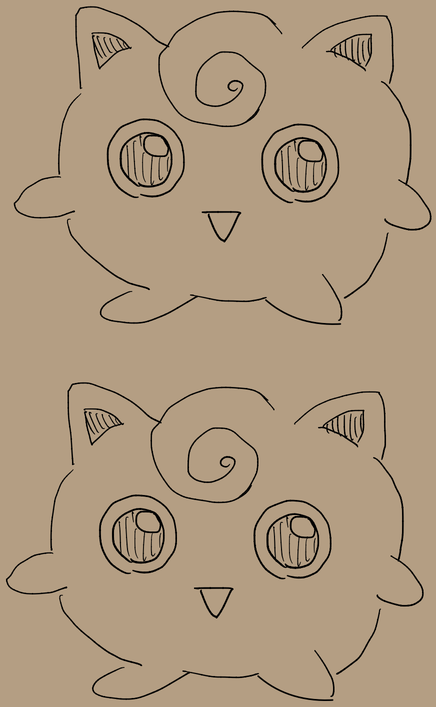

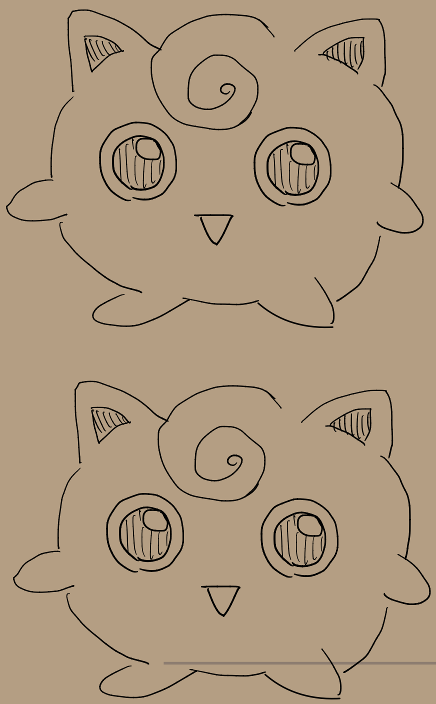

1 有理関数の不定積分

次の便利な定理がある.

<u>Th</u> 任意の有理関数 $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ は次の3つの場合の有限和で表せる.

(1) 多項式

(2) $\dfrac{1}{(x-\alpha)^n}$ （α は $Q(x)=0$ の実数解）

(3) $\dfrac{cx+d}{((x-a)^2+b^2)^n}$ （$a+bi$ は $Q(x)=0$ の虚数解）

☺ 杉浦解析 P241 Prop 6.1 を見よ!

(1) の積分は良いでしょう. (2) は

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n} = \begin{cases} \dfrac{-1}{n-1}(x-\alpha)^{-(n-1)} & (n\neq 1) \\ \log|x-\alpha| & (n=1) \end{cases}$$

で求められる. (3) は

$$I = \int \frac{x-a}{((x-a)^2+b^2)^n}\,dx$$

$$J = \int \frac{1}{((x-a)^2+b^2)^n}\,dx$$

が求められればよいと分かる.

$$I = \int \frac{x-a}{((x-a)^2+b^2)^n}\,dx$$

$$= \int \frac{((x-a)^2+b^2)'}{((x-a)^2+b^2)^n}\cdot\frac{1}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{y^n}\,dy \quad (\because y=(x-a)^2+b^2)$$

より(2)に帰着できました。次にJの积分を見る。

$$J_n = \int \frac{dx}{((x-a)^2+b^2)^n} = \int \frac{dt}{(t^2+b^2)^n}$$

とおくと,

$$J_n = \frac{t}{(t^2+b^2)^n} + \int \frac{2nt^2}{(t^2+b^2)^{n+1}}\,dt$$

$$= \frac{t}{(t^2+b^2)^n} + 2n\int \frac{t^2+b^2-b^2}{(t^2+b^2)^{n+1}}\,dt$$

$$= \frac{t}{(t^2+b^2)^n} + 2nJ_n - 2nb^2J_{n+1}$$

よって,

$$J_n = \frac{1}{2(n-1)b^2}\left(\frac{x-a}{((x-a)^2+b^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}J_{n-1}\right)$$

の漸化式を得る。初項のJ_1を得れば原理的に解くことができます。実際

$$J_1 = \int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{b}\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{x-a}{b}\right)$$

より求まります。

2 三角関数の有理関数の不定積分

有理関数でなくても有理関数の不定積分に帰着できる場合がある。そのうちの1つが三角関数の有理式の積分である。

<u>Thm</u> $F(t,s)$ が t,s の有理関数であるとき、

$\int F(\cos x, \sin x)\,dx$ は $x=\tan\frac{\theta}{2}$ とおくと

$$\int F(\cos x, \sin x)\,dx = \int F\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

となり有理関数の不定積分に帰着できる。

このThmを用いると計算できますが、例えば

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$

に用いるのはアホです。後で原始関数の基本例を書くのでそれに当てはまるような有名な積分はただちに解けなくてはいけません。

ちなみに $F(\cos x, \sin x)$ が周期 π をもつとき、$x=\tan\theta$ とおくと良いこともわかります。

$\boxed{3}$ 指数関数の有理関数の不定積分

ちょっと考えればわかりそうなので書くまでもなさそうですが一応.

<u>Thm</u> $F(s)$ が s の有理関数であるとき, $\int F(e^x)\,dx$ は $e^x = t$ とおくと,

$$\int F(e^x)\,dx = \int F(t) \cdot \frac{1}{t}\,dt$$

となり 有理関数の不定積分に帰着できる.

4 無理関数の不定積分 1.

無理関数の積分はできないことも多い。ここでは有理関数の不定積分に帰着できる1次分数のn乗根の不定積分を述べる。

Thm $F(x,y)$ は x,y の有理関数であるとき、

$$\int F\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx \quad (ad-bc \neq 0,\ n\text{は}2\text{以上の整数})$$

は $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ とおくと、

$$\int F\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int F\left(\frac{dt^n-b}{-ct^n+a}, t\right) \frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(-ct^n+a)^2} dt$$

となり有理関数の不定積分に帰着できる。

良く使うのは $\int F(x, \sqrt{ax+b})\, dx \ (a \neq 0)$ のときで、$t = \sqrt{ax+b}$ とおくと帰着できることが分かります。
しかし例えば $\int x\sqrt{1-x}\, dx$ の積分は $1-x = t$ とおけばすぐ計算できるように、いつでも臨機応変に対応することは忘れずに！

$\boxed{5}$ 無理関数の不定積分2

次に2次無理関数の積分を述べる。

Thm $F(x,y)$ が x,y の有理関数であるとき、

$\int F(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ $\left(ax^2+bx+c \geq 0\ (\forall x)\right)$ は

(i) $a=0$ のとき … $\boxed{4}$

(ii) $a>0$ のとき … $t=\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{a}x$ とおくと上手くいく。

(iii) $a<0$ のとき … $ax^2+bx+c=0$ は2実解 $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ をもつので、$t=\sqrt{\dfrac{a(x-\alpha)}{x-\beta}}$ とおくと上手くいく。

別の方法もあり、こちらの方が便利。それをやる前に原始関数の基本的な例をやる。

$\boxed{6}$ 原始関数の基本的な例.

(1) $\displaystyle\int x^{\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} & (\alpha \neq -1) \\ \log|x| & (\alpha = -1) \end{cases}$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{Tan}^{-1}\frac{x}{a}$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+b^2}} = \log\left|x+\sqrt{x^2+b^2}\right|$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{|a|} \quad (|x|<|a|,\ a\neq 0)$

(5) $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\,\mathrm{Sin}^{-1}\frac{x}{|a|}\right) \quad (|x|<|a|)$

(6) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+b}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+b}+b\log\left|x+\sqrt{x^2+b}\right|\right)$

(7) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x$

(8) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x$

(9) $\displaystyle\int \tan x\,dx = -\log|\cos x|$

(10) $\displaystyle\int \frac{1}{\tan x}\,dx = \log|\sin x|$

(11) $\displaystyle\int \frac{1}{(\cos x)^2}\,dx = \tan x$

(12) $\displaystyle\int \frac{1}{(\sin x)^2}\,dx = -\frac{1}{\tan x}$

(13) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \log\left|\frac{1}{\cos x}+\tan x\right|$

(14) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x$

(2)は $x=a\tan\theta$ とおいてもできますが、その後 θ について解くので結局2度手間です。(3)も $x=b\tan\theta$ とおけば解ける。でも(2),(3)は暗記すべき!

(4),(5)も $x=a\sin\theta$ とおいてもできますが2度手間です。こちらも覚えた方が速いです。

(6)は部分積分で出来るので覚えなくてもよいでしょう。
(7),(8)は置いといて(9)(10)はlogの微分の形だとすぐ分かります。

(11),(12)は tan と $\frac{1}{\tan}$ の微分を覚えるべきで、そうしたらすぐ分かります。(13)は cos を分母分子にかけて置換でできます。
つまり(7)〜(13)に手法 $\boxed{4}$ を用いるのはアホなのです!

$\boxed{7}$ 無理関数の不定積分2の副解

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a} \quad (a \neq 0)$$

より $t = x+\frac{b}{2a}$ とおくて，$\sqrt{ax^2+bx+c}$ は

(i) $\sqrt{k^2-x^2}$ (ii) $\sqrt{x^2-k^2}$ (iii) $\sqrt{x^2+k^2}$

のいずれかになる．これらの積分は $\boxed{6}$ でやった！

他にもたくさん知られている手法があると思いますが
ひとまずこのくらいで．ただ，

「困ったら部分積分」

という言葉があるぐらいなので，覚えるべき基本形と
置換を頭に入れたら，後は部分積分をためすのが
良いのでは？
ただ，積分を評価する際は，xの指数を増やす方向に
あるいは減らす方向に，どちらが良いのか考えて部分積分
しよう！