第 3 回　1 変数関数の微分

問題 3.1. $x \to 0$ とするとき, 以下が成立することを示せ.

(1) $o(x^n)o(x^m) = o(x^{n+m})$ (2) $x^n o(x^m) = o(x^{n+m})$ (3) $m \leq n$ ならば $o(x^m) \pm o(x^n) = o(x^m)$

(4) 定数 C に対して $Co(x^n) = o(x^n)$

問題 3.2. $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n)$ $(x \to 0)$ ならば, $a_k = b_k (k = 0, 1, 2 \cdots)$ が成立することを示せ.

問題 3.3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が微分可能な偶関数であるとき, f' は奇関数であることを示せ. 偶関数と奇関数を入れ替えても主張が成立することを示せ.

問題 3.4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が c で微分可能であるとき,

$$f'(c) = \lim_{n \to \infty} n \left(f(c + \frac{1}{n}) - f(c) \right)$$

が成立することを示せ. また, この逆は成立しないことを示せ.（右辺の極限が存在しても c で微分可能とは限らない, ということ）

問題 3.5. $\alpha > 0$ とする. $[0, \infty)$ 上の関数 f を $f(0) = 0$,

$$f(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

と定める. 以下を満たす α の範囲をそれぞれ求めよ.

(1) f は $[0, \infty)$ 上連続.

(2) f は $[0, \infty)$ 上微分可能.

(3) f は $[0, \infty)$ 上 2 階微分可能.

問題 3.6.

(1) 半径 r の球に内接して体積が最大の直円柱の高さを求めよ.

(2) 半径 r の球に内接して体積が最大の直円錐の高さを求めよ.

問題 3.7. 以下の不等式を示せ.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{\log(1-x)} < 1 \quad (x < 1, x \neq 0)$$

問題 3.8. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $f(x+y) = f(x)f(y)$ を満たすとき, f は微分可能でかつ $f'(x) = f(x)$ であることを示せ.

問題 3.9. $a > b > 0, n \in \mathbb{N}$ とする. このとき,

$$a^{1/n} - b^{1/n} \leqslant (a-b)^{1/n}$$

が成立することを示せ.

問題 3.10. $[0, 1]$ 上一様連続で $(0, 1)$ 上微分可能であるが, 導関数が $(0, 1)$ 上有界でないものの例を挙げよ.

問題 3.11. f が 2 回微分可能ならば,

$$f(a+h) - 2f(a) + f(a-h) = h^2 f''(a + \theta h) \quad (-1 < \theta < 1)$$

なる θ が存在することを示せ.

問題 3.12. $[a, b]$ 上で微分可能な関数 f で, $f(a) = 0$ かつ $|f'(x)| \leqslant C|f(x)|$ なる定数 C が存在するとする. このとき $f \equiv 0$ なることを示せ.

問題 3.13. f は $I = [a, b]$ 上微分可能とする. $f'(a)$ と $f'(b)$ の間の任意の数 k に対して, ある $c \in (a, b)$ が存在して, $f'(c) = k$ なることを示せ.

問題 3.14.

$$h(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 & (x \geqslant 0) \end{cases}$$

と定める. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f'(x) = h(x)$ なるものは存在しないことを示せ.

問題 3.15.

(1) ルシャンドルの多項式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

の根はすべて実数で, $(-1,1)$ の中にあることを示せ.

(2) ラゲールの多項式

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

は n 個の正の根をもつことを示せ.

(3) エルミートの多項式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

は n 個の実根をもつことを示せ.

問題 3.16. $f(x) = xe^x : (-1,\infty) \to (-1/e,\infty)$ の逆写像を g とおく. $g'(0)$ を求めよ.

問題 3.17. 関数 $f, g : (-\sqrt{2},\sqrt{2}) \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2\cos^{-1}(1-x^2)$, $g(x) = x\cos^{-1}(1-x^2)$ と定める.

(1) f, g の 0 における微分係数を求めよ.

(2) $\lim_{x\to 0} f'(x)$, $\lim_{x\to 0} g'(x)$ を求めよ.

(3) f, g の導関数は 0 で微分可能か.

問題 3.18. 甲堂君は映画の座席を予約する際にサイトで調べたところ, スクリーンの上辺と地面との距離が a , スクリーンの下辺と地面との距離が b であることが分かった. スクリーンを見込む角度が大きくなるよう鑑賞するには, スクリーンからどれだけ離れた座席を予約すればよいか. ただし, 映画館の床は水平とする (!?).

問題 3.19. 次の関数の第 n 次導関数を求めよ.

(1) $\dfrac{1}{x^2-1}$ (2) xe^x (3) $\dfrac{x}{(1-x)^2}$ (4) $\sin x$ (5) $e^x \sin x$

問題 3.20. $f(x) = e^{x^2}$ に対し, $f^{(n)}(0)$ を求めよ.

問題 3.21. （テイラー近似式の一意性）

$f(a)+f'(a)(x-a)+...+\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ を f の a における n 次のテイラー近似式と呼ぶことにする．つまり漸近展開は, n 次以下の多項式 $p_n(x)$ が a における f の n 次テイラー近似式ならば,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-p_n(x)}{(x-a)^n}=0$$

が成立することを主張している．実はこの逆も成立する．つまり, n 次以下の多項式 $q_n(x)$ が,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-q_n(x)}{(x-a)^n}=0$$

を満たすならば, $q_n(x)$ は f の a における n 次テイラー近似式である．これを示せ.

問題 3.22. ゼミ資料の Cor2.8 漸近展開では C^n 級という仮定を課しているが, 実は n 回微分可能で十分である．これを示せ.

問題 3.23. 以下の関数は C^∞ 級であるが, テイラー展開不可能であることを示せ.

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x\neq 0) \\ \\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

問題 3.24. 次の関数のマクローリン展開を求めよ．x の範囲も求めること.

(1) $\sin x$　(2) $\cos x$　(3) e^x　(4) $\log x$　(5) $(1+x)^\alpha$　(6) $\dfrac{1}{3+2x}$　(7) $\dfrac{x}{1+x^2}$
(8) $\dfrac{x-1}{2x^2+3x-2}$　(9) $\sinh x$　(10) $\log(1+x-6x^2)$　(11) 2^x

問題 3.25. 次の関数の原点での漸近展開を x^4 の項まで求めよ.

(1) $\dfrac{1}{1+x+x^2}$　(2) $\log\cos x$　(3) $e^x\sin x$　(4) $e^{\cos x}$

問題 3.26. e の値を小数第 3 位まで決定せよ．ただし, $2<e<3$ は既知としてよい.

問題 3.27. e は無理数であることを示せ.

問題 3.28. 次の極限が 0 でない値になるように α を定めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^\alpha}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^x+x}{x^\alpha}$

問題 3.29. e^{e-2} と 2 はどちらが大きい？

問題 3.30. 次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(\tan 2x)}{\log(\tan x)}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2}{x^3}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x+x^2}\right)$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}$　(7) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\left\{e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right\}$

問題 3.31. $\alpha>0$ に対し, 以下の極限を示せ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}=0$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^\alpha}=0$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}x^\alpha\log x=0$

問題 3.32. ニュートンの近似法により, $x^5-30=0$ の根を小数第 2 位まで求めよ.

問題 3.33. f が (a,b) 上凸であるとき, $n=2^m$ に対し,

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

が成立することを示せ.

問題 3.34.

(1) f は (a,b) 上微分可能とする. (a,b) 上で $f'(x)$ が非減少であることと, f は (a,b) 上で下に凸であることは同値であることを示せ.

(2) f は (a,b) 上 C^2 級とする. (a,b) 上で $f''(x)>0$ であることと, f は (a,b) 上で下に凸であることは同値であることを示せ.

問題 3.35. f,g は I 上で定まる凸関数とする.

(1) $h(x)=\max f(x),g(x)$ は凸関数であることを示せ.

(2) $j(x)=\min f(x),g(x)$ は凸関数とは限らないことを示せ.

(3) fg は凸関数とは限らないことを示せ.

問題 3.36. f は (a,b) 上で凸かつ逆写像をもつとする. このとき f の逆写像は凸か.

問題 3.37. f は $\mathbb{R}$ 上で微分可能とする. f が凸であることと, 任意の x,y に対して $f(x)-f(y)\geqslant f'(x)(x-y)$ が成立することは同値であることを示せ.

問題 3.38. x, y, z は三角形をなす 3 点とする．以下の不等式を示せ.

(1) $\sin x + \sin y + \sin z \leqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

(2) $\sin x \sin y \sin z \leqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

(3) $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\sin y} + \dfrac{1}{\sin z}\right) \geqslant \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

問題 3.39. $a, b > 0$, $p > 1$, $1/p + 1/q = 1$ に対し, 以下の不等式を示せ.

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

問題 3.40. 自然数 a, b, c, d の組で,

$$a^{bc} b^{ca} c^{ab} = d^{abc}, a \leqslant b \leqslant c, d \geqslant 3$$

を満たすものをすべて求めよ.

問題 3.41. $x_1, \cdots, x_n$ は正の数で, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = k$ を満たすとする．このとき, 不等式

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \geqslant k \log \frac{k}{n}$$

が成立することを示せ.