§ 1 数列と級数

§1.4 級数

数列$\{a_n\}$が与えられたとき，$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$ を**級数**や**無限級数**といい，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ で表す。
しかしこれはまだ形式的な定義にすぎず，何も意味をもたない（ましてや足したときの和なんてものは表してないし，定義すらしてない）

部分和 $S_N=\sum_{n=1}^{N} a_n$ からなる数列$\{S_N\}$が S に収束するとき，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は S に**収束**するといい，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=S$ と書く。$\{S_N\}$が∞に発散するとき $\sum a_n$は**発散**するといい，$\sum a_n=\infty$ と書く。

このようにしてはじめて意味をもたせることができる。例えば $a_n=(-1)^n$ などで$\{S_N\}$が極限をもたぬとき，$\sum a_n$ は形式的な意味しかもたないのだ。

Prop 4.1

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束 $\iff$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$ s.t. $m > n \geq N \Longrightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon$

(∵) $\sum a_n$ が収束 $\iff$ $\{S_n\}$ が収束 $\iff$ $\{S_n\}$ が Cauchy 列 //

Prop 4.2

$\sum a_n = \alpha,\ \sum b_n = \beta \Longrightarrow \sum (a_n + b_n) = \alpha + \beta,\ \sum c a_n = c\alpha$.

(∵) $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n,\ T_N = \sum_{n=1}^{N} b_n$ とおくと $S_N \to \alpha,\ T_N \to \beta$.

∴ $S_N + T_N \to \alpha + \beta,\ cS_N \to c\alpha$ //

Prop 4.3

$\sum a_n$ が収束するなら，カッコを好きなようにつけて計算してよい.

(∵) $\underbrace{(a_1 + \cdots + a_{n_1})}_{=b_1} + \underbrace{(a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2})}_{=b_2} + (a_{n_2+1} + \cdots$

$T_N = \sum_{n=1}^{N} b_n$ とおくと，$\{T_N\} \subset \{S_{n_N}\}$: 部分列 //

<u>Prop 4.4</u> $\sum a_n$ が収束 $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(:) $\forall \varepsilon > 0$ をとる. $\exists N$ s.t. $n \geq N \Longrightarrow \underset{\substack{\| \\ |a_{n+1}|}}{|S_{n+1} - S_n|} < \varepsilon$ //

※ Prop 4.4 の逆は成立しない. 例えば $a_n = \frac{1}{n}$ とすると $a_n \to 0$.
しかし $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ より
発散.

※ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ は収束しないと分かる. なので,

$$(1+(-1)) + (1+(-1)) + (1+ \cdots = 0 + 0 + \cdots = 0$$
$$1 + ((-1) + 1) + ((-1) + 1) + \cdots = 1 + 0 + \cdots = 1$$

となって値は一致しない. Prop 4.3 は収束するとき

<u>Def 4.5</u> $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \geq 0$ であるとき, $\sum a_n$ を正項級数という.

<u>Prop 4.6</u> 正項級数 $\sum a_n$ が収束 $\Longleftrightarrow \{S_N\}$ が上に有界

(:) $\{S_N\}$ は単調増加より従う //

Pmp 4.7 (比較判定法)

正項級数 $\sum a_n, \sum b_n$ に対し,

$$\exists C>0\ \exists N \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow a_n \leq C b_n$$

が成立するとき 次の (1), (2) が従う.

(1) $\sum b_n$ が収束 $\Rightarrow$ $\sum a_n$ が収束 (2) $\sum a_n$ が発散 $\Rightarrow$ $\sum b_n$ が発散

☺ (1) $n \geq {}^\exists N \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{N-1} a_k + C \sum_{k=N}^{n} b_k \leq M$ //

(2) nを大きくとる. $\sum_{k=1}^{n} b_k \geq \sum_{k=1}^{N-1} b_k + \frac{1}{C} \sum_{k=N}^{n} a_k$ ∴ $n \to \infty$ と

すると $\sum_{k=N}^{n} a_k \to \infty$ より $\sum_{k=1}^{n} b_k = \infty$ //

Cor 4.8 正項級数 $\sum a_n, \sum b_n$ に対し, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \alpha\ (0<\alpha<\infty)$

ならば, $\sum a_n, \sum b_n$ は 収束・発散 を共にする.

☺ $\exists N$ s.t. $n \geq N \Rightarrow \left| \frac{a_n}{b_n} - \alpha \right| < \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3\alpha}{2}$

$\Rightarrow \frac{\alpha}{2} b_n < a_n < \frac{3\alpha}{2} b_n$. ∴ Pmp 4.7 から分かる //

Thm 4.9 (Cauchyの判定法)

正項級数 $\sum a_n$ に対し、(1), (2) が成立する。

(1) $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \sum a_n$ は収束

(2) $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \sum a_n$ は発散

(証) (1) $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \alpha < 1$ とおく。$\alpha < r < 1$ なる r をとると、

$\exists N$ s.t. $n \geq N \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} < \alpha + (r-\alpha) = r$. $\therefore n \geq N \Rightarrow a_n < r^n$

で $0 \leq r < 1$ より $\sum r^n$ は収束. $\therefore \sum a_n$ は収束 //

(2) $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} = \alpha > 1$ とおく. 無限個の n に対し $a_n > 1$ より

a_n は 0 に収束しない //

※ $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = 1$ のときはわからない!

ex $a_n = \frac{1}{n}$ のとき, $\sqrt[n]{a_n} \to 1$. $\sum a_n$ は発散.

$a_n = \frac{1}{n^2}$ のとき, $\sqrt[n]{a_n} \to 1$. $\sum a_n$ は収束.

Thm 4.10 （ダランベールの判定法）

正項級数 $\sum a_n$ に対し、次の(1),(2)が成立する.

(1) $\overline{\lim} \dfrac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \Rightarrow \sum a_n$ は収束

(2) $\underline{\lim} \dfrac{a_n}{a_{n-1}} > 1 \Rightarrow \sum a_n$ は発散

(1) $\overline{\lim} \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \alpha < 1$ とする. $\alpha < r < 1$ なる r をとると

$\exists N$ s.t. $n \geq N \Rightarrow \dfrac{a_n}{a_{n-1}} < r$ 　∴ $n \geq N \Rightarrow a_n < r^{n-N} a_N$.

∵ $0 \leq r < 1$ より $\sum r^{n-N} a_N$ は収束するので $\sum a_n$ は収束 //

(2) $\underline{\lim} \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \alpha > 1$ とする. $\alpha > r > 1$ なる r をとると

$\exists N$ s.t. $n \geq N \Rightarrow \dfrac{a_n}{a_{n-1}} > r$. 　∴ $n \geq N \Rightarrow a_n > r^{n-N} a_N$.

∵ $1 < r$ より $\sum r^{n-N} a_N$ は発散するので $\sum a_n$ は発散 //

※ (2)は「$\overline{\lim} \dfrac{a_n}{a_{n-1}} > 1 \Rightarrow \sum a_n$ は発散」とすることができない（⇒演習）

これで正項級数の判定法は終え、次に正項級数でない級数について考える.

Def 4.11 $\sum |a_n|$ が収束するとき，$\sum a_n$ は絶対収束するという．

Prop 4.12 $\sum a_n$ が絶対収束 $\Rightarrow$ $\sum a_n$ は収束

$\because$ $\forall \varepsilon > 0$ をとる．$\exists N$ s.t. $m > n \geq N \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon$ //

このProp より，負の項があったとしても，正項級数の判定法を用いることができる．残っているのは絶対収束しないが収束する級数である．

ex $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$．$\sum |a_n| = \sum \frac{1}{n}$ は発散．実は $\sum a_n$ は収束する．

Def 4.13 絶対収束しないが収束する級数を条件収束級数という．

Thm 4.14 (アーベルの収束定理)

級数 $\sum a_n$ と数列 $\{p_n\}$ が次の(i),(ii)を満たすとする．

(i) $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ は有界 $(\forall N)$ (ii) $\{p_n\}$ は非負単調減少列

さらに次の(a),(b)の少なくとも一方を満たす．

(a) $p_n \to 0$ (b) $\sum a_n$ は収束．

このとき $\sum a_n p_n$ は収束する．

$\because$ $\displaystyle\sum_{k=m+1}^{n} a_k p_k = a_{m+1}p_{m+1} + a_{m+2}p_{m+2} + \cdots + a_n p_n$

$= (S_{m+1} - S_m)p_{m+1} + (S_{m+2} - S_{m+1})p_{m+2} + \cdots + (S_n - S_{n-1})p_n$

$= -S_m p_{m+1} + S_{m+1}(p_{m+1} - p_{m+2}) + \cdots + S_{n-1}(p_{n-1} - p_n) + S_n p_n$

$\therefore$ (i), (ii) より $\left|\displaystyle\sum_{k=m+1}^{n} a_k p_k\right| \leqq M \cdot p_{m+1} + M \cdot (p_{m+1} - p_{m+2}) + \cdots +$

$M(p_{n-1} - p_n) + M p_n \leqq 2M p_{m+1}$.

$\therefore$ (a) が成立するなら $p_{m+1} \to 0$ より $\sum a_k p_k$ は収束.

(b) が成立するとき, $p_n \to p$ とすると,

$$\sum a_n p_n = \underbrace{\sum a_n (p_n - p)}_{①} + \underbrace{\sum a_n p}_{②}$$

① は (a) を満たすので収束. ② は (b) より収束 //

Cor 4.15 (ライプニッツの交項級数)

$\{a_n\}$ は非負単調減少列で $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum(-1)^n a_n$ は収束.

$\because$ Thm 4.14 から明らか.

条件収束する級数の判定法は (たくさんあるかもしれないが)

これくらいで終わる.

順序に関して大事な性質を挙げる。

Prop 4.16

(1) 収束する正項級数は項の順序を変更しても元の値と同じ値に収束する。

(2) 絶対収束級数は 〃

∵ (1) $\sum a_n$: 正項級数, $\alpha = \sum a_n$, $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ とおく。
また $\{\tilde{a}_n\}$ を $\{a_n\}$ の項の順序を変更したものとし $\tilde{S}_N = \sum_{n=1}^{N} \tilde{a}_n$ とおく。
$\tilde{a}_1, \cdots, \tilde{a}_N$ のうち元の項の番号が最も大きいものが $\tilde{a}_\ell$ とすると,

$$\tilde{S}_\ell \leqq \tilde{S}_N \leqq \sum_{n=1}^{\ell} a_n = S_\ell \quad \cdots (☆)$$

∴ S_ℓ は上に有界なので $\tilde{S}_\ell$ も上に有界より収束. $\tilde{S}_\ell \to \beta$ とおけば, (☆)の両辺を $\ell \to \infty$ とすると, $\beta \leqq \alpha$.
また, $\{a_n\}$ は $\{\tilde{a}_n\}$ の項の順序を変更したものとみることもできるので, $\alpha \leqq \beta$ も従う //

Rmp4.17 条件収束する級数は, $\forall c \in \mathbb{R}$ に対し, 適当に
項の順序を変更することで, c に収束することができる.
$c = \pm\infty$ でも成立する.

(∵) c を超えるまで正の項のみを足し, 超えたら c を下回る
まで負の項を足す操作を繰り返す. $\lim a_n^+ = \lim a_n^- = 0$
より c との幅はどんどん小さくなる. $\sum a_n^+ = \sum a_n^- = \infty$
よりストックに困ることはない //
$c = \infty$ のときは 1を超えたら負の項を1つ足し, 2を超える
まで正の項を足し負の項を1つ足す. これを繰り返す //

ex 4.18 $a_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$

(1) $1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{11} + \cdots$

(2) $2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{15} - \frac{1}{2} + \frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{41} - \frac{1}{4} + \cdots$

(3) $3 = \frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{113} - \frac{1}{2} + \frac{1}{115} + \cdots$

最終に級数の和にそれに並べる。

Def 4.19 $\sum a_n, \sum b_n$ に対し, $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ を $\sum a_n, \sum b_n$ の Cauchy 積 という.

Prop 4.20 $\sum a_n, \sum b_n$ 共に収束し少なくとも一方が絶対収束するなら $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right)$

※ 無限積 $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ についてはいつか追記するかも.

※ 2重級列 $\sum a_{n,m}$ については Lebesgue Integral の方でやる.

Prop 4.20 も, $c_{n,k} = a_k b_{n-k}$ とおくことで Fubini とかを用いて示した方がずっとラク.