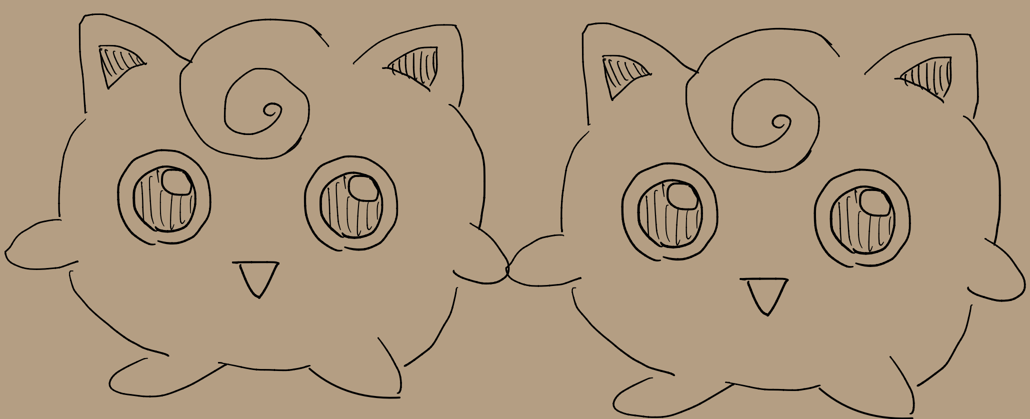
§2 関数の極限と連続性



§2.1 連続

数列の極限と同じように考える。

Def 1.1 $c \in \mathbb{R}$, f が c のある近傍上で定義された関数とする（c で定義されていてもされていなくてもよい）
x が c に近づくときの $f(x)$ の極限が α であるとは，

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \text{s.t.} \ 0 < |x - c| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

が成立するときをいい，$\lim_{x \to c} f(x) = \alpha$ と書く。

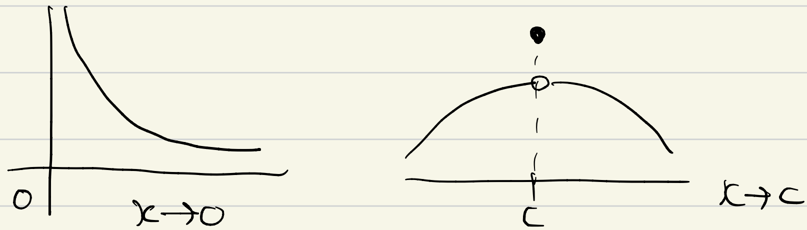
たいてい $\lim_{x \to c} f(x)$ を考えるとき，言われなくとも c の近傍が定義域に含まれているとする。

Def 1.2 f が c で連続であるとは $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ が成立するとき。つまり，

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \text{s.t.} \ |x - c| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

が成立するときをいう。

※ 極限の方ではたいてい $0<|x-c|<\delta$ として $x=c$ を入れない。これは $x=c$ で定義されていなかったり，値が外れているときも考えたいため。



連続の方では $|x-c|<\delta$ として $x=c$ を入れているが当然 $0<|x-c|<\delta$ と同値なので，入れても入れなくてもよい。

※ 他にも，例えば $\lim_{x\to\infty} f(x)=\alpha$ は

$$\forall \varepsilon>0\ \exists M>0 \text{ s.t. } x>M \Longrightarrow |f(x)-\alpha|<\varepsilon$$

が成立するときをいう。$\lim_{x\to c} f(x)=\infty$ は

$$\forall M>0\ \exists \delta>0 \text{ s.t. } 0<|x-c|<\delta \Longrightarrow f(x)>M$$

が成立するときをいう。

$x\to\infty$ は数列のときと同じ。もちろん $x\to\infty$ を考えるなら f の定義域は $\mathbb{R}$ や (a,∞) の形。

Thm 1.3 (1), (2) は同値

(1) $\lim_{x \to c} f(x) = \alpha$

(2) $x_n \neq c$, $x_n \to c$ なる任意の数列 (x_n) に対し, $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \alpha$

(∵) (1) ⇒ (2) $\forall \varepsilon > 0$ をとる. $\exists \delta > 0$ s.t. $0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$.

$x_n \neq c$, $x_n \to c$ なる数列 (x_n) を任意にとると, $\exists N$ s.t. $n \geq N \Rightarrow$

$0 < |x_n - c| < \delta$. ∴ $n \geq N \Rightarrow |f(x_n) - \alpha| < \varepsilon$ //

(2) ⇒ (1) 背理法. f が $x \to c$ で α に収束しないとすると,

$\exists \varepsilon_0 > 0$ s.t. $\forall \delta > 0$ $\exists x_\delta$ s.t. $0 < |x_\delta - c| < \delta$ かつ $|f(x_\delta) - \alpha| \geq \varepsilon_0$

が成立する. $\delta = \frac{1}{n}$, $x_\delta = a_n$ と書くことにすると,

$0 < |a_n - c| < \frac{1}{n}$ より $a_n \neq c$, $a_n \to c$. しかし $|f(a_n) - \alpha| \geq \varepsilon_0$

よりこれは (2) に矛盾 //

このThmより関数の極限を数列の極限と結び付けることができた (これはスゴイこと)

よってこのThmを用いると, 次のPrp 1.4 ~ Prp 1.6 は

数列のときと全く同様に示せる.

Prop 1.4 極限が存在するならば、一意に定まる。

Prop 1.5 $f(x) \to \alpha$, $g(x) \to \beta$ $(x \to c)$ とする。

(1) $\displaystyle\lim_{x \to c}(f(x) \pm g(x)) = \alpha \pm \beta$ (2) $\displaystyle\lim_{x \to c} f(x)g(x) = \alpha\beta$

(3) $\displaystyle\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$ $(g(x) \neq 0, \beta \neq 0)$

Prop 1.6 $f, g : I \to \mathbb{R}$ 共に連続ならば、$f+g$, fg, $\dfrac{f}{g}$ $(g \neq 0)$ も I 上連続。

ex 1.7 $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$。$\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$ は存在しない

(∵) $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$ とおく。(x_n) は $x_n \neq 0$, $x_n \to 0$ なる数列で

$f(x_n) = 0$ より $\displaystyle\lim_{n \to \infty} f(x_n) = 0$。

一方 $y_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ とおくと (y_n) は $y_n \neq 0$, $y_n \to 0$ なる数列で

$f(y_n) = 1$ より $\displaystyle\lim_{n \to \infty} f(y_n) = 1$。

∴ Thm 1.3 より $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$ は存在しない //

つづいて連続関数の性質を見ていく。

Thm 1.8 (中間値の定理)

f は $[a,b]$ 上連続, $f(a) \neq f(b)$ とする. このとき $f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 μ に対し, $f(c)=\mu$ なる $c \in (a,b)$ が存在する.

∵ $f(a) < f(b)$ としてよい. $f(a) \leq \mu \leq f(b)$ なる μ を任意にとる. $a_0 = a$, $b_0 = b$, $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2} = \frac{a+b}{2}$ とおく.

$f(c_0) > \mu$ のとき, $a_1 = c_0$, $b_1 = b_0$, $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$,

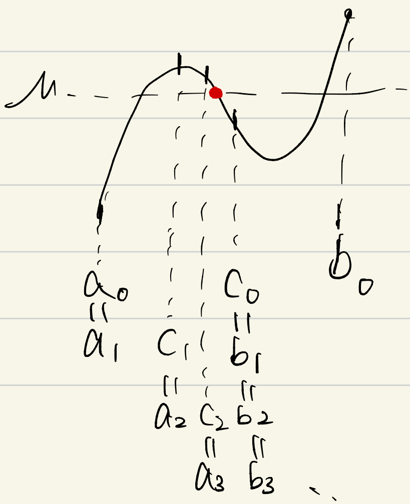
$f(c_0) \leq \mu$ のとき, $a_1 = a_0$, $b_1 = c_0$, $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$

と定める. この操作を繰り返す.

このとき (a_n) は単増, (b_n) は単減 で, $|b_n - a_n| = \frac{b-a}{2^n} \to 0$

∴ 区間縮小法 より, $a_n \to \alpha$, $b_n \to \alpha$ なる $\alpha \in (a,b)$ が存在する.

一方 $f(a_n) \leq \mu \leq f(b_n)$ であり f は連続なので $n \to \infty$ とすると, $\mu = f(\alpha)$ //



"2分法"

Thm1.9 有界閉区間上の連続関数は有界

(∵) $f: I=[a,b]\to\mathbb{R}$: 連続. fが有界でないとすると,

$\forall n\ \exists x_n\in I$ s.t. $|f(x_n)|\geq n$

が成立する. (x_n)は有界列より収束部分列をもつ. $x_{n_k}\to\alpha$ とおくと $\alpha\in I$. fは連続なので $f(x_{n_k})\to f(\alpha)$. しかし $|f(x_{n_k})|\geq n_k$ より $k\to\infty$とすると $|f(\alpha)|\geq\infty$ となって矛盾する//

Thm1.10 有界閉区間上の連続関数は最大値と最小値をもつ.

(∵) $f: I=[a,b]\to\mathbb{R}$: 連続. Thm1.9より有界より $\alpha=\sup f(x)$とおく. supの定義より, $\exists x_n\in I$ s.t. $\alpha-\frac{1}{n}\leq f(x_n)\leq\alpha$. (x_n)は有界列より収束部分列をもつ. $x_{n_k}\to\beta$とおくと fは連続なので $f(x_{n_k})\to f(\beta)$ ∴ $\alpha-\frac{1}{n_k}\leq f(x_{n_k})\leq\alpha$ より $k\to\infty$とすると $\alpha=f(\beta)$

∴ supを実現する$\beta\in I$が存在するので $\alpha=\max f(x)$ // minも同じ//

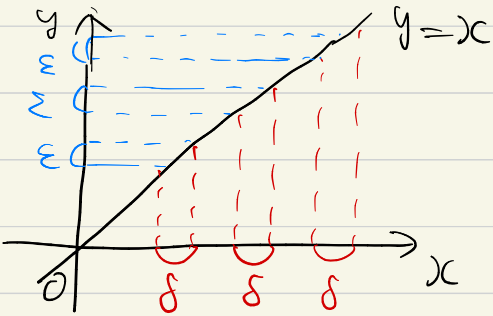
※ 有界閉区間でないと成立しない.

ex $I=(0,1]$, $f(x)=\frac{1}{x}$　fはI上有界でない

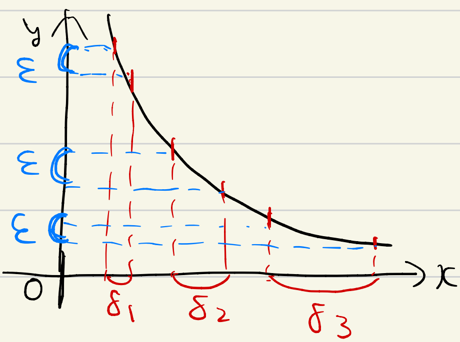
ex $I=(0,1]$, $f(x)=x$　fはI上最小値をもたない.

§1.2 一様連続

「xがcに"十分"近づくと，$f(x)$も$f(c)$に近づく」これが連続の定義。この"十分"の程度がcに依らないとき，一様連続という。



一様連続の例。



一様連続でない例。
同じ幅εをとりたいなら，xが0に近いとき幅δはかなり小さくとらないといけない。

グラフ全体を左右に$\pm\delta$だけシェイクしたとき，上下が$\pm\varepsilon$の幅に収まるときが一様連続。

Def 2.1 $f : I \to \mathbb{R}$ が I 上で一様連続であるとは、

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ s.t. $x, y \in I,\ |x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

が成立するときをいう。

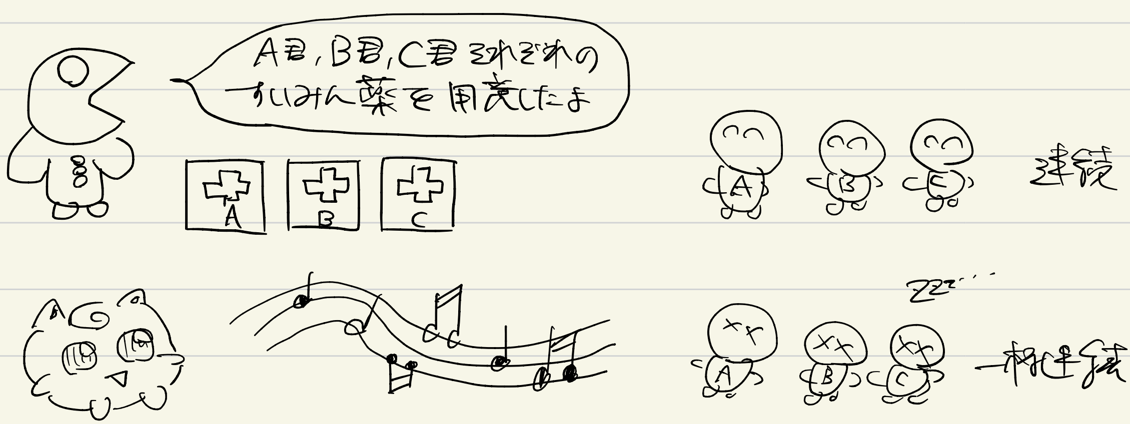
Prop 2.2 f が有界閉区間 I 上で連続 $\Rightarrow$ I 上一様連続。

ハイリホー。f が I 上一様連続でないとすると、

$\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x_\delta, y_\delta \in I$ s.t. $|x_\delta - y_\delta| < \delta$ かつ $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon_0$

が成立する。$\delta = \frac{1}{n}$, $x_\delta = w_n$, $y_\delta = z_n$ とすると、I は有界より $\{w_n\}$ は収束部分列 $\{w_{n_k}\}$ をもつ。$w_{n_k} \to c$ とおく。

$|w_{n_k} - z_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$ より $w_{n_k} - z_{n_k} \to 0$ より $z_{n_k} \to c$. $\therefore$ f は I 上連続なので、$f(w_{n_k}) \to f(c)$, $f(z_{n_k}) \to f(c)$. しかし $|f(w_{n_k}) - f(z_{n_k})| \geq \varepsilon_0$ より $k \to \infty$ とすると、$0 \geq \varepsilon_0$ で矛盾 //



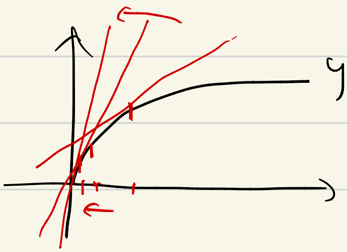
§1.3 Lipshitz 連続

<u>Def</u> f が I 上で Lipshitz 連続であるとは,

$\forall x, y \in I \ \exists C > 0$ s.t. $|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|$

が成立するときをいう.

つまり $\dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq C$ $(x \neq y)$ であるから, f のグラフの傾きが上でおさえられる, つまり急すぎない.



$x \to 0$ のとき接線の傾き $\to \infty$.

だからリプシッツ連続でない.

もっと一般に, $\alpha \in (0, 1]$ に対し

$\forall x, y \in I \ \exists C > 0$ s.t. $|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^{\alpha}$

が成立するとき α-Hölder 連続という. くわしくは PDE の方でやる. 包含関係は,

$C^1 \Rightarrow$ Lipshitz $\Rightarrow$ α-Hölder $\Rightarrow$ 一様連続 $\Rightarrow$ 連続

証明は演習でやる.

※ 右連続と左連続はあまり使わない.
上半連続と下半連続（上連続と下連続とは言わない）は良く使うけど, これは関数解析である.

※ 絶対連続はあまり使わないけど便利な定理が1つあり, これは Lebesgue 積分である.