第 5 回　関数列

問題 5.1. 次の関数 $f_n(x)$ に対して, 関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1,2,\dots}$ の一様収束性を調べよ.

(1) $f_n(x) = xe^{-nx}$　(2) $f_n(x) = \dfrac{nx}{nx+1}$　(3) $f_n(x) = nx(1-x)^n$　$(0 < x < 1)$

(4) $f_n(x) = 1 + x^2 - \dfrac{1}{(1+x^2)^{n-1}}$

問題 5.2. 次の級数の一様収束性を調べよ.

(1) $\sum xe^{-nx}$　(2) $\sum \dfrac{1}{x^2+n^2}$　(3) $\sum \dfrac{x^2}{n^2x+1}$　$(x > 0)$　(4) $\sum \dfrac{1}{n^a + n^b x^2}$　$(a > 0)$

(5) $\sum ne^{-nx}$　(6) $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+\sin x}$　(7) $\sum \dfrac{x^{n-1}}{1+x^n}$　$(|x| \leq q < 1)$

問題 5.3. $u_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2} - \dfrac{x}{1+(n+1)^2x^2}$ とおくとき, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ の (1) 一様収束性 (2) 極限関数の連続性 (3) 項別積分可能性 (4) 項別微分可能性　について調べよ.

問題 5.4. 函数項級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}$$

は $[0, 1]$ 上で一様収束するか.

問題 5.5. $\alpha > 0$ のとき $f_n(x) = n^{\alpha} x e^{-nx^2}$ について,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^x f_n(t)dt = \int_0^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt$$

となるような α の値を求めよ.

問題 5.6. 次の極限を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^e \frac{n}{\sin x + nx} dx$$

問題 5.7. f を $I = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$ 上の実数値連続関数とする. $n \in \mathbb{N}$ に対し, I 上の関数 f_n を $f_n(x) = f(x+n)$ で定める. $\{f_n(x)\}$ が I 上一様収束するとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ で定めると, g は I 上で一様連続であることを示せ.

(2) f は I 上で一様連続であることを示せ.

問題 5.8. 区間 I 上で与えられた有界な関数列 $\{f_n(x)\}$ が I 上で一様に $f(x)$ に収束するならば, $e^{f_n(x)}$ は I 上で一様に $e^{f(x)}$ に収束することを示せ.

問題 5.9. 実数 $x \geqslant 0$ と整数 $n \geqslant 1$ に対し, $f_n(x) = x^{\frac{n}{n+1}}$ と定める.

(1) 関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は $[0, 2)$ 上で一様収束するか.

(2) 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin(f_n(x)^n)$ は $[0, 1)$ 上で各点収束するか, また一様収束するか.

問題 5.10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ は用いてよい.

(1) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{x^2 + n^4}$ は収束し, その極限値 $f(x)$ は x について連続であることを示せ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$ が収束することを示し, その値を求めよ.

問題 5.11. p を実数とする. $\mathbb{R}$ 上の関数 $f_n(x) = n^p x - n^{p+1} \sin \dfrac{x}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ に対し, 以下の問いに答えよ.

(1) $p < 2$ ならばすべての $x \in \mathbb{R}$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ であることを示せ.

(2) $p < 1$ ならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は任意の有界閉区間上で一様収束することを示せ.

(3) 関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{R}$ 上で一様収束しないことを示せ.

問題 5.12. 以下の問いに答えよ.

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right)$ が存在することを示せ.

(2) 数列 $\{A_n\}, \{B_n\}$ を

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}, B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$$

により定義する. 正整数 p, q に対して $\lim_{n\to\infty}(A_{pn} - B_{qn})$ を求めよ.

問題 5.13. 次の整級数の収束半径を求めよ.

(1) $\sum nx^n$ (2) $\sum \frac{x^{n-1}}{n\log(n+1)}$ (3) $\sum \frac{x^n}{n^2 2^n}$ (4) $\sum \frac{(-1)^n}{2n} x^{2n}$ (5) $\sum \frac{x^n}{n}\log(1+\frac{1}{n})$
(6) $\sum (-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)x^n$ (7) $\sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

問題 5.14. 次の関数の $x = 0$ のまわりの整級数展開を求めよ.

(1) $\frac{1}{1-x-x^2}$ (2) $(\cos x)^2$ (3) $\log(x+\sqrt{1+x^2})$ (4) $\frac{\log(1+x)}{1-x}$ (5) $\sin^{-1} x$
(6) $e^x \sin x$ (7) $y = \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$

問題 5.15. フィボナッチ数列 $a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 2)$ を係数とする整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の表す関数を求めよ. また, a_n の一般形を決定し, 収束半径も求めよ.

問題 5.16. 次の関数の $x = 0$ のまわりの整級数展開の第 4 項までを求めよ.

$$y = \frac{1}{\cos x}$$

問題 5.17. 次の関数の $x = 0$ のまわりの整級数展開を求めよ.

$$\int_0^x \sqrt{1+t^3}dt$$

問題 5.18. 次の整級数が表す関数を求めよ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$$

問題 5.19. 次の無限級数の和を求めよ.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ (3) $\frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}$

問題 5.20. (1) 次の等式を示せ. (ヒント : $\tan^{-1} x$ の整級数展開)

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2\sqrt{3}}{(2n+1)3^n}$$

(2) $\pi > 3.1$ を示せ.