§3　1変数関数の微分

1 微分の定義

微分とは関数を1次近似する操作である。
これをまず説明する。

<u>Def 1.1</u> I：開区間，$f: I \to \mathbb{R}$ とする。$x_0 \in I$ で

f が微分可能であるとは，

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \left(\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right)$$

が存在するときをいう。この値を f の x_0 における

微分係数といい，$f'(x_0)$ や $\frac{df}{dx}(x_0)$ と書く。

$f'(x_0) = \alpha$ とする。$g(x) = f(x) - f(x_0) - \alpha(x - x_0)$ とおくと，

$\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{x - x_0} = 0$，つまり $g(x) = o(x - x_0)$ $(x \to x_0)$ より，

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x - x_0) + o(x - x_0) \quad (x \to x_0)$$

と表せる。つまり，$x \to x_0$ のとき，

$$f(x) = 1\text{次関数} + \text{「誤差」}$$

となる。f はほぼ1次関数となる。

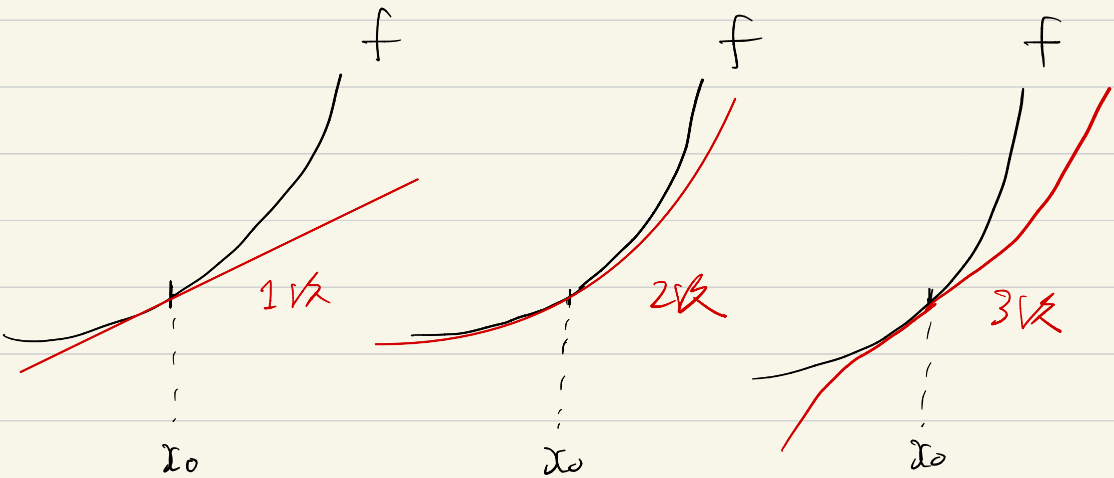
また，逆に $f(x)=f(x_0)+m(x-x_0)+o(x-x_0)$ と表せた
とすると，

$$\alpha(x-x_0)+o(x-x_0)=m(x-x_0)+o(x-x_0)$$

$$\therefore (\alpha-m)(x-x_0)=o(x-x_0)$$

∴ $\alpha=m$ となるので，f の x_0 における，最も精度良く
近似する直線は接線だとわかる。

より精密には 1次関数 よりも速く収束する 2次関数の方が良い。また 2次よりも 3次，3次より 4次，・・・ $\Longrightarrow$ Taylorの定理（図）



Prop 1.2 f, g は I 上微分可能とする.

(1) f は I 上連続

(2) $f \pm g$, fg, $\frac{f}{g}$ $(g \neq 0)$ も I 上微分可能で,

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

∵ (1) $\displaystyle\lim_{x \to a}(f(x) - f(a)) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$

$$= \left(\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right)\left(\lim_{x \to a}(x - a)\right) = f'(a) \cdot 0 = 0 \quad //$$

Prop 1.3 (ライプニッツ) f, g は I 上 n 回微分可能とする.

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

∵ ギノーホー. しかし1度は手を動かしてみるべき //

Prop 1.4 f : I 上微分可能, g : J 上微分可能,

$f(I) \subset J$ とする. このとき

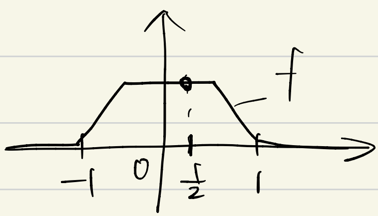
$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) f'(x)$$

∵ 手を動かして! 多次元の方に一般の証明を載せた //

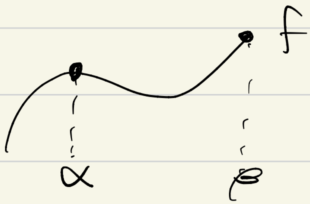
2 平均値の定理

まずはラグランジュの平均値の定理について述べる。

Def 2.1 f が $x \in I$ で極大値をとるとは、ある x の近傍 $U(x,\delta) \subset I$ 内で $f(x)$ が最大値であるときをいう。



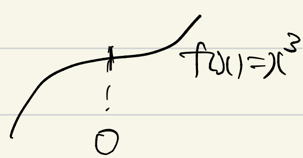
f は $\frac{1}{2}$ で極大値をとる。
$f(\frac{1}{2})$ は極小値でもある。



f は α で極大値をとる。
f は β で極大値をとらない。

Prop 2.2 f が I 上微分可能とする。f が $x \in I$ で極値をとるならば、$f'(x)=0$.

逆が成立しないことは高校のとき何度も言われたことだろう! $f(x)=x^3$ は $f'(0)=0$ だが $x=0$ で極値をとらない。



proof of Prop 2.2

f が $x \in I$ で極大値をとるとする. $\exists \delta > 0$ s.t. $(x-\delta, x+\delta) \cap I$ 上 $f(x)$ が最大値. $|h| < \delta$ なるような h を十分小さくとると, $f(x+h) - f(x) \leq 0$ なので,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0+0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq 0$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0-0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$$

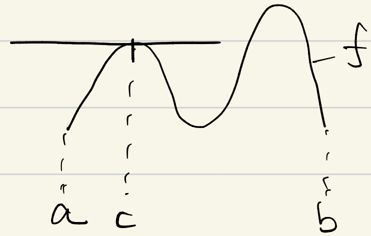
//

Thm 2.3 (Rolleの定理)

f が $[a, b]$ で連続, (a, b) で微分可能とする. $f(a) = f(b)$ ならば, $\exists c \in (a, b)$ s.t. $f'(c) = 0$

$\because$ f が定数関数なら明らか. そうでないとする. f は $[a, b]$ 上連続なので最大値と最小値をとる. $f(c_1) = \max f$, $f(c_2) = \min f$ とおく. c_1, c_2 少なくとも一方は (a, b) に属す. $c_1 \in (a, b)$ とすると, $c_1 \pm \delta \in (a, b)$ なる $\delta > 0$ をとると f は c_1 で極値をとる. $\therefore f'(c_1) = 0$ //

ロルの定理は $f(a)=f(b)$ のとき
x 軸と平行な接線がひける
という当たり前のことをいっている.
しかし色々な定理の証明で使える.

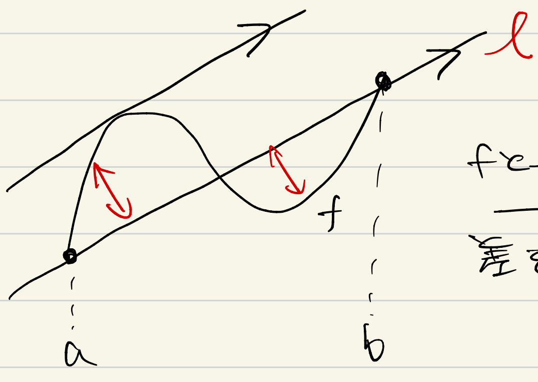


Thm2.4（平均値の定理）

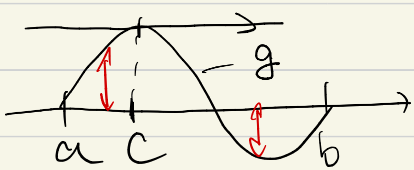
f は $[a,b]$ で連続，(a,b) で微分可能とする．このとき

$$\exists c\in(a,b)\ \text{s.t.}\ \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

(∵) $g(x)=f(x)-\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right)$ とおく．$g(a)=g(b)$
よりロルの定理から $\exists c\in(a,b)$ s.t. $g'(c)=0$ //



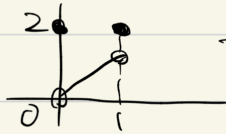
f と ℓ との $\longrightarrow$ 差をとる



※ $[a,b]$ で微分可能, としてもよいが, $x=a$, $x=b$ での微分は片側微分で定義する必要がある.

一方, f は (a,b) で連続としてはいけない.

<u>ex</u> $f(x)=\begin{cases} x & (x\neq 0,1) \\ 2 & (x=0,1) \end{cases}$



$\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=0$!

<u>Cor 2.5</u> f は (a,b) 上微分可能. (1), (2) は同値.

(1) f は (a,b) 上定数

(2) $f'(t)=0 \quad (\forall t\in(a,b))$

∵ (1) ⇒ (2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$ //

(2) ⇒ (1) $\forall x,y\in(a,b)$, $x<y$ をとる. $[x,y]$ に平均値の定理を用いると $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(c)=0$ ∴ $f(x)=f(y)$ //

<u>Cor 2.6</u> f は $[a,b]$ 上連続, (a,b) 上微分可能. (1), (2) は同値.

(1) f は $[a,b]$ 上単調増加

(2) $f'(t)\geq 0 \quad (\forall t\in(a,b))$

∵ Cor 2.5 とほぼ同じ //

$\boxed{3}$ Taylorの定理

Taylorの定理（の系，漸近展開）により，n次近似式ができることを見る。

Thm 3.1（Taylorの定理）

fは(a,b)上n回微分可能とする。$\forall x, x_0 \in (a,b)$に対し，

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$$

なるcがxとx_0の間に存在する。

$R_n = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$ をラグランジュの剰余という。

$c = x_0 + \theta(x-x_0)$ $(0<\theta<1)$ で表し，

$$R_n = \frac{f^{(n)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}(x-x_0)^n$$

をコーシーの剰余という。

後でやるTaylor展開は，$\sin x$やe^xはラグランジュの剰余を，$\log(1+x)$や$(1+x)^\alpha$はコーシーの剰余を用いて示す。
（$\frac{1}{n}$の有無が大事）

Prf of Thm 3.1

$$A = \frac{n!}{(x-x_0)^n}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right)$$

$$F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{A}{n!}(x-t)^n$$

とおく. $F(x)=F(x_0)$ よりロルの定理から $F'(c)=0$ なる c が x と x_0 の間に存在する. さて

$$F'(t) = -f'(t) - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}\right) + \frac{A}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}$$

$$= -f'(t) - \left(-f'(t) + \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\right) + \frac{A}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\left(A - f^{(n)}(t)\right)(x-t)^{n-1}$$

より, $F'(c) = 0$ なので $x \neq c$ より $A = f^{(n)}(c)$ //

Cor 3.2 (漸近展開)

f が x_0 の近傍で C^n 級とすると,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right) \quad (x \to x_0)$$

"n 次近似"

∵ $g(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ とおく. $f^{(n)}$ は連続より,

$$\frac{g(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(c) - f^{(n)}(x_0)\right) \xrightarrow{x \to x_0} 0 \quad //$$

(実は n 回微分で大丈夫! ⟹ 演習)

Def 3.3 (Taylor 展開)

f が x_0 の近傍で C^∞ 級とする. 剰余項 R_n が $|R_n| \to 0$ $(n \to \infty)$ となるとき,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

と表せる. これを f の x_0 における Taylor 展開という.

特に $x_0 = 0$ のときは マクローリン展開という.

しかし，我々解析族はこれらの剰余形を用いることはほとんどなく，次の積分形を用いる．未知ωが出てくることもなく，評価もしやすい！

__Rem 3.4__ f が x_0 のある近傍 U 上で C^n 級であるならば，$\forall x \in U$ に対し，

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} (t-x)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt$$

と表せる．

∵ $R_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\displaystyle\int_{x_0}^{x} (t-x)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt$ とおくと，

$$\begin{aligned}
R_{n-1} &= \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!}\int_{x_0}^{x} (t-x)^{n-2} f^{(n-1)}(t)\,dt \\
&= \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!}\int_{x_0}^{x} \left(\frac{1}{n-1}(t-x)^{n-1}\right)' f^{(n-1)}(t)\,dt \\
&= \frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)!}\left(\Big[(t-x)^{n-1} f^{(n-1)}(t)\Big]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} (t-x)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt\right) \\
&= \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1} + R_n
\end{aligned}$$

あとは帰納法で示せる //

ex3.5

(1) $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

(2) $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$

(3) $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

(4) $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k \quad (|x|<1)$

(5) $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad (|x|<1)$

証明は演習で!

roll (ロール)

"Michel Rolle" (フランス人)

Rolle's theorem (ロルの定理)