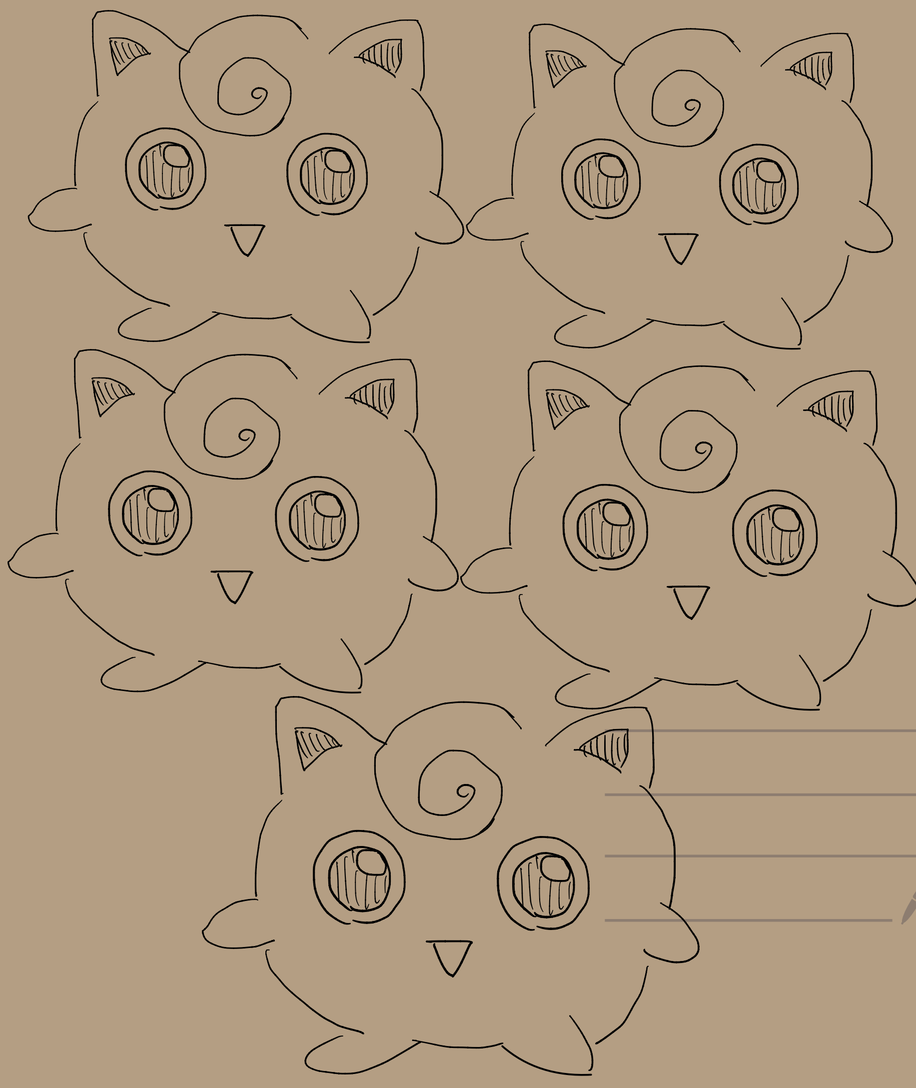
§5 関数列



1 各点収束，一様収束

$x\in I$ を任意にとったときに $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に収束するときが各点収束，I 上全体で $\{f_n\}$ が f に収束するときが一様収束.

Def 1.1 関数列 $\{f_n\}$ が f に各点収束することは，

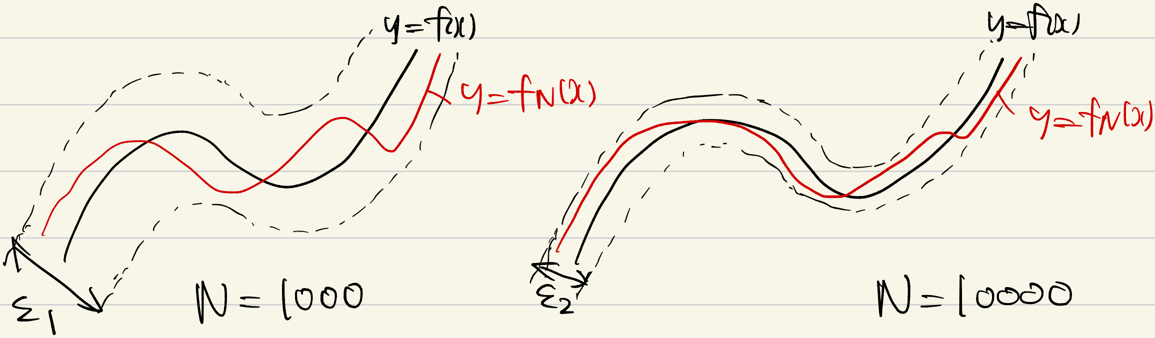
$$\forall x\in I\ \forall\varepsilon>0\ \exists N \text{ s.t. } n\ge N \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

が成立するときをいう.

Def 1.2 関数列 $\{f_n\}$ が f に一様収束することは，

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N \text{ s.t. } n\ge N \Rightarrow \forall x\in I\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

が成立するときをいう.

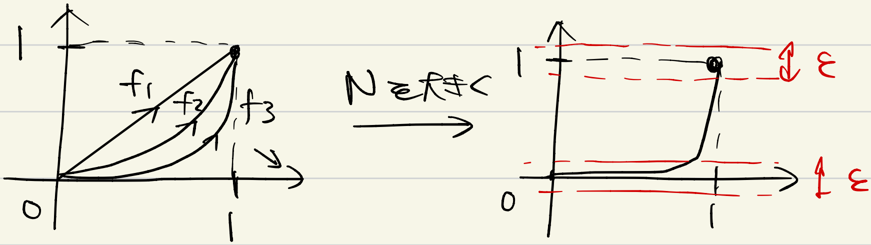


グラフ全体の誤差がほとんどない状態

← x に依らない，ということ

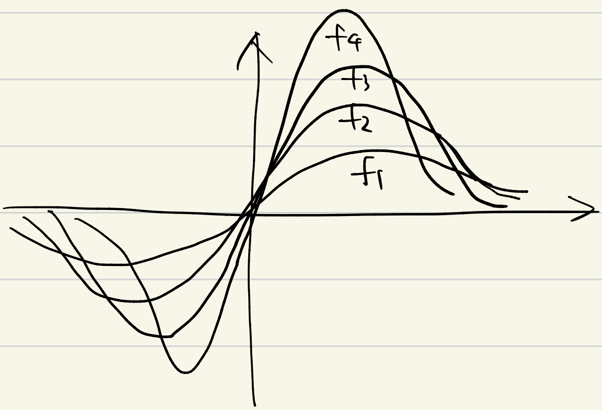
ex1.3 $f_n(x)=x^n$, $I=[0,1]$ とする.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & (0\leq x<1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$$ は一様収束でない



ex1.4 $f_n(x)=\dfrac{n^2x}{e^{nx}}$ $(x\geq 0)$

(1) $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$ (2) $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n\,dx=1$ (3) $\lim_{n\to\infty} f_n'(0)=\infty$



当然こちらも一様収束でない

Prp 115 (1),(2)は同値

(1) $f_n \rightrightarrows f$　(2) $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x)-f(x)| = 0$

☺ 自明//

f_nがfに一様収束するならPrpより明らかにf_nはfに各点収束する。つまり $f_n \to f$, $f_n \rightrightarrows g \Rightarrow f=g$ もわかる。よって ex113 では f_nは $\begin{cases} 0 & (0\le x<1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$ に一様収束しないと述べたが、f_nはI上の「いかなる関数」にも一様収束しないとわかる。

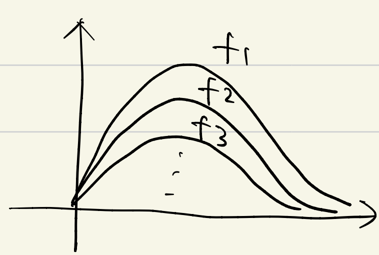
ex116　$f_n(x) = \dfrac{x}{e^{nx}}$　$(x \geq 0)$

f_nは一様収束するか調べる際は上で述べたようにまず各点収束を述べる。$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ より一様収束するなら0に収束する。

$$|f_n(x)-0| = f_n(x),\quad f_n'(x) = \frac{1-nx}{e^{nx}}$$

$$\therefore \max|f_n(x)-0| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{ne} \to 0$$

よって 0に一様収束する//



2 一様収束列の性質

Prop 2.1 連続関数列の一様収束極限は連続

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

$\because$ $f_n \rightrightarrows f$ とする。$\forall \varepsilon>0$ をとる。$\exists N$ s.t. $n\geq N \Rightarrow \forall x\in I$ $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$。$\forall x_0\in I$ をとる。f_n は x_0 で連続なので $\exists \delta>0$ s.t. $|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f_n(x)-f_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$。よって

$$|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| \leq |f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(x_0)|+|f_N(x_0)-f(x_0)|$$
$$<\varepsilon \quad //$$

ex1.3 では極限関数が連続でないのでただちに一様収束でないと言うことができる。
次は極限と積分の交換である。

Prop 2.2 $I=[a,b]$ 上 $\{f_n\}$ は連続, $f_n \rightrightarrows f$ on I.

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$$

(:) $$\left|\int_a^b f_n\,dx-\int_a^b f\,dx\right| \leq \int_a^b |f_n-f|\,dx$$

$$\leq \sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|(b-a)$$

$$\longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)$$ //

- ex1.4は一様収束でなかった. 実際

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n\,dx=1\neq 0=\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n\,dx.$$

- 別に I 上で $\{f_n\}$は連続でなくてもよい. あくまで積分が定義できるための条件なので, 不連続点があってよい.
しかし そうすると f が連続でなくなり f が可積分となるのかが問題となる (実は大丈夫)
こういう所がリーマン積分のメンドウな point の1つ.
- I が有界は必要な条件. ルベーグ積分のばあいでも この条件 (少しゆるめて $|\Omega|<\infty$ が) 必要.

Lem 2.3 $I=[a,b]$ 上 $\{f_n\}$ は連続, $f_n \rightrightarrows f$ on I

$$\int_c^x f_n(t)\,dt \rightrightarrows \int_c^x f(t)\,dt \quad (c\in I \text{ は定数})$$

∵ $\left|\int_c^x f_n(t)\,dt - \int_c^x f(t)\,dt\right| \leqq \sup_I |f_n - f|\,|x-c|$

$\therefore \sup_I \left|\int_c^x f_n dt - \int_c^x f dt\right| \leqq \sup_I |f_n-f|(b-a) \to 0$ //

最後に極限と積分の交換である.

Prop 2.4 $I=(a,b)$ 上 $\{f_n\}$ は C^1 で

(i) $f_n \to f$ (ii) $f_n' \rightrightarrows g$

ならば f も I 上 C^1 で $f'=g$

∵ (ii) より Lem 2.3 から

$$\int_c^x f_n'(t)\,dt \rightrightarrows \int_c^x g(t)\,dt$$

$\int_c^x f_n'(t)\,dt = f_n(x) - f_n(c) \longrightarrow f(x) - f(c)$

$\therefore f(x) - f(c) = \int_c^x g(t)\,dt$ より両辺微分して $f'=g$ //

$\boxed{3}$ 関数項級数

$x \in I$ を1つ固定すれば $\{f_n(x)\}$ は数列であるから

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ は §1と同じ.

$\boxed{2}$ でのことが関数項級数に対しても成立することをのべておく.

<u>Prop 3.1</u> f_n は I 上連続で $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ が S に I 上一様収束するならば S も連続

∵ $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ とおくと $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$. $S_n(x)$ は連続なので S も連続 //

<u>Prop 3.2</u> f_n は I 上連続で $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ が I 上一様収束するならば

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx$$

∵ $\lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)\,dx = \int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx$ //

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

Prop 3.3 f_n は C^1 級で $\sum f_n$ が S に収束し

$\sum f_n'$ が一様収束するならば

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n' = S' \quad \left(\sum \frac{d}{dx} f_n = \frac{d}{dx} \sum f_n \right)$$

∵ $\displaystyle \sum f_k' = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k'(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum f_k(x) \right)' = \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right)'$ //

関数項級数が一様収束するかどうか判定するのに

次の Thm が役に立つ

Thm 3.4 (ワイエルストラスの優級数定理)

(f_n) を I 上の関数列とし

- $\forall n \quad \sup_x |f_n(x)| \leq M_n$ • $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} M_n$ は収束

なる数列 (M_n) が存在するとき $\sum f_n$ は I 上一様収束する。

∵ $\displaystyle m > n \geq N \Rightarrow \sup_x \left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \sup_x |f_k(x)|$

$\leq \sum M_k < \varepsilon$ //

4 整級数

関数項級数で $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ の形のものを整級数やべき級数という。次の Prop からコーシー・アダマールやダランベールの定理が導かれる。

<u>Prop 4.1</u> $\sum a_n (x-a)^n$ に対し次が成立する。

(1) ある $x = x_0 \neq a$ に対し $\sum a_n (x-a)^n$ が収束するとき
$0 < \forall r < |x_0 - a|$ に対し $\sum a_n (x-a)^n$ は $[a-r, a+r]$ 上一様収束

(2) ある $x = x_0 \neq a$ に対し $\sum a_n (x-a)^n$ が発散するとき
$|x_0 - a| < |x - a|$ なる任意の x に対し $\sum a_n (x-a)^n$ は発散

この Prop から、次のいずれかが成立することがわかる。

(a) $x = a$ でのみ収束

(b) $0 < {}^{\exists} r < \infty$ が存在し $|x-a| < r$ なる x で収束し
$|x - a| > r$ なる x で収束

(c) $\forall x$ で発散

この r を収束半径という。(a) のときは 0、(c) のときは ∞ と定める。

微分，積分との交換もみる.

Thm 4.4 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ の収束半径を $\rho>0$ とする.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$ の収束半径も ρ

(2) f は $(a-\rho, a+\rho)$ 上微分可能で

$$f'(x)=\sum n a_n (x-a)^{n-1}$$

(3) f は $(a-\rho, a+\rho)$ 上積分可能で

$$\int_s^t f(x)\,dx=\sum \frac{a_n}{n+1}\left((t-a)^{n+1}-(s-a)^{n+1}\right)$$