} &= a(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \text{ ja} \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \gamma \,, \end{aligned} \tag{6}$$

jossa γ on vektoreiden $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ välinen kulma.

Vektoreiden kohtisuoruus

Olkoon vektorit $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \neq \mathbf{y}$. Jos $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$, niin tällöin $\cos \gamma = 0$.

Kosinifunktion ominaisuuksista tiedämme, että tällöin $\gamma = -\frac{1}{2}\pi$ tai $\gamma = \frac{1}{2}\pi$, eli vektorit ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa.



Harjoituksia VEKT.3

1. Laske vektorien $\mathbf{x} = (2\ 1\ 3)$ ja $\mathbf{y} = (1\ 1\ 1)$ pistetulo $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ ja sen avulla vektoreiden välinen kulma.
2. Laske vektorien $\mathbf{x} = (1\ 1\ 0)$ ja $\mathbf{y} = (0\ 0\ 1)$ pistetulo $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ ja sen avulla vektoreiden välinen kulma.
3. Milloin $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} > 0$, milloin $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$, entä voiko olla $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} < 0$, jos voi, niin milloin?
4. Osoita, että $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$
5. Osoita, että $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$.
6. Lisää `vektor_t`-luokkamalliin pistetulo. Käytä pistetulon laskentaan operaattoria `*`.
7. Lisää `vektor_t`-luokkamalliin yksikkövektorin muodostus. Huomaa, että yksikkövektoria ei voi aina muodostaa.
8. Osoita, että jos $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ja $\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x}$, niin $\hat{\mathbf{x}}$ on yksikkövektori.

Ristitulo

- Ristitulo voidaan määritellä ainoastaan $\mathbb{R}^3$:n vektoreille.
- Ristitulon avulla saadaan selville kahden vektorin määrittelemän tason kanssa kohtisuora suunta.

Olkoon $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$. Tällöin niiden ristitulo

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 & x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} . \tag{7}$$

Huomaa, että myös $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ on myös vektori.

Ristitulon ominaisuuksia

Olkoon $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ja $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ ja γ niiden välinen kulma. Tällöin

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| &= \|\mathbf{x}\| \; \|\mathbf{y}\| \sin \gamma \;, \\
\mathbf{x} \times \mathbf{y} &= -(\mathbf{y} \times \mathbf{x}) \;, \\
\mathbf{x} \times \mathbf{x} &= \mathbf{0} \;\; \text{ja} \\
\mathbf{x} \times (\mathbf{y} + \mathbf{z}) &= \mathbf{x} \times \mathbf{y} + \mathbf{x} \times \mathbf{z} \;.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Harjoituksia VECT.4

1. Osoita, että $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -(\mathbf{y} \times \mathbf{x})$.
2. Osoita, että $\mathbf{x} \times \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
3. Osoita, että $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \times \mathbf{y} + \mathbf{x} \times \mathbf{z}$.
4. Olkoon annettu $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ja $z = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Laske pinnan yksikkönormaali.
5. Lisää ristitulo `vektor_t`-luokkamalliin.
6. Kirjoita funktio, joka laskee pinnan normaalin kun sille syötetään kolme pistettä (homogeenisissa koordinaateissa).

Nettilähteitä

- http://blog.wolfire.com/2009/07/linear-algebra-for-game-developers-part-1/
- http://www.dickbaldwin.com/KjellTutorial/vectorIndex.html
- http://www.flipcode.com/archives/articles.shtml

Lineaarikuvaukset

- Kuvaus $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on lineaarikuvaus jos:
  1) $c\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(c\mathbf{x})$ ja
  2) $\mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y})$,

  jossa $c \in \mathbb{R}$ ja $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
- Lineaarikuvauksia ovat esimerkiksi
  - skaalaus,
  - kierto ja
  - "pienellä temppuilulla" myös siirrot.
- Matriisien avulla voidaan esittää lineaarikuvaukset avaruudesta $\mathbb{R}^n$ avaruuteen $\mathbb{R}^m$.
- Lineaarikuvauksiin palataan myöhemmin.

Matriisin määrittely

Määritellään $m \times n$-matriisi lukutaulukkona, jossa on m riviä ja n saraketta. Merkitään jatkossa matriiseja isoilla lihavoiduilla kirjaimilla. Olkoon **A** $m \times n$-matriisi. Tällöin merkitään $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Olkoon esimerkiksi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} .$$

Tällöin $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$.

Matriisin alkiot

Indeksoidaan matriisin alkiot yksinkertaistamaan määrittelyjä. Merkitään matriisin $\mathbf{A}$ yksittäistä alkiota a_{ij}:llä (tai $a_{i,j}$:llä jos pilkku on tarpeen). a_{ij} on matriisin i:nnen rivin j:s (tai j:nnen sarakkeen) alkio.
Olkoon esimerkiksi $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$. Tällöin

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix} .$$

Matriisityyppejä

Olkoon $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

- Jos $m = n$, niin $\mathbf{A}$:n sanotaan olevan neliömatriisi.
  - Neliömatriisissa on yhtä monta saraketta ja riviä.
  - Neliömatriisit ovat keskeisessä asemassa tietokonegrafiikassa.
  - Neliömatriisia merkitään usein $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
- Jos $n = 1$ sanotaan matriisia pystyvektoriksi.
  - Samaistetaan jatkossa $\mathbb{R}^m$:n vektorit ja $\mathbb{R}^{m \times 1}$ matriisit.
- Jos $m = 1$ sanotaan matriisia vaakavektoriksi.
  - Olisi mahdollista samaistaa myös vaakavektorit ja $\mathbb{R}^l$:n vektorit, mutta pysytään aiemmassa määritelmässä.
- Jos $n = m = 1$, niin samaistetaan $\mathbf{A}$ skalaarin $a_{1,1} \in \mathbb{R}$ kanssa.

Diagonaalialkiot

Neliömatriisin **A** alkioita a_{ij}, joissa $i = j$ kutsutaan **A**:n diagonaalialkioiksi. Mikäli matriisin kaikki alkiot lukuunottamatta diagonaalialkioita ovat 0, sanotaan matriisia diagonaalimatriisiksi.

Esimerkki

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on diagonaalimatriisi.

Diagonaalimatriisi voidaan merkitä lyhyemmin

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Identiteetti- ja nollamatriisi

Määritellään $\mathbb{R}^{n \times n}$ identiteetti- eli yksikkömatriisi

$$\mathbf{I} = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} .$$

Yksikkömatriisissa siis diagonaalialkiot ovat 1 ja kaikki muut alkiot ovat 0.

Määritellään nollamatriisi

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} .$$

Huomaa, että merkintää $\mathbf{0}$ käytetään sekä matriisille, että vektorille. Mikäli sekaannuksen vaaraa on, käytetään nollavektorille jatkossa merkintää $\overline{\mathbf{0}}$.

Harjoituksia MAT.1

1. Matriisin alkiot kannattaa tallettaa yksiulotteisena taulukkona sarakkeittain. Toteuta tällä tavoin luokkamalli `matrix_t<class T>`, joka
   - asettaa oletusmuodostimessa matriisin arvoksi yksikkömatriisin ja
   - sisältää metodit asettaa arvoksi nolla- ja identiteettimatriisit.

Matriisien yhteenlasku

Matriisien yhteenlasku määritellään tapahtuvaksi alkioittain. Olkoon $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Tällöin

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & \dots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & \dots & a_{2,n} + b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} + b_{m,1} & a_{m,2} + b_{m,2} & \dots & a_{m,n} + b_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Matriisin kertominen skalaarilla

Matriisin kertominen skalaarilla tapahtuu kertomalla kukin matriisin alkio skalaarilla. Olkoon $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ja $c \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$c\mathbf{A} = \begin{pmatrix} ca_{1,1} & ca_{1,2} & \dots & ca_{1,n} \\ ca_{2,1} & ca_{2,2} & \dots & ca_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m,1} & ca_{m,2} & \dots & ca_{m,n} \end{pmatrix} .$$

Matriisien vähennyslasku

Matriisien vähennyslasku määritellään tapahtuvaksi alkioittain. Olkoon **A** ja **B** $\in \mathbb{R}^{m\times n}$. Tällöin

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\begin{pmatrix} a_{1,1}-b_{1,1} & a_{1,2}-b_{1,2} & \dots & a_{1,n}-b_{1,n} \\ a_{2,1}-b_{2,1} & a_{2,2}-b_{2,2} & \dots & a_{2,n}-b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}-b_{m,1} & a_{m,2}-b_{m,2} & \dots & a_{m,n}-b_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Harjoituksia MAT.2

1. Olkoon $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Osoita, että
$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-1)\mathbf{B} \ .$$
2. Olkoon $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Osoita, että
$$c\Big(\mathbf{A} + \mathbf{B}\Big) = (c\mathbf{A}) + (c\mathbf{B}) \ .$$
3. Olkoon $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ja $c = 4$. Laske $\mathbf{A} + c\mathbf{B}$.
4. Toteuta `matrix_t`-luokkamalliin matriisien yhteen- ja vähennyslasku sekä skalaarilla kertominen.

Matriisin ja vektorin välinen kertolasku

Olkoon $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ja $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Määritellään tällöin tulo

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1,i} x_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2,i} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{m,i} x_i \end{pmatrix} .$$

Tulosvektorin alkio paikassa i on

$$(Ax)_i = \begin{pmatrix} a_{i,1} \\ a_{i,2} \\ \vdots \\ a_{i,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} .$$

Huomaa, että tässä määriteltiin **Ax**, mutta ei **xA**!

Matriisien kertolasku (1/2)

Edellä esitetty matriisin ja vektorin välinen tulo saadaan erikoistapauksena matriisien välisestä kertolaskusta.
Olkoon $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ja $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$. Määritellään tällöin tulo

$$
\begin{aligned}
\mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & b_{n,p} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1,i} b_{i,1} & \sum_{i=1}^{n} a_{1,i} b_{i,2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{1,i} b_{i,p} \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2,i} b_{i,1} & \sum_{i=1}^{n} a_{2,i} b_{i,2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{2,i} b_{i,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{m,i} b_{i,1} & \sum_{i=1}^{n} a_{m,i} b_{i,2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{m,i} b_{i,p} \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

Matriisien kertolasku (2/2)

Määritelmästä seuraa suoraan, että $\mathbf{AB} \in \mathbb{R}^{m \times p}$, eli tulomatriisin rivien lukumäärän määrää **A**:n rivien lukumäärä ja sarakkeiden lukumäärän määrää **B**:n sarakkeiden lukumäärä. Lisäksi on huomioitava, että **A**:ssa on oltava yhtä monta saraketta kuin **B**:ssä on rivejä.
Tulomatriisin riville i, sarakkeeseen j tulee kertolaskussa arvo

$$(\mathbf{AB})_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i,1} \\ a_{i,2} \\ \vdots \\ a_{i,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \ .$$

Huomaa, että yleensä ei päde $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

Matriisin transpoosi

Olkoon $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Tällöin matriisin $\mathbf{A}$ transpoosi

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \dots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

muodostetaan vaihtamalla matriisin rivit ja sarakkeet keskenään.

Matriisilaskujen ominaisuuksia

Olkoon $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ ja $\mathbf{C}$ matriiseja ja k skalaari. Mikäli laskutoimitukset ovat määriteltyjä, niin

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} + \mathbf{0} &= \mathbf{A} \, , \\
\mathbf{A} + \mathbf{B} &= \mathbf{B} + \mathbf{A} \, , \\
\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \, , \\
c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= c\mathbf{A} + c\mathbf{B} \, , \\
(c\mathbf{A})\mathbf{B} &= \mathbf{A}(c\mathbf{B}) \, , \\
(c\mathbf{A})\mathbf{B} &= c(\mathbf{AB}) \, , \\
\mathbf{A0} &= \mathbf{0} \, , \\
\mathbf{0A} &= \mathbf{0} \, , \\
\mathbf{AI} &= \mathbf{A} \, , \\
\mathbf{IA} &= \mathbf{A} \, , \\
\mathbf{A}(\mathbf{BC}) &= (\mathbf{AB})\mathbf{C} \, , \\
\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= (\mathbf{AB}) + (\mathbf{AC}) \, , \\
\mathbf{A} &= (\mathbf{A}^T)^T \text{ ja} \\
(\mathbf{AB})^T &= \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \, .
\end{aligned}
$$

Harjoituksia MAT.3

1. Muodosta matriisitulo $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
2. Totea edellisen tehtävän matriiseilla, että kaava $\mathbf{AB} = (\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T)^T$ pätee.
3. Olkoon $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Osoita kaava $\mathbf{AI} = \mathbf{A}$ oikeaksi.
4. Totea edellisen paikkansapitävyys tapauksessa $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{I}$
5. Olkoon $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sekä $c \in \mathbb{R}$. Osoita oikeaksi kaava $(c\mathbf{A})\mathbf{B} = c(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}(c\mathbf{B})$.
6. Olkoon $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ ja $c = -1$. Totea edellisen harjoituksen kaavan paikkansapitävyys.
7. Lisää luokkamalliin `matrix_t` tuki matriisin ja vektorin kertolaskulle. Huomioi oikeat dimensiot.
8. Lisää luokkamalliin `matrix_t<class T>` tuki matriisien kertolaskulle. Huomioi oikeat dimensiot.
9. Lisää luokkamalliin `matrix_t<class T>` tuki transpoosin muodostamiselle.

Määritelmä

Olkoon $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, siis neliömatriisi. Mikäli tällöin on olemassa matriisi $\mathbf{A}^{-1}$ siten, että

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \ ,$$

niin $\mathbf{A}^{-1}$ on tällöin $\mathbf{A}$:n käänteismatriisi.

Mikäli kyseineinen matriisi on olemassa, niin

- pätee $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$,
- $\mathbf{A}^{-1}$ on yksikäsitteinen sekä
- matriisin $\mathbf{A}$ sanotaan olevan kääntyvä (tai säännöllinen).

HUOM: Käänteismatriisi voidaan määritellä myös matriisille, joka ei ole neliömatriisi, mutta tällöin edelliset tulokset eivät yleisesti pidä paikkaansa.

Käsitellään jatkossa vain neliömatriiseja, mikäli muuta ei mainita.

Determinantti

Edellinen määritelmä ei antanut juurikaan työkaluja käänteismatriisin muodostamiseksi, tai edes sen olemassaolon selvittämiseksi. Tähän ongelmaan ratkaisun tarjoaa matriisin determinantti.

Olkoon $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$. Määritellään $\mathbf{A}$:n determinantti rekursiivisesti

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |\mathbf{A}^{\{ij\}}| \ ,$$

jossa indeksin $i \in \{1, \ldots, n\}$ voi kiinnittää mielivaltaisesti. Sanotaan, että determinantti on kehitetty rivin i suhteen. Lisäksi $\mathbf{A}^{\{ij\}}$ on sellainen $\mathbf{A}$:n alimatriisi, josta on poistettu i:s rivi ja j:s sarake.
Määräritellään samalla, että 1×1 matriisin $\begin{pmatrix} a \end{pmatrix}$ determinantti on a.

Esimerkki 2×2-matriisin determinantti

Olkoon $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Tällöin sen determinantti

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{A}| &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |\mathbf{A}^{\{ij\}}| \\
&= (-1)^{1+1} a_{1,1} a_{2,2} + (-1)^{1+2} a_{1,2} a_{2,1} \\
&= a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1}
\end{aligned}
$$

Olkoon

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Tällöin

$$|\mathbf{A}| = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 5 = 1 \ .$$

Esimerkki 3×3-matriisin determinantti

Olkoon $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Tällöin sen determinantti

$$\begin{aligned}
|\mathbf{A}| &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |\mathbf{A}^{\{ij\}}| \\
&= a_{1,1}|\mathbf{A}^{\{1,1\}}| - a_{1,2}|\mathbf{A}^{\{1,2\}}| + a_{1,3}|\mathbf{A}^{\{1,3\}}| \\
&= a_{1,1}(a_{2,2}a_{3,3} - a_{3,2}a_{2,3}) - a_{1,2}(a_{2,1}a_{3,3} - a_{3,1}a_{2,3}) + a_{1,3}(a_{2,1}a_{3,2} - a_{3,1}a_{2,2})
\end{aligned}$$

Determinantin ominaisuuksia

- $|\mathbf{A}| \neq 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}$ on kääntyvä.
- Jos $\mathbf{A}$ on kääntyvä, niin $|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|}$.
- Jos jokin $\mathbf{A}$:n sarake tai rivi koostuu pelkästään nollista, niin $|\mathbf{A}| = 0$.

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{AB}| &= |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}| \\
|\mathbf{A}^T| &= |\mathbf{A}| \\
|\mathbf{I}| &= 1
\end{aligned}
$$

Harjoituksia MAT.4

1. Osoita 2×2-matriisille $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}|\ |\mathbf{B}|$.
2. Osoita 2×2-matriisille $|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}|$.
3. Osoita 3×3-matriisille $|\mathbf{I}| = 1$.
4. Olkoon $\mathbf{A}$ ja $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ja kääntyviä. Päteekö yleisesti $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{BA})^{-1}$? Perustele väitteesi?
5. Olkoon $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ja kääntyvä. Osoita että $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$.
6. 2×2 determinantin laskemiseksi määritelmän mukaan tarvitaan 2 kertolaskua ja 3×3 determinantin laskemiseksi tarvitaan vastaavasti $2 \cdot 3 = 6$ kertolaskua. Arvioi determinantin määritelmän avulla, montako kertolaskua tarvitaan 4×4 determinantin laskemiseksi.
7. Lisää luokkamalliin `matrix_t` matriisin determinantin laskenta. Muista tarkistaa, että kyseessä on neliömatriisi.

Käänteismatriisin muodostaminen

Olkoon $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Määritellään sen alkion a_{ij} kofaktori

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} |A^{\{ij\}}| \; .$$

Tällöin voidaan siis muodostaa matriisi

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \cdots & c_{n,n} \end{pmatrix} \; .$$

Matriisin $\mathbf{A}$ adjungoitu matriisi $\mathrm{adj}\mathbf{A} = \mathbf{C}^T$. Tämän avulla voidaan laskea käänteismatriisi

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathrm{adj}\mathbf{A} \; . \tag{9}$$

Ortogonaalinen matriisi

Matriisin $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ sanotaan olevan ortogonaalinen jos

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I} = \mathbf{A}^T\mathbf{A} \ .$$

Mikäli matriisi tiedetään ortogonaaliseksi, on sen käänteismatriisi helppo laskea, koska

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T \ .$$

Harjoituksia MAT.5

1. Tarkasta, että 2×2 yksikkömatriisin käänteismatriisi on todella se itse.
2. Olkoon $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Laske $\mathbf{A}^{-1}$.
3. Olkoon $\mathbf{A}$, kuten edellä ja $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Laske $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$ ja $(\mathbf{BA})^{-1}$.
4. Matriisi $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ on ortogonaalinen. Laske $\mathbf{A}^{-1}$.
5. Onko yksikkömatriisi ortogonaalinen?
6. Lisää luokkamalliin `matrix` käänteismatriisin laskenta.

Perusteet

Lineaarinen yhtälöryhmä on muotoa

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & y_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & y_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,n}x_n & = & y_n \ , \end{cases}$$

joka voidaan esittää matriisien ja vektorien avulla muodossa

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y} \ , \tag{10}$$

jossa $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ja $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Tässä vektori $\mathbf{x}$ on tuntematon.

Ratkaiseminen käänteismatriisin avulla

Lähdetään liikkeelle yhtälöstä (10)

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y}\ .$$

Oletetaan, että **A** on kääntyvä [1], jolloin edellinen voidaan kertoa (vasemmalta) $\mathbf{A}^{-1}$:llä,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} \\ \Rightarrow \mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}\ . \end{aligned}$$

- Menetelmä on käytännössä erittäin raskas isoilla matriiseilla.

[1] Mikäli **A** ei ole kääntyvä, yhtälöryhmällä on joko ∞ tai ei yhtään ratkaisua. Mikäli taas **A** on kääntyvä, niin yhtälöryhmällä on täsmälleen yksi ratkaisu.

Määritelmä

Kuten jo matriisien yhteydessä määriteltiin, niin

- kuvaus $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on lineaarikuvaus jos:
  1) $c\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(c\mathbf{x})$ ja
  2) $\mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y})$,

  jossa $c \in \mathbb{R}$ ja $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
- $\mathbb{R}^n$ on kuvauksen **A** lähtöjoukko ja
- $\mathbb{R}^m$ on kuvauksen **A** maalijoukko.
- Kuvaus **A** kuvaa yhden tai useamman lähtöjoukon alkion yhdeksi maalijoukon alkioksi.
- Kaikille maalijoukon alkioille ei aina kuvaudu yhtään lähtöjoukon alkiota.

Origon kuvautuminen

Olkoon $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineaarikuvaus. Kiinnitetään skalaari $c = 0$ ja mielivaltainen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Merkitään $\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$. Nyt voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{0}) &= \mathbf{A}(c\mathbf{x}) \\
&= c\mathbf{A}(\mathbf{x}) \\
&= c\mathbf{y} \\
&= 0\mathbf{y} \\
&= \bar{\mathbf{0}} \in \mathbb{R}^m.
\end{aligned}$$

Edellisen perusteella lineaarikuvauksessa lähtöjoukon origo kuvautuu aina maalijoukon origoksi.

Onko f lineaarikuvaus? Esimerkki 1

Onko $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lineaarikuvaus kun $f(\mathbf{x}) = x_1 + x_2$?

Kiinnitetään $c \in \mathbb{R}$ sekä $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$. Tällöin

$$cf(\mathbf{x}) = c(x_1 + x_2) = (cx_1) + (cx_2) = f((cx_1, cx_2)^T) = f(c(x_1, x_2)^T) = f(c\mathbf{x}),$$

eli kuvaus toteuttaa määritelmän 1. ehdon.

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = \underbrace{x_1 + x_2}_{=f(\mathbf{x})} + \underbrace{y_1 + y_2}_{=f(\mathbf{y})} = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \; ,$$

joten kuvaus toteuttaa myös määritelmän 2. ehdon ja on siten lineaarikuvaus.

Onko f lineaarikuvaus? Esimerkki 2

Onko $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lineaarikuvaus kun $f(\mathbf{x}) = x_1 x_2$?

Valitaan $\mathbf{x} = (0, 1)$ ja $\mathbf{y} = (1, 0)$. Tällöin

$$f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) = (0 \cdot 1) + (1 \cdot 0) = 0 \ ,$$

mutta

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f((1, 1)^T) = 1 \cdot 1 = 1 \ ,$$

joten kuvaus ei täytä lineaarikuvaukselta vaadittavaa 2. ehtoa ja ei siten ole lineaarikuvaus.

Harjoituksia LIN.1

1. Onko $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineaarikuvaus kun $f(x) = 0$?
2. Onko $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineaarikuvaus kun $f(x) = x^2$?
3. Onko $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineaarikuvaus kun $f(x) = x + 1$?
4. Onko $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineaarikuvaus kun $f(x) = 2x$?
5. Onko $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lineaarikuvaus kun $f(\mathbf{x}) = x_1$?
6. Onko $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lineaarikuvaus kun $f(\mathbf{x}) = \|x\|$?
7. Onko $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ lineaarikuvaus kun $f(x) = (x, x)^T$?
8. Onko $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ lineaarikuvaus kun $f(x) = (x, x^2)^T$?
9. Onko $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineaarikuvaus kun $f(\mathbf{x}) = (x_2, x_1)^T$?

Osoita määritelmän mukaan lineaarikuvauksen ominaisuudet tai esitä vastaesimerkki.

Avaruuden kantavektorit

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ kantavektoreiksi kutsutaan koordinaattiakseleiden suuntaisia yksikkövektoreita $\mathbf{e}_1 = (1\ 0\ 0\ \ldots\ 0)^T$, $\mathbf{e}_2 = (0\ 1\ 0\ \ldots\ 0)^T$, ..., $\mathbf{e}_n = (0\ 0\ \ldots\ 0\ 1)^T$.

Mikä tahansa $\mathbb{R}^n$:n vektori $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ voidaan esittää kantavektoreiden painotettuna summana

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n\ .$$

Lineaarikuvauksen ja matriisin yhteys (1/3)

Olkoon annettu lineaarikuvaus $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Tällöin

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) \\ &= f(x_1\mathbf{e}_1) + f(x_2\mathbf{e}_2) + \cdots + f(x_n\mathbf{e}_n) \\ &= x_1 \underbrace{f(\mathbf{e}_1)}_{\text{merk. } = \mathbf{f}_1} + x_2 \underbrace{f(\mathbf{e}_2)}_{\text{merk. } = \mathbf{f}_2} + \cdots + x_n \underbrace{f(\mathbf{e}_n)}_{\text{merk. } = \mathbf{f}_n}, \end{aligned}$$

joten lineaarikuvaus on määrätty yksikäsitteisesti, kun tunnetaan kuinka se kuvaa kantavektorit.

Lineaarikuvauksen ja matriisin yhteys (2/3)

Lasketaan edelleen

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) &= x_1\mathbf{f}_1 + x_2\mathbf{f}_2 + \cdots + x_n\mathbf{f}_n \\
&= x_1\begin{pmatrix} f_{1,1} & f_{2,1} & \dots & f_{m,1}\end{pmatrix}^T + x_2\begin{pmatrix} f_{1,2} & f_{2,2} & \dots & f_{m,2}\end{pmatrix}^T + \cdots + x_n\begin{pmatrix} f_{1,n} & f_{2,n} & \dots & f_{m,n}\end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix} x_1 f_{1,1} + x_2 f_{1,2} + \cdots + x_n f_{1,n} \\ x_1 f_{2,1} + x_2 f_{2,2} + \cdots + x_n f_{2,n} \\ \vdots \\ x_1 f_{m,1} + x_2 f_{m,2} + \cdots + x_n f_{m,n} \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{F}\mathbf{x} \ ,
\end{aligned}
$$

jossa

$$
\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \dots & f_{1,n} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \dots & f_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m,1} & f_{m,2} & \dots & f_{m,n} \end{pmatrix} .
$$

Lineaarikuvauksen ja matriisin yhteys (3/3)

Edellisen perusteella siis kaikki lineaarikuvaukset $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ voidaan esittää matriiseina.

Toisaalta matriisin ja vektorin tulon ominaisuuksien perusteella tiedämme, että matriisin kertominen vektorilla toteuttaa lineaarikuvauksen ominaisuudet. Tämän vuoksi lineaarikuvaukset $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ja matriisit $\mathbb{R}^{n \times m}$ voidaan samaistaa.

Lineaarikuvausten yhdistäminen

Olkoon annettu lineaarikuvauksen $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ja B: $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$, sekä mielivaltainen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Olkoon lisäksi **A** ja **B** annettuja lineaarikuvauksia vastaavat matriisit.

Tällöin

$$B(A(\mathbf{x})) = \mathbf{BAx} \ .$$

Harjoituksia LIN.2

Laske

1. lineaarikuvausta $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vastaava matriisi, kun $A(\mathbf{x}) = (x_1, x_2)^T$.
2. lineaarikuvausta $B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vastaava matriisi, kun $B(\mathbf{x}) = (2x_1, x_1 + x_2)^T$.
3. lineaarikuvausta $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vastaava matriisi, kun $C(\mathbf{x}) = (x_2, x_1)^T$.
4. lineaarikuvausta $D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vastaava matriisi, kun $D(\mathbf{x}) = (x_2 + x_1, x_2 - x_1)^T$.
5. yhdistetty kuvaus $\mathrm{B}(\mathrm{D}(\mathbf{x}))$ ja sitä vastaava matriisi.
6. edellisten tehtävien kuvausten arvo kun $\mathbf{x} = (2, -1)^T$.

Nettilähteitä

- https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion
- https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternions_and_spatial_rotation
- http://www.cprogramming.com/tutorial/3d/quaternions.html
- http://www.euclideanspace.com/maths/algebra/realNormedAlgebra/quaternions

Määritelmä

- Kvaterniot $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ varustettuna yhteenlaskulla, skalaarilla kertomisella sekä kvaternioiden välisellä kertolaskulla.
- Määritellään kanta $\overline{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$, $i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$, $j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ ja $k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$.
- Kvaternio $q = \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix}^T \in \mathbb{H}$ voidaan kirjoittaa muodossa $q = a\overline{1} + bi + cj + dk = a + bi + cj + dk$.

Yhteenlasku

- Olkoon $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$.
- Kahden kvaternion *summa*

$$
\begin{aligned}
q_1 + q_2 &= (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\
&= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k
\end{aligned}
$$

.

Kannan elementtien tulo

Kannan elementtien tulo

- Identiteetti $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ määrittelee tulon.
- Esimerkiksi $-k = (ijk)k = ijk^2 = ij(-1)$.
- Muut tapaukset:

$$\begin{aligned} ij &= k & \qquad ji &= -k \\ jk &= i & \qquad kj &= -i \\ ki &= j & \qquad ik &= -j \end{aligned}$$

Tulo

- Olkoon $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$.
- Kahden kvaternion *tulo*

$$
\begin{aligned}
q_1 q_2 &= (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\
&= (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) \\
&\quad +(a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2) i \\
&\quad +(a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2) j \\
&\quad +(a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_2 b_2 + d_1 a_2) k
\end{aligned}
$$

.

- Tämä määritelmä on suora seuraus kannan alkioiden tulon määritelmästä.

Kvaternioiden ominaisuuksia

Algebrallisesti kvaterniot muodostavat *vinokunnan*[2]: Olkoon $x, y, z \in \mathbb{H}$. Tällöin

1. $x + (y + z) = (x + y) + z$,
2. on olemassa $0 \in \mathbb{H}$ s.e kaikilla x pätee $x + 0 = x$,
3. kaikille x on olemassa $(-x)$ s.e $x + (-x) = 0$,
4. $x + y = y + x$,
5. $x(y + z) = xy + xz$,
6. $x(yz) = (xy)z$,
7. on olemassa 1 s.e kaikille x pätee $1x = x$ ja
8. kaikille $x \neq 0$ on olemassa x^{-1} s.e $xx^{-1} = 1$.

Huomaa että yleisesti ei päde

- $xy = yx$, sillä esimerkiksi $ij = k \neq -k = ji$.

[2] Käytetään myös nimitystä *jakorengas*

Kvaternioiden ominaisuuksia

Koska kvaterniot muodostavat vinokunnan, pätee niille:

- 0 ja 1 ovat yksikäsitteisiä.
- $x + y = x + z \ \Rightarrow y = z$.
- Jos $x \neq 0$, niin $xy = xz \ \Rightarrow y = z$.
- $--x = x$.

Lisäksi tulon määritelmästä seuraa:

- $x1 = x$.
- $x^{-1}x = xx^{-1} = 1$.

Huomaa että yleisesti ei päde $xy^{-1} = y^{-1}x$, joten ei pidä kirjoittaa $\frac{x}{y}$.

Jakaminen skalaari- ja vektoriosaan

- Kvaternio $q = (a, b, c, d) \in \mathbb{H}$ voidaan jakaa *reaaliosaan* $a \in \mathbb{R}$ ja *vektoriosaan* $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} b & c & d \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$.
- Tällöin yhteenlasku $\begin{pmatrix} a_1 & \mathbf{v}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}$, ja
- kertolasku $\begin{pmatrix} a_1 & \mathbf{v}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & a_1 \mathbf{v}_2 + a_2 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}$.

Konjugaatti, normi ja käänteisalkio

- Olkoon $q = \begin{pmatrix} a & \mathbf{v} \end{pmatrix}$. Tällöin $q^* = \begin{pmatrix} a & -\mathbf{v} \end{pmatrix}$ on q:n *konjugaatti*.
- *Normi* $\|q\| = \sqrt{q^* q} = \sqrt{a^2 + \|\mathbf{v}\|^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$.
- Olkoon $q \neq 0$. Tällöin käänteisalkio

$$q^{-1} = \frac{q^*}{qq^*} = \frac{q^*}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \,.$$

- Siis jos $\|q\| = 1$, niin $q^{-1} = q^*$.

Polaarimuoto ja kvaternion potenssi

- Kvaternioille voidaan johtaa yleistetty Eulerin kaava
$$e^{\hat{\mathbf{n}}\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \hat{\mathbf{n}}\sin\theta \end{pmatrix} \in \mathbb{H} \; .$$

- Olkoon $q = \begin{pmatrix} a & \mathbf{v} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$.
- *Polaarimuoto*
$$q = \|q\| e^{\hat{\mathbf{n}}\theta} \; ,$$
jossa
$$\theta = \arccos \frac{a}{\|q\|}, \text{ ja } \hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$$
.
- Kvaternion *potenssi*
$$q^{\alpha} = \|q\|^{\alpha} e^{\hat{\mathbf{n}}\theta\alpha}$$
.

Motivaatio (1/2)

Tavoitteena on määritellä järjestelmä, jonka avulla pisteitä voidaan siirtää koordinaatistosta toiseen ilman, että on tarvetta laskea välivaiheita eri koordinaatistoissa.

Pyritään määärittelemään edellisenkaltainen järjestelmä lineaarikuvausten avulla siten, että koordinaatistomuunnokset eri koordinaatistojen välillä voidaan kuvata yhdistetyillä lineaarikuvauksilla siten, että kaikille pisteille voidaan käyttää samaa yhdistettyä lineaarikuvausta.

Koska lineaarikuvaukset samaistettiin matriisien kanssa voidaan edellinen toteuttaa matriisien avulla[3] ja yhdistetyt lineaarikuvaukset voidaan muuntaa matriisien kertolaskuksi.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{B}(\mathbf{C}(\mathbf{x}))) &= \underbrace{\mathbf{ABC}}_{\mathbf{Q}}\,\mathbf{x} \\
\mathbf{A}(\mathbf{B}(\mathbf{C}(\mathbf{y}))) &= \mathbf{Q}\mathbf{y}
\end{aligned}
$$

[3] Edellyttäen tietenkin että se voidaan toteuttaa lineaarikuvausten avulla.

Motivaatio (2/2)

Ongelma: Lineaarikuvaukset kuvaavat origon origoksi $\Rightarrow$ Siirtoa ei voi kuvata lineaarikuvauksella.

Ratkaisu: Valitaan käytettävä avaruus siten, että origo ei kuulu kyseiseen avaruuteen.

1. Upotetaan $\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}^3$:een siten, että asetetaan kolmas koordinaatti aina arvoon 1.
2. Upotetaan $\mathbb{R}^3$ $\mathbb{R}^4$:ään siten, että asetetaan neljäs koordinaatti aina arvoon 1.

Tällä "tempulla" voidaan myös siirrot kuvata lineaarikuvauksella.
Esimerkkejä $\mathbb{R}^2$:ssa

$$\begin{aligned}(0,0) &\sim (0,0,1)^T \\ (x_1\ x_2) &\sim (x_1\ x_2\ 1)^T\end{aligned}$$

Esimerkkejä $\mathbb{R}^3$:ssa

$$\begin{aligned}(0\ 0\ 0) &\sim (0\ 0\ 0\ 1)^T \\ (x_1\ x_2\ x_3) &\sim (x_1\ x_2\ x_3\ 1)^T\end{aligned}$$

Määritelmä

- Edellä käytettiin vain homogeenisia koordinaatteja, joissa "ylimääräinen" koordinaatti oli aina 1.
- Laajennetaan avaruutta s.e ylimääräinen koordinaatti w voi olla mikä tahansa reaaliluku $w \neq 0$.
- Samaistetaan homogeeninen koordinaatti

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ w \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x_1/w \\ x_2/w \\ \vdots \\ x_n/w \end{pmatrix}, \tag{11}$$

  jossa $w \neq 0$.[4]
- https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/34/Affine_transformations.ogv
- Tätä hyödynnetään jatkossa perspektiivimuunnoksen yhteydessä.

[4] Tarkkaan ottaen olisi samaistettava $(x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)$ ja $\mathbb{R}^{n+1}$ suora $\{(wx_1\ wx_2\ \ldots\ wx_n\ w)\ :\ w \in \mathbb{R}\}$.

Siirto $\mathbb{R}^2$:ssa

Määritellään siirtomatriisi

$$\mathbf{T}(\Delta x_1, \Delta x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta x_1 \\ 0 & 1 & \Delta x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Matriisi riippuu siis kahdesta parametrista Δx_1 ja Δx_2.

Esimerkki

Siirretään pistettä (2 0) vektorin (1 2) verran.

Käytetään homogeenisia koordinaatteja:

$$(2\ 0) \sim (2\ 0\ 1)^T \ .$$

Siirtomatriisi $T(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Lasketaan siirron tulos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} \ .$$

Siirretty koordinaatti on siis (3 2) .

Siirtomatriisin käänteismatriisi $\mathbb{R}^2$:ssa

Olkoon annettu siirtomatriisi $\mathbf{T}(\Delta x_1, \Delta x_2) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Tällöin sen käänteismatriisi

$$\mathbf{T}(\Delta x_1, \Delta x_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\Delta x_1 \\ 0 & 1 & -\Delta x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Todistus:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\Delta x_1, \Delta x_2)\mathbf{T}(\Delta x_1, \Delta x_2)^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta x_1 \\ 0 & 1 & \Delta x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\Delta x_1 \\ 0 & 1 & -\Delta x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\Delta x_1 + \Delta x_1 \\ 0 & 1 & -\Delta x_2 + \Delta x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{I} . \end{aligned}$$

Harjoituksia HOMOG.1

1. Olkoon $\mathbf{x} = (3 \ \ -1 \ 1)^T$. Laske $\mathbf{T}(2, 2)\mathbf{x}$.
2. Olkoon $\mathbf{x}$ kuten edellä. Laske $\mathbf{T}(1, -2)\mathbf{T}(1, 2)\mathbf{x}$.
3. Olkoon $\mathbf{x}$ kuten edellä. Etsi matriisi $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, jolle $\mathbf{Ax} = (0 \ 0, \ \ )^T$. VIHJE: Etsi sopiva siirtomatriisi ja tarkasta että se toteuttaa annetun yhtälön.

Kierto $\mathbb{R}^2$:ssa

Vektoria kierretään origon ympäri kulman θ verran kiertomatriisilla

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Kiertomatriisi $\mathbf{R}(\theta)$ on ortogonaalinen, joten sen käänteismatriisi on $\mathbf{R}(\theta)^T$.

Esimerkki – Yhdistetty siirto ja kierto

Siirretään pistettä (2 0) vektorin (1 2) verran ja kierretään sen jälkeen $\frac{\pi}{2}$ radiaania.

Käytetään homogeenisia koordinaatteja:

$$(2\ 0) \sim (2\ 0\ 1)^T .$$

Siirtomatriisi $T(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ja kiertomatriisi $R(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Lasketaan kokonaismuunnosmatriisi

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Muunnettu homogeeninen koordinaatti on siten

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + 0 \cdot -1 + 1 \cdot -2 \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Skaalaus $\mathbb{R}^2$:ssa

Määritellään skaalausmatriisi

$$\mathbf{S}(k_1, k_2) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jossa k_1 on skaalaus x_1-akselin suunnassa ja k_2 x_2-akselin suunnassa. Mikäli skaalaus on 0 jonkin akselin suuntaan, saadaan kaikki pisteet projisoitua toiselle koordinaattiakselille. Mikäli skaalauskerroin on negatiivinen, saadaan aikaan peilaus toisen koordinaattiakselin suhteen.

Harjoituksia HOMOG.2

1. Laske edellisen esimerkin tehtävä siten, että suoritat ensin kierron ja sitten siirron.
2. Olkoon $\mathbf{x} = (1 \;\; -4 \;\; 1)^T$. Laske $\mathbf{R}(\frac{\pi}{3})\mathbf{T}(-1, 4)\mathbf{x}$.
3. Olkoon $\mathbf{x}$ kuten edellä. Laske $\mathbf{T}(-1, 4)\mathbf{R}(\frac{\pi}{3})\mathbf{x}$.
4. Osoita, että kiertomatriisi on ortogonaalinen. VIHJE: Laske että $\mathbf{R}(\theta)\mathbf{R}(\theta)^T = \mathbf{I}$.
5. Onko skaalausmatriisilla käänteismatriisia?
6. Peri matriisi- ja vektoriluokkamallista 2d-homogeenisten koordinaattien käsittelyyn omat luokkansa ja toteuta matriisiin kierto, siirto ja skaalaus.

Siirto $\mathbb{R}^3$:ssa

Määritellään siirtomatriisi

$$\mathbf{T}(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta x_1 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta x_2 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Vastaavasti sen käänteismatriisi

$$\mathbf{T}(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\Delta x_1 \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta x_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\Delta x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Kierto $\mathbb{R}^3$:ssa

Kierto on $\mathbb{R}^3$:ssa monimutkaisempi kuin $\mathbb{R}^2$:ssa, koska kierron akseli ei ole rajoittunut yhteen mahdolliseen suuntaan. Itse asiassa $\mathbb{R}^3$:ssa mahdollisia suuntia on ∞ monta.

Vektoria kierretään x_1-akselin ympäri ympäri kulman θ verran kiertomatriisilla

$$\mathbf{R}_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Kiertomatriisi $\mathbf{R}_1(\theta)$ on ortogonaalinen, joten sen käänteismatriisi on $\mathbf{R}_1(\theta)^T$.

Muut kierrot $\mathbb{R}^3$:ssa

Kierto x_2-akselin ympäri saadaan toteutettua matriisilla

$$\mathbf{R}_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ja x_3-akselin ympäri matriisilla

$$\mathbf{R}_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Myös nämä kiertomatriisit ovat ortogonaalisia.

Skaalaus $\mathbb{R}^3$:ssa

Määritellään skaalausmatriisi

$$\mathbf{S}(k_1, k_2, k_3) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jossa k_1 on skaalaus x_1-akselin, k_2 x_2-akselin ja k_3 x_3-akselin suunnassa.

Harjoituksia HOMOG.3

1. Piirrä tikku-ukko ruutupaperille siten, että sen vasemman jalan kärki on koordinaatiston origossa ja korkeus on 10 ruutua. Merkitse nivelten ja pään keskipisteen koordinaatit ruutupaperille. Laske seuraavien operaatioiden yhteinen muunnosmatriisi:
   - Skaalaa tikku-ukko 3 ruutua korkeaksi säilyttäen mittasuhteet.
   - Siirrä tikku-ukkoa x_1-suunnassa 4 ruutua vasemmalle ja x_2-suunnassa 3 ruutua ylös.
   - Kierrä ukkoa vastapäivään 45°, eli $\frac{\pi}{4}$ radiaania.
2. Piirrä edellisen tehtävän tikku-ukko muunnetuin koordinaatein. Laske muunnetut koordinaatit esimerkiksi käyttäen matriisi-luokkaa tai jotain matriisien laskennan osaavaa ohjelmistoa.
3. Peri matriisi- ja vektoriluokkamallista 3d-homogeenisten koordinaattien käsittelyyn omat luokkansa ja toteuta matriisiin kierrot, siirto ja skaalaus.

Kierto mielivaltaisen akselin ympäri

Kierto mielivaltaisen yksikkövektorin $\hat{\mathbf{n}}$ ympäri saadaan matriisilla $\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{n}}}(\theta) =$

$$\begin{pmatrix} n_1^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & n_1 n_2(1-cos\theta)-n_3\sin\theta & n_1 n_3(1-\cos\theta)+n_2\sin\theta & 0 \\ n_1 n_2(1-\cos\theta)+n_3\sin\theta & n_2^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & n_2 n_3(1-\cos\theta)-n_1\sin\theta & 0 \\ n_1 n_3(1-\cos\theta)-n_2\sin\theta & n_2 n_3(1-\cos\theta)+n_1\sin\theta & n_3^2(1-\cos\theta)+\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tässä siis kiertoakseli $\hat{\mathbf{n}} = (n_1 \ \ n_2 \ \ n_3)^T$ ja $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$. Kiertosuunta on oikeakätisessä koordinaatistossa vastapäivään.

Aito kvaternio (pure quaternion)

- *Aito kvaternio* on kvaternio jonka reaaliosa on 0.
- Aito kvaterio on siis muotoa $(0 \quad \mathbf{v})$.
- $\mathbb{R}^3$ vektorit ja aidot kvaterniot voidaan samaistaa.
- Tätä hyödyntäen voidaan $\mathbb{R}^3$ vektoreita kiertää käyttäen kvaternioiden kertolaskua.

Kierto kvaternioiden avulla

- Olkoon $v = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{v} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$, jossa $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ on kierrettävä vektori.
- Olkoon lisäksi $q = \begin{pmatrix} \cos \frac{\phi}{2} & \sin \frac{\phi}{2} \hat{\mathbf{u}} \end{pmatrix}$, jossa $\|\hat{\mathbf{u}}\| = 1$.
- Kierretty kvaternio $v' = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{v}' \end{pmatrix} = qvq^{-1}$,
- jossa kierretty vektori $\mathbf{v}' = \mathbf{R}(-\phi, \hat{\mathbf{u}})\mathbf{v}$.

Skaalaus mielivaltaisessa suunnassa

Skaalaus mielivaltaisen yksikkövektorin $\hat{\mathbf{n}}$ suunnassa saadaan matriisilla $\mathbf{S}_{\hat{\mathbf{n}}}(k) =$

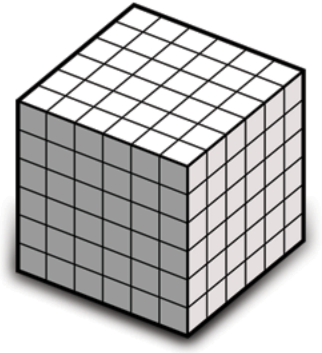
$$\begin{pmatrix} 1+(k-1)n_1^2 & (k-1)n_1n_2 & (k-1)n_1n_3 & 0 \\ (k-1)n_1n_2 & 1+(k-1)n_2^2 & (k-1)n_2n_3 & 0 \\ (k-1)n_1n_3 & (k-1)n_2n_3 & 1+(k-1)n_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Tässä siis skaalaussuunta $\hat{\mathbf{n}} = (n_1 \ \ n_2 \ \ n_3)^T$ ja $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$.

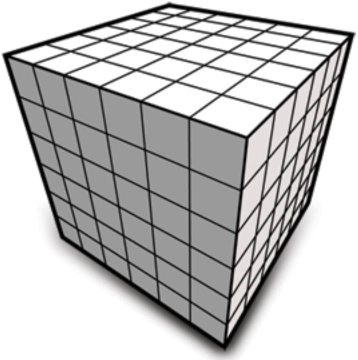
Yleistä

- Tarkastellaan seuraavaksi kuinka 3d-maailmankoordinaateissa olevat kappaleet projisoidaan 2d-tasolle (näytölle).
- Erilaisia projektioita:
    - Perspektiiviprojektio – Realistinen vaikutelma
    - Isometrinen projektio – Aksonometrinen, säilyttää samansuuntaisuuden
    - Vinoprojektiot – Cabinet, Cavalier jne.
    - Ja paljon muita. . .

Isometrinen vs. perspektiiviprojektio

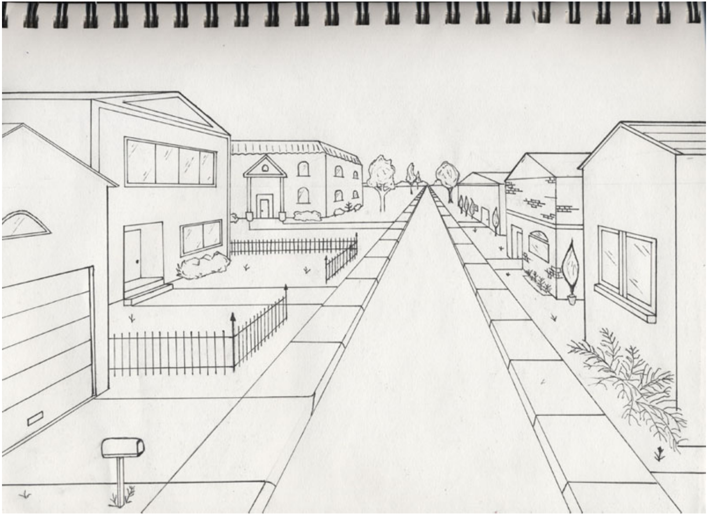


isometric projection



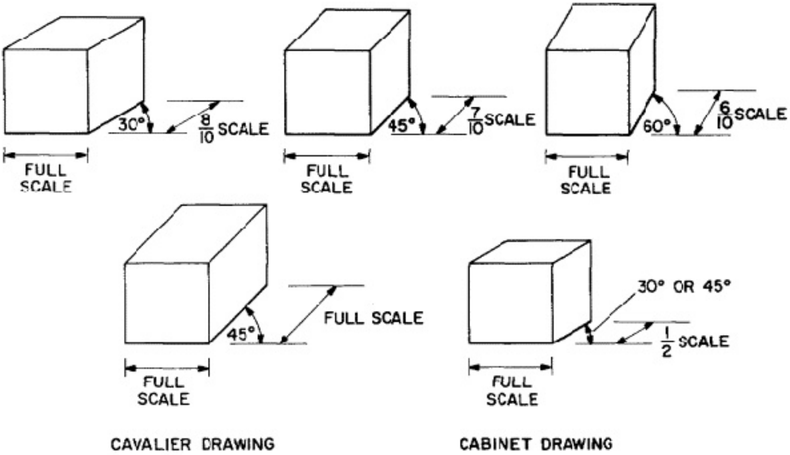
perspective projection

Perspektiiviprojektio



Isometrinen projektio

Vinoprojektiot



3d-maailmasta 2d-tasokuvaksi

Yleinen periaate perspektiivi- ja isometriselle projektiolle:

1. Kiinnitä kameran ominaisuudet:
   - Paikka, orientaatio
   - Kuvasuhde
   - Projektion tyyppi ja projektion parametrit = Kuvatilavuus (view volume)
2. Lasketaan muunnos jolla kuvatilavuus kuvautuu suorakulmaiseksi särmiöksi jonka kulmapisteet ovat $(\pm 1 \quad \pm 1\ 0 \text{ tai } -1)$.
3. Muunnetaan kulmapisteet tällä muunnoksella.
4. Leikataan näkymä särmiöön.
5. Piirretään särmiön sisältö filmitasolle.

Kameran parametrit perspektiiviprojektiossa

- $\mathbf{x}_{cam}$ = kameran positio
- $\mathbf{u}_{cam}$ = kameran yläsuunnan määräävä yksikkövektori
- $\mathbf{n}_{cam}$ = kameran filmitason yksikkönormaali
- θ_x, θ_y = Näkymän kulma
- d_{near}, d_{far} = Etu- ja takaleikkaustason etäisyys kamerasta

Kameramuunnoksen laskeminen perspektiiviprojektiossa

1. Siirretään kamera origoon muunnoksella $\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{x}_{cam}) = \mathbf{T}(-\mathbf{x}_{cam})$.
2. Kierretään kamera s.e $\mathbf{n}_{cam}$ osoittaa negatiivisen z-akselin suuntaan ja $\mathbf{u}_{cam}$ osoittaa positiivisen y-akselin suuntaan muunnoksella $\mathbf{M}$. Pitää siis löytää matriisi $\mathbf{M}$ joka kuvaa vektorin $\mathbf{n}_{cam} \mapsto (0\ 0\ \ -1)$ ja vektorin $\mathbf{u}_{cam} \mapsto (0\ 1\ 0)$. Palataan tähän ongelmaan myöhemmin.
3. Skaalataan takaleikkaustaso neliöksi $(\pm 1\ \ \pm 1\ \ -1)$ Tämä tehdään skaalaamalle ensin x- ja y-koordinaatit arvoon d_{far} ja sen jälkeen siirretään $x, y, z-$koordinaatit halutuiksi. Saadaan matriisit $S_{xy} = \text{diag}(\cot(\theta_x), \cot(\theta_y), 1, 1)$ ja $S_{xyx} = \text{diag}(1/d_{far}, 1/d_{far}, 1/d_{far}, 1)$. Kuvatilavuuden etuosan muodostaa nyt neliö $(\pm k\ \pm k\ -k)$, jossa $k = d_{near}/d_{far}$.
4. Muodostetaan perspektiiviprojektion matriisi
$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k-1} & \frac{k}{k-1} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
5. Kameramuunnos saadaan siis matriisilla $\mathbf{D}S_{xyx}S_{xy}\mathbf{MT}(-\mathbf{x}_{cam})$. Tällöin kuvatilavuus on kuvautunut suorakulmaiseen särmiöön $(\pm 1\ \pm 1\ 0$ tai $\ -1)$.

Muunnos $\mathbf{M}$

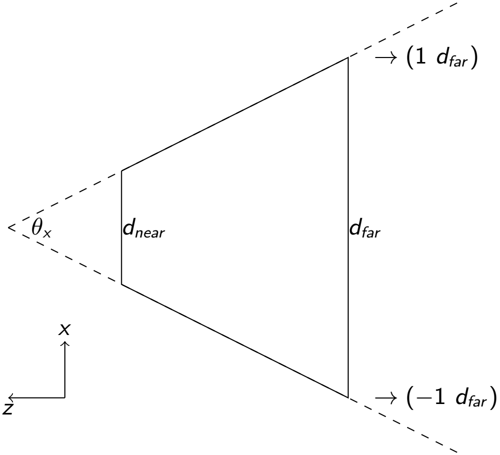
- Kameran suunta on kiinnitetty yksikkövektorien $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{n}$ avulla.
- Kameran muunnettu suunta on kiinnitetty vastaavasti kantavektorien $\mathbf{e}_2$ ja $-\mathbf{e}_3$.
- Tavoitteena löytää $\mathbf{M}$ s.e $\mathbf{M}\mathbf{u} = \mathbf{e}_2$ ja $\mathbf{M}\mathbf{n} = -\mathbf{e}_3$.
- Tämä ei kuitenkaan vielä kiinnitä matriisia $\mathbf{M}$ yksikäsitteisesti.
- Lasketaan apuvektorit $\mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{n}$ ja $-\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3$.
- Vaaditaan lisäksi että $\mathbf{M}\mathbf{v} = -\mathbf{e}_1$.
- Kirjoitetaan matriisimuodossa

$$\mathbf{M}\begin{pmatrix}\mathbf{v} & \mathbf{u} & \mathbf{n}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

josta saadaan ratkaistua

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{v} & \mathbf{u} & \mathbf{n}\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}-\mathbf{v} & \mathbf{u} & -\mathbf{n}\end{pmatrix}^T$$

Harjoituksia – Muunnos $\mathbf{S}_{xy}$



(Ex 1) Johda muunnos $\mathbf{S}_{xy}$. VIHJE: Johda muunnos erikseen x- ja y-akseleiden suuntaan ja yhdistä ne.

Diagonaalimatriisi diag(k_x k_y k_z 1) skaalaa x koordinaattia kertoimella k_x, y koordinaattia kertoimella k_y jne.

Muunnos D

- Olkoon meillä piste $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$ homogeenisissa koordinaateissa. Lasketaan

$$\mathbf{Dx} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k-1} & \frac{k}{k-1} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{z-k}{k-1} \\ -z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -x/z \\ -y/z \\ \frac{-1}{k-1} + \frac{k}{z(k-1)} \end{pmatrix} .$$

- Periaatteessa z-koordinaatti ei enää kiinnosta, paitsi käytettäessä z-puskuroinnissa.

Kameran parametrit vinoprojektiossa

- $\mathbf{x}_{cam}$ = kameran positio
- $\mathbf{u}_{cam}$ = kameran yläsuunnan määräävä yksikkövektori
- $\mathbf{n}_{cam}$ = kameran filmitason yksikkönormaali
- w_x, w_y = Näkymän korkeus ja leveys

Kameramuunnoksen laskeminen vinoprojektiossa

- Position ja orientaation muunnos kuten perspektiiviprojektiossa.
- Skaalataan maailmankoordinaatisto sopivaksi.
- Kuvausmatriisi

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -k\cos\alpha & 0 \\ 0 & 1 & -k\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

  jossa k ja α määräävät projektion tyypin.
- Cavalier-projektio: $k = 1$, $\alpha = 30^\circ$ tai $\alpha = 45^\circ$
- Cabinet-projektio: $k = 0.5$, $\alpha = 30^\circ$ tai $\alpha = 45^\circ$

Kameramuunnoksen laskeminen isometrisessä projektiossa

- Position ja orientaation muunnos kuten perspektiiviprojektiossa.
- Skaalaus kuten vinoprojektiossa.
- Kuvausmatriisi

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Lisätietoja

- https://en.wikipedia.org/wiki/3D_projection
- https://en.wikipedia.org/wiki/Isometric_projection
- https://en.wikipedia.org/wiki/Oblique_projection

Harjoituksia

(Ex 2) Lisää matriisiluokkaan perspektiivimuunnoksen vaatimat matriisit.

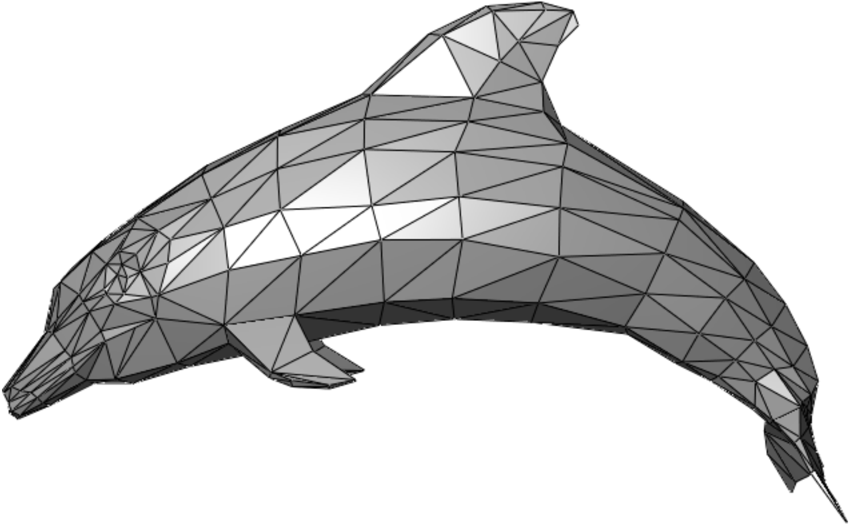
(Ex 3) Tutki miten saat perspektiivimuunnoksen toteutettua OpenGL:llä ja kirjoita yksinkertainen testiohjelma.

Perusteet

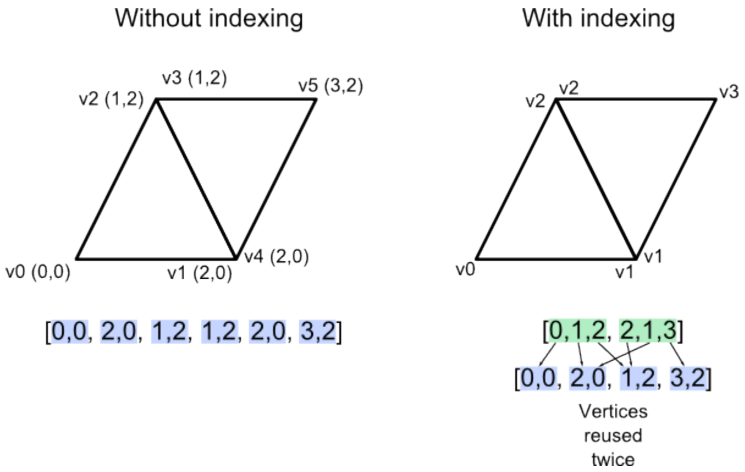
Yleensä 3D-kappaleet piirretään siten että:

- Vain piirrettävän kappaleen pinta piirretään.
- Piirrettävä pinta jaetaan tasomaisiin monikulmioihin, usein kolmioihin (triangle mesh).
- Yleensä kolmioiden kärkipisteet talletetaan erillisen listaan (vertexlist).
  - Kun useampi kolmio jakaa yhteisen kärkipisteen talletetaan se listaan vain kerran.
  - Kolmioiden kulmapisteiden indeksit talletetaan toiseen listaan (indexlist).
  - On myös mahdollista tallettaa kärkipisteet kolmioittain, jolloin indeksilistaa ei käytetä.
- Kolmioinnin päällä käytetään usein jotain tehosteita kuten esimerkiksi teksturointia, valaistusmalleja jne., joilla pinta saadaan näyttämään luonnollisemmalta.

Kolmiointi



Indeksointi



Objektien luonti

- Periaatteessa kappaleet voi luoda kirjoittamalla kolmiointi ja indeksointi koodiin.
  - Kärkipisteet kirjoitetaan suoraan listana tai
  - kärkipisteet lasketaan jollain algoritmilla.
  - Monimutkaisissa kappaleissa yleensä epäkäytännöllistä.
- Tavallisesti kappaleet suunnitellaan erillisillä piirtotyökaluilla, kuten esimerkiksi blender tai AUTODESK 3DS MAX .
- Siirto piirto-ohjelmasta ulkoiseen sovellukseen tapahtuu tiedoston kautta.
- Tarkastellaan tässä yhteydessä OBJ-tiedostotyyppiä.

Yleistä

- bar

foo

- bar

foo

- bar

foo

- bar

foo

- bar

foo

- bar

foo

- bar

foo

- bar

foo

- bar

foo

- bar

foo

- bar

foo

- bar

foo

- bar

foo

- bar