第 2 回　関数の極限と連続性

問題 2.1. $f(x) = x^2$ が連続関数であることを定義から直接示せ.

問題 2.2. 以下の関数の連続性を調べよ.

(1) $f(x) = \begin{cases} x & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \notin \mathbb{Q}) \end{cases}$　(2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{p} & (x = \dfrac{q}{p} \neq 0, p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Z}, (p, q) = 1) \\ 1 & (x = 0) \\ 0 & (x \notin \mathbb{Q}) \end{cases}$

問題 2.3. 区間 I で定義される関数 f, g に対し, f が $x_0 \in I$ で連続かつ g が $x_0 \in I$ で不連続ならば, $f + g$ は $x_0 \in I$ で不連続であることを示せ. また, f も $x_0 \in I$ で不連続の場合はどうか.

問題 2.4. $f(x), g(x)$ を実数上で定義された連続関数とし, すべての有理数 $a \in \mathbb{Q}$ について $f(a) = g(a)$ が成立するとする. このときすべての実数 x について $f(x) = g(x)$ であることを示せ.

問題 2.5. 区間 I で定義される関数 f, g に対し, f と g が $x_0 \in I$ で連続かつ $f(x_0) > g(x_0)$ ならば, ある $\delta > 0$ が存在して, 任意の $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$ に対し $f(x) > g(x)$ が成立することを示せ.

問題 2.6. 関数 $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ が $\lim_{x \to \infty} x f(x) = L \in \mathbb{R}$ を満たすならば, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ であることを示せ.

問題 2.7. 連続関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し, ある実数 α_+, α_- が存在し, $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \alpha_\pm$ となるならば f は有界であることを示せ. また, $\alpha_+ = \alpha_-$ のとき f は最大値または最小値をもつことを示せ.

問題 2.8. $\mathbb{R}$ 上定義された連続な周期関数は有界か.

問題 2.9. $f(x)$ は区間 $[a, b]$ で連続とするとき, $\displaystyle\int_a^b |f(x)| dx = 0$ ならば, 任意の $x \in [a, b]$ に対して $f(x) = 0$ であることを示せ. また, f が区間 $[a, b]$ で積分可能であるが連続でないときは成立するか.

問題 2.10. 連続関数の区間の像は区間か 1 点集合であることを示せ.

問題 2.11. 任意の実係数奇数次多項式は少なくとも 1 つの実根をもつことを示せ.

問題 2.12. $f : [0, 1] \to [0, 1]$ を連続関数とする. このとき不動点, すなわち $f(x) = x$ となる $x \in [0, 1]$ が存在することを示せ.

問題 2.13. 区間上定義された単射連続関数は狭義単調増加であることを示せ.

問題 2.14. 実数上の連続関数で, 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ について以下の条件を満たすものを答えよ.

(1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$

(2) $f(x) > 0$ かつ $f(x+y) = f(x)f(y)$

(3) $f(x) > 0$ かつ $f(xy) = f(x) + f(y)$

(4) $f(x) > 0$ かつ $f(xy) = f(x)f(y)$

問題 2.15. 実数上の関数で, 以下のものを満たすものは定数関数であることを示せ.

(1) $f(2x) = f(x)$ かつ $x = 0$ で連続.

(2) $f(x^2) = f(x)$ かつ $x = 0$ および $x = 1$ で連続.

問題 2.16. 領域 D の部分集合 E が稠密であるとする. D で連続な関数 f が E 上で $f(x) = 0$ を満たすならば, D 上で $f(x) \equiv 0$ を満たすことを示せ.

問題 2.17. $f(x) = \sin x$ は $(-\infty, \infty)$ で一様連続であることを示せ.

問題 2.18. $f(x) = x^2$ は $(0, 1)$ で一様連続であるが, $[1, \infty)$ で一様連続でないことを示せ.

問題 2.19. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ は $(0, 1)$ で一様連続でないが, $[1, \infty)$ で一様連続であることを示せ.

問題 2.20. $f(x) = \sqrt{x}$ は $[0, \infty)$ で一様連続であることを示せ.

問題 2.21. $f(x) = x^3 - 2$ は $(-\infty, \infty)$ で一様連続でないことを示せ.

問題 2.22. $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ は $(0, 1)$ で一様連続でないが, $[1, \infty)$ で一様連続であることを示せ.

問題 2.23. f が $[0, \infty)$ 上で連続とする. ある $a > 0$ が存在して f が $[a, \infty)$ 上で一様連続であるとき, f は $[0, \infty)$ 上で一様連続であることを示せ.

問題 2.24. f を有界開区間 (a, b) で連続な関数とする. 次の (1) と (2) が同値であることを示せ.

(1) f は (a, b) で一様連続である.

(2) $[a, b]$ 上の連続関数 g で, すべての $x \in (a, b)$ に対して $g(x) = f(x)$ を満たすものが存在する.

問題 2.25. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ は $(1, \infty)$ でリプシッツ連続であるが, $(0, \infty)$ でリプシッツ連続でないことを示せ.

問題 2.26. リプシッツ連続ならば一様連続であることを示せ. また一様連続であるがリプシッツ連続でない関数の例を挙げよ.

問題 2.27. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\log x} & (x \in (0, 1/2]) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ は一様連続であるが, $\forall \alpha \in (0,1)$ に対し α-Hölder 連続でないことを示せ.